Gamov Oleksii

Problem№1

Для того, что-бы подтвердить наличие подобного рода проекций тетраэдра на обозначеную плоскость мы решили искользовать тетраэдр с вершинами, находящимися в точках:

$$P[0]=\left(1,\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right),\sin\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)\right)$$

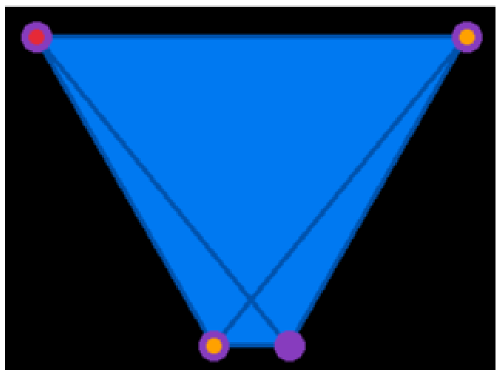
$$P[1]=\left(-1,\cos\left(-\frac{5\pi}{4}+\omega\right),\sin\left(-\frac{5\pi}{4}+\omega\right)\right)$$

$$P[2]=\left(1,\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\omega\right),\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\omega\right)\right)$$

$$P[3]=\left(-1,\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\omega\right),\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\omega\right)\right)$$

Он будет являться правильным, а середины его ребер, соединяющих вершины 0 и 2, а так-же 1 и 3 будут находиться в точках, (1,0,0) и (-1,0,0), которые принадлежат плоскости xy .

При помощи программы , переходящей по вращениями мы получили несколько положений, в которых хотя-бы один из углов составлял 60 градусов, но все они имеют одну и ту же проекцию с точностью до зеркального отражения:



Мы вычислили площадь данной проекции, которая оказалась равна: 3.272531

С учетом того, что площадь нашего тетраэдра с ребром $2\sqrt{2}$: $8\sqrt{3}$

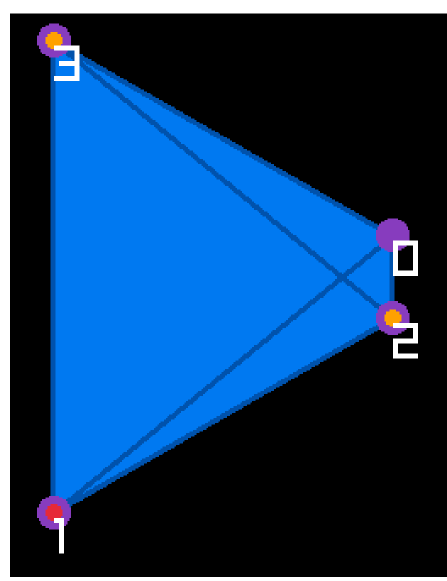
Отношение данных площадей: $\frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{3.272531}\approx 4.2341559$

Таким образом получаем приблизительной уравнение для прлощади тэтраедра:

$S_T = 4.2341559\,A$

Можем аналитичести определить данные положения при помощи скалярного произведения.

Угол $P[2],P[1],P[3]$ равен 60 градусов, если $\frac{(P[3]-P[1])\cdot(P[2]-P[1])}{|P[3]-P[1]||P[2]-P[1]|}=\frac{1}{2}$ (тут под $P[i]$ имеются в виду проекции точек)



Тогда запишем уравнение:

$$\frac{(P[3]-P[1])\cdot(P[2]-P[1])}{|P[3]-P[1]||P[2]-P[1]|}=\frac{1}{2}$$

Мы решили его с помощью пакета Mathematica и получили следующие ответы:

$$\left\{\left\{\omega\to-\mathrm{ArcCos}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right\},\left\{\omega\to\mathrm{ArcCos}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right\},\left\{\omega\to-\mathrm{ArcCos}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right\},\left\{\omega\to\mathrm{ArcCos}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right\}\right\}$$

Подставим их в наше уравнение для вычисления площади получаем, что:

$$\frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{4}-\mathrm{ArcCos}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right]-4\sqrt{2}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{4}+\mathrm{ArcCos}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right]\right)$$

$4\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 3.26599$

Таким образом отношение площадей проекции и тэтраедра: $\frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt{2}$ Таким образом

$S_T = 3\sqrt{2}\,A$

Problem№3

Давайте рассмотрим то, какое среднее значение мы получим после игры начиная с числа n. Обозначим его как $f[n]$. Если мы перейдем к какому-то числу k, то тогда мы получим, что в среднем значение после суммы будет равняться $k+f[k]$. Если перемещение на числа, меньшие n равновероятно, то можем записать среднее значение $f[n]=\frac{\sum_{i=0}^{n} f[i]+i}{n+1}$.
Таким образом мы получили рекуррентную формулу. Сразу можем сказать, что $f[0]=0$ Но мы можем упростить её:

$$f[n]=\frac{\sum_{i=0}^{n} f[i]+i}{n+1}=\frac{\sum_{i=0}^{n} f[i]}{n+1}+\frac{n}{2} \qquad f[n-1]=\frac{\sum_{i=0}^{n-1} f[i]}{n}+\frac{n-1}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[i]=f[n-1]n-\frac{(n-1)n}{2}$$

$$f[n]=\frac{f[n-1]n-\frac{(n-1)n}{2}+f[n]}{n+1}+\frac{n}{2}$$

$$f[n]=f[n-1]+1 \qquad f[n]=n$$

Я проверил данную формулу с использованием симуляции с использованием Rust.

```
0  0 0
0.00048601627  1 0.999514
0.00022602081  2 1.999774
0.0000030994415  3 2.999997
0.00074601173  4 3.999254
0.0025339127  5 4.997466
0.01313591  6 5.986864
0.0006752014  7 7.000675
0.0026874542  8 8.002687
0.0014791489  9 8.998521
```

Таким образом мы получаем, что разности между предсказанными по формуле значения и полученные путем симуляции совпадают с минимальной абсолютной погрешностью, которая бы уменьшиласть при увеличении числа попыток.

Теперь рассмотрим то, какой средний рещультат мы получаем начиная с числа m. И делая n итераций. Обозначим это, как $a[n,m]$ Понятно, что $a[n,0]=0$, как и $a[0,m]=0$. После каждой генерации случайного числа мы можем отсекать те числа, которые больше уже полученного. Пусть $a[n,m,k]$ - средний результат, который мы получаем, если генерируемое число должно не превышать k. Тогда $a[n,m]=a[n,m,m]$. Можем записать рекуррентную формулу таким образом: $a[n,m,k]=\frac{\sum_{i=0}^{k}(a[n-1,m,i]+i)+(m-k)a[n-1,m,k]}{m+1}$.

$$a[n,m,k-1]=\frac{\sum_{i=0}^{k-1}(a[n-1,m,i]+i)+(m-k+1)a[n-1,m,k-1]}{m+1}$$

$$a[n,m,k-1](m+1)-(m-k+1)a[n-1,m,k-1]=\sum_{i=0}^{k-1}(a[n-1,m,i]+i)$$

$$a[n,m,k]=\frac{\sum_{i=0}^{k-1}(a[n-1,m,i]+i)+a[n-1,m,k]+k+(m-k)a[n-1,m,k]}{m+1}$$

$$a[n,m,k]=\frac{a[n,m,k-1](m+1)-(m-k+1)a[n-1,m,k-1]+a[n-1,m,k]+k+(m-k)a[n-1,m,k]}{m+1}$$

$$a[n,m,k]=\frac{a[n,m,k-1](m+1)-(m-k+1)(a[n-1,m,k-1]-a[n-1,m,k])+k}{m+1}$$

(В таблицах по горизонтали M, а по вертикали N)

Проведя моделирование мы использовали данную формулу и сравнили результаты. Абсолютная погрешность, как видно достаточно мала и уменьшится при увеличении количества попыток.

```
0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000
0.0000000 0.0014800 0.0003800 0.0047899 0.0044799 0.0049500 0.0000200 0.0005901 0.0118699 0.0033002
0.0000000 0.0013900 0.0031545 0.0048001 0.0021901 0.0090220 0.0082273 0.0117002 0.0038385 0.0016599
0.0000000 0.0023800 0.0038934 0.0007801 0.0008600 0.0204232 0.0157657 0.0082102 0.0061626 0.0088391
0.0000000 0.0042200 0.0051035 0.0021524 0.0065098 0.0060487 0.0098910 0.0213418 0.0099511 0.0030904
0.0000000 0.0011800 0.0080926 0.0094512 0.0023699 0.0048809 0.0195875 0.0044441 0.0089927 0.0172796
0.0000000 0.0047050 0.0099367 0.0000024 0.0083499 0.0075421 0.0045743 0.0093021 0.0004816 0.0006847
0.0000000 0.0026175 0.0093451 0.0082526 0.0015998 0.0043769 0.0134020 0.0174103 0.0045543 0.0085974
0.0000000 0.0030338 0.0064609 0.0027757 0.0069060 0.0111856 0.0117884 0.0005026 0.0009818 0.0246572
0.0000000 0.0091431 0.0172731 0.0154216 0.0018320 0.0057030 0.0009713 0.0415778 0.0024781 0.0299759
```

Так-же мы вычислили конкретные значения по формуле, приведенной ранее. Если считать их отдельно, то каждое считается за $O(nm)$ Полученные значения:

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1/2 1 3/2 2 5/2 3 7/2 4 9/2
0 3/4 13/9 17/8 14/5 125/36 29/7 77/16 148/27 123/20
0 7/8 5/3 39/16 16/5 95/24 33/7 175/32 56/9 279/40
0 15/16 145/81 335/128 2146/625 5501/1296 1733/343 5999/1024 14572/2187 74667/10000
0 31/32 151/81 699/256 448/125 11485/2592 1809/343 12523/2048 15208/2187 31167/4000
0 63/64 1393/729 5747/2048 11522/3125 212765/46656 638723/117649 412547/65536 1268188/177147 1604319/200000
0 127/128 1415/729 11709/4096 11752/3125 434285/93312 93153/16807 842485/131072 1295048/177147 3276783/400000
0 255/256 12865/6561 94895/32768 1490146/390625 7935101/1679616 4635173/823543 27383279/4194304 106563052/14348907 832268667/100000000
0 511/512 1439/729 191559/65536 1506032/390625 1783445/373248 4689969/823543 55428583/8388608 11985512/1594323 1685139003/200000000
```

Теперь выведем явные формулы для $a[n,1]$ и $a[n,2]$. Сделаем это с использованием

$$a[n,m,k]=\frac{\sum_{i=0}^{k}(a[n-1,m,i]+i)+(m-k)a[n-1,m,k]}{m+1}$$.

$$a[n,m]=a[n,m,m]$$

$$a[n,1,1]=\frac{a[n-1,0,1]+1}{2}=\frac{a[n-1,0,1]}{2}+\frac{1}{2}$$

Таким образом, если мы разложим данную функцию, то получим:

$$a[n,1]=a[n,1,1]=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1^{n}}{2^{n}}$$

Если же мы будем переделывать данную формулу для $a[n,2]=a[n,2,2]$:

$$a[n,2,2]=\frac{a[n-1,2,2]+a[n-1,2,1]+a[n-1,2,0]}{3}+1=\frac{a[n-1,2,2]+a[n-1,2,1]}{3}+1$$

$$a[n,2,1]=\frac{2a[n-1,2,1]+a[n-1,2,0]}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}a[n-1,2,1]+\frac{1}{3}$$

Данная формула преобразуется в:

$$a[n,2,1]=\frac{2}{3}a[n-1,2,1]+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

Тогда можем переписать:

$$a[n,2]=a[n,2,2]=\frac{a[n-1,2,2]+a[n-1,2,1]}{3}+1=\frac{a[n-1,2,2]+1-(\frac{2}{3})^{n-1}}{3}+1=\frac{a[n-1,2,2]}{3}-\frac{(\frac{2}{3})^{n-1}}{3}+\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{a[n-1,2,2]}{3}-\frac{(\frac{2}{3})^{n-1}}{3}+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{3})^{i}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\frac{2}{3})^{i}}{3^{n-i}}=\frac{4}{3}\frac{1-(\frac{1}{3})^{n}}{1-\frac{1}{3}}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\frac{2}{3})^{i}}{3^{n-i}}=2(1-(\frac{1}{3})^{n})-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\frac{2}{3})^{i}}{3^{n-i}}=$$

$$=2(1-(\frac{1}{3})^{n})-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2^{i}}{3^{n}}=2(1-(\frac{1}{3})^{n})-\frac{1}{3^{n}}\sum_{i=0}^{n-1}2^{i}=2(1-(\frac{1}{3})^{n})-\frac{2^{n}-1}{3^{n}}=2(1-(\frac{1}{3})^{n})-\frac{2^{n}}{3^{n}}+\frac{1}{3^{n}}=$$

$$=2-\frac{1^{n}+2^{n}}{3^{n}}$$

Исходя из этого я попробовал обобщить данную формулу и получил следующий результат:

$$a[n,m]=m-\frac{\sum_{i=1}^{m}i^{n}}{(m+1)^{n}}$$

Как выяснилось, результаты данной формулы совпадают с результатами рекуррентной. После этого я попробовал обобщить и данную формулу до $a[n,m,k]$. После нескольких попыток и сравнения результатов я получил формулу, которая так-же отражает результаты рекуррентной формулы: $a[n,m,k]=k-\frac{\sum_{i=m-k+1}^{m}i^{n}}{(m+1)^{n}}$. Давайте докажем её при помощи индукции. Базой в нашем случае служит факты, что $a[0,m,k]=0$, $a[n,m,0]=0$. Данные результаты соответствуют формулы, приведенной ранее.

$$a[0,m,k]=k-\frac{\sum_{i=m-k+1}^{m}i^{0}}{(m+1)^{0}}=k-\sum_{i=m-k+1}^{m}1=k-k=0$$

$$a[n,m,0]=0-\frac{\sum_{i=m+1}^{m}i^{n}}{(m+1)^{n}}=-\frac{0}{(m+1)^{n}}=0$$

Теперь воспользуемся реккурентной формулой:

$$a[n,m,k]=\frac{a[n,m,k-1](m+1)-(m-k+1)(a[n-1,m,k-1]-a[n-1,m,k])+k}{m+1}=$$

$$=\frac{(k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m}i^{n}}{(m+1)^{n}})(m+1)-(m-k+1)((k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m}i^{n-1}}{(m+1)^{n-1}})-(k-\frac{\sum_{i=m-k+1}^{m}i^{n-1}}{(m+1)^{n-1}}))+k}{m+1}=$$

$$=(k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m}i^{n}}{(m+1)^{n}})-\frac{(m-k+1)}{m+1}((k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m}i^{n-1}}{(m+1)^{n-1}})-(k-\frac{\sum_{i=m-k+1}^{m}i^{n-1}}{(m+1)^{n-1}}))+\frac{k}{m+1}=$$

$$=(k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m}i^{n}}{(m+1)^{n}})-\frac{(m-k+1)}{m+1}(-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m}i^{n-1}}{(m+1)^{n-1}}+\frac{\sum_{i=m-k+1}^{m}i^{n-1}}{(m+1)^{n-1}})+\frac{k}{m+1}=$$

$$=\left(k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m} i^n}{(m+1)^n}\right)-\frac{(m-k+1)}{(m+1)^n}\left(-(m+1)^{n-1}-\sum_{i=m-k+2}^{m} i^{n-1}+\sum_{i=m-k+1}^{m} i^{n-1}\right)+\frac{k}{m+1}=$$

$$=\left(k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m} i^n}{(m+1)^n}\right)+\frac{(m-k+1)}{(m+1)^n}\left((m+1)^{n-1}+\sum_{i=m-k+2}^{m} i^{n-1}-\sum_{i=m-k+1}^{m} i^{n-1}\right)+\frac{k}{m+1}=$$

$$=k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m} i^n}{(m+1)^n}+\frac{(m-k+1)}{(m+1)^n}\left((m+1)^{n-1}-(m-k+1)^{n-1}\right)+\frac{k}{m+1}=$$

$$=k-1-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m} i^n}{(m+1)^n}+\frac{(m-k+1)(m+1)^{n-1}}{(m+1)^n}-\frac{(m-k+1)^n}{(m+1)^n}+\frac{k}{m+1}=$$

$$=k-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m} i^n+(m-k+1)^n}{(m+1)^n}=k-\frac{\sum_{i=m-k+2}^{m} i^n+(m-k+1)^n}{(m+1)^n}=k-\frac{\sum_{i=m-k+1}^{m} i^n}{(m+1)^n}$$

По индукции мы доказали данную формулу. Тогда общая явная формула:

$$a[n,m]=m-\frac{\sum_{i=1}^{m} i^n}{(m+1)^n}$$

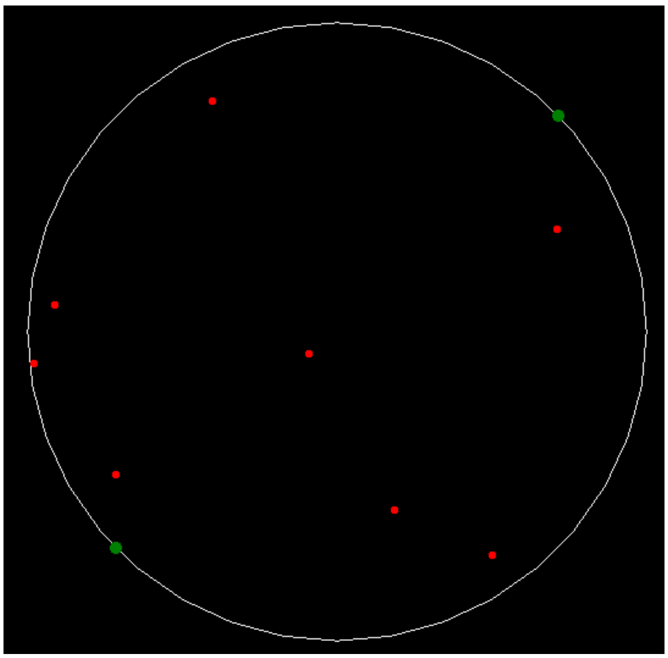
Problem№4

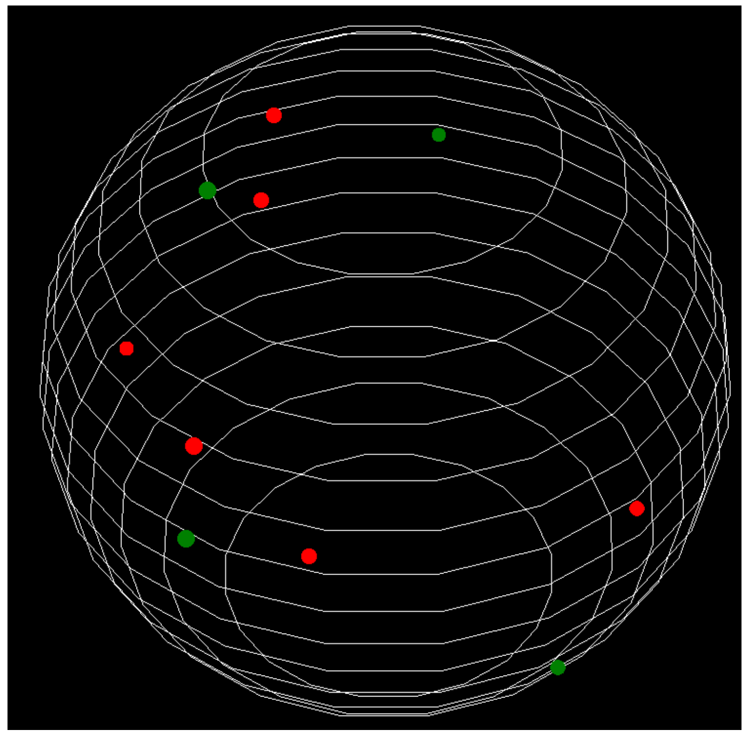
Для решения данной задачи мы создали симуляцию процесса, описанного в задаче при помощи Rust: При помощи программы мы просимулировали шансы для отдельных вариантов числа фонарей на цлице и вычислили среднееколличество фонарей, которые будет необходимо починить. Мы получили следующие приблизительные значения для шансов:

k\n	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	100%	66.79%	50.02%	40.03%	33.27%	28.60%	25.00%	22.28%
3		33.20%	49.97%	50.00%	46.69%	42.89%	39.30%	36.12%
4			0%	9.96%	20.02%	25.65%	28.53%	29.72%
5				0%	0%	2.84%	7.15%	11.06%
6					0%	0%	0%	0.80%
7						0%	0%	0%
8							0%	0%
9								0%
aver	2	2.332	2.499	2.699	2.867	3.027	3.178	3.319

Problem№5

Для того, что-бы построить подобного рода сферы/диски мы можем воспользоваться уже известными алгоритмами, такими, как алгоритм Велзла, которым мы и воспользовались. Он описан в статье:
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=8CB93E2D8E7BF3B45BFA4DFE962C2A6F?doi=10.1.1.46.1450&rep=rep1&type=pdf
В ней обсуждается не только сам алгоритм, но и доказатедьство единственности такой сферы/диска. Так-же мы и сами имплементировали данный алгоритм с использованием Rust. Исходники наших программ, которые генерируют определенное количество точек, после чего строя по ним выпуклую такую оболочку.
Для 2d и для 3d:





Исходный код данных проектов:
https://github.com/dyatelok/Yulia-sDream/tree/main/pr5_disc
https://github.com/dyatelok/Yulia-sDream/tree/main/pr5_sphere