第三章

多维随机变量及其分布

Date

第三章 多维随机变量及其分布

3.1 二维随机变量

1、E试验 Ω空间 X Y是Ω的两变量 (X,Y)，二维随机变量

联合分布函数 $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$ 体积

性质：$0\le F(x,y)\le 1$ $F(-\infty,y)=0$ $F(x,-\infty)=0$

$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$

边缘分布

$F_X(x)=P\{X\le x\}=F(x,+\infty)=P\{X\le x, Y<+\infty\}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=F(-\infty,x)=P\{X<+\infty, Y\le y\}$

2、二维离散型的联合分布，边缘分布

X\Y	1	2	3
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

分布表 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=P_{ij}$

(1) $P_{ij}\ge 0$ (2) $\sum_i\sum_j P_{ij}=1$ $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\sum\sum P_{ij}$

X	1	2
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

边缘分布表 X：$\Longrightarrow$ 求和

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$

对行求和，得X边缘
对列求和，得Y边缘

X\Y	1	2	3	$P_i^{(1)}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$P_j^{(2)}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	

① 联合分布可唯一确定边缘分布
② 边缘分布不能确定联合分布
（仅X，Y独立可确定）

3、二维连续的联合密度和边缘密度

$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,ds\,dt$

$f(x,y)$ 联合密度

① $f(x,y)\ge 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots=1$ ③ $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

KOKUYO

④ G是XY平面的区域 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

二维区域均匀分布：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(G)}, & (x,y)\in G\\ 0, & else\end{cases}$

$S(G)=\pi G^2$

例：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x>0, y>0\\ 0 & else\end{cases}$

(1) $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,ds\,dt=(1-e^{-x})(1-e^{-y})$

(2) $P\{(x,y)\in G\}=\iint f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{-(x+y)}dy=1-2e^{-1}$

(3) $F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=1-e^{-x}$ $F_Y(x)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$

4、二维连续型随机变量的边缘密度函数

$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(s,t)\,dt\right]ds$ $\left(\int_a^{f(x)}g(t)dt\right)'=f'(x)g(f(x))$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s,y)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

① 二维正态分布的边缘分布也是正态分布
② 两边缘分布是正态，二维并非一定正态

3.2.1 条件分布

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

$F(x|A)=P\{X\le x|A\}=\frac{P(A, X\le x)}{PA}$

PA

3.2.2 离散型的条件分布

X_1\X_2	0	1
0	0.1	0.3
1	0.3	0.3

$P\{X_2=0|X_1=0\}=\frac{0.1}{0.1+0.3}=0.25$

$P\{X_1=1|X_2=0\}=\frac{0.3}{0.1+0.3}=0.75$

3.2.3 连续型的条件分布

定义：(X,Y) $f(x,y)$ $f_X(x)$ $f_Y(y)$ 已知，若 $f_Y(y)>0$，当 $Y=y$ 条件下

$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $F(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$

$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ $F(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$

$P\{X\le x|Y=y\}=\frac{P\{X\le x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P\{X\le x, y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}$

$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}f(u,v)\,du\,dv}{\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}f_Y(v)\,dv}$ 由积分中值

$=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)\,du}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$

3.2.4 随机变量的独立性

独立性：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

$P\{X\in S_x, Y\in S_y\}=P\{X\in S_x\}P\{Y\in S_y\}$

二维离散型独立性：

X\Y	0	1	
0	0.2	0.3	0.5
1	0.2	0.3	0.5
	0.4	0.6	

$0.4\times 0.5=0.2$
$0.6\times 0.5=0.3$
…… 则独立

二维连续型独立性：同上

如果变量独立，由变量构造的函数也独立

3.3 二维随机变量函数的分布

3.3.1 二维离散型随机变量函数的分布

X\Y	4	4.2
5	0.2	0.4
5.1	0.3	0.1

$Z=XY$

Z	20	20.4	21	21.42
P	0.2	0.3	0.4	0.1

X_1, X_2 独立，X_1, X_2 0-1分布 X_1+X_2，X_1X_2 均为

X_1X_2	0	1	2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$X_1+X_2\sim B(2,p)$

X,Y 独立，λ_1,λ_2 泊松分布 $Z=X+Y$ $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$\{Z=k\}=\bigcup_{i=0}^{k}\{X=i, Y=k-i\}$ $Z=10$

$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i, Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$

$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

λ_1, λ_2 泊松具有可加性，为 $\lambda_1+\lambda_2$ 泊松分布

3.3.2 二维连续变量函数分布

(X,Y) $f(x,y)$ 联合密度，求 $Z=g(x,y)$

(1) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(x,y)\le z\}=\iint_{D_z}f(x,y)\,dx\,dy$ $D_z=\{(x,y)|g(x,y)\le z\}$

(2) 求导 $f_Z(z)=\cdots$

特殊1：$Z=X+Y$

卷积公式 $\begin{cases}f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx\\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\,dy\end{cases}$

$X\sim N(0,1)$ $Y\sim N(0,1)$（独立） X,Y独立 $Z=X+Y$ $Z\sim N(0,2)$（正态）

正态分布可加性 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$M=\max\{X,Y\}$ $N=\min\{X,Y\}$

$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$ $F_N(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$
$Y=aX+b$ $Y\sim N(a\mu+b, a^2\mu^2)$

$Y=aX+b$ $f_X(x)$

$f_Y(x)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$

二项分布 $X\sim B(n,p)$

泊松分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

几何分布 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$

超几何分布 $P\{X=k\}=\frac{C_n^k C_n^{n-k}}{C_N^n}$

均匀分布 $X\sim U[a,b]$

指数分布 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$

正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\lambda_1+\lambda_2$ 为泊松

$P\{Z=k\}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$
$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$

$X+Y$：$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$ $M=\max\{X,Y\}$
$N=\min\{X,Y\}$
$F_N(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源