

# Decomposição QR para resolver problemas de Quadrados Mínimos

Dyckson Ternoski <sup>\*</sup>, Marina Sayuri Vieira <sup>†</sup>, Monique Baptista Fragozo <sup>‡</sup>  
e Otávio Dittrich Moreira <sup>§</sup>

Bacharelado em Matemática - UFPR

*dycksonternoski@hotmail.com*, *marinasayuri16@gmail.com*, *mbaptistafragozo@gmail.com*  
e *otaviodittrich@gmail.com*

Prof. Dr. Abel Soares Siqueira (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

*abelsiqueira@ufpr.br*

**Palavras-chave:** Quadrados Mínimos, Matrizes, Decomposição QR

## Resumo:

Tendo pontos  $(t_i, y_i), i = 1, \dots, n$ , obtidos em uma certa coleta de dados, buscamos uma função linear  $p(t) = a_0 + a_1 t$  tal que  $p(t_i) = y_i$ . Na prática, porém, esses pontos não serão colineares, tornando-se impossível encontrar a função  $p(t)$  que passe por todos eles. Então, em vez disso, buscamos a reta que melhor aproxime esses pontos, ou seja, a reta que minimize o erro  $|y_i - p(t_i)|$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Isso é equivalente a minimizar a soma dos quadrados dos resíduos e, por esse motivo, nosso problema é chamado de *Problema de Quadrados Mínimos*.

De forma genérica, considerando o sistema  $Ax = b$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ , se  $n > m$ , temos um sistema com mais equações do que incógnitas que pode não ter solução. Nesse caso, podemos utilizar dos Quadrados Mínimos para encontrar uma solução aproximada. Basta encontrar o mínimo:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|Ax - b\|_2^2$$

No entanto, resolver tal problema envolve calcular inversa de matrizes, o que é computacionalmente custoso. Assim, podemos utilizar de uma ferramenta para nos ajudar: a *Decomposição QR*! Ela consiste em decompor a matriz  $A$  em um produto de outras duas matrizes  $Q$  e  $R$ , ortogonal e triangular superior respectivamente.

Essa decomposição pode ser encontrada de diversos modos, entre eles estão rotações de Givens e o processo de Gram-Schmidt.

---

<sup>\*</sup>Bolsista do Programa PICJR (AL)

<sup>†</sup>Bolsista do Programa PET-Matemática

<sup>‡</sup>Bolsista do Programa PET-Matemática

<sup>§</sup>Aluno do Programa PICME

Em nosso trabalho, utilizamos a linguagem de programação Julia para implementar a resolução do Problema de Quadrados Mínimos por meio da decomposição QR, para mostrar como essa tal "ferramenta" nos ajuda. A decomposição foi feita pelos dois métodos citados acima, os quais serão analisados, comparando o tempo e memória gastos por cada um.

#### **Referências:**

- [1] WATKINS, D. S. **Fundamentals of Matrix Computations**: 2. Ed. New York: Wiley-Interscience, 2002.
- [2] ARAUJO, T. **Álgebra Linear**: Teoria e Aplicações 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [3] STRANG, G. **Introduction to Linear Algebra**: 4. Ed. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 2009.