第六章

样本及抽样分布

Date

第6章

6.1总体与样本

总体X：全体内有个体，个体有限：有限总体，否则为无限总体

样本：抽样，$(X_1, \cdots, X_n)$，抽出的 $x_1 \cdots x_n$ 为观测量

简单随机抽样 (1)同分布（等概率） (2)独立

样本的分布 $(X_1 \cdots X_n)$ $F(x_1, \cdots x_n) = F(x_1)F(x_2)\cdots F(n)$

$P(X_1=x_1 \cdots X_n=x_n) = P(X=x_1)\cdots P(X_n=x_n)$ $f(x_1 \cdots x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n)$

6.2.1 统计量的定义

：不含任何未知参数的样本的函数

6.2.2 常用统计量：

1. 样本均值：$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ （一阶原点矩）
2. 未修正的样本方差 $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ （二阶中心矩）
3. 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
4. 样本的标准差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$
5. 样本k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$
6. 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$

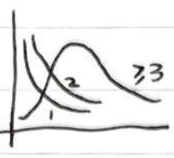
协方差 $S_{12} = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$ $R = \frac{S_{12}}{S_1 S_2}$ 相关系数

定理：总体X均值 $E(X) = \mu$ $D(X) = \sigma^2$，样本

$E(\overline{X}) = \mu$ $D(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2$ $ES^2 = \sigma^2$

6.3 抽样分布. 统计量的分布

1. 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$
2. χ^2分布 $\chi^2(n)$ n:自由度



1) $\chi^2(2)$：$\lambda = \frac{1}{2}$ 的指数分布

2°) 单峰曲线，$n-2$时取最大值，不对称，n越大可正态

定理：$X_1 \cdots X_n$ 独立，$\overset{\text{服从}}{N}(0,1)$，$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = \chi^2(n)$

$E(X) = n$ $D(X) = 2n$

由中心极限定理 $X \sim \chi^2(n)$，n充分大，$\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$ 近似 $N(0,1)$

定理：$X \sim \chi^2(n)$ $Y \sim \chi^2(m)$ XY独立 $X+Y \sim \chi^2(m+n)$

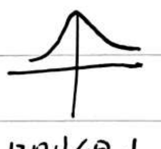
可推广至n个相加

上α分位数 $P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)) = \alpha$

$\chi^2_{0.05}(10) = 18.3$

概率 n >18.3

3. t分布（学生分布）



$X \sim t(n)$

$n \geq 30$ 与正态分布区别很小、

定理：$X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2(n)$ XY独立 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

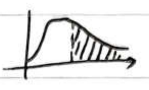
上α分位数 $P(T > t_\alpha(n)) = \alpha$  $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

Date

4. F分布 $F(n_1, n_2)$

定理 $X \sim \chi^2(n_1)$ $Y \sim \chi^2(n_2)$ 独立 $\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$

$F \sim F(n_1, n_2)$ $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

上α分位数 $P(F > F(n_1, n_2)) = \alpha$  $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

6.3.2 正态总体下的抽样分布

① $X_i \sim N(0,1)$ $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$
② $X \sim \chi^2(n)$ $Y \sim \chi^2(m)$ $X+Y \sim \chi^2(n+m)$
③ $X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2(n)$ $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$
④ $X \sim \chi^2(n_1)$ $Y \sim \chi^2(n_2)$ $\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$

总体是正态分布，抽样本，构造统计量分布

⑤ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ $\overline{X}$与S^2独立

⑥ $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \underset{\text{总体期望}}{\mu})^2 \sim \chi^n(n)$ $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

⑦ 两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\{X_1 \cdots X_{n_1}\}$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\{Y_1 \cdots Y_{n_1}\}$

1) $\frac{(\overline{X}-\overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$ 2) $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

3) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$时 $T = \frac{(\overline{X}-\overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$