第七章

参数估计

第七章 参数估计

总体分布	参数	样本
$N(\mu,\sigma^2)$	μ,σ^2	$X_1\cdots X_n$
$P(\lambda)$	λ	$\leftarrow$ 计算参数

参数空间：取值范围

点估计　区间估计

参数 $\hat\theta=\hat\theta(X_1\cdots X_n)$

7.1 矩估计法

总体的矩 $\xleftarrow{代替}$ 样本的矩　　一阶 $\longleftarrow$ 一阶

二阶 $\leftarrow$ 二阶　　$E(X) \leftarrow \bar X=\frac{1}{n}\sum X_i$

$E(X^2) \leftarrow A_2=\frac{1}{n}\sum X_i^2$

例：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $(X_1\cdots X_n)$ 样本，μ,σ^2 估计值

一阶：$E(X)=\mu$　$\hat\mu=\bar X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}X_i$

二阶：$E(X)^2=\sigma^2+\mu^2$　$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

$$\hat\sigma^2=A_2-\hat\mu^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar X^2\underset{\star}{=}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2=B_2$$

7.2 极大似然估计法

P大的事件比P小的事件更易发生，将使A发生的P最大的参数值做为估计值

1°) 总体的$\overset{(离散)}{概率}$/$\overset{(连续)}{密度函数}$　　总体 $X\sim P(\lambda)$ $(X_1\cdots X_n)$ 样本，λ的极大似

$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

2°) 写似然函数 $L(\lambda)$ λ:参数　　$L(\lambda)=\prod_{i=1}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i}e^{-\lambda}$ （连乘）　$\overset{求导}{要使L(\lambda)max}$

3°) 两边取 $\ln L(\lambda)$　　$\ln L(\lambda)=-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i+(x_1+\cdots+x_n)\ln\lambda-n\lambda$

4°) 两边对λ求导　　$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{\lambda}-n=0$　　$\lambda=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=\bar x$

令导数=0，求得λ

7.2 点估计的优良性准则

1. 无偏性　$E(\hat\theta)=\theta$

∀总体X　$E(X)=\mu$　$D(X)=\sigma^2$　$(X_1\cdots X_n)$

① $\bar X$ 是μ的无偏估计 $E(\bar X)=\mu$

② 样本方差 S^2 是 σ^2 的无偏估计 $E(S^2)=\sigma^2$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left[(X_1-\bar X)^2+\cdots+(X_n-\bar X)^2\right]$$

③ 未修正的方差 S_0^2 是 σ^2 的有偏估计　$S_0^2=\frac{1}{n}\left[(X_1-\bar X)^2+\cdots(X_n-\bar X)^2\right]$

$\hat\theta$ 是θ的无偏估计，$g(\hat\theta)$ 不一定是 $g(\theta)$ 的无偏

S^2 是 σ^2 的无偏，$\sqrt{S^2}$ 不是 $\sqrt{\sigma^2}$ 的无偏

$D(S)=E(S^2)-(E(S))^2$

2、有效性　$D(\hat\theta_1)\le D(\hat\theta_2)$　方差越小越有效

总体X　$E(X)=\mu$　$D(X)=\sigma^2$　　$\mu\begin{cases}X_1 & E(X_1)=\mu\quad D(X_1)=\sigma^2\\ \bar X\ 更有效 & D(\bar X)=\frac{\sigma^2}{n}\ 方差小\end{cases}$

$\mu\begin{cases}a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n\ (a_1+\cdots+a_n=1)\\ \bar X\quad 更有效\end{cases}$　　$D\hat\theta=\sigma^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)\ge\frac{\sigma^2}{n}$

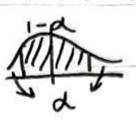
3. 相合性（一致性）

$\lim_{n\to\infty}P(|\hat\theta-\theta|<\varepsilon)=1$　n很大，估计值与实际值接近的概率为1

7.3 置信区间与枢轴变量

区间估计：区间越小，估计越准确，区间越大，置信度越高

$P(\hat\theta_1\le\theta\le\hat\theta_2)=1-\alpha$ ：置信度（已知）



枢轴变量：

（要求θ的区间，不好求，引入一些已知的变量，使其可求 $-1<\frac{\theta+2}{4}<1$

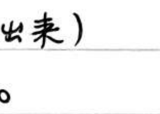
进而得出 $-6<\theta<2$，即将原变量表露出来）

定义：1°) $I=I(T,\theta)$　θ为未知参数，T已知

I的分布F，已知 且与θ无关，构造出的I为枢轴变量

2°) 给定1-α 确定F上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数 $V_{\frac{\alpha}{2}}$，$(1-\frac{\alpha}{2})$ 分位数 $V_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$P(V_{1-\frac{\alpha}{2}}\le I(T,\theta)\le V_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$



左右相等，为 $\frac{\alpha}{2}$

7.4 正态总体的期望和方差的区间估计

期望① $\underset{\overset{\uparrow}{总体}}{\sigma^2}\underset{\overset{\uparrow}{可用}}{已知}$，估计$\underset{\overset{\uparrow}{未知参数}}{\mu}$，构造 $V=\frac{\sqrt{n}(\bar X-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$ 正态分布

$\sqrt{n},\sigma,\bar X$ 已知，μ未知

给定1-α，知 $\frac{\alpha}{2}$，可求右点，右点为 $\mu_{\frac{\alpha}{2}}$．则 $P(-\mu_{\frac{\alpha}{2}}\le\frac{\sqrt{n}(\bar X-\mu)}{\sigma}\le\mu_{\frac{\alpha}{2}})$

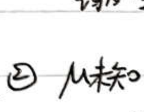
$\therefore\ \bar X-\frac{\sigma\mu_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar X+\frac{\sigma\mu_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$　n样本：n↑区间↓ $=1-\alpha$

期望② $\underset{\overset{\uparrow}{总体的方差}}{\sigma^2}$未知，估计μ，构造 $T=\frac{\sqrt{n}(\bar X-\mu)}{\underset{样本标准差}{S}}\sim t(n-1)$

给定1-α，查 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，$\bar X-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\mu\le\bar X+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Date

方差① μ已知，对σ²的区间估计，$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$ 卡方分布



χ²分布不对称 左右均查表　$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\le\sigma^2\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}$

方差② μ未知，估计σ²，构 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，给定1-α

取 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

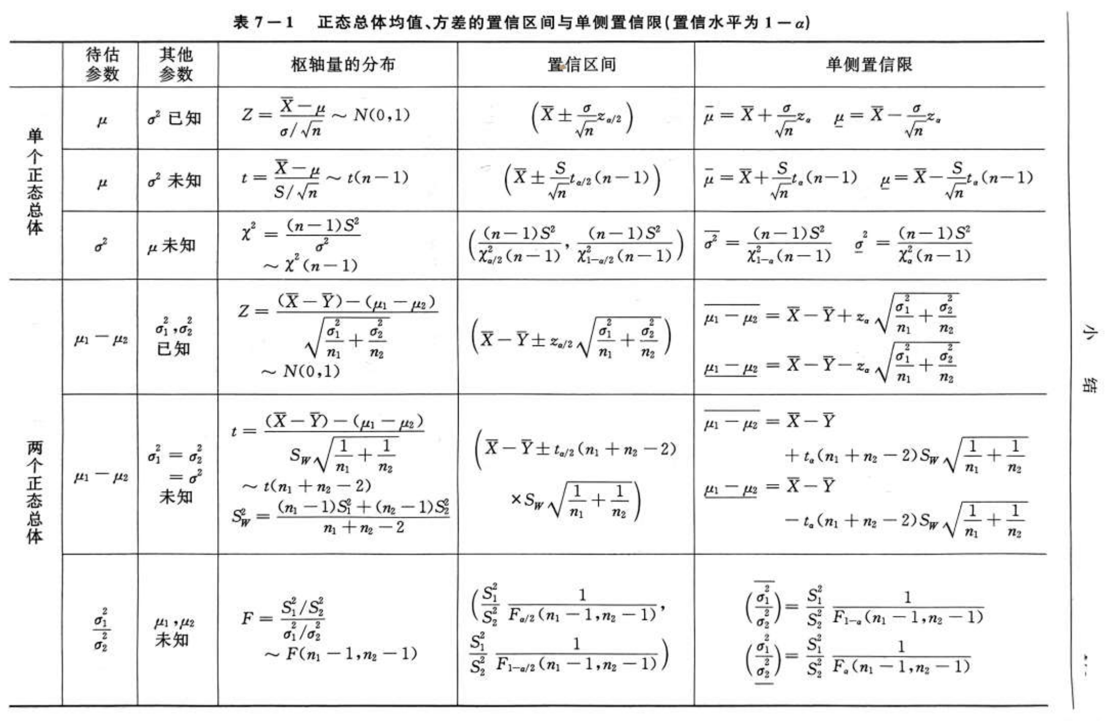


表 7－1　正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限(置信水平为 1－α)

	待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间	单侧置信限
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z=\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar X\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu}=\bar X+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$　$\underline{\mu}=\bar X-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
	μ	σ^2 未知	$t=\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar X\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\overline{\mu}=\bar X+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$　$\underline{\mu}=\bar X-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$　$\underline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$Z=\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar X-\bar Y\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar X-\bar Y+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar X-\bar Y-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$t=\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ $S_W^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\left(\bar X-\bar Y\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\times S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar X-\bar Y+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar X-\bar Y-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\underline{\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}$

小结

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源