Fatoração QR e seu uso para resolver o problema de quadrados mínimos

Dyckson Ternoski
Marina Sayuri Vieira
Monique Baptista Fragozo
Otávio Dittrich Moreira

Orientador: Prof. Abel Soares Siqueira

J3M - 06 de novembro de 2019
UFPR - Universidade Federal do Paraná

Introdução e Motivação

Problema de Quadrados Mínimos

Um dos problemas mais importantes em aplicações matemáticas é a resolução de sistemas lineares da forma:

$$Ax = b \tag{1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e b $\in \mathbb{R}^m$.

Quando $m > n$, temos um sistema com mais equações do que incógnitas e (1) pode não ter solução. Nesse caso, a melhor estratégia é resolver o **Problema de Quadrados Mínimos**:

Problema de Quadrados Mínimos

Quando $m > n$, temos um sistema com mais equações do que incógnitas e (1) pode não ter solução. Nesse caso, a melhor estratégia é resolver o **Problema de Quadrados Mínimos**:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

Problema de Quadrados Mínimos

Isso envolve resolver o sistema

$$A^tAx = A^tb$$

o qual possui solução única

$$x = (A^tA)^{-1}A^tb$$

sempre que A tem vetores coluna L.I.

Problema de Quadrados Mínimos

Isso envolve resolver o sistema

$$A^tAx = A^tb$$

o qual possui solução única

$$x = (A^tA)^{-1}A^tb$$

sempre que A tem vetores coluna L.I.

Porém, a inversão de matrizes é computacionalmente custosa.
Haveria uma forma de evitá-la?

Decomposição QR

Definição 1: *Um conjunto de vetores* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *é dito ortonormal quando são ortogonais dois a dois e tem norma unitária, ou seja:*

Definição 1: *Um conjunto de vetores $q_1, q_2, \ldots, q_n$ é dito ortonormal quando são ortogonais dois a dois e tem norma unitária, ou seja:*

$$\langle q_i, q_j \rangle = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$$

Definição 1: *Um conjunto de vetores $q_1, q_2, \ldots, q_n$ é dito ortonormal quando são ortogonais dois a dois e tem norma unitária, ou seja:*

$$\langle q_i, q_j \rangle = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$$

Uma matriz Q é dita ortogonal quando seus vetores coluna são ortonormais, ou seja, $Q^t Q = \mathrm{I}$.

Matrizes Ortogonais

Exemplo 1: (Rotações) Toda matriz de rotação é ortogonal.
A matriz Q_θ que rotaciona um vetor no plano por um ângulo θ é:

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Matrizes Ortogonais

Exemplo 1: (Rotações) Toda matriz de rotação é ortogonal.
A matriz Q_θ que rotaciona um vetor no plano por um ângulo θ é:

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Logo, os vetores coluna são:

$$q_1 = \begin{pmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{pmatrix} q_2 = \begin{pmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\langle q_1, q_1 \rangle = cos(\theta)^2 + sen(\theta)^2 = 1$$
$$\langle q_2, q_2 \rangle = (-sen(\theta))^2 + cos(\theta)^2 = 1$$
$$\langle q_1, q_2 \rangle = cos(\theta)(-sen(\theta)) + sen(\theta)cos(\theta) = 0$$
$$\langle q_2, q_1 \rangle = (-sen(\theta))cos(\theta) + cos(\theta)sen(\theta) = 0$$

Proposição 1: *Se Q é uma matriz ortogonal então Q preserva a norma.*

Matrizes Ortogonais

Proposição 1: *Se Q é uma matriz ortogonal então Q preserva a norma.*

De fato,

$$\|Qv\|_2^2 = (Qv)^t Qv = v^t Q^t Qv = v^t v = \|v\|_2^2$$

Proposição 2: *O produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.*

Proposição 2: *O produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.*

Demonstração: Se Q_1 e Q_2 são matrizes ortogonais, então:

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2)^t(Q_1Q_2) &= Q_2^tQ_1^tQ_1Q_2\\ &= Q_2^tQ_2\\ &= \mathrm{I}\end{aligned}$$

Matrizes Ortogonais

Proposição 2: *O produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.*

Demonstração: Se Q_1 e Q_2 são matrizes ortogonais, então:

$$\begin{aligned}(Q_1Q_2)^t(Q_1Q_2) &= Q_2^tQ_1^tQ_1Q_2\\ &= Q_2^tQ_2\\ &= \mathrm{I}\end{aligned}$$

Ou seja, Q_1Q_2 é ortogonal. É facilmente estendido por indução para n matrizes.

Definição 2: *Dizemos que o par de matrizes* (Q, R) *é a decomposição QR de A quando:*

$$A = QR$$

Sendo Q ortogonal e R triangular superior.

Definição 2: *Dizemos que o par de matrizes* (Q, R) *é a decomposição QR de A quando:*

$$A = QR$$

Sendo Q ortogonal e R triangular superior.

Como podemos calcular a decomposição QR?

Decomposição QR por Gram-Schmidt

Teorema 1: *Seja* $A \in R^{m \times n}$ *com colunas L.I.. Podemos usar o processo de Gram-Schmidt nas colunas* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *da matriz A e normalizá-las, obtendo elementos* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *para encontrar a decomposição QR, sendo:*

$$Q = (q_1 \; q_2 \; \ldots \; q_n) \;\; e \;\; R = Q^t A$$

Decomposição QR por Gram-Schmidt

Teorema 1: *Seja $A \in R^{m \times n}$ com colunas L.I.. Podemos usar o processo de Gram-Schmidt nas colunas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ da matriz A e normalizá-las, obtendo elementos $q_1, q_2, \ldots, q_n$ para encontrar a decomposição QR, sendo:*

$$Q = (q_1 \; q_2 \; \ldots \; q_n) \;\; e \;\; R = Q^t A$$

Ou seja,

$$w_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle q_j, a_i \rangle q_j \Rightarrow q_i = \frac{w_i}{\|w_i\|} \;\; \forall \, i = 1, \ldots, n$$

e

$$R_{ij} = \begin{cases} \langle q_i, a_j \rangle & \text{se } i \leqslant j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 2: Calcular a decomposição QR pelo processo de Gram-Shcmidt da matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Decomposição QR por Gram-Schmidt

Exemplo 2: Calcular a decomposição QR pelo processo de Gram-Shcmidt da matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aplicando Gram-Schmidt nas colunas de A e normalizando-as, obtemos:

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad q_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Decomposição QR por Gram-Schmidt

Assim:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

e

$$R = Q^t A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{18} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Decomposição QR por Rotações de Givens

Podemos também encontrar a decomposição QR por um método chamado **Rotações de Givens**:

Decomposição QR por Rotações de Givens

Podemos também encontrar a decomposição QR por um método chamado **Rotações de Givens**:

Teorema 2: *Se A é uma matriz com vetores coluna L.I., então existem matrizes de rotação* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ *tais que:*

$$Q_1 Q_2 \ldots Q_n A = R$$

Sendo R triangular superior.
Portanto, se $Q = Q_n^t Q_{n-1}^t \ldots Q_1^t$, então:

$$A = QR$$

é uma decomposição QR de A.

Para o caso em que $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Teremos:

Decomposição QR por Rotações de Givens

$$cos(\theta_{21}) = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \quad sen(\theta_{21}) = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

$$\begin{pmatrix} cos(\theta_{21}) & sen(\theta_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ -sen(\theta_{21}) & cos(\theta_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

Decomposição QR por Rotações de Givens

$$cos(\theta_{21}) = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \quad sen(\theta_{21}) = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

$$\begin{pmatrix} cos(\theta_{21}) & sen(\theta_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ -sen(\theta_{21}) & cos(\theta_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & a_{15}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Decomposição QR por Rotações de Givens

$$cos(\theta_{31}) = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{a_{11}^{(1)\,2} + a_{31}^2}} \quad sen(\theta_{31}) = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^{(1)\,2} + a_{31}^2}}$$

$$\begin{pmatrix} cos(\theta_{31}) & 0 & sen(\theta_{31}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -sen(\theta_{31}) & 0 & cos(\theta_{31}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q_{21}A$$

Decomposição QR por Rotações de Givens

$$cos(\theta_{31}) = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{a_{11}^{(1)\,2} + a_{31}^2}} \quad sen(\theta_{31}) = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^{(1)\,2} + a_{31}^2}}$$

$$\begin{pmatrix} cos(\theta_{31}) & 0 & sen(\theta_{31}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -sen(\theta_{31}) & 0 & cos(\theta_{31}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q_{21}A$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} & a_{15}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & a_{35}^{(1)} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

E assim por diante, até chegarmos no último passo:

$$cos(\theta_{54}) = \frac{a_{44}^{(3)}}{\sqrt{a_{44}^{(3)\,2} + a_{54}^2}} \quad sen(\theta_{54}) = \frac{a_{54}}{\sqrt{a_{44}^{(3)\,2} + a_{54}^2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos(\theta_{54}) & sen(\theta_{54}) \\ 0 & 0 & 0 & -sen(\theta_{54}) & cos(\theta_{54}) \end{pmatrix} Q_{53}Q_{43}Q_{52}Q_{42}Q_{32}Q_{51}Q_{41}Q_{31}Q_{21}A$$

Decomposição QR por Rotações de Givens

E assim por diante, até chegarmos no último passo:

$$cos(\theta_{54}) = \frac{a_{44}^{(3)}}{\sqrt{a_{44}^{(3)\,2} + a_{54}^2}} \quad sen(\theta_{54}) = \frac{a_{54}}{\sqrt{a_{44}^{(3)\,2} + a_{54}^2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos(\theta_{54}) & sen(\theta_{54}) \\ 0 & 0 & 0 & -sen(\theta_{54}) & cos(\theta_{54}) \end{pmatrix} Q_{53}Q_{43}Q_{52}Q_{42}Q_{32}Q_{51}Q_{41}Q_{31}Q_{21}A$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} & r_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} \end{pmatrix}$$

Como cada matriz Q_{ij} é ortogonal,então:

$$A = (Q_{54}Q_{53}Q_{43}Q_{52}Q_{42}Q_{32}Q_{51}Q_{41}Q_{31}Q_{21})^t \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} & r_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} \end{pmatrix}$$

Decomposição QR por Rotações de Givens

Logo, se

$$Q = (Q_{54}Q_{53}Q_{43}Q_{52}Q_{42}Q_{32}Q_{51}Q_{41}Q_{31}Q_{21})^t$$

E

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} & r_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} \end{pmatrix}$$

Então, pela proposição 2, Q é ortogonal.
Portanto (Q,R) é uma decomposição QR de A.

Quadrados mínimos via decomposição QR

Como a decomposição QR ajuda no Problema de Quadrados Mínimos?

Como a decomposição QR ajuda no Problema de Quadrados Mínimos?

Se A = QR, pela Proposição 1, podemos resolver o Problema de Quadrados Mínimos de (A, b) como

$$\begin{aligned}\|Ax-b\|_2^2 &= \|QRx-b\|_2^2\\ &= \|Q^t(QRx-b)\|_2^2\\ &= \|Rx-Q^tb\|_2^2\\ &= \|\hat{R}x-c\|_2^2+\|d\|_2^2\end{aligned}$$

Onde

$$R=\begin{pmatrix}\hat{R}\\0\end{pmatrix}\quad Q^tb=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

Assim, basta resolver o sistema triangular $\hat{R}x = c$

Exemplo 3: Ajuste de curva por uma reta nos seguintes pontos:

x	0	1	2	3	4
y	-5	0	5	12	24

Exemplo 3: Ajuste de curva por uma reta nos seguintes pontos:

x	0	1	2	3	4
y	-5	0	5	12	24

Assim, sendo y = ax + c a reta procurada, temos: $\begin{cases} 0a + c = -5 \\ 1a + c = 0 \\ 2a + c = 5 \\ 3a + c = 12 \\ 4a + c = 24 \end{cases}$

Quadrados mínimos via decomposição QR

Reescrevendo o sistema linear de equações como Ax = b, com $A \in \mathbb{R}^{5\times2}$ *e* b $\in \mathbb{R}^{5\times1}$ *obtemos* :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Quadrados mínimos via decomposição QR

Calculando a decomposição QR de A, obtemos:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.774597 \\ 0.182574 & 0.516398 \\ 0.365148 & 0.258199 \\ 0.547723 & 0 \\ 0.730297 & -0.258199 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 5.47723 & 1.82574 \\ 0 & 1.29099 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 25.92553 \\ -8.77876 \end{pmatrix}$$

Quadrados mínimos via decomposição QR

Calculando a decomposição QR de A, obtemos:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.774597 \\ 0.182574 & 0.516398 \\ 0.365148 & 0.258199 \\ 0.547723 & 0 \\ 0.730297 & -0.258199 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 5.47723 & 1.82574 \\ 0 & 1.29099 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 25.92553 \\ -8.77876 \end{pmatrix}$$

Resolvendo $\hat{R}x = c$:

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ -6.8 \end{pmatrix}$$

Quadrados mínimos via decomposição QR

Logo, a reta que melhor ajusta a curva é:

$$y \approx 7x - 6.8$$

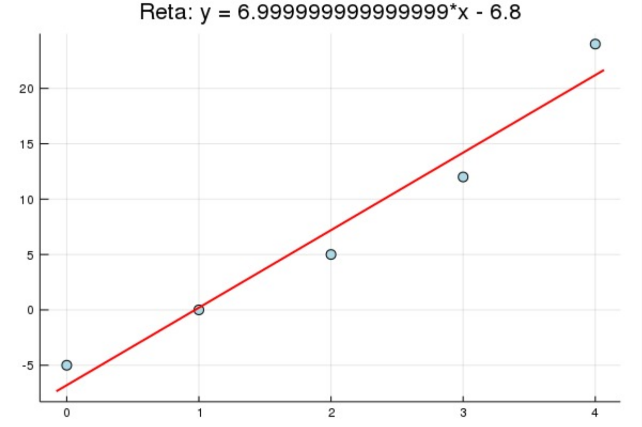

Figura 1: Gráfico do Exemplo 3.

Comparações de eficiência

Qual dos métodos de fatoração é computacionalmente melhor?
Vamos analisar os dados do exemplo anterior:

Comparações de eficiência

Qual dos métodos de fatoração é computacionalmente melhor?
Vamos analisar os dados do exemplo anterior:

	Tempo	Alocações	Memória
Gram-Schmidt	0.0000009651 segundos	24	2.66 KiB
Rotação	0.0000052995 segundos	151	16.78 KiB

Vemos que, para este exemplo, Gram-Schmidt é mais eficiente.
Vejamos agora outros exemplos:

Comparações de eficiência

Exemplo 4: Matriz esparsa 50×50 aleatória.

	Tempo	Alocações	Memória
Gram-Schmidt	0.0018660880 segundos	7760	4.482 MiB
Rotação	0.0000968360 segundos	255	227.344 KiB

Aqui, rotação de Givens é o método mais vantajoso.

Exemplo 4: Matriz esparsa 50×50 aleatória.

	Tempo	Alocações	Memória
Gram-Schmidt	0.0018660880 segundos	7760	4.482 MiB
Rotação	0.0000968360 segundos	255	227.344 KiB

Aqui, rotação de Givens é o método mais vantajoso.

Exemplo 5: Matriz densa 100×100 aleatória.

	Tempo	Alocações	Memória
Gram-Schmidt	0.0161613560 segundos	30580	29.833 MiB
Rotação	0.0524124630 segundos	99020	84.979 MiB

Desta vez, Gram-Schmidt teve melhor desempenho.

Comparações de eficiência

Voltamos a nossa pergunta inicial:

“É possível evitar o alto custo computacional do uso da inversa de matrizes?”

Comparações de eficiência

Voltamos a nossa pergunta inicial:

"É possível evitar o alto custo computacional do uso da inversa de matrizes?"

Exemplo 6: Matriz 5×5 aleatória.

	Tempo	Alocações	Memória
Gram-Schmidt	0.000009102 segundos	101	12.67 KiB
Rotação	0.000007645 segundos	90	12.06 KiB
$x = (A^tA)^{-1}A^tB$	0.0000207507 segundos	230	29.81 KiB

Conclusões

Como a decomposição QR por rotações de Givens depende da necessidade de zerar elementos, então com **matrizes esparsas** o gasto é mínimo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo de matriz esparsa (precisamos zerar apenas dois elementos)

Conclusões

Já para **matrizes densas**, Gram-Schmidt é melhor, pois agora o método da rotação não "pulará" entradas de A, e realizará portanto, muitas alocações.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 12 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 11 \\ 5 & 2 & \pi & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusões

Por fim, podemos afirmar que a escolha do método de decomposição QR depende das características da matriz escolhida.

Entretanto é sempre uma vantagem preferir QR à inversão de matrizes, devido à economia de tempo, alocações e memória.

Objetivos futuros

Objetivos futuros

$\rightarrow$ Criar uma alternativa computacional ao método das Reflexões de Householder. Para isso:

- Desenvolver uma função seletora dos métodos estudados
- Diminuir o gasto de memória

Referências

[1] ARAUJO, T. P. *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações: 1. Ed*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[2] STRANGE, G. *Introduction to Linear Algebra: 4. Ed*. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 2009.

[3] WATKINS, D. S. *Fundamentals of Matrix Computations: 2. Ed*. New York: Wiley-Interscience, 2002.

https://github.com/dycksont/Fatoracao-QR-e-Quadrados-Minimos

Obrigado!