第十一章

无穷级数

第十一章 无穷级数

11.1 常数项级数的概念和性质

$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 无穷级数 u_n一般项

前n项和 $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ 部分和

定义 $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$，收敛　发散　余项：$r_n = S - S_n = u_{n+1} + \cdots$

等比(几何)级数 $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$　$a \neq 0$ q公比

① $|q| \neq 1$ $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ $\begin{cases} |q|<1 & \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \\ |q|>1 & \lim_{n\to\infty} S_n \text{ 发散} \end{cases}$

$|q|<1$ 收

$|q| \geq 1$ 发　② $|q| = 1$ $\begin{cases} q=1 & \text{发散} \\ q=-1, & \text{分奇偶，发散} \end{cases}$

性质 1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 kS

2) 收敛于 S, σ，则 $\sum(u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S \pm \sigma$

收敛加减仍收敛，加减后收敛未必收敛

3) 加/去掉有限项，敛散性不变

4) $\sum u_n$ 收敛，任意加括号所得级数也收敛，且和不变

加括号后收敛，原未必收敛；加括号后发散，原级数发散

5) $\sum u_n$ 收敛，$u_n \to 0$　$u_n \not\to 0$ 发散 $u_n \to 0$ 不一定收敛

调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 发散!!!

11.2 正项级数

$\forall n, u_n \geq 0$　$\{S_n\} \geq 0$，不减

1. $\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有界

2. $\sum u_n$，$\sum v_n$ 均正项，且 $u_n \leq v_n$ $\begin{cases} \sum v_n \text{ 收}, \sum u_n \text{ 收} \\ \sum u_n \text{ 发}, \sum v_n \text{ 发} \end{cases}$

(比较审敛) ① $\sum u_n$ 收，$\sum v_n$ 不一定收 ② $\sum v_n$ 发，$\sum u_n$ 不一定发

P-级数：$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$　① $p \leq 1$ $n^p \leq n$ 发散 P级数

② $p > 1$ 收敛

等比，调和，P 做标准

11.3 正项级数及其审敛法

2、极限改进的比较审敛法 $\begin{cases} \text{原有问题：要比大小，要放缩，要构造函数} \\ \downarrow \text{现：只要找函数} \end{cases}$

$\sum u_n$，$\sum v_n$ 均为正项级数 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ $(0 < l < +\infty)$ $\sum v_n$ 收敛 u_n 也收

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ (l 0或$+\infty$) $\sum v_n$ 发散，$\sum u_n$ 也发散

$l = +\infty$，$\sum v_n$ 收，$\sum u_n$ 无法判　$l = 0$，$\sum v_n$ 发，$\sum u_n$ 无法判

和等比 $\sum aq^{n-1}$，调和 $\sum \frac{1}{n}$，P级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 比较

3. 比值审敛法 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

$0 \leq \rho < 1$ 收敛　$\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 发散　$\rho = 1$ 可能收/发

4. 根值审敛法 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$0 \leq \rho < 1$ 收敛　$\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 发散，$\rho = 1$ 无法判断

5. 积分判别法 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 非负递减，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同收/发

11.4 交错级数及其审敛法

交错 $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \cdots$ / $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \cdots$ $(u_n \geq 0)$

莱布尼茨定理：有交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n$

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ (2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数收敛，$S \leq u_1$ $|r_n| \leq u_{n+1}$

11.5 任意项级数及其敛散性

任意项：$u_1 + u_2 + \cdots$　u_n 不知正负

$|u_1| + |u_2| + \cdots$ 绝对值级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛

定理：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛

定理：任意项级数 $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$，$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$ $\begin{cases} l<1 \text{ 时，绝对收敛} \\ l>1 (+\infty) \text{ 时，} \sum u_n \text{ 发散} \\ l=1 \text{ 无法判断} \end{cases}$

11.6 幂级数

函数列，与n，x有关 $u_1(x)$ $u_2(x)$ $\cdots$ $u_n(x)$

$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ 函数项无穷级数

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ 幂级数 $a_0 \cdots a_n$ 系数

$\exists x_0 \in I$，$u_1(x_0) + \cdots + u_n(x_0)$ 收敛，x_0 称收敛点，构成收敛域

$\exists x_0 \in I$ $u_1(x_0) + \cdots + u_n(x_0)$ 发散，x_0 称发散点，构成发散域

$S(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$ 和函数　余项 $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$

1. 收敛域是什么　2、和函数 $S(x)$ 是什么

$1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ $\begin{cases} |x|<1 \text{ 时 收敛域 } (-1,1) \\ |x| \geq 1 \text{ 时 发散域 } (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases}$

定理(阿贝尔定理) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$，如果 $x = x_0$ 收敛，$|x| < |x_0|$，绝对收敛

发 | 收 | 发 (-2, 2) $-2, 2$ 收敛　如果 $x = x_0$ 时发散，$|x| > |x_0|$，发散

推论 收敛情况 $\begin{cases} \text{① } x=0 \text{ 收敛} \\ \text{② } x \in (-\infty,+\infty) \text{ 收敛} \\ \text{③ } |x|<R \text{ 绝对收敛} \\ \quad -R, R \text{ 处可能收/发} \end{cases}$　R：收敛半径　$(-R,R)$ 收敛区间　收敛域 $(-R,R)$ $[-R,R)$ $(-R,R]$ $[-R,R]$

求R：定理2 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$　$R \begin{cases} = \frac{1}{\rho} & \rho \neq 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ = 0 & \rho = +\infty \end{cases} \to R = \frac{1}{\rho}$

算出R后 算 $-R$，R 的敛散性，得出收敛域

只有偶数项/奇数项 不能用

幂级数的运算

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$　$x \in (-R, R)$　$c_n = a_n \pm b_n$

(2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$　$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots$

(3) $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$　$a_n = c_0b_n + c_1b_{n-1} + \cdots + c_nb_0$

性1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 和函数 $S(x)$ 在收敛域I上是连续的

性2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在 I 可积　$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_nt^n \, dt$

逐项求积分后与原幂级数收敛半径不变，端点处重新考虑

性3) $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 可导 $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_nx^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}$，同上

11.7 函数展开成幂级数

求和函数 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ 函数展成幂级数（如泰勒展开）

泰勒级数 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$　$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$

成立条件 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

麦克劳林展开 $(x_0 = 0)$　$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$　$x \in (-r, r)$

① $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$　$(-\infty < x < +\infty)$

② $\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$　$(-\infty < x < +\infty)$

③ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$　$(-1 < x < 1)$

④ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)x^n$　$(-1 < x < 1)$

⑤ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$　$(-1 < x \leq 1)$

⑥ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$　$(-\infty < x < +\infty)$

⑦ $a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n(\ln a)^n}{n!}$　$(-\infty < x < +\infty)$

⑧ $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$　$(-1 < x < 1)$

⑨ $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$　$(-1 \leq x \leq 1)$

11.5 傅里叶级数

1. 周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数

傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & (n = 0, 1, 2 \cdots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & (n = 1, 2 \cdots) \end{cases}$

$f(x)$ 的傅里叶级数的收敛性判断：

狄利克雷收敛定理：2π 周期，在 $[-\pi, \pi]$ 满足

(1) 连续或只有有限个第一类间断点

(2) 至多只有有限个极数点

则收敛，$\begin{cases} x \text{ 是 } f(x) \text{ 的连续点：收敛于 } f(x) \\ x \text{ 是 } f(x) \text{ 第一类间断点：收敛于 } \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] \end{cases}$

2. 正弦级数和余弦级数

$f(x)$ 奇：$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2 \cdots) \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & (n = 1, 2 \cdots) \end{cases}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$f(x)$ 偶 $\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & (n = 0, 1, 2 \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2) \end{cases}$

$\therefore \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

3. 函数展开成正弦级数或余弦级数

奇延拓：$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \pi \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$　偶延拓 $F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$

将 $f(x)$ 补为奇函数

4、一般周期函数的傅里叶级数 $(2l)$

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，则为

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right)$

$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx & (n = 0 \cdots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx & (n = 1 \cdots) \end{cases}$

收敛于 $f(x)$ / $\frac{1}{2} f(x^-) + f(x^+)$

$f(x)$ 奇：$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$　$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ $(n = 1, 2 \cdots)$

$f(x)$ 偶：$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$　$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$