第十章

曲线积分和曲面积分

第十章 曲线积分和曲面积分

10.1 对弧长的曲线积分

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$$ 线密度 × 弧长微元

在L是闭曲线时，常记作 $\oint_L f(x,y)ds$

性质：

1. 线性性 $\int_L [k_1 f(x,y)+k_2 g(x,y)]ds = k_1\int_L f(x,y)ds + k_2\int_L g ds$
2. 可加性 $\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds$
3. $L = \int_L 1\cdot ds = \int_L ds$ （均匀密度）
4. 保号性 $\int_L f(x,y)ds \geq 0$
5. 估值定理 $mL \leq \int_L f(x,y)ds \leq ML$
6. 积分中值定理 $\int_L f(x,y)ds = f(\xi,\eta)\cdot L$

计算：

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $\alpha\leq t\leq\beta$ $\quad \int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

若 $y=\psi(x)$ $\quad \int_{x_0}^{X} f(x,\psi(x))\sqrt{1+(\psi'(x))^2}\,dx$

$x=\varphi(y)$ $\quad \int_{y_0}^{Y} f(\varphi(y),y)\sqrt{(\varphi'(y))^2+1}\,dy$

$\begin{cases} x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$ $\alpha\leq\theta\leq\beta$ $\quad \int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta]\sqrt{\rho_\theta^2+\rho_\theta'^2}\,d\theta$

$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

对称性与轮换对称性

1. 对称性

y轴对称： $\int_L f(x,y)ds = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)ds & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$

x轴对称 $\int_L f(x,y)ds = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)ds & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$

关于xoy对称 $\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds & f(x,y,-z)=f(x,y,z) \\ 0 & f(x,y,-z)=-f(x,y,z) \end{cases}$

2、轮换对称性

$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_\Gamma f(y,z,x)ds = \int_\Gamma f(z,x,y)ds$
$= \frac{1}{3}\int_\Gamma [f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)]ds$

$\int_\Gamma f(x)ds = \int_\Gamma f(y)ds = \int_\Gamma f(z)ds = \frac{1}{3}\int_\Gamma [f(x)+f(y)+f(z)]ds$

物理应用

Γ的质量 $M = \int_\Gamma \mu(x,y,z)ds$

$I_x = \int_\Gamma (y^2+z^2)\mu(x,y,z)ds$

$I_y = \int_\Gamma (x^2+z^2)\mu(x,y,z)ds$

$\bar{x} = \frac{\int_\Gamma x\mu(x,y,z)ds}{M}$ $\quad \bar{y} = \frac{\int_\Gamma y\mu(x,y,z)ds}{M}$

质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

10.2 对坐标的曲线积分计算

1. 引入：变力曲线做功

$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{F(\xi_i,\eta_i)}_{F}\underbrace{M_{i-1}M_i}_{S} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)i + Q(\xi_i,\eta_i)j]\,[\Delta x_i i+\Delta y_i j]$

2. 定义： $\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ L积分弧长，有向

三维： $\int_\Gamma P(x,y,z)dx \quad \int_\Gamma Q(x,y,z)dy \quad \int_\Gamma R(x,y,z)dz$

$\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_L F(x,y)dr$

3. 性质：(1) $\int_L (\alpha F_1(x,y)+\beta F_2(x,y))dr = \alpha\int_L F_1(x,y)dr + \beta\int_L F_2(x,y)dr$

(2) $\int_L F(x,y)dr = \int_{L_1} F(x,y)dr + \int_{L_2} F(x,y)dr$

(3) L^- 与L反向 $\int_L F(x,y)dr = -\int_{L^-} F(x,y)dr$

4. 计算： $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha\sim\beta$ $\quad \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\}dt$

$y=\psi(x)$ $\quad \int_\alpha^\beta \{P(x,\psi(x)) + Q(x,\psi(x))\psi'(x)\}dx$

$x=\varphi(y)$ $\quad \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(y),y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y),y)\}dy$

三维： $\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ $\quad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=w(t) \end{cases}$

$= \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t),w(t))\varphi'(t) + Q\psi'(t) + Rw'(t)\}dt$

5、两类联系

第一类	第二类
$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$	$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
$f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ $= f()\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}$	$P\Delta x+Q\Delta y$ $= \left(P\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}} + Q\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}}\right)\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}$ $= (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}$

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

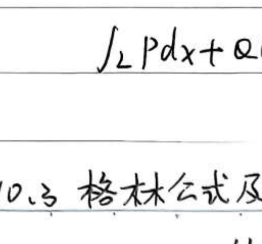
$= \int_\alpha^\beta (P(\varphi(t),\psi(t))\cos\alpha + Q(\varphi(t),\psi(t))\cos\beta)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

$= \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]ds$

$\int_L Pdx+Qdy = \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$ $\quad \int_\Gamma \vec{A}d\vec{r} = \int_\Gamma (\vec{A}\cdot e_r)ds$

10.3 格林公式及其应用

牛-莱公式 $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$



a-b均参与运算 → a,b 端点

推广

D内均参与 → □ 四边参与 ：格林公式

单连通区域：在平面D内画任一闭曲线，所围部分均属于D

复连通区域：平面D有洞 (··)，画曲线所围不属于D

正方向：D在左侧 外侧逆时针，内侧顺时针

格林公式.

闭区域D由分段光滑的曲线L围成，$P(x,y)Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导.

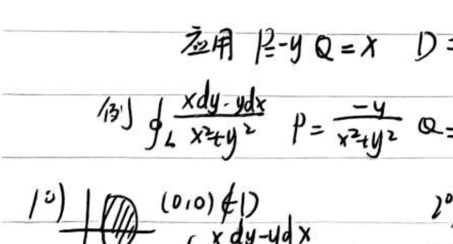
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx+Qdy$$

L:D正向边界曲线 D的二重积分 L闭曲线的曲线积分

计算 ①右→左 ②左→右

应用 $P=-y$ $Q=x$ $D=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$ 计算平面区域D的面积公式

例 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$ $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$



1°) $(0,0)\notin D$ $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$

2°) $(0,0)\in D$. 取适当小 $r>0$ $l: x^2+y^2=r^2$

$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$

$\therefore \oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r\cos\theta r\cos\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta$

$= 2\pi$

平面曲线积分与路径无关的条件

D为单连通区域，$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导

(1) $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$

(2) D内 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与积分路径L无关

(3) D内∃ $u(x,y)$，使 $\underbrace{du(x,y)}_{\text{全微分}} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

(4) D内 ∀ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 以上四条件等价

曲面积分

10.4 对面积的曲面积分

1. 引入：求曲面，有$\rho(x,y,z)$密度，求质量

$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$

2. 定义 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k = \iint_\Sigma f(x,y,z)ds$ 第一类曲面积分

若$f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续，则上式存在

3. 性质： $\iint_\Sigma f(x,y,z)ds = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2}$ $\quad \iint_\Sigma [k_1 f() \pm k_2 g()]ds = k_1\iint_\Sigma + k_2\iint_\Sigma$

4. 计算： $\iint_\Sigma f(x,y,z)ds = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dxdy$

（二重积分）D_{xy}为Σ在xoy面的投影面积. ①投 ②代换 ③微变

性质补： $\iint_\Sigma f(x,y,z)ds = \iint_{-\Sigma} f(x,y,z)ds$

奇偶性：若关于xoy对称.

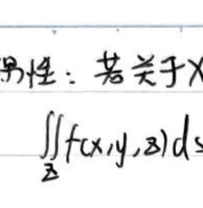
$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_{z\geq 0}} f(x,y,z)ds & \text{，关于z为偶函数} \\ 0 & \text{，关于z为奇函数} \end{cases}$

10.5 对坐标的曲面积分

1、侧

正侧：上/右/前 负侧：下/左/后 （正—正方向 负—负方向）

2、投影



$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma>0, \text{上侧} \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma<0, \text{下侧} \\ 0, & \cos\gamma=0 \end{cases}$ （有向曲面取上侧）

同理有上侧/右侧/前侧

3、对坐标的曲面积分

①定义：光滑有向曲面，$R(x,y,z)$有界，分成小块ΔS_i在xoy面投影是$(\Delta S_i)_{xy}$，$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} = \iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$

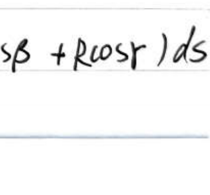
（dxdy/指定侧：对坐标 ds：对面积）

对y,z： $\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz$ 对zx $\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx$

$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$

②计算

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$



若下侧：加负号

10.6 两类曲面积分的联系

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$ (对坐标) $= \iint_\Sigma R(x,y,z)\cos\gamma ds$

$dydz - \cos\alpha ds$ $\quad dzdx - \cos\beta ds$ $\quad \cos\alpha,\beta,\gamma$ 法向量的方向余弦

$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

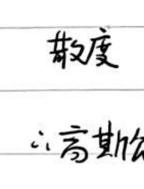
10.6 高斯公式

$\underset{\Sigma}{\oiint} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \underset{\Sigma}{\oiint}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

Σ 对坐标·光滑闭曲面，有向 外侧 $\quad$ Σ 对面积 $\quad$ （Σ为立体的表面）

$= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$ （Ω为立体的体积）

空间闭区域 $\quad$ 三重积分 $\quad$ 体积→表面



用高斯公式要补顶面(上侧)，算完要减顶面(上侧)

通量与散度

通量 $\Phi = \iint_\Sigma \vec{A}d\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{A}\vec{n}^\circ ds = \iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

散度 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$，记 $\mathrm{div}\vec{A}$

∴高斯公式可写 $\iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{A}dv = \underset{\Sigma}{\oiint}\vec{A}\cdot\vec{n}^\circ ds$

10.7 斯托克斯公式

Γ空间有向闭曲线，Σ：以Γ为边界的有向曲面

$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

$= \oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$

$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds$