

Міністерство освіти і науки України
Департамент науки і освіти Харківської облдержадміністрації
Харківське територіальне відділення МАН України

Відділення: фізики і астрономії
Секція: теоретична фізика

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАМКНУТИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ЯВИЩА КАПІЦІ

Роботу виконав:

Гамов Олексій Андрійович,
учень 10 класу Харківського навчально-виховного
комплексу № 45 «Академічна гімназія»
Харківської міської ради Харківської області,
вихованець гуртка «Наукові дослідження у
фізиці» Комунального закладу «Харківська
обласна Мала академія наук Харківської обласної
ради»

Наукові керівники:

Мазанов Максим Володимирович, аспірант
першого курсу фізичного факультету
Університету ІТМО

Іврій Ілля Леонідович, учитель фізики
Харківського навчально-виховного комплексу №
45 «Академічна гімназія» Харківської міської
ради Харківської області, спеціаліст вищої
категорії, відмінник освіти України

Харків – 2021

АНОТАЦІЯ

У нашій роботі ми розглядаємо замкнені динамічні системи, побудовані на основі явища Капіці. Як виявляється, не усі системи такого роду можна чітко описувати завдяки статичному ефективному потенціалу, що є досить новим. У них можуть уникати області з цікавими нелінійними рішеннями та неочікувані точки балансу, влучення у які залежить від співвідношення середніх по часу енергій системи. Ми сподіваємося знайти більше систем, що мають такі властивості і запропонувати їх застосування у приладах. У роботі були теоретично досліджені властивості систему, що ми назвали “подвійним осцилятором Капіці”. Для нього нами були описані нові режими, відносно маятника Капіці, та зроблені візуалізації його поведінки. Було проведено дослідження можливості експериментального підтвердження отриманих результатів, завдяки зовнішньому збудженню. Також механізм системи був описаний з точки зору параметричного резонансу.

Метою нашої роботи є дослідження подвійного осцилятора Капіці.

Об’єктом дослідження роботи є подвійний осцилятор Капіці.

Предметом дослідження є дослідження змінення властивостей системи при зміні параметрів та початкових умов.

Методи дослідження, що були використані у роботі - чисельні методи вирішування диференціальних рівнянь, та їх систем, методи отримання рівнянь руху систем завдяки Лагранжіану, методи аналізу систем з використанням графіків, комп’ютерні методи візуалізації результатів.

Завданням, що ми поставили собі при роботі було дослідження поведінки системи при різних параметрах, дослідження змінення поведінки системи у залежності від початкових умов, побудування моделі з зовнішнім драйвінгом для проведення експерименту.

Актуальність роботи полягає у нових наукових результатах, що були отримані при опрацюванні матеріалу — отримання стійких проміжних положень для системи, отримання результатів моделювань, що можуть допомогти їх експериментальному підтвердженню.

Ключові слова: Явище Капіци; Замкнуті динамічні системи; Динамічна стабілізація; Маятник Капіци; Параметричний резонанс; Зовнішнє збудження.

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1	8
СИСТЕМА ОДИНИЧНОГО КОМБІНОВАНОГО ОСЦИЛЯТОРА	8
1.1 Описання системи та побудова моделі її поведінки	8
1.2 Дослідження режимів поведінки системи	11
1.3 Візуалізація поведінки системи	16
1.4 Додатки до першого розділу	18
РОЗДІЛ 2	21
ЯКІСНЕ ПОЯСНЕННЯ	
2.1 Неможливість описання статичним ефективним потенціалом	21
2.2 Динамічний ефективний потенціал	21
РОЗДІЛ 3	26
ДОДАННЯ ДИСИПАЦІЙНИХ СИЛ	
3.1. Вивід рівняння руху	26
3.2. Дослідження поведінки системи	27
3.3. Можливість експерименту	29
РОЗДІЛ 4	30
ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС	
4.1. Параметричний резонанс у системі	30
4.2. Діаграма стабільності	32
АНОТАЦІЯ	33
ВИСНОВКИ	34
ДЖЕРЕЛА	35

Маятник Капіці широко відомий завдяки явищу динамічної стабілізації математичного маятника (закріпленого на жорсткому стрижні), що виникає в ньому, у верхній (спочатку нестабільній) точці при досить частому і швидкому вертикальному коливанні точки підвісу [1]. Можна показати, що такий інвертований режим описується додаванням деякого ефективного потенціалу математичного маятника, пропорційного квадрату швидкості коливань точки підвісу [1]. Після початкового відкриття в механіці, стабілізація Капіці знайшла величезну кількість аналогій у фізиці систем із заданим періодичним зовнішнім збуренням. Серед них можна відзначити механізми захоплення атомів та інших частинок швидко осцилюючим електромагнітним полем [2,3], пастки Пауля для заряджених частинок [4], оптичні системи хвилеводів з динамічним придушенням дифракції [5], багато-часткові спінові системи [6,7], системи поляритонів [8], системи Джозефсонівських контактів [9], та багато інших.

Теорія динамічної стабілізації основних типів систем зараз розроблена досить повно [10]. При цьому динаміка класичного маятника Капіці була детально досліджена чисельно [11]; також для цієї системи були знайдені, аналітично та чисельно, області динамічної стабільності у всьому діапазоні частот та амплітуд зовнішнього збурення [12]. Остання робота включає аналіз параметричних нестійкостей коливань маятника при частотах зовнішнього збурення точки підвісу, кратних власної частоті маятника. Крім того, відомі рішення задач, аналогічних маятнику Капіці, для горизонтальних коливань точки підвісу [1], а також для уявного ефективного потенціалу – моделі для світлового пучка, що по черзі відбивається від двох дзеркал з просторово неоднорідною відбивною здатністю [13]. У цих випадках нижнє положення маятника перестає бути стабільним, але поблизу нього з'являються два симетричні мінімуми, так що сумарний ефективний потенціал стає нелінійним (типу Дюффінга). Динаміка ланцюжків пов'язаних осциляторів Капіці в цілому має вигляд, якісно схожий з динамікою одиночного маятника Капіці, при цьому якісно нових динамічних режимів досі не було знайдено [14].

Важливо, що ці перелічені моделі описували відкриті системи із зовнішнім збуренням – у таких системах енергія може надходити із зовнішнього джерела періодичних збурень (чи залишати підсистеми у вигляді цього збурення). У той же час замкнуті, ізольовані моделі можуть виявитися для деяких фізичних систем більш природними. Крім того, така постановка цікава сама собою, оскільки пропонує широке поле самоузгоджених моделей, в яких потенційно можливі нові динамічні стабільні режими, нелінійні явища, а також явище биття енергії між підсистемами.

У цій роботі ми пропонуємо найпростішу модель такої замкнутої системи, в якій можливе явище стабілізації Капіци. Ця система є варіантом подвійного маятника, в якому математичний маятник, підвішений за вантаж, прикріплений до вертикальної пружини з досить великим коефіцієнтом пружності. Крім звичайного режиму Капіци, який досягається для досить великих частот і амплітуд пружинної підсистеми такого подвійного маятника, і тривіального режиму малих коливань навколо нижнього положення рівноваги, ми знаходимо ряд нетривіальних проміжних режимів в області початкових умов з досить різкими кордонами, що виникають, коли енергія пружинного маятника порівнянна з енергією математичного. Серед них найбільший інтерес викликають нелінійний режим «биття» енергії між двома складовими маятниками, а також ряд абсолютно нових положень рівноваги, відмінних від нижньої і від верхньої точки. Такі положення рівноваги відсутні в аналогічній відкритій системі. Ми підтверджуємо наші міркування чисельно, вирішуючи точні рівняння руху у великій області граничних умов (як для звичайного, так і для замкнутого маятника Капіци), а також знаходимо якісне пояснення нових режимів у рамках ефективного потенціалу, що динамічно змінюється, та утворюється пружинним маятником для математичного.

Запропонована нами модель є найпростішим прикладом, у якому виявляється недостатня картина статичного ефективного потенціалу, і тому підкреслює особливості замкнутих систем з динамічною стабілізацією порівняно з аналогічними системами із зовнішнім збуренням. Ми сподіваємося, що в рамках такого підходу будуть знайдені якісно нові стани в системах ланцюжків,

пов'язаних замкнутих «подвійних осциляторів Капіці», а також – що результати знайдуть аналогію та можливе застосування в оптико-механічних системах [15], у яких світло виступає у полі пружинного маятника, а пружний резонатор – у ролі математичного маятника. Такі системи за певних умов можуть вважатися замкненими, при цьому енергія електромагнітного поля та пружних коливань резонатора можуть бути порівнянними, що дає надію на знаходження аналогії з найпростішою моделлю, що запропонована в цій роботі.

Метою нашої роботи є дослідження подвійного осцилятора Капіці.

Об'єктом дослідження роботи є подвійний осцилятор Капіці.

Предметом дослідження є дослідження змінення властивостей системи при зміні параметрів та початкових умов.

Методи дослідження, що були використані у роботі - чисельні методи вирішування диференціальних рівнянь, та їх систем, методи отримання рівнянь руху систем завдяки Лагранжіану, методи аналізу систем з використанням графіків, комп'ютерні методи візуалізації результатів.

Завданням, що ми поставили собі при роботі було дослідження поведінки системи при різних параметрах, дослідження змінення поведінки системи у залежності від початкових умов, побудування моделі з зовнішнім драйвінгом для проведення експерименту.

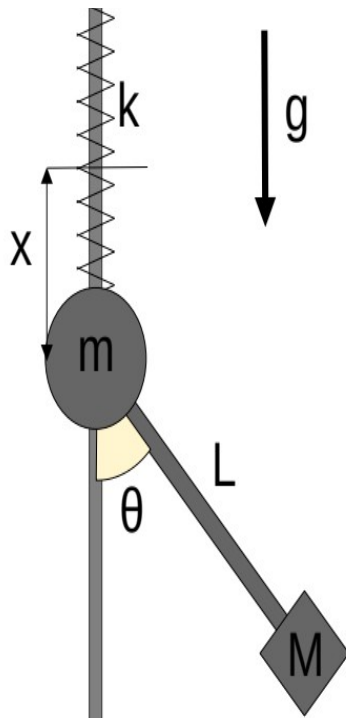
Актуальність роботи полягає у нових наукових результатах, що були отримані при опрацюванні матеріалу — отримання стійких проміжних положень для системи, отримання результатів моделювань, що можуть допомогти їх експериментальному підтвердженню.

РОЗДІЛ 1

СИСТЕМА ОДИНИЧНОГО КОМБІНОВАНОГО ОСЦИЛЯТОРА

1.1 Описання системи то побудова моделі її поведінки

Система, що розглядається — подвійний осцилятор Капіці, складається з математичного та пружинного маятників. Рівняння руху обох з них виходять з вирішування диференціальних рівнянь, що описують їх поведінку. Тому виведемо рівняння руху системи у вигляді декількох диференціальних рівнянь. Для цього позначимо параметри системи:



Параметри системи

g - прискорення вільного падіння

k - жорсткість пружини

m - маса пружинного маятника

M - маса математичного маятника

L - довжина маятника

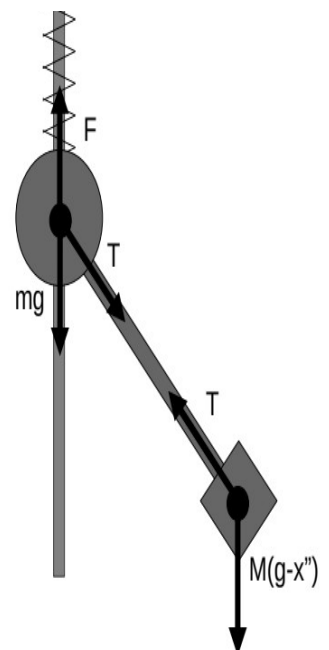
Поширені координати

x - відхилення пружинного маятника

θ - відхилення математичного маятника

Рис 1.1. Маятник з розставленими параметрами.

Ми можемо отримати рівняння руху двома способами - завдяки запису сил, та завдяки функції Лагранжіану. Зробимо це першим способом. Візуалізуємо сили та запишемо їх рівняння:



Для пружинного маятника:

$$F_{np} = mg + T \cos[\theta] - kx \quad (1)$$

Для математичного маятника:

$$F_{mat} = -M(g - x'') \sin[\theta] \quad (2)$$

Ця сила є перпендикулярно стрижню, на якому тримається вантаж маятника.

Рис 1.2. Маятник з розставленими силами.

x'' забирається від g для того, щоб відобразити сили інерції.

Перепишуємо:

$$mx'' = mg + T \cos[\alpha] - kx \quad (3)$$

$$\theta'' LM = -M(g - x'') \sin[\theta] \quad (4)$$

З відцентрової сили та інших сил, що діють на вантаж отримуємо значення T :

$$T = M\theta'^2 L + M(g - x'') \cos[\theta] \quad (5)$$

Та переводячи до кінцевого виду:

$$x'' = g + \frac{M\theta'^2 L + M(g - x'') \cos[\theta]}{m} \cos[\theta] - \frac{k}{m} x \quad (6)$$

$$\theta'' = \frac{-g - x''[t]}{L} \sin[\theta] \quad (7)$$

Ці рівняння не вдається вирішити у загальному випадку, тому ми будемо вирішувати їх чисельно.

Також виведемо ці рівняння завдяки Лагранжіану.

Для цього запишемо кінетичну та потенційну енергію системи. Кінетична енергія системи:

$$T = \frac{mx'^2}{2} + \frac{M((x' + L\theta' \sin[\theta])^2 + (L\theta' \cos[\theta])^2)}{2} \quad (8)$$

Потенційна енергія системи:

$$V = \frac{kx^2}{2} - mgx - Mg(x + L \cos[\theta]) \quad (9)$$

Перетворюючи отримаємо Лагранжіан системи:

$$L = T - V = \frac{(m+M)x'^2}{2} + \frac{M(L^2\theta'^2 + 2x'L\theta' \sin[\theta])}{2} + (m+M)gx + MgL \cos[\theta] - \frac{kx^2}{2} \quad (10)$$

Для того, щоб отримати рівняння для координат, запишемо рівняння:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) - \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} = 0 \quad (12)$$

Перетворюючи їх, отримаємо ті ж самі рівняння:

$$x'' = g + \frac{M\theta'^2 L + M(g - x'') \cos[\theta]}{m} \cos[\theta] - \frac{k}{m} x \quad (6)$$

$$\theta'' = \frac{-g - x''[t]}{L} \sin[\theta] \quad (7)$$

1.2 Дослідження режимів поведінки системи

При розробці метода чисельного вирішування системи, ми використовували пакет Mathematica. Завдяки ньому ми можемо чисельно вирішувати системи диференціальних рівнянь. Для цього, та для побудування графіків, ми використовували код:

```
Module[
{g = 10, L = 0.1, M = 0.1, m = 0.1, k = 200, xz = 0.03, xv = 0, ez =  $\pi/5$ , ev = 0},
s = NDSolve[
{

$$x''[t] = g + \frac{M \theta'[t]^2 L + M (g - x'[t]) \cos[\theta[t]]}{m} \cos[\theta[t]] - \frac{k}{m} x[t],$$


$$\theta''[t] = -\frac{g - x'[t]}{L} \sin[\theta[t]],$$

(*T=M  $\theta'[t]^2 L + M (g - x'[t]) \cos[\theta[t]]$ ),*)
x[0] == xz,
x'[0] == xv,
 $\theta[0] == \theta z,$ 
 $\theta'[0] == \theta v$ 
}
, {x,  $\theta$ }, {t, 0, 100} (*,
WorkingPrecision->32, MaxSteps->10^5*)
];
GraphicsGrid[{{
Plot[Evaluate[{x[t],  $\theta[t]$ } /. s], {t, 0, 10}],
Plot[Evaluate[{{ $\frac{k x[t]^2}{2} + \frac{m x'[t]^2}{2} - m g x[t] - M g (x[t] + L \cos[\theta[t]]) + \frac{M ((x'[t] - L \sin[\theta[t]])^2 + (\cos[\theta[t]] L \theta'[t])^2)}{2}}$ } /. s],
{t, 0, 10}]]}, ImageSize -> Full]
]
```

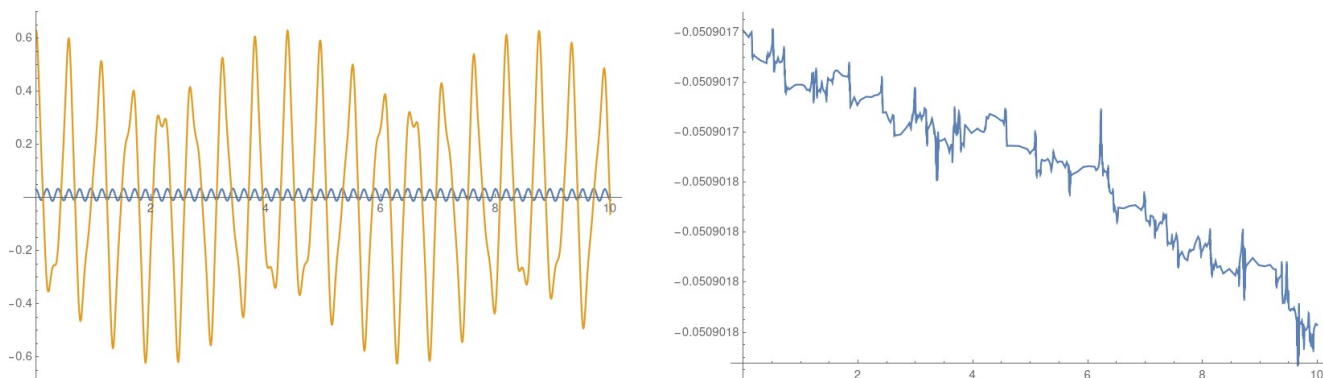


Рис 1.3. Скриншот використаної програми.

На першому графіку помаранчевим позначена координата θ , а блакитним x . На другому графіку позначена енергія системи. Вона зберігається, та невеликі зміни на графіку обумовлені похибкою програми при обчисленні.

Для того, щоб порівняти динаміку отриманої нами системи з динамікою звичайного маятника Капіці, проведемо таку операцію для виявлення нових режимів руху: запусимо моделювання динаміки двох систем з однаковими

початковими координатами та прослідкуємо за ним деякий періоду часу, вирахуємо середнє значення відхилення математичного маятника, та його середнє відхилення від середнього значення. Для цього ми використовували чисельне інтегрування, що відбувається у кодї:

```
(*Обрахування середнього значення функції*)
mean =  $\frac{\text{NIntegrate}[\theta_{\text{sol}}[t], \{t, 0, t_{\text{max}}\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 2, \text{MaxRecursion} \rightarrow 3]}{(t_{\text{max}} - 0)}$ ;

(*Обрахування дисперсії у функції*)
dev =  $\frac{\text{NIntegrate}[\text{Abs}[\theta_{\text{sol}}[t] - \text{mean}], \{t, 0, t_{\text{max}}\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 2, \text{MaxRecursion} \rightarrow 3]}{(t_{\text{max}} - 0)}$ ;
```

Рис 1.4. Скриншот частини коду використаної програми.

Після цього ми нанесемо на графік ті значення, які приймають ці дві функції для певних значень початкових умов θ_0 та x_0 завдяки кольору, чия залежність від значення функції показана біля графіків. Також ми використовували скейлінг

$$x_0 = x_{0_{\text{ex}}} \sqrt{\left(\frac{MgL}{k}\right)} \quad (13)$$

Це було для того, щоб енергії компонентів системи біли приблизно рівними.

Повний код ви можете знайти за посиланням у форматах .pdf та .nb:

<https://drive.google.com/file/d/1-Rz8HYsUY7UEG1ARJ8Yh-p-WbB7Z6nFz/view?usp=sharing>

<https://drive.google.com/file/d/1iEDIl-m9j1T8USroj03dXYhqz4Xe8lN/view?usp=sharing>

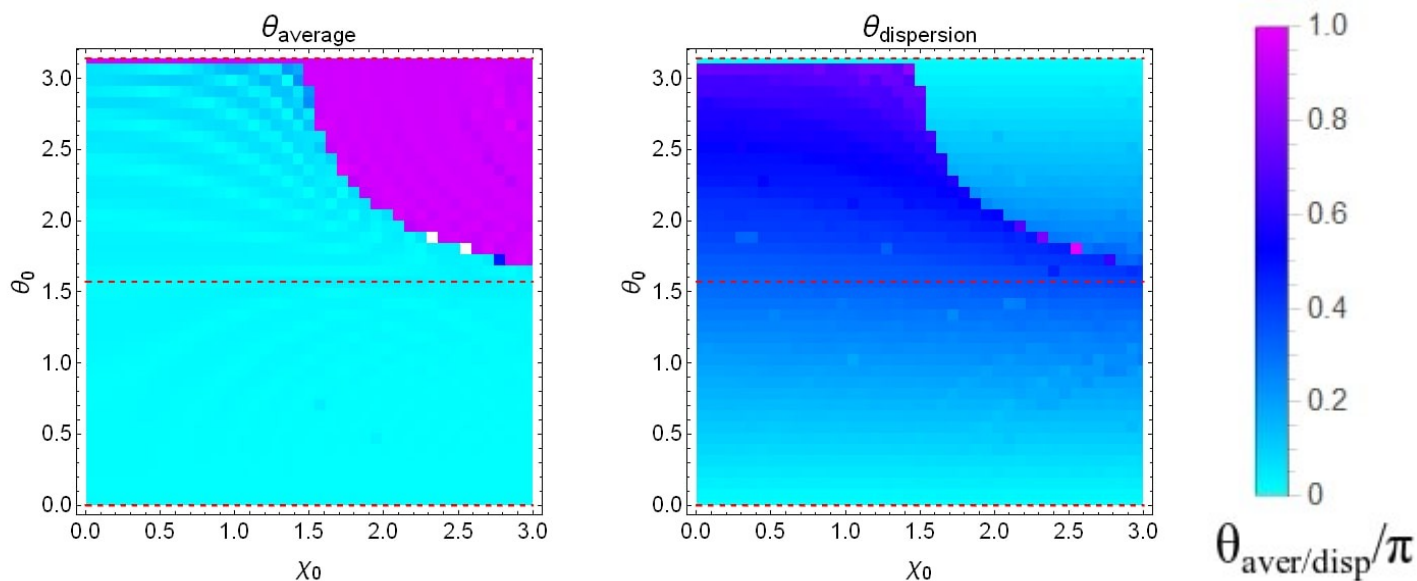


Рис 1.5. Графіки, отримані для маятника Капіці.

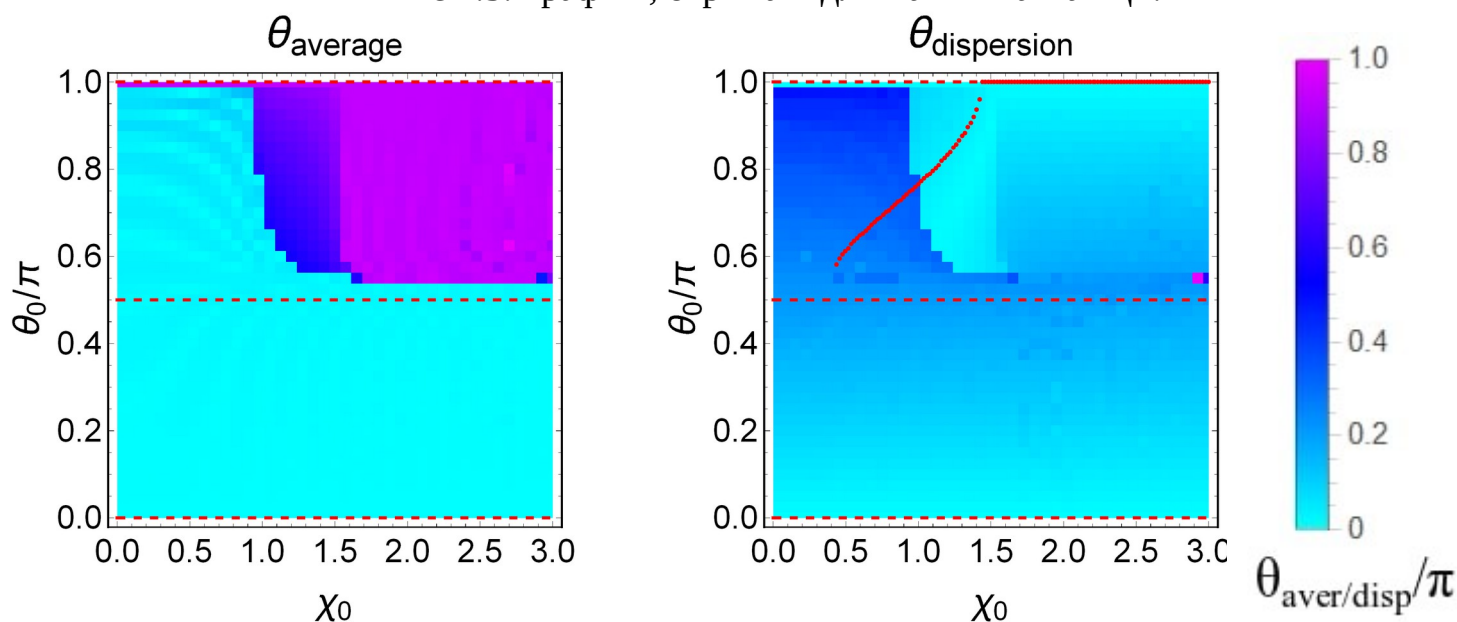


Рис 1.6. Графіки, отримані для комбінованого маятника.

Завдяки цьому, ми бачимо, що для звичайного маятника Капіці характерні лише 2 режими — утримання математичного маятника унизу, та нагорі. Для комбінованого маятника, ми можемо побачити ще два режими — утримання математичного маятника у деякому проміжному стані, та режим нелінійних коливань, що також має у своїй основі біскцію. Також, для комбінованого маятника ми можемо знайти ще один періодичний режим — постійне обертання. Він формується при приданні початкового обертання математичному маятнику.

Представимо отримані режими у вигляді графіка координат системи від часу та параметричним графіком у просторі (θ, θ') :

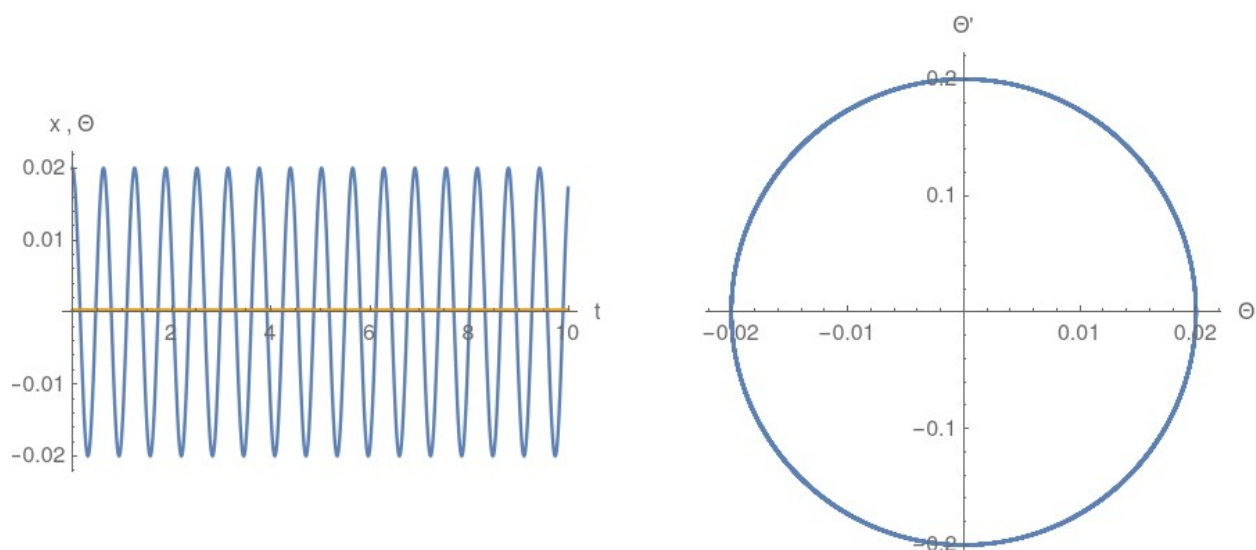


Рис 1.7. Графіки для маятника, що утримується унизу.

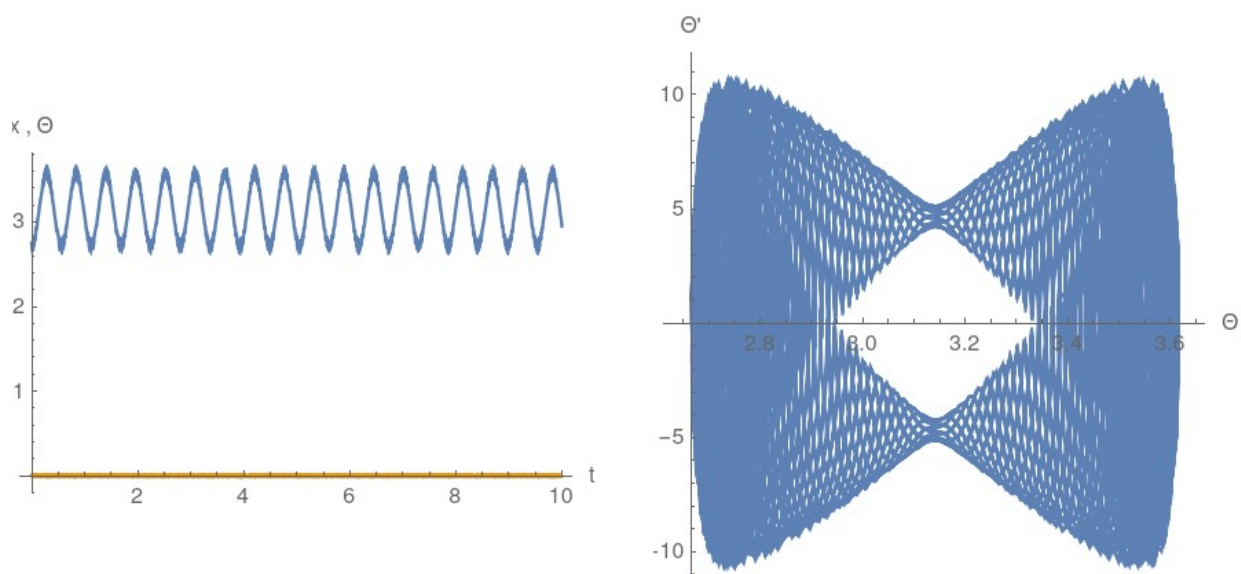


Рис 1.8. Графіки для маятника, що утримується нагорі.

Для цього, та інших режимів крім коливання унизу, та постійного обертання необхідна досить жорстка пружина. У нашому моделюванні ми використовували пружини з жорсткістю від $100 \frac{H}{m}$ до $500 \frac{H}{m}$. Інші параметри системи при моделюванні дорівнювали: $L=0.1 \text{ м}$ $M=0.01 \text{ кг}$ $m=0.001 \text{ ру}$ $L=0.1 \text{ м}$ $g=10 \frac{M}{c^2}$

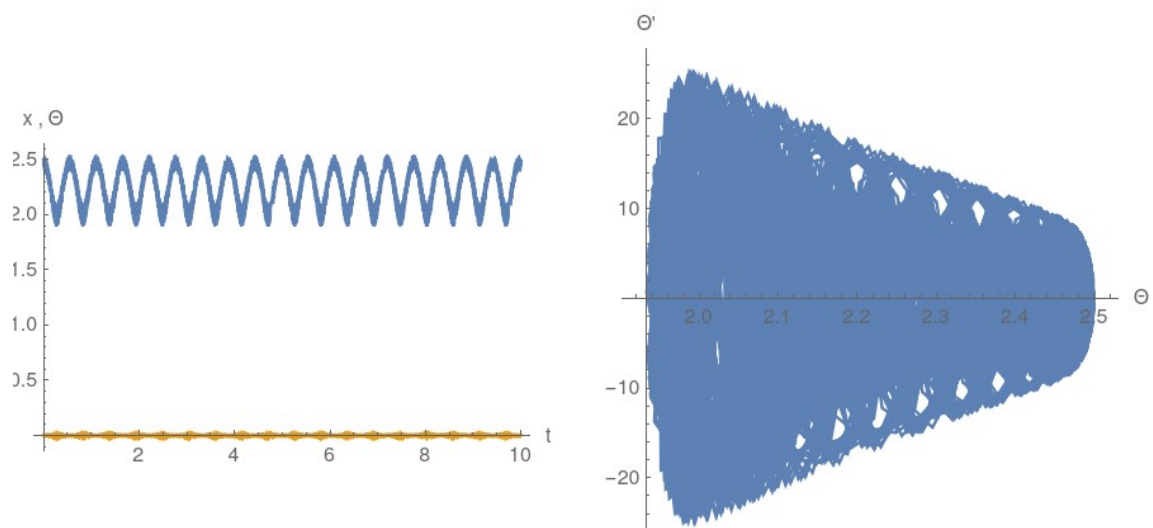


Рис 1.9. Графіки для маятника, що утримується у проміжному стані.

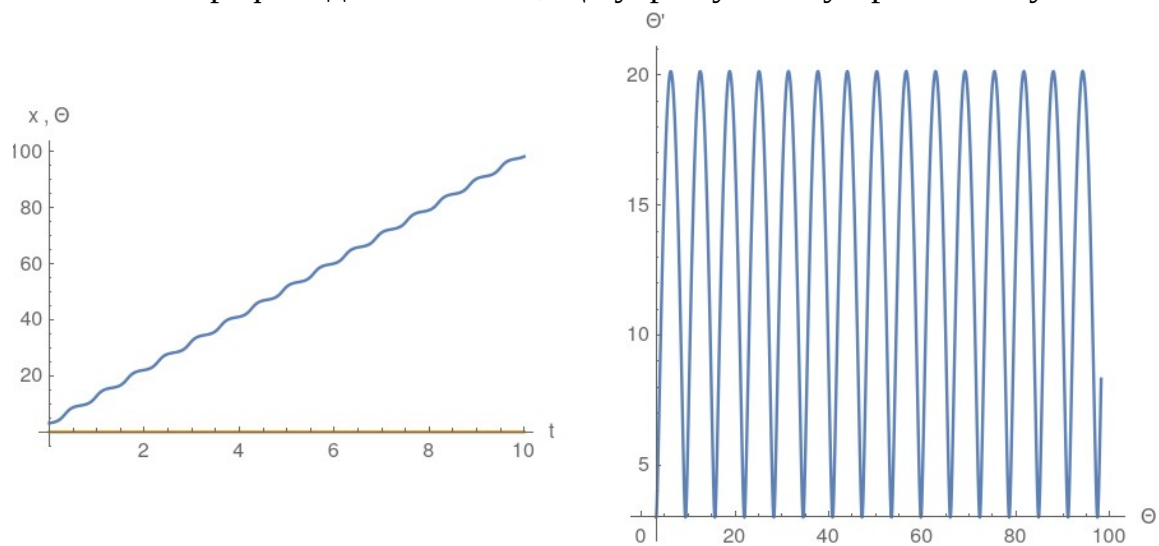


Рис 1.10. Графіки для маятника, що постійно обертається.

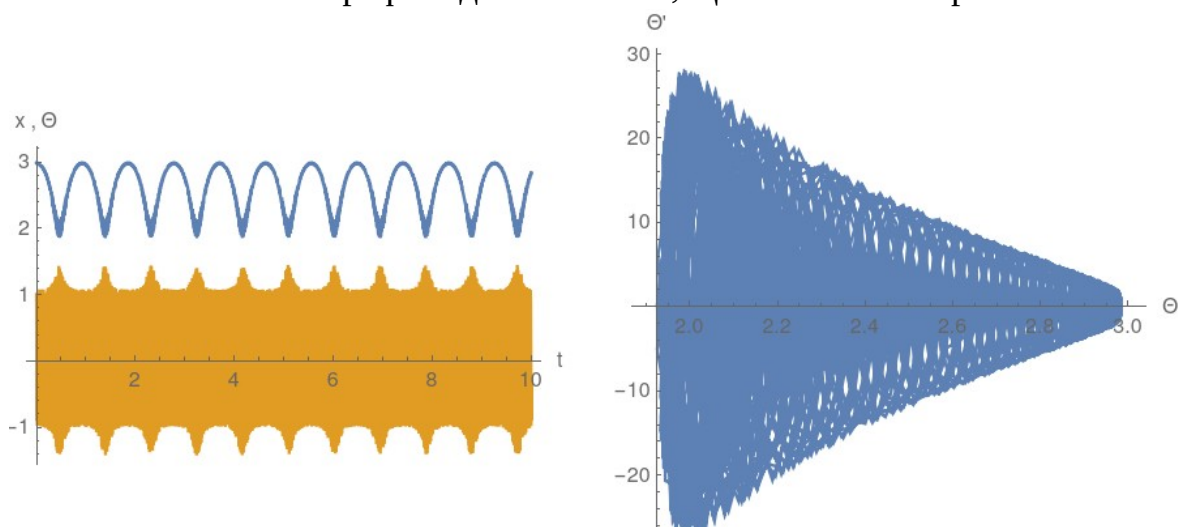


Рис 1.11. Графіки для маятника, у режимі нелінійної біскції. ($x_{disp} = 200x$)

1.3 Візуалізація поведінки системи

Ми можемо візуалізувати поведінку системи завдяки комп'ютерній графіці. Візуалізуємо усі режими системи, показані на графіках у форматі gif. Вони мають адаптовану графіку, з укороченою, відносно реального розміру довжину математичного маятника. До посилань наведені qr — коди, відсканувавши які ви можете перейти по посиланням.

Маятник утримується унизу:

<https://gfycat.com/ageddelightfulcanary>



Рис 1.12. Кадр гіфки для маятника, що утримується унизу.

Маятник утримується у верхньому положенні:

<https://gfycat.com/nastysmallkillifish>



Рис 1.13. Кадр гіфки для маятника, що утримується у верхньому положенні.

Маятник коливається коло проміжного положення:

<https://gfycat.com/digitalqueasyfrogmouth>

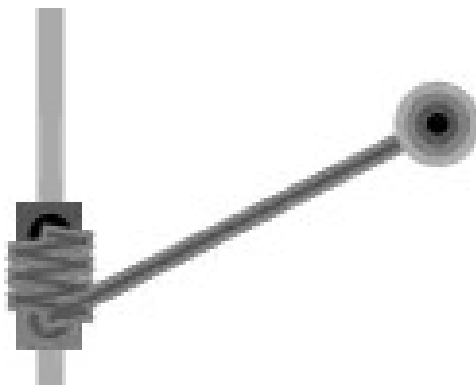


Рис 1.14. Кадр гіфки для маятника, що коливається коло проміжного положення.

Маятник утримується у проміжному положенні:

<https://gfycat.com/generousablearmyant>

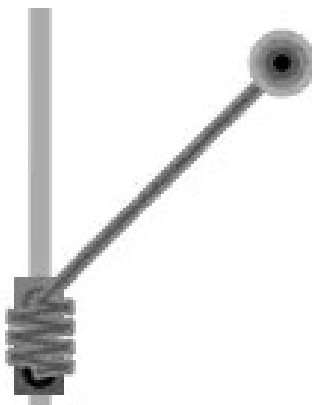


Рис 1.15. Кадр з гіфки маятника, що знаходиться у режимі нелінійної біскції.

Маятник починає постійно обертатися:

<https://gfycat.com/warpedcheeryasiaticmouflon>

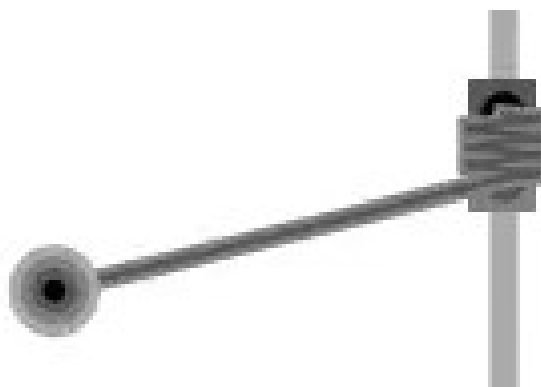


Рис 1.16. Кадр гіфки для маятника, що починає постійно обертатися.

Це було зроблено завдяки коду:

<https://drive.google.com/file/d/1zHocLkRioWq3Y4FuvCMvXT1EnHZhNkl-/view?usp=sharing>

1.4 Додатки до першого розділу

У цьому під розділі ми розповімо о відомостях о системі, що на нашу думку не заслуговують на свій розділ або підрозділ.

Розглянемо поведінку системи коло положення рівноваги. Для цього представимо функції $\theta[t]$ та $x[t]$ як $\theta[t] = \theta_0 + \delta\theta \sin[w_0 t]$ та $x[t] = x_0 + \delta x \sin[w_0 t]$.

Тоді ми зможемо представити систему рівнянь, що отримуємо при цьому припущенні:

$$\left(m + M \cos^2[\theta_0] \left(1 - 2 \frac{\sin[\theta_0]}{\cos^3[\theta_0]} \delta\theta \sin[w_0 t] \right) \right) \left(-\delta x w_0^2 \sin[w_0 t] \right) + k \left(x_0 + \delta x \sin[w_0 t] \right) = 0$$

$$M \delta \theta^2 w_0^2 \cos^2[w_0 t] L \cos[\theta_0] + \left(mg + Mg \cos^2[\theta_0] \left(1 - 2 \frac{\sin[\theta_0]}{\cos^3[\theta_0]} \delta\theta \sin[w_0 t] \right) \right)$$

$$- w_0^2 \delta\theta \sin[w_0 t] = \left(\frac{-g}{L} + \frac{-\delta x w_0^2 \sin[w_0 t]}{L} \right) \left(\sin[\theta_0] + \cos[\theta_0] \delta\theta \sin[w_0 t] \right)$$

Спростуючи рівняння системи ми можемо отримати рівняння:

$$\frac{\left((g + \delta x w_0^2 \sin[t w_0]) (\sin[\theta_0] + \delta\theta \cos[\theta_0] \sin[t w_0]) \right)}{L} = \delta\theta w_0^2 \sin[t w_0]$$

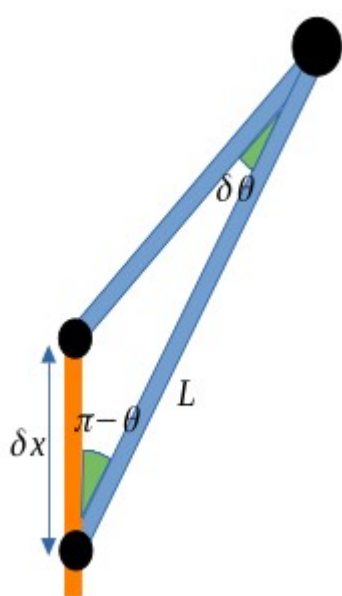
Розкриваючи цей вираз отримуємо:

$$\frac{g \sin[\theta_0]}{L} + \frac{g \delta\theta \cos[\theta_0] \sin[t w_0]}{L} + \frac{\delta x w_0^2 \sin[t w_0] \sin[\theta_0]}{L} + \frac{\delta x w_0^2 \delta\theta \cos[\theta_0]}{L} \left(\frac{1}{2} - \cos\left[\frac{2 t w_0}{2}\right] \right) = \delta\theta w_0^2 \sin[t w_0]$$

Прибираючи мали члени та використовуючи оцінку $\left(g \frac{\delta x \delta\theta w_0^2}{2} \Rightarrow \frac{g}{L} \ll w_0^2 \right)$ ми

$$\text{отримаємо: } \frac{\delta x w_0^2 \sin[\theta_0] \sin[t w_0]}{L} \sin[\theta] = \delta\theta w_0^2 \sin[t w_0]$$

$$\text{Та з цього: } \delta\theta = \frac{\delta x}{L} \sin[\theta]$$



Також для цього є і якісне пояснення - розглянемо стабільний стан, у якому маятник знаходиться у проміжному положенні. Коли кінець пружинного маятника зробить малий крок на величину δx , то математичний маятник просто не зможе відреагувати і його вантаж буде знаходитися у приблизно такому ж стані, у якому він і був. Тоді розглянемо змінення куту $\delta \theta$:

Рис 1.17. Мале змінення положення комбінованого маятника Капіці.

Розглядаючи цю картину ми також можемо записати, що $\delta \theta = \frac{\delta x}{L} \sin[\theta]$.

Як підтвердженням цього можемо привести відскейлені графіки $x \frac{[t]}{L} \sin[\theta_{av}]$ та $\theta[t] - \theta_{av}$:

Як ми бачимо вони співпадають.

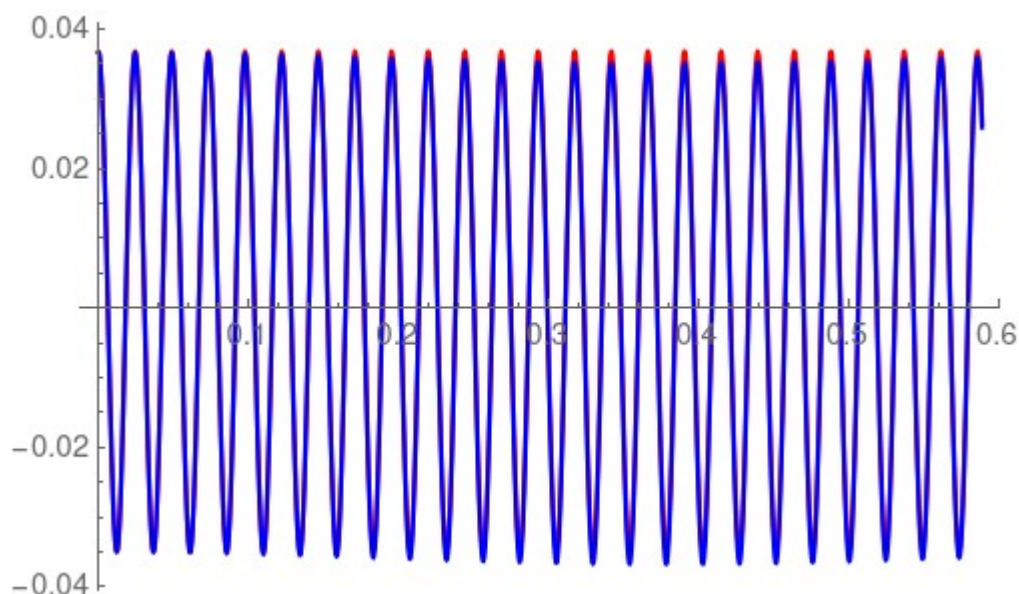


Рис 1.18. Графіки означених функцій.

О фазових діаграмах — як виявляється при схожих початкових умовах та поведінці фазова діаграма маятника Капіці заповнюється набагато швидше, ніж у подвійного осцилятора. Це, на нашу думку відбувається саме з-за замкнутості нашої системи. Криві на кожному проході відрізняються менше з-за відсутності підкачки енергії у систему:

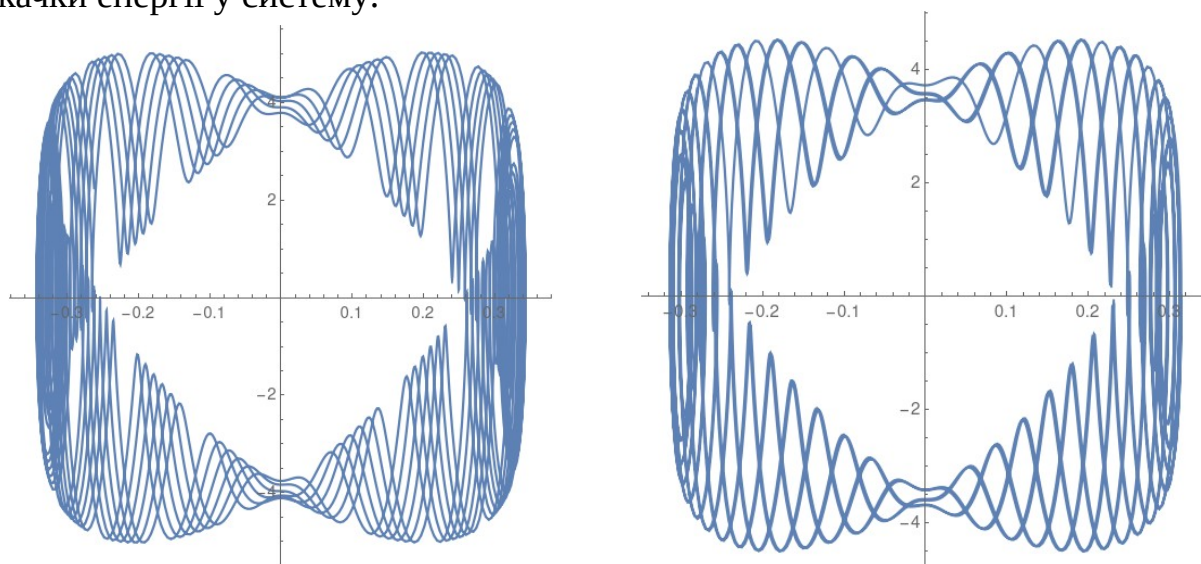


Рис1.19. Порівняння картини фазової діаграми Капіці та подвійного осцилятора.

Змінення відношення маси вантажів на пружинному та математичному маятнику змінює стійкість бокових мінімумів, що ми можемо побачити на графіках ефективного потенціалу, але можливо, що це зв'язано з неточністю побудови з-за приближення к положенням $\frac{\pi}{2}$ та $\frac{3\pi}{2}$.

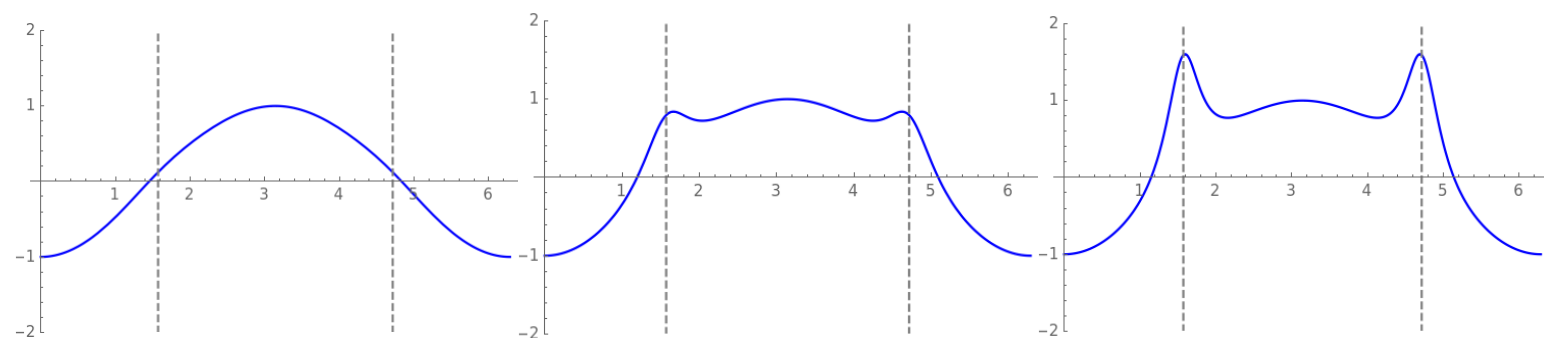


Рис 1.20. Графіки ефективного потенціалу при змінненні відношення $\frac{M}{m}$

РОЗДІЛ 2

ЯКІСНЕ ПОЯСНЕННЯ

2.1 Неможливість описання статичним ефективним потенціалом

Розглянемо те, чому ми не можемо описувати цю систему, завдяки статичному ефективному потенціалу. Ефективний потенціал для систем, подібних маятнику Капіци є додатком до потенційної енергії, що допомагає знаходити екстремальні точки потенційної енергії та стійки стани системи. У випадку маятнику Капіци, ми можемо описати ефективний потенціал, як усереднену по часу дію підвісу на математичний маятник, що переводиться з сили — похідної потенційної енергії до її самої. Потенційна енергія системи приймає вигляд :

$$U_{ef} = mgL \left(-\cos[\theta] + \frac{a^2 \gamma^2}{4gL} \sin^2[\theta] \right) \quad [1] \quad (14)$$

Додаток до потенційної енергії є середньою кінетичною енергією зовнішніх осциляцій. Ми можемо використовувати його для маятнику Капіци, бо ця енергія коливань там є сталою з-за того, що частота та амплітуда коливань підвісу не залежать від часу. У нашій же системі з-за постійного змінення частоти та амплітуди коливань пружинного маятника це не задовільно.

2.2 Динамічний ефективний потенціал

Спробуємо аналітично знайти точки рівноваги для нашої системи — для цього ми будемо розглядати динамічний ефективний потенціал. Ми змінимо формулу ефективного потенціалу, змінюючи у ній частоту коливань. Для цього роздивимося статичний випадок, коли математичний маятник перестає коливатися: Запишемо силу, що урівноважує вертикальну компоненту $M(g + x'')$:

$$T = M(g + x'') \cos[\pi - \theta] \quad (15)$$

З цього знайдемо силу, що діє на пружинку:

$$F_{\text{пр эф}} = mg + T \cos[\pi - \theta] = mg + M(g + x'') \cos[\pi - \theta]^2 \quad (16)$$

усереднюючи по часу ми втрачаємо член x'' .

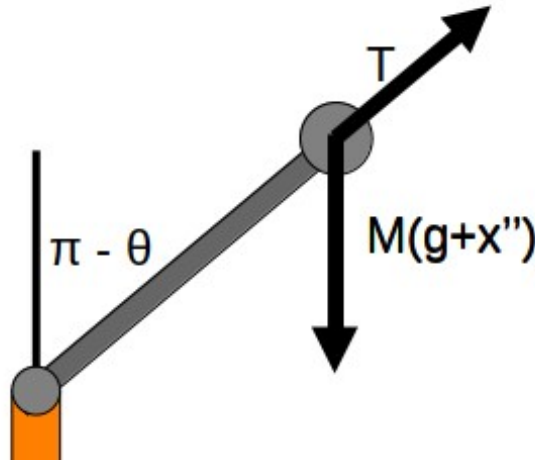


Рис 2.1. Картина маятника у статиці з розставленими силами.

Тоді запишемо ефективну масу маятника та з цього його частоту:

$$m_{\text{эф}} = \frac{F_{\text{пр эф ср}}}{g} = m + M \cos[\theta]^2 \quad (17)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{k}{m + M \cos[\theta]^2}} \quad (18)$$

Також розглянемо те, як амплітуда залежить від початкового стану системи і куту відхилення θ . Для цього запишемо закон збереження енергії (у цьому випадку нам потрібна лише потенційна енергія):

$$-(m+M)gx_0 - MgL \cos[\theta_0] + \frac{kx_0^2}{2} = -(m+M)ga - MgL \cos[\theta] + \frac{ka^2}{2} \quad (19)$$

З цього можемо отримати амплітуду:

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}a^2 - (m+M)ga + MgL(\cos[\theta_0] - \cos[\theta]) + (m+M)gx_0 - \frac{kx_0^2}{2} &= 0 \\ a = \frac{(m+M)g + \sqrt{(m+M)^2g^2 + 2k\left(MgL(\cos[\theta] - \cos[\theta_0]) + \frac{kx_0^2}{2} - (m+M)gx_0\right)}}{k} \end{aligned} \quad (20)$$

Формулу ефективного потенціалу ми можемо отримати, підставляючи у формулу (14) значення, отримані у формулах (18) та (20).

Тепер роздивимося, як ефективний потенціал поводить себе при різних випадках:

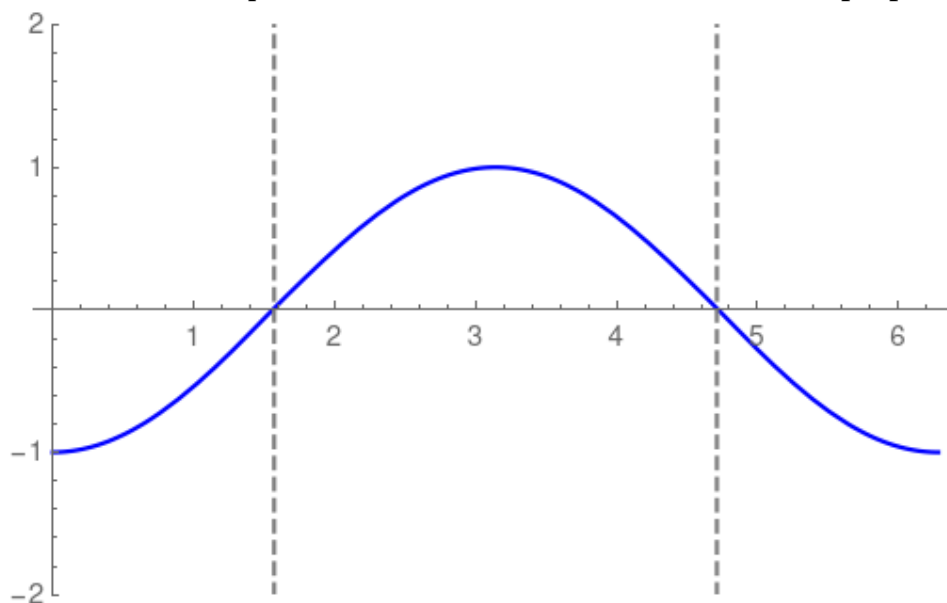


Рис 2.2. Підставляючи у нього значення, що відповідають станам, коли маятник може лише утримуватися унизу отримаємо таку картину.

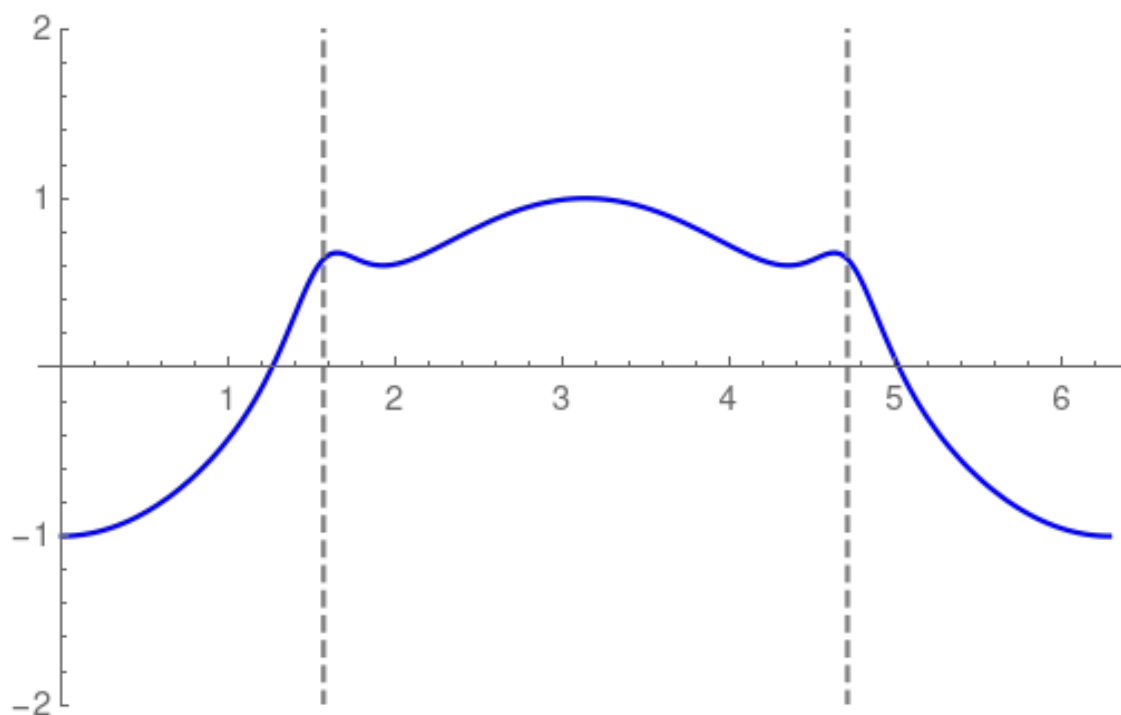


Рис 2.3. Якщо ми повисимо початкову енергію системи, то отримаємо формування не дуже стабільних мінімумів, з яких маятнику дуже легко зістрибнути.

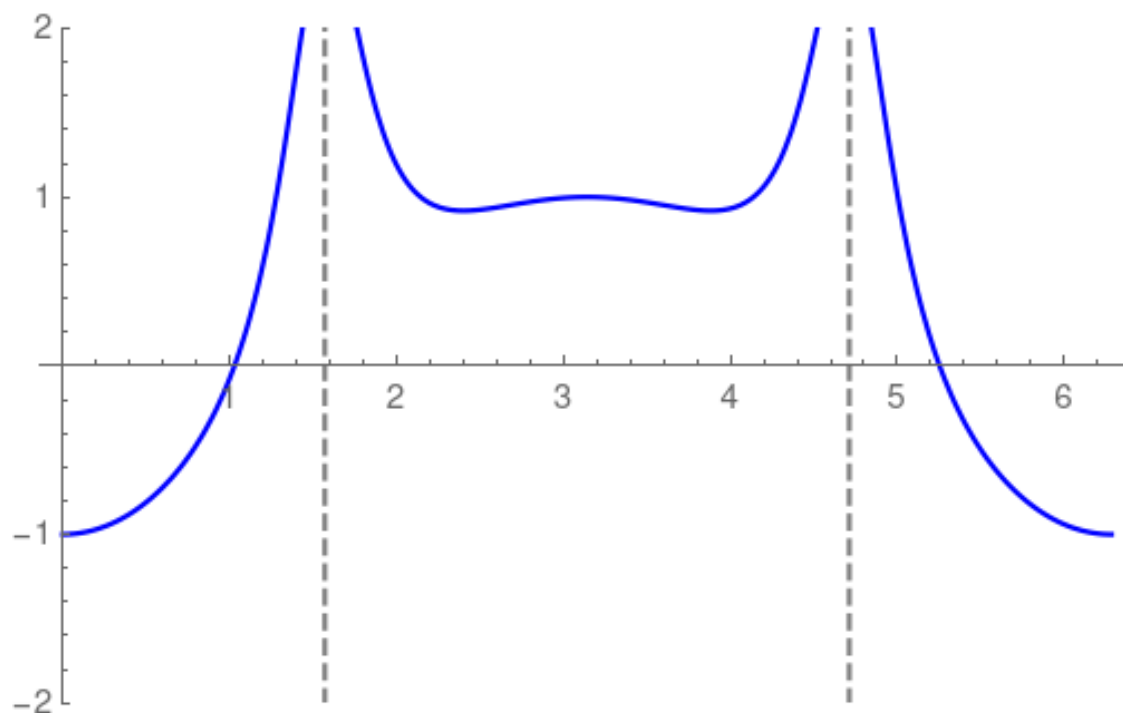


Рис 2.4. Ще підвищуючи енергію ми отримаємо картину 2 більш стабільних мінімум, у яких система вже може утримуватися, та коло яких можуть відбуватися нелінійні коливання з бієкцією.

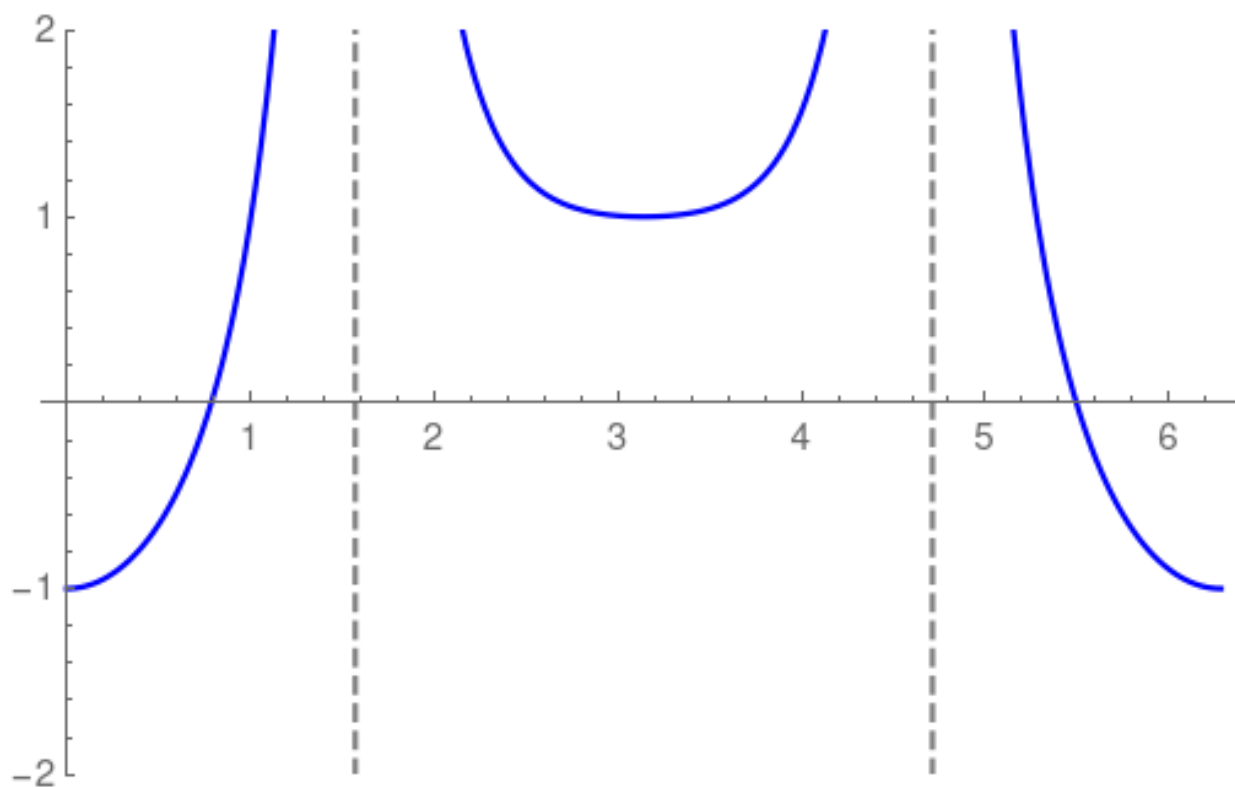


Рис 2.5. Підставляючи значення, що відповідають режиму Капіці отримаємо те, що 2 мінімуми зливаються та залишається лише один стабільний мінімум.

Також для порівняння мінімумів, отриманих нами та реальних нанесемо їх на графік дисперсії, але наносячи отримані мінімуми на графіки дисперсії ми бачимо невелику невідповідність, що може бути зв'язана з недостатнім часом обчислення поведінки системи.

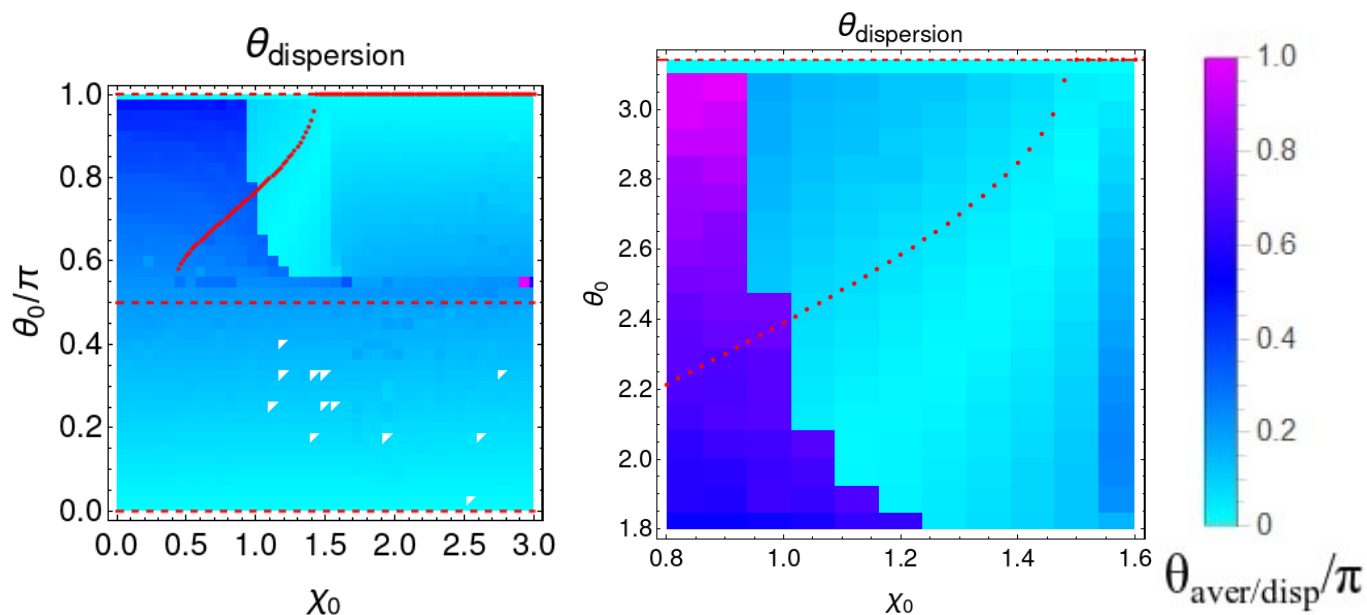


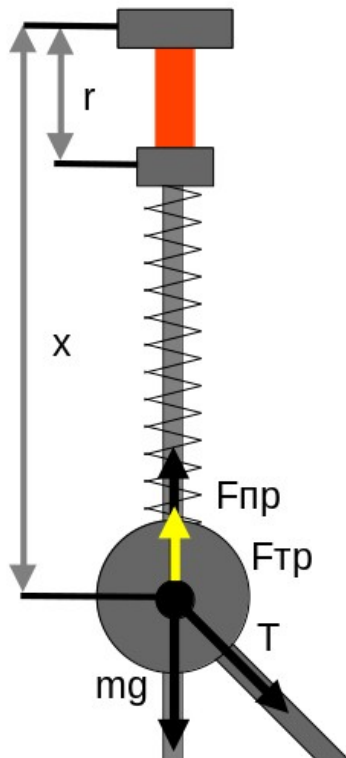
Рис 2.6. Графіки, на які нанесені мінімуми.

ДОДАННЯ ДИСИПАЦІЙНИХ СИЛ

3.1. Вивід рівняння руху

Внесемо у систему сили тертя, а також періодичне збудження точки підвісу, що дозволить не втрачати енергію у системі та буде сприяти уникненню стабільних режимів.

Для періодичного збудження ми обрали спосіб, який буде найбільш легко реалізувати у експерименті — гармонійний рух точки підвісу.



Нехай у деякий момент часу система приймає таке положення, як показано на малюнку. Тоді сили, що діють на пружинний маятник:

$$F_{np} = mg + T \cos[\theta] - F_{np} - F_{mp} \quad (21)$$

$F_{np} = k(x - r)$ $F_{mp} = \beta x'$, якщо приймемо тертя як лінійне.

Перетворюючи та відокремлюючи нові члени отримаємо додаткову силу f , що буде діяти на вантаж пружинного маятника.

$$F_{np} = mg + T \cos[\theta] - kx + f \quad (22)$$

$$f = kr - \beta x' \quad (23)$$

$$\text{Загальне значення доф}[t] = kr[t] - F_{mp} \quad (24)$$

Рис 3.1. Малюнок математичного маятника з тертям.

Тоді рівняння руху до подібної системи будуть виглядати так:

$$x'' = g + \frac{M\theta'^2 L + M(g - x'') \cos[\theta]}{m} \cos[\theta] - \frac{k}{m} x + \frac{f}{m} \quad (25)$$

$$\theta'' = \frac{-g - x''[t]}{L} \sin[\theta] \quad (26)$$

3.2. Дослідження поведінки системи

Для цієї конфігурації системи ми отримали режими руху, що співпадають з уже описаними — як виявляється для цієї системи більше рішень намагаються перейти до нижнього стану, ніж для звичайної, та підібрати параметри, що задовольняють проміжному режиму, та режиму Капіци досить важко. На графіках приведені звичайний, проміжний, та верхній режими маятника для цієї системи, та параметри системи, завдяки яким вони були отримані. Також для режимів наведені графіки без драйвінгу, для того, щоб ви мали можливість побачити різницю.

Для режимів, що є нижче $-g=10L=0.1M=0.01m=0.001\gamma=5\sqrt{\frac{k}{M+m}}$ $a=0.03\beta=0.001$

$$r[t]=a \sin[\gamma t] \quad r[t]=a \sin[\gamma t]$$

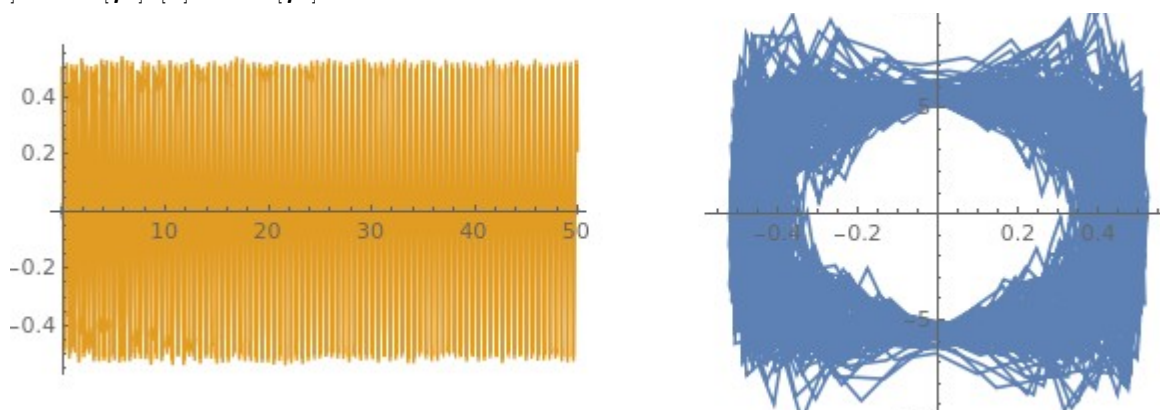


Рис 3.2. Графіки з драйвінгом для нижнього режиму, $x_0=0.01, \theta_0=0.5, k=100$

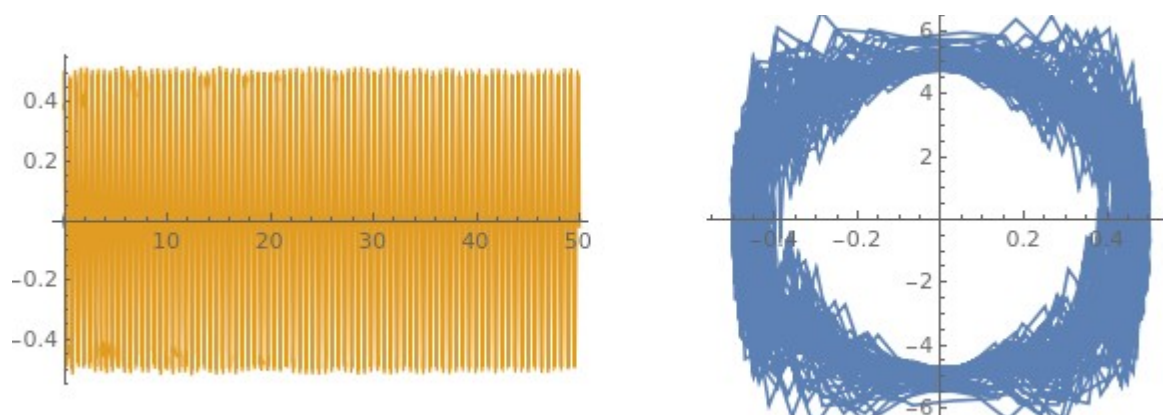


Рис 3.3. Графіки руху без драйвінгу, $x_0=0.01, \theta_0=0.5, k=100$

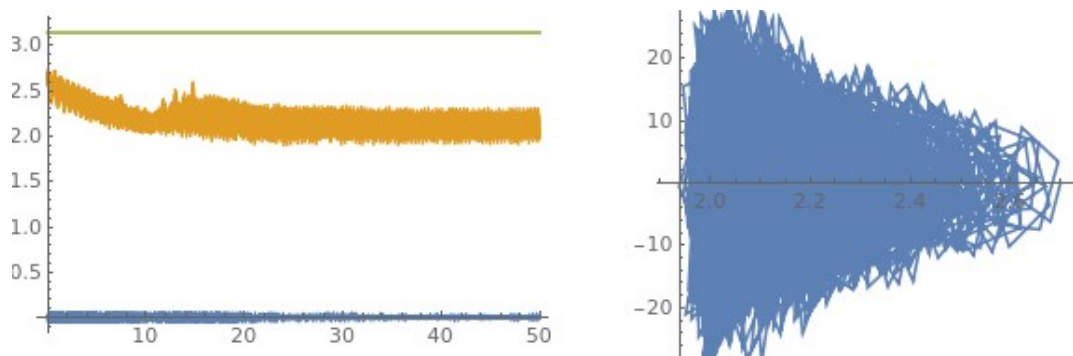


Рис 3.4. Графіки з дрейвінгом для проміжного режиму, $x_0=0.01, \theta_0=2.7k=100$

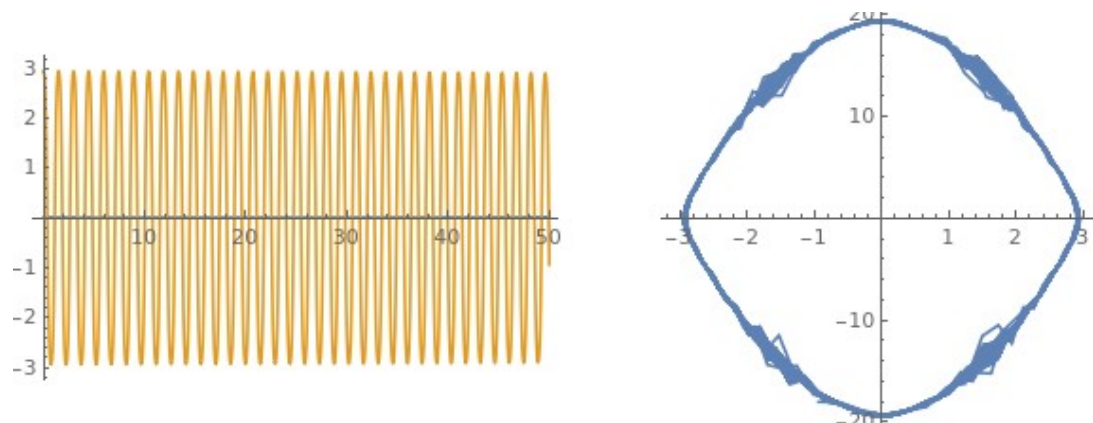


Рис 3.5. Графіки руху без дрейвінгу, $x_0=0.01, \theta_0=2.7k=100$

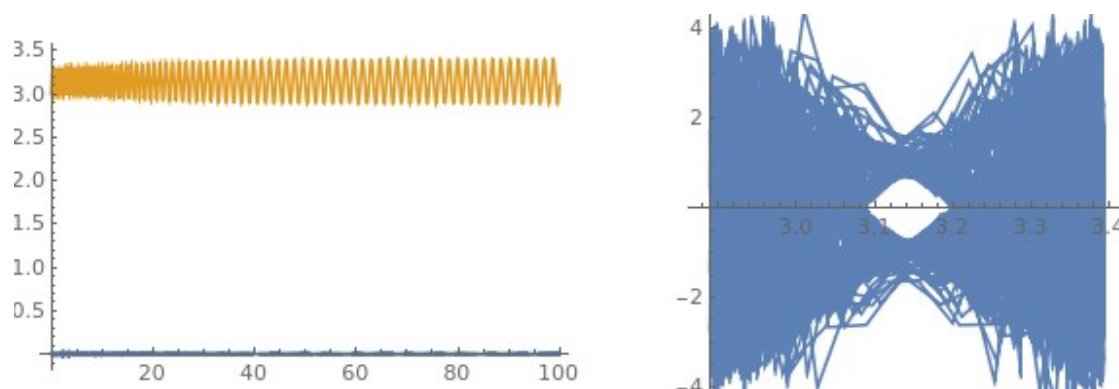


Рис 3.6. Графіки руху з дрейвінгом для режиму Капіці, $x_0=0.001, \theta_0=3k=600$

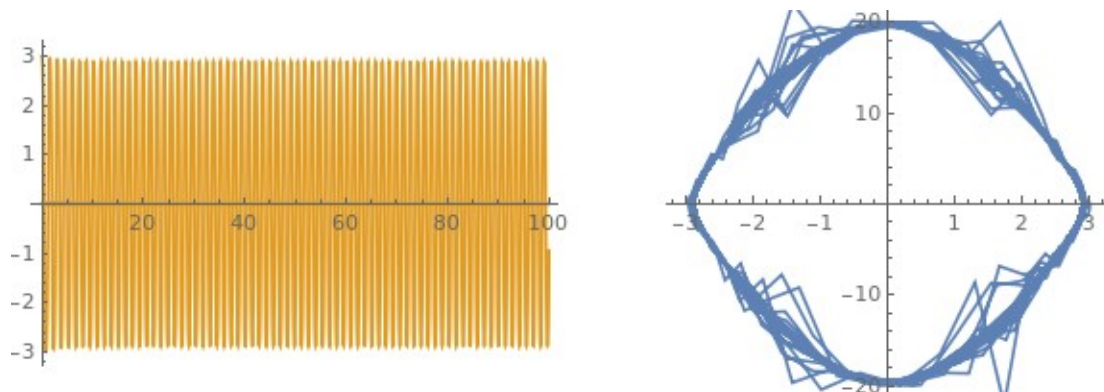


Рис 3.7. Графіки руху без дрейвінгу, $x_0=0.001, \theta_0=3k=600$

3.3. Можливість експерименту

Як ми щойно зрозуміли експеримент з цією системою є можливим у лабораторних умовах, але для цього буде необхідно підготувати легкі стрижені та пружини з малим коефіцієнтом тертя, механізми збудження гармонійних коливань у точці підвісу, вісі з малим тертям. Ми працюємо над оптимізацією параметрів системи, для полегшення проведення експерименту. Як ми можемо відмітити у цій системі дуже важно підтримувати стаціонарне положення з-за неможливості зробити це звичайним способом — резонансом з-за того, що ми не можемо корегувати, коли підкачуємо енергію, а коли її забираємо. Це є наслідком нелінійності системи. Але, як ми можемо зазначити, якщо підтримка системи не вдасться завдяки простому гармонійному осцилятору для підставки, та іншим простим методам, то можливим варіантом проведення експерименту є програмуєма підставка, що буде змінювати свій рух у залежності від параметрів системи.

ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС

4.1. Параметричний резонанс у системі

Якщо для нашої системи частоти математичного, та пружинного маятника є зіставними, то ми можемо описати систему з точки зору параметричного резонансу. Система буде його типовим приладом.

Розглянемо окремий випадок у системі, де може проявитися явище параметричного резонансу — коли математичний маятник відхилюється на невеликий кут, а частота коливань пружинного маятника підібрана так, що вона є вдвічі більшою за частоту математичного. Саме таку конфігурацію ми обираємо з-за того, то, що у ній вірогідність знайдення параметричного резонансу найбільш велика.

$$\omega_{mat} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \omega_{pr} = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m+M}} = 2\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Для цього необхідно, щоб приблизно виконувалося співвідношення $\frac{k}{m+M} = 4 \frac{g}{L}$

При цьому співвідношенні явище бієкції проявляється найбільш наочно. З початку проявляється параметричний резонанс, та амплітуда з енергією математичного маятника збільшується — вона перекачується з пружинного маятника. Після цього навпаки пружинний маятник розкачується математичним, та процес повторюється. Звичайно биття виникає у системах з лінійними зв'язками такими, як пов'язані маятники, але тут це не виконується. Навіть по графіку ми можемо це побачити — оминаюча крива до відхилення пружинного маятника не співпадає та відривається від синусоїди.

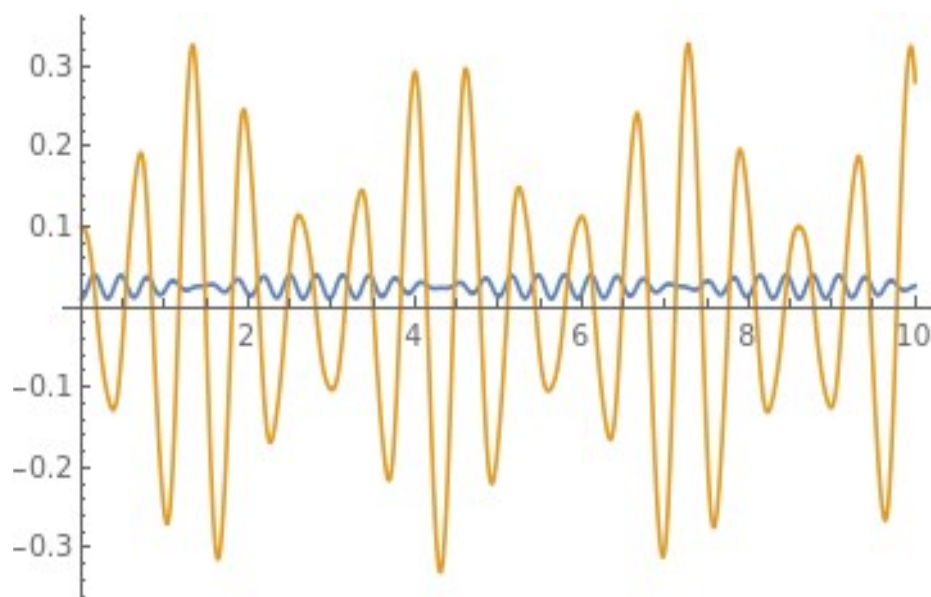


Рис 4.1. Графіки відхилення маятників для параметричного резонансу

Параметричний резонанс у замкнених системах розглядається дуже не часто. У знайдених нами статтях є лише один приклад подібного у джерелі [16], де параметричний резонанс відбувається у замкнутій квантовій системі.

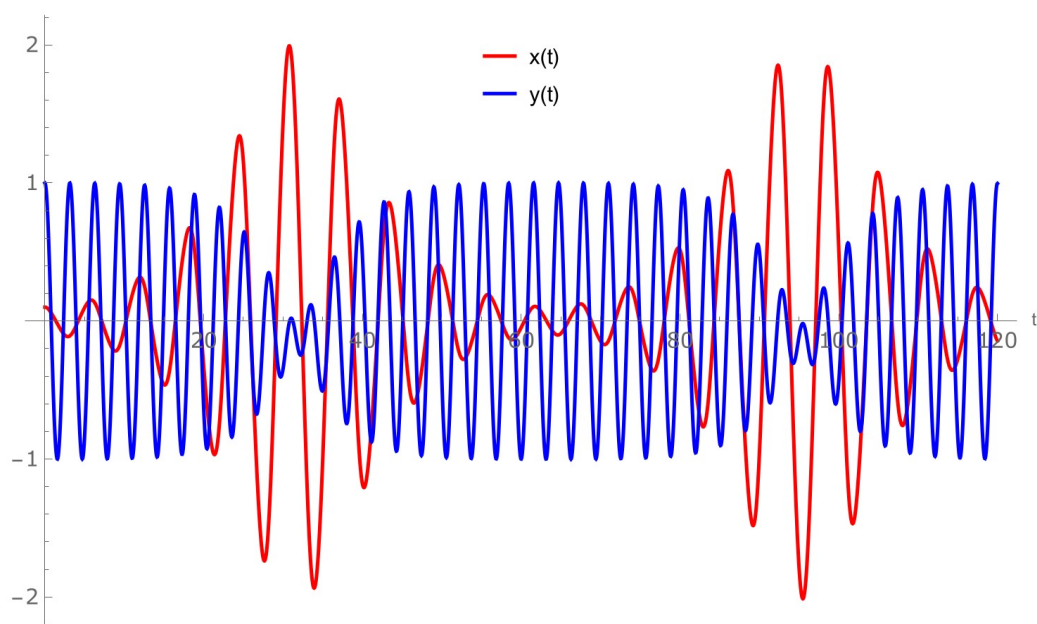


Рис 4.2. Параметричний резонанс у замкнутій квантовій системі.

4.2. Діаграма стабільності

Для системи, що уключає у себе як драйвінг і тертя будування діаграми стабільності не є необхідним з-за того, що як ми бачимо усі рішення переходять або до режиму коливання коло деякого положення, або через деякий конечний час входять у стабільний резонанс з підставкою та починають переходити на періодичний рух, що є обумовленим належністю тертя у системі.

Робота відповідає критеріям актуальності, бо у ній розглядається тема, поведінка якої може бути трансльована на багато інших систем, що вже мають практичний застосунок, та багату теоретичну базу, доповнення якої буде сприяти якісному розвитку технологій. механізми захоплення атомів та інших частинок швидко осцилюючим електромагнітним полем [2,3], пастки Пауля для заряджених частинок [4], оптичні системи хвилеводів з динамічним придушенням дифракції [5], багато-часткові спінові системи [6,7], системи поляритонів [8], системи Джозефсонівських контактів [9], та багато інших.

ВИСНОВКИ

У результаті проведеної роботи, були теоретично досліджені властивості окремих випадків замкнених динамічних систем, а саме подвійного осцилятора Капіци. Для описання його поведінки ми використовували моделі без тертя для первинного огляду, та з ним та зовнішнім драйвінгом для більш глибокого дослідження, та наближення до реальних умов, що надасть можливість зробити експеримент, для підтвердження отриманих результатів. Як їх результати ми отримали диференційні рівняння (6) та (7), та (25) і (26).

Для систем були знайдені нові режими руху, що не уникають в уже відомих системах, таких як маятник Капіци. Ці режими проявляються у обох роздивлених нами системах, що свідчить о збільшенні вірогідності знайдення аналогів у інших галузях. Було проведено чисельний, та аналітичний розрахунок нових положень рівноваги завдяки динамічному ефективному потенціалу системи (14), (18), (20). Обидва методи дають результати, що гарно збігаються. Було проведено дослідження літературних джерел, та запропоновані моделі, поведінка яких може бути схожа з системами, що були розглянуті у роботі - пастки Пауля для заряджених частинок [4], оптичні системи хвилеводів з динамічним придушенням дифракції [5], багато-часткові спінові системи [6,7], системи поляритонів [8], системи Джозефсонівських контактів [9], та інші.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механіка. — М.: Физматлит, 2004. — 224 с. — («Теоретична фізика», том I).
- [2] Olga Smirnova, Michael Spanner, and Misha Ivanov, “Molecule without Electrons: Binding Bare Nuclei with Strong Laser Fields”, *Phys. Rev. Lett.* 90, 243001 (2003).
- [3] Ido Gilary *et al*, “Trapping of particles by lasers: the quantum Kapitza pendulum”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 L409 (2003).
- [4] W. Paul, “Electromagnetic traps for charged and neutral particles”, *Rev. Mod. Phys.* 62, 531 (1990).
- [5] S. Longhi, “Dynamic trapping of light in modulated waveguide lattices”, *Opt. Lett.* 36, 819 (2011).
- [6] Alessio Leroose *et al.*, “Prethermal quantum many-body Kapitza phases of periodically driven spin systems”, *Phys. Rev. B* 100, 104306 (2019).
- [7] T. M. Hoang *et al.*, “Dynamic Stabilization of a Quantum Many-Body Spin System” *Phys. Rev. Lett.* 111, 090403 (2013).
- [8] N. S. Voronova, A. A. Elistratov, and Yu. E. Lozovik, “Inverted pendulum state of a polariton Rabi oscillator”, *Phys. Rev. B* 94, 045413 (2016).
- [9] Erez Boukobza *et al.*, “Nonlinear Phase Dynamics in a Driven Bosonic Josephson Junction”, *Phys. Rev. Lett.* 104, 240402 (2010).
- [10] Marin Bukov, Luca D'Alessio, and Anatoli Polkovnikov, “Universal high-frequency behavior of periodically driven systems: from dynamical stabilization to Floquet engineering”, *Advances in Physics*, 64:2, 139-226 (2015).
- [11] W. T. Grandy Jr. and Matthias Schöck, “Simulations of nonlinear pivot-driven pendula”, *American Journal of Physics* 65, 376 (1997).
- [12] Broer, H.W., Hoveijn, I., Noort, M.v. *et al.*, “The parametrically forced pendulum: a case study in 1 and 1/2 degree of freedom”, *J Dyn Diff Equat* 16, 897–947 (2004).

- [13] Boyan T. Torosov, Giuseppe Della Valle, and Stefano Longhi, “Imaginary Kapitza pendulum”, *Phys. Rev. A* 88, 052106 (2013).
- [14] Roberta Citro *et al.*, “Dynamical stability of a many-body Kapitza pendulum”, *Annals of Physics* 360, 694-710 (2015).
- [15] Markus Aspelmeyer, Tobias J. Kippenberg, and Florian Marquardt, “Cavity optomechanics”, *Rev. Mod. Phys.* 86, 1391 (2014).
- [16] Horvath, D. & Kormos, Márton & Takács, Gábor. (2018). Overlap singularity and time evolution in integrable quantum field theory.