Yu. V. Vaisleib, Certain integrals and series for the incomplete cylindrical functions, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1973, Number 12, 22–27

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1973 МАТЕМАТИКА № 12 (139)

УДК 517.51

Ю. В. Вайслейб

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛАХ И РЯДАХ ДЛЯ НЕПОЛНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. В [1], а также в [2] и [3] отмечается, что решение ряда важных задач теории дифракции может быть выражено в замкнутой форме, если воспользоваться аппаратом неполных цилиндрических функций. При этом возникает необходимость в вычислении различных интегралов и рядов, содержащих или представляющих собой эти функции. Большое число соответствующих результатов имеется в монографии [1]. Целью настоящего сообщения является вывод некоторых соотношений, часто встречающихся в приложениях. Рассматриваются интегралы типа Фурье от неполных функций Ханкеля, а также ряды по сферическим и цилиндрическим функциям, суммирование которых приводит к неполным цилиндрическим функциям в форме Пуассона или Бесселя. Мы, как и в [2], ограничиваемся функциями нулевого индекса. Аналогичные формулы для произвольных (но целых) индексов могут быть получены с помощью рекуррентных соотношений из [1].

2. Вычислим интеграл Фурье

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_0(\beta,\ \alpha z)\, e^{-izt}\, dz. \tag{1}$$

По определению

$$H_0(\beta,\ x)=-\frac{2i}{\pi}\int_{1}^{\operatorname{ch}\beta}\frac{e^{ixu}}{\sqrt{u^2-1}}\,du=-\frac{2i}{\pi}\int_{0}^{\beta} e^{ix\operatorname{ch}\theta}\,d\theta. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), найдем

$$F(t)=-\frac{2i}{\pi}\int_{t-\alpha\operatorname{ch}\beta}^{t-\alpha}\frac{\delta(x)}{\sqrt{(t-x)^2-\alpha^2}}\,dx \tag{3}$$

или

$$F(t)=\{0,\ t<\alpha,\ t>\alpha\operatorname{ch}\beta;\quad -2i/\pi\sqrt{t^2-\alpha^2},\ \alpha<t<\alpha\operatorname{ch}\beta\}. \tag{4}$$

Из (4) легко получить значение интеграла Фурье от функции Ханкеля первого рода; для этого, очевидно, достаточно положить нижний предел в (3) равным минус бесконечности:

$$F(t)=\{0,\ t<\alpha;\ -2i/\pi\sqrt{t^2-\alpha^2},\ t>\alpha\}.$$

3. Рассмотрим теперь интеграл типа Фурье от неполной функции Ханкеля более сложного аргумента:

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_0(\beta,\ \alpha\sqrt{h^2-z^2})\,e^{izt}\,dz. \tag{5}$$

Здесь $t>0$, разрезы на плоскости z проводим от точек $z=\pm h$ до бесконечно удаленной точки вдоль линий, определяемых уравнением $\operatorname{Im}\sqrt{h^2-z^2}=0$, и фиксируем ветвь радикала так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{h^2-z^2}>0$ при $|z|>|h|$. Интеграл (5) можно переписать в виде

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_0(\beta,\ \alpha z)\,e^{it\sqrt{h^2-z^2}}\,\frac{z\,dz}{\sqrt{h^2-z^2}}. \tag{5'}$$

Подставляя (2) в (5′) и используя интеграл Зоммерфельда для функций Ханкеля, найдем

$$S(t)=\frac{h}{\pi}\int_1^b H_1^{(1)}(ax)\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},\quad a=\sqrt{t^2+\alpha^2},\ b=\frac{\sqrt{a^2+\alpha^2\operatorname{sh}^2\beta}}{a}.$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся известным соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\int_0^{\infty} J_0(ux)\,e^{iu}\,du,$$

так что

$$S(t)=\frac{h}{\pi}\int_0^{\infty} G(u)\,e^{iu}\,du,\quad G(u)=\int_1^b H_1^{(1)}(ax)\,J_0(ux)\,dx. \tag{5''}$$

Интегрируя (5″) по частям и учитывая, что $G(0)=[H_0^{(1)}(a)-H_0^{(1)}(ab)]/a$, $G(\infty)=0$, найдем

$$S(t)=\frac{h}{i\pi}\left[\frac{H_0^{(1)}(ab)-H_0^{(1)}(a)}{a}+\int_0^{\infty} T(u,\ a)\,e^{iu}\,du\right], \tag{6}$$

где

$$T(u,\ a)=(a^2-u^2)^{-1}\{b\,[uH_1^{(1)}(ab)\,J_0(ub)-aH_0^{(1)}(ab)\,J_1(ub)]-$$
$$-[uH_1^{(1)}(a)\,J_0(u)-aH_0^{(1)}(a)\,J_1(u)]\}. \tag{6'}$$

Нетрудно видеть, что вычисление выражения (6) сводится к нахождению значений интегралов типа

$$Z_0(\pm a,\ b)=\int_0^{\infty}\frac{J_0(ub)}{u\pm a}\,e^{iu}\,du,\ Z_1(\pm a,\ b)=\int_0^{\infty}\frac{J_1(u,\ b)}{u\pm a}\,e^{iu}\,du$$

при $b\geqslant 1$. Поскольку, как следует из (6′), функция $T(u,\ a)$ не имеет особенностей в точках $u=\pm a$, достаточно вычислить $Z_{01}(a,\ b)$, а для определения $Z_{01}(-a,\ b)$ в полученных выражениях формально изменить знаки перед a. Так как

$$\frac{1}{u+a}=\int_0^{\infty} e^{-(u+a)\,t}\,dt,$$

то

$$Z_0(a,\ b) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-at}}{\sqrt{(t-i)^2+b^2}}\,dt = e^{-ia}\int\limits_{1/b}^{i\infty+1/b}\frac{e^{iaby}}{\sqrt{y^2-1}}\,dy, \tag{7}$$

$$Z_1(a,\ b) = \frac{1}{b}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{(t-i)^2+b^2}+i-t}{\sqrt{(t-i)^2+b^2}}\,e^{-at}\,dt =$$

$$= \frac{1}{ab} + \frac{e^{-ia}}{b}\,\frac{\partial}{\partial a}\,e^{ia}\int\limits_{1/b}^{i\infty+1/b}\frac{e^{iaby}}{\sqrt{y^2-1}}\,dy.$$

Отсюда $Z_0(a,\ 1) = (\pi i/2)\,e^{-ia}H_0^{(1)}(a)$, $Z_1(a,\ 1) = a^{-1} - (\pi i/2)\,e^{-ia}H_1^{(1)}(a)$. Если же $b > 1$, то интегралы (7) выражаются через неполные цилиндрические функции в форме Пуассона $E_0^+(w,\ x)$ и $E_1^+(w,\ x)$:

$$Z_0(a,\ b) = \frac{\pi i}{2}\,e^{-ia}\left[H_0^{(1)}(ab) - E_0^+\left(\arccos\frac{1}{b},\ ab\right)\right],$$

$$Z_1(a,\ b) = \frac{1}{ab} + \frac{1}{b}\sqrt{b^2-1} - \frac{\pi i}{2}\,e^{-ia}\left[H_1^{(1)}(ab) - E_1^+\left(\arccos\frac{1}{b},\ ab\right)\right].$$

Подставляя эти ряды в (6′) и (6) и учитывая соотношения обхода

$$H_\nu^{(1)}(xe^{i\pi}) = e^{i\pi\nu}\left[H_\nu^{(1)}(x) - 2J_\nu(x)\right],\quad E_\nu^+(w,\ xe^{i\pi}) = e^{i\nu\pi}E_\nu^-(w,\ x),$$

получим окончательно

$$S(t) = \frac{bh}{2}\left\{\frac{H_1^{(1)}(ab)}{2}\left[e^{-ia}E_0^+\left(\arccos\frac{1}{b},\ ab\right) + e^{ia}E_0^-\left(\arccos\frac{1}{b},\ ab\right)\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{H_0^{(1)}(ab)}{2}\left[e^{-ia}E_1^+\left(\arccos\frac{1}{b},\ ab\right) + e^{ia}E_1^-\left(\arccos\frac{1}{b},\ ab\right)\right]\right\}.$$

4. Интеграл

$$R(t) = \int\limits_0^a e^{izt}H_0(\beta,\ z)\,dz \tag{8}$$

можно отнести к классу неполных интегралов Липшица — Ханкеля от неполных цилиндрических функций. К сожалению, выразить его в замкнутой форме через известные табулированные функции в общем случае не удается. Однако при $t = \pm 1$ интеграл (8) легко берется с помощью методики, примененной в [4] и [1] для вычисления обобщенных тригонометрических интегралов Каптейна

$$R(\pm 1) = ae^{\pm ia}\left[H_0(\beta,\ a) \mp iH_1(\beta,\ a)\right] +$$

$$+ \left[2(1 \mp \operatorname{ch}\beta)/\pi\operatorname{sh}\beta\right]e^{ia(\operatorname{ch}\beta\pm 1)}\left[1 - ia(\operatorname{ch}\beta \pm 1) - e^{-ia(\operatorname{ch}\beta\pm 1)}\right].$$

5. Обратимся теперь к суммированию ряда

$$G = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n A_n\cos\frac{n\varphi}{2},\quad \varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_n = 2,\ n \geqslant 1, \tag{9}$$

где $A_n = \{J_{n/2}(x)H_{n/2}^{(1)}(y),\ x < y;\ J_{n/2}(y)H_{n/2}^{(1)}(x),\ y < x\}$, и покажем, что он может быть представлен в виде комбинации обычной и неполной функций Ханкеля. С этой целью воспользуемся интегральным представлением для произведения функций Бесселя и Ханкеля [4]

$$J_{n/2}(x)\,H^{(1)}_{n/2}(y)=\frac{\exp(-in\pi/4)}{\pi i}\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{i}{2}\left(t+\frac{x^2+y^2}{t}\right)\right)J_{n/2}\left(\frac{xy}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

и подставим это выражение в (9):

$$G=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{i}{2}\left(t+\frac{R^2}{t}\right)\right)L(t)\,\frac{dt}{t},\quad R=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}, \qquad (10)$$

где

$$L(t)=\exp\left(i\,\frac{xy}{t}\cos\varphi\right)\sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n \exp\left(-\frac{in\pi}{4}\right)J_{n/2}\left(\frac{xy}{t}\right)\cos\left(\frac{n}{2}\,\varphi\right). \qquad (10')$$

Сумма ряда (10′) неоднократно вычислялась (см., например, [5]) в связи с изучением дифракции плоской монохроматической волны на полуплоскости и равна

$$L(t)=1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\int\limits_0^{\sqrt{2xy/t}\,\cos(\varphi/2)}\exp(i\tau^2)\,d\tau.$$

Разлагая экспоненту в ряд Маклорена, получим

$$L(t)=1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\sum_{n=0}^\infty \frac{i^n}{n!}\,t^{-(n+1/2)}\,(2n+1)^{-1}\left(\sqrt{2xy}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2n+1}. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (10) и учитывая интегральное представление функций Ханкеля [4]

$$H^{(1)}_\nu(z)=\frac{z^\nu}{\pi}\exp\left(-i\frac{\pi\nu}{2}\right)\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{i}{2}\left(t+\frac{z^2}{t}\right)\right)\frac{dt}{t^{\nu+1}},$$

получим

$$G=H^{(1)}_0(R)+2\sqrt{\frac{2xy}{\pi}}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-4xy\cos^2(\varphi/2))^n}{2^n n!\,(2n+1)\,R^{n+1/2}}\,H^{(1)}_{n+1/2}(R). \qquad (12)$$

Вновь преобразуем второй член из (12) в интеграл и воспользуемся модифицированным [4] рядом Неймана

$$\sqrt{(s^2-r^2)^{-\nu}}\,H^{(1)}_\nu\left(z\sqrt{s^2-r^2}\right)=\sum_{m=0}^\infty \frac{(zr^2)^m}{2^m m!}\,s^{-\nu-m}\,H^{(1)}_{\nu+m}(sz).$$

Тогда

$$G=H^{(1)}_0(R)+\frac{2\sqrt{2xy}}{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(R^2+4xy\tau^2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-1/2}H^{(1)}_{1/2}\left(\sqrt{R^2+4xy\tau^2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)d\tau. \qquad (13)$$

Для завершения вывода остается учесть, что $H^{(1)}_{1/2}(z) = -i\sqrt{2/\pi z}e^{iz}$ и ввести в (13) новую переменную интегрирования по формуле

$$\tau = \frac{R\eta}{2\sqrt{xy}\cos(\varphi/2)}, \ \cos\frac{\varphi}{2} > 0; \quad \tau = -\frac{R\eta}{2\sqrt{xy}\cos(\varphi/2)}, \ \cos\frac{\varphi}{2} < 0.$$

В результате получаем $G = H^{(1)}_0(R) \pm H_0\left(\operatorname{arcch}\frac{x+y}{R}; R\right)$ соответственно при $\cos(\varphi/2) > 0$ и $\cos(\varphi/2) < 0$. Иными словами, ряд

$$2\sum_{n=0}^{\infty} J_{n+1/2}(x) H^{(1)}_{n+1/2}(y)\cos(n+1/2)\varphi = \pm H_0\left(\operatorname{arcch}\frac{x+y}{R}, R\right), \quad x < y,$$

является аналогом теоремы сложения Неймана для неполных функций Ханкеля.

6. Рассмотрим ряд по функциям Лежандра второго рода

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q_n(z),$$

причем будем считать, что величина z либо лежит вне единичного круга ($|z| > 1$), либо заключена между плюс и минус единицей. Если $|z| > 1$, то из формулы Неймана [6]

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(v)}{z-v}\, dv$$

следует, что

$$u(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dv}{z-v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P_n(v). \tag{14}$$

Ряд в (14) суммируется путем замены полиномов Лежандра их интегральным представлением по Лапласу:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t^n/n!) P_n(v) = e^{tv} J_0(t\sqrt{1-v^2}). \tag{15}$$

Заметим, что формула (15) справедлива при любых значениях v.

Учитывая (15), приводим (14) к виду

$$u(t) = \frac{e^{zt}}{2}\int_{t}^{\infty} dx e^{-xz} \int_{-1}^{1} J_0(t\sqrt{1-v^2}) \operatorname{ch} vx dv = e^{zt}\int_{t}^{\infty} e^{-xz} \frac{\sin\sqrt{t^2-x^2}}{\sqrt{t^2-x^2}}\, dx$$

или

$$u(t) = e^{zt}\int_{0}^{\infty} e^{-tz\operatorname{ch} u} \operatorname{sh}(t\operatorname{sh} u)\, du.$$

Полагая $z = \operatorname{cth}\omega$, находим окончательно, что

$$u(t) = \frac{e^{t\operatorname{cth}\omega}}{2}\int_{-\omega}^{\omega} e^{-(t\operatorname{ch} u)/\operatorname{sh}\omega}\, du = e^{t\operatorname{cth}\omega} K_0\left(\omega, \frac{t}{\operatorname{sh}\omega}\right),$$

где $K_0(\beta, x)$ — неполная функция Макдональда.

При $z < 1$ положим $z = \cos\theta$ и воспользуемся формулой [6]:

$$Q_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos\theta)\,(\cos(m+n+1)\,\theta)/(m+n+1).$$

Тогда

$$u(t) = \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\int_0^1 dx \sum_{m=0}^{\infty} x^m e^{im\theta} P_m(\cos\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} e^{in\theta}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\int_0^{e^{i\theta}} \frac{e^{yt}\,dy}{\sqrt{1-2y\cos\theta+y^2}}.$$

Отсюда

$$u(t) = e^{t\cos\theta}\operatorname{Re}\int_{-\operatorname{arcsh}(\operatorname{ctg}\theta)}^{i\pi/2} e^{t\sin\theta\,\operatorname{sh} u}\,du$$

и окончательно

$$u(t) = -\frac{\pi}{2}\,e^{t\cos\theta}\left[H_0(t\sin\theta) + 2i\varepsilon_0\left(-\operatorname{arcch}\frac{1}{\sin\theta},\ t\sin\theta\right)\right],$$

где $H_0(x)$ — функция Струве, $\varepsilon_0(\beta,\ x)$ — неполная цилиндрическая функция в форме Бесселя.

г. Ленинград

Поступило
4 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Агрест М. М., Максимов М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения М., Атомиздат, 1965.

2. Вайслейб Ю. В. Об асимптотических представлениях неполных цилиндрических функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 11, № 3, 1971, с. 758—761.

3. Фрадин А. З., Вайслейб Ю. В., Гуревич В. З. Рассеяние радиоимпульса с линейной ЧМ модуляцией на конечном цилиндре. Автореф. докл. IX Всесоюзн. конф. по РРВ, Харьков, 1969.

4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., ИИЛ, 1949.

5. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik. Springer — Verlag, 1948.

6. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИИЛ, 1952.

Ю. И. Грибанов, Р. Х. Матевосян. О квазинормах на бесконечном произведении банаховых пространств и порождаемых ими пространствах

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Пусть $X = \prod_{t\in T} X_t$ — произведение бесконечного семейства банаховых пространств. Квазинорма — это отображение $p: X \to [0,\ \infty]$, обладающее всеми формальными свойствами нормы и еще двумя свойствами, связанными с топологией произведения на X. Рассматривается вторая дуальная к p квазинорма p^{**} и находятся критерии эквивалентности и совпадения этих двух квазинорм. Каждая квазинорма порождает нормированное пространство $l_p(X)$. Через $[l_p(X)]$ обозначается замыкание в последнем пространстве прямой суммы семейства $\{X_t\}_{t\in T}$ векторных пространств. Устанавливаются различные свойства пространств $l_p(X)$ и $[l_p(X)]$: критерий и достаточный признак полноты, критерий сходимости последовательности элементов, критерий относительной компактности множеств из $[l_p(X)]$, общий вид линейного непрерывного функционала на $[l_p(X)]$, общий вид линейного непрерывного оператора $A: [l_p(X)] \to l_q(X)$, критерий полной непрерывности линейного оператора $A: l_p(X) \to [l_q(X)]$. (Работа поступила в журнал „Математика“ 8. II. 1973.)