第九章

正弦稳态电路的分析

第九章 正弦稳态电路的分析

9.1 阻抗和导纳

① 欧姆定律的向量形式

$Z \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\dot U}{\dot I} = |Z|\angle\varphi_z \ (\Omega)$　阻抗模 $|Z| = \dfrac{U}{I}$　阻抗角 $\varphi_z = \psi_u - \psi_i$

电阻 $Z = R$　电容 $Z = -j\dfrac{1}{\omega C} = jX_C$（容抗）　电感 $= j\omega L = jX_L$（感抗）

② RLC 串联电路　$Z = \dfrac{\dot U}{\dot I} = R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C} = R + jX = |Z|\angle\varphi_z$

$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2+X^2} & (X\text{电抗}, R\text{电阻}) \\ \varphi_z = \arctan\dfrac{X}{R} \end{cases}$　阻抗三角形（$|Z|$, X, R）

相量图：串联（KVL）选电流为参考，$\varphi_i = 0$

① $\dot U_L$, $\dot U_C$, $\dot U$, $\dot U_R$, $\dot I$ → 等效（$\dot U_R$, $\dot U_X$）　$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$

② $U = \sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}$　$\dot U_R$, $\dot I$, $\dot U$, $\dot U_L$, $\dot U_C$ →（$\dot U_R$, $\dot U_X$）

③ $\dot U_L$, $\dot U_C$, $\dot U_R$ →（$\dot I$, $\dot U$, $\dot U_R$）

③ 导纳　$Y = \dfrac{\dot I}{\dot U} = |Y|\angle\varphi_y \ (S)$　$|Y| = \dfrac{I}{U}$（导纳模）　$\varphi_y = \psi_i - \psi_u$（导纳角）

电阻 $Y = G$　电导 $Y = -\dfrac{1}{j\omega L} = jB_L$（负值虚）感纳　电容 $Y = j\omega C = jB_C$（正值虚）容纳

④ RLC 并联电路（KCL）　$Y = \dfrac{\dot I}{\dot U} = G + j\omega C - j\dfrac{1}{\omega L} = G + jB = |Y|\angle\varphi_y$（电导，电纳）

$\begin{cases} |Y| = \sqrt{G^2+B^2} & |Y|\text{复导纳模} \\ \varphi_y = \arctan\dfrac{B}{G} & G\text{电导 } B\text{电纳} \end{cases}$　导纳△（$|Y|$, B, G）

相量图 ① $\dot I_L$, $\dot I_C$, φ_y, $\dot I_G$, $\dot U$　$I = \sqrt{I_G^2 + (I_C - I_L)^2}$　分电流可大于总电流

② $\dot I_G$, $\dot U$, $\dot I$, $\dot I_L$　$I = \sqrt{I_G^2 + (I_L - I_C)^2}$

③ $\dot I_C$, $\dot I_L$, $\dot I_G$, $\dot U$

⑤ 复阻抗和复导纳的等效互换

Z　Y

$Z = R + jX$　$Y = G + jB$　（Z: R, jX → Y: G, jB）

$= |Z|\angle\varphi_z$　$= |Y|\angle\varphi_y$　一般 $G \neq \dfrac{1}{R}$　$B \neq \dfrac{1}{X}$

$G = \dfrac{R}{R^2+X^2}$　$B = \dfrac{-X}{R^2+X^2}$　$|Y| = \dfrac{1}{|Z|}$　$\varphi_y = -\varphi_z$

1°）一端口 N_0 的阻抗/导纳是由其内部参数、结构和正弦电源频率决定的，在一般情况下，其每一部分均有频率有关

2°）一端口 N_0 不含受控源，有 $|\varphi_z| \le 90°$ 或 $|\varphi_y| \le 90°$

有受控源时 $|\varphi_z| > 90°$ 或 $|\varphi_y| > 90°$（R、G 为负值）

3°）Z 和 Y 在一端口 N_0 有同等效果，并有 $ZY = 1$

$|Z||Y| = 1$　$\varphi_z + \varphi_y = 0$

⑥ 阻抗（导纳）的串联和并联　阻抗 Z 电感 R L　导纳 Y G 电容 C

① 阻抗串联 $Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k$　$\dot U_i = \dfrac{Z_i}{Z}\dot U$（分压公式）

② 导纳并联 $Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$　$\dot I_i = \dfrac{Y_i}{Y}\dot I$（分流公式）

③ 阻抗并联 $\dfrac{1}{Z} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{Z_i}$

④ 导纳串联 $\dfrac{1}{Y} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{Y_i}$

感性容性：$Z = R + jX$　$X<0$：容性　$X>0$ 感性

若 $R = 0$，则纯感/容性.

9.2 电路的相量图 —电压电流 on 复平面

1. 判断电路框架（KVL, KCL）
2. 确定参考相量（I/U 为 0° 相量）
3. 不分顺序，依次绘制方程相量（合理选择顺序）

9.3 正弦稳态电路的分析

9.4 正弦稳态电路的功率

1. 瞬时功率

有（u, I, 无源网络）　$u(t) = \sqrt2 U\cos\omega t$　$i(t) = \sqrt2 I\cos(\omega t - \varphi)$

$p(t) = UI[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]$

$= UI\cos\varphi(1+\cos2\omega t) + UI\sin\varphi\sin2\omega t$

第一种分解方法　$p(t) = \underbrace{UI\cos\varphi}_{<UI \text{ 恒定分量}} + \underbrace{UI\cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{在}-UI\text{与}UI\text{间波动 正弦分量}}$　∴ P 时正时负，$p>0$ 吸收　$p<0$ 发出

第二种分解法　$p(t) = \underbrace{UI\cos\varphi(1+\cos2\omega t)}_{0 - 2UI\cos\varphi\text{间}} + \underbrace{UI\sin\varphi\sin2\omega t}_{-UI - +UI}$　有部分能量在电源、一端口间来回交换

2. 平均功率　$P = \dfrac{1}{T}\int_0^T p\,dt = UI\cos\varphi \ (W)$

$\varphi = \psi_u - \psi_i$：功率因数角。对无源网络，为其等效阻抗的阻抗角

$\cos\varphi$：功率因数 λ

$\cos\varphi = 1$：纯电阻　$\cos\varphi = 0$，$\varphi = \pm90°$，纯电抗（电容/电感）

$X>0$，$\varphi>0$ 感性　$X<0$ $\varphi<0$ 容性

平均功率是电阻消耗的功率，亦称有功功率，表示电路实际消耗的功率

3. 无功功率 Q

$Q \overset{\text{def}}{=} UI\sin\varphi$，单位 var　以感性为例 $Q_L = \dfrac{2\pi}{T}W_{max}$

$Q>0$：网络吸收无功功率　$Q<0$ 网络发出无功功率

Q 大小反映网络与外电路交换功的速率，由 C L 决定

4. 视在功率 S

$S \overset{\text{def}}{=} UI$　单位 VA（伏安）　电气设备的容量

5. $\sqrt{P^2+Q^2} = S$　功率三角形（S, Q, P, φ）　$\tan\varphi = \dfrac{Q}{P}$

功率因数 $\lambda = \cos\varphi_z \le 1 = \dfrac{P}{S}$　一般整个电路 PQ 守恒 S 不守

电阻：电压电流同相　电感：电压正交超前电流　电容：电流超前电压

$P_R = UI\cos0 = U^2/R$　$P_L = UI\cos90° = 0$　$P_C = UI\cos(-90°) = 0$

（阻抗形）$Q_R = UI\sin0 = 0$　$Q_L = UI\sin90° = I^2X_L = U^2/X_L$　$Q_C = -UI = I^2X_C = U^2/X_C$

6. 任意阻抗的功率计算

$P_Z = UI\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$　$Q_Z = UI\sin\varphi = I^2X = I^2(X_L + X_C)$

$= Q_L + Q_C$

$Q_L = I^2X_L > 0$ 吸收无功为正

$Q_C = I^2X_C < 0$ 吸收无功为负　$S = \sqrt{P^2+Q^2} = I^2\sqrt{R^2+X^2} = I^2|Z|$

∴ 功率三角形（S, Q, P, φ）相似于阻抗三角形（$|Z|$, X, R, φ）　外界补 $P_L + P_C$ ①

电感、电容的无功补偿作用：L 发出功率时，C 吸收功率，L、C 无功互补 ②

电压电流的有功分量和无功分量，以感性负载为例

$P = U_RI$　$Q = U_XI$　（U, U_X, U_R）

$\dot U_R$ 为有功分量　$\dot U_X$ 为无功分量

$P = UI_G$　$Q = UI_B$　（I, I_B, I_G）

$\dot I_G$ 为有功分量，$\dot I_B$ 为无功分量

9.5 复功率

功率因数 $\lambda = \cos\varphi$ 低带来的问题，解决？

① 设备不能充分利用，电流到额定值，功率容量还有（$P = UI_{额}\cos\varphi$），设备 S 向负载送多少有功功率要由负载的阻抗角决定

② 输出有功功率相同时，电流大，$I = P/U\cos\varphi$，压降损耗大

解决：(1) 高压　(2) 改进设备（$\cos\varphi\uparrow$）　(3) 并联电容（容性抵消感性）

并联电容后，原负载电压电流不变，P Q 不变，但 $\cos\varphi\uparrow$

电容大小：$I_C = I_L\sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$

$C = \dfrac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$

（$\dot U$, $\dot I$, $\dot I_C$, $\dot I_L$）欠补偿　临界补偿　过补偿　（一般只欠补偿）

复功率：用相量 $\dot U\dot I$ 来计算功率.

定义 $\bar S = \dot U\dot I^*$　单位 VA，$\dot I^*$ 为 $\dot I$ 的共轭

$\bar S = UI\angle(\psi_u - \psi_i) = S\angle\varphi = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi$

$= P + jQ = ZI^2 = RI^2 + jXI^2 = U^2Y^*$

$\bar S$ 是复数，不是相量，复功率守恒，视在功率不守恒

9.6 最大功率传输

（有源网络—负载 →等效电路→ Z_i, $\dot U_s$, $\dot I$, Z_L）

$Z_i = R_i + jX_i$　$Z_L = R_L + jX_L$

$\dot I = \dfrac{\dot U_s}{Z_i + Z_L}$　$I = \dfrac{U_s}{\sqrt{(R_i+R_L)^2 + (X_i+X_L)^2}}$　有功功率 $P = R_LI^2 = \dfrac{R_LU_s^2}{(R_i+R_L)^2 + (X_i+X_L)^2}$

$R_L = R_i$　$X_L = -X_i$ → $Z_L = Z_i^*$　如果 $Z_L = R_L$，则

此时 $P_{max} = \dfrac{U_s^2}{4R_i}$　$|Z_L| = |Z_i|$ 时 P 大（模匹配）

R	L	C
	$\dot U_L$, $\dot I_L$	$\dot I_C$, $\dot U_C$
	感抗 $X_L = \omega L$	容抗 $X_C = -\dfrac{1}{\omega C}$
	感纳 $B_L = -\dfrac{1}{\omega L}$	容纳 $B_C = \omega C$
	$\dot U = jX_L\dot I$	$\dot U = jX_C\dot I$
	$\dot I = jB_L\dot U$	$\dot I = jB_C\dot U$
	$U = \omega LI\angle\psi_i + \dfrac{\pi}{2}$	$I = \omega CU\angle\psi_u + \dfrac{\pi}{2}$

阻抗 $Z \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\dot U}{\dot I}$　（$\dot U_R$, $\dot U_L$, $\dot U_C$, $\dot I$）　功率

$Z = R$　有功功率 $P_Z = I^2R$

$= jX_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$　$Z_{总} = R + jX$　无功功率 $Q_Z = Q_L + Q_C$

$= jX_L = j\omega L$　$= I^2X_L + I^2X_C$

导纳 $Y \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\dot I}{\dot U}$　（$\dot I_R$, $\dot I_C$, $\dot I_L$, $\dot U$）　视在功率 $S = I^2|Z|$

$Y = G$　最大功率

$= jB_L = -\dfrac{1}{j\omega L}$　$Y_{总} = G + jB$　$R_L = R_i$　$X_L = -X_i$

$= jB_C = j\omega C$　$Z_L = Z_i^*$

$P_{max} = \dfrac{U_s^2}{4R_i}$