第八章

假设实验

第八章 假设检验

8.1 假设检验的基本概念

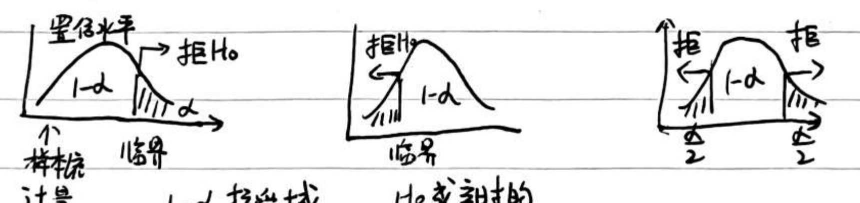
假设检验：为了推断总体分布（类型或参数），先提出关于总体的假设，再利用样本信息对所提出的假设作出接受或拒绝的判断。

1. 确定零假设 H_0，和备择假设 H_1，选可能或希望成立的为 H_1

假设检验 { 参数假设检验：关于总体分布中参数的假设
　　　　　非参数假设检验

步骤：1. 提出 H_0 和 H_1 2. 选取检验统计量 $T(X_1,\cdots X_n)$，在 H_0 成立的情况下确定其分布 3. 对于给定显著性水平 α，找到 H_0 的拒绝域 W 和接受域 $\overline{W}$ 4. 根据样本值 $(x_1,\cdots x_n)$，求出检验统计值 T，如 $(x_1,\cdots x_n)\in W$（小概率事件发生），则拒绝 H_0，否则接受 H_0

右侧检验　　　左侧检验　　　双侧检验



$1-\alpha$ 接受域　　H_0 成立时的抽样分布

假设检验的两类错误

1、弃真 $P\{拒 H_0 \mid H_0 为真\}=\alpha$

2、纳伪 $P\{接 H_0 \mid H_0 为假\}=\beta$　　β 更应该小

决策	H_0 true	H_0 false
接受 H_0	$1-\alpha$ 正确决策	β 第二类错误
拒绝 H_0	α 第一类错误	$1-\beta$ 正确决策

8.2 一个正态总体的参数假设检验

1、均值 μ 的假设检验　　U 检验法：σ^2 已知，检验 μ

① 提出假设 $H_0: \mu=\mu_0$　$H_1: \mu\neq\mu_0$

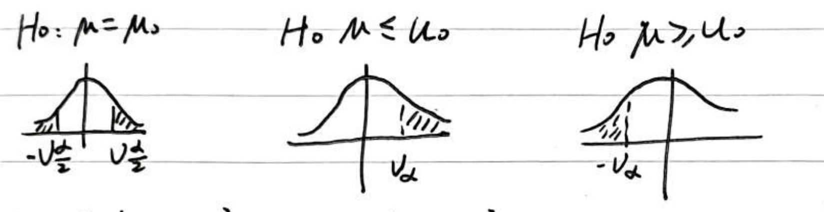
② 假定 H_0 成立，选取检验统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

H_0 成立则 $U\approx 0$，若过大则拒 H_0

③ 对给定 α，求临界值 $U_{\frac{\alpha}{2}}$，拒绝域 $W=\{U \mid |U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}$

④ 计算 U 的值 u，将 $|u|$ 与 $U_{\frac{\alpha}{2}}$ 比较，$|u|>U_{\frac{\alpha}{2}}$ 时，拒 H_0

$H_0: \mu=\mu_0$　　$H_0\ \mu\leq u_0$　　$H_0\ \mu\geq u_0$　　$H_0: \mu\leq u_0$ / $\mu\geq\mu_0$ ㊂!



$W=\{U \mid |U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}$　　$W=\{U \mid U>u_\alpha\}$　　$W=\{U \mid U<-u_\alpha\}$

T 检验法：σ^2 未知，检验 μ

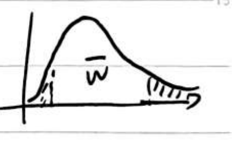
$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

拒绝域 $W=\{T \mid |T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

$H_0\ \mu\leq\mu_0$　$W=\{T \mid T>t_\alpha(n-1)\}$

2、方差 σ^2 的假设检验

1. $\mu=\mu_0$ 已知，检验方差 σ^2（少见）



$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)$$

拒绝域 $W=\{\chi^2 \mid \chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\}$

当 $H_0: \sigma^2\geq\sigma_0^2$，左侧，$W=\{\chi^2 \mid \chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n)\}$

2. μ 未知，检 σ^2　　$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

$W=\{\chi^2 \mid \chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

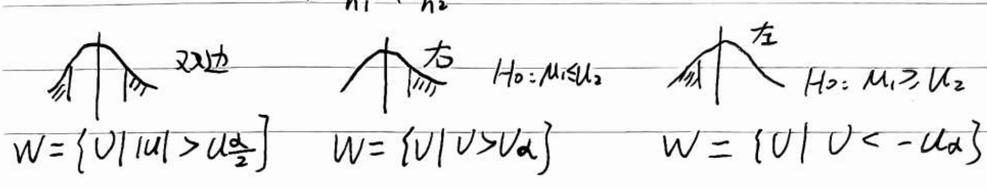
8.3 两个正态总体的参数假设检验

$(X_1\cdots X_{n_1})$ 来自 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$\overline{X}$ 均值 S_1^2 样本方差，$Y\sim N$，$\overline{Y}$，S_2^2

1、两个正态总体均值的差异性检验

① σ_1^2，σ_2^2 均已知，检验 $\mu_1=\mu_2$　（U 检验）

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$



$W=\{U \mid |U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}$　　$W=\{U \mid U>U_\alpha\}$　　$W=\{U \mid U<-u_\alpha\}$

② $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但未知，检验 $\mu_1=\mu_2$　（T 检验）

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)^2S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$H_0: \mu_1=\mu_2$　　$H_0\ \mu_1\leq\mu_2$　　$H_0: \mu_1\geq\mu_2$

$W=\{T \mid |T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}$　$W=\{T \mid T>t_\alpha()\}$　$W=\{T \mid T<-t_\alpha(n_1+n_2-2)\}$

注：假设检验与区间估计的关系。

利用区间估计的枢轴变量可以得到假设检验中的检验统计量

由参数的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间可得检验水平为 α 的接受域

$X\sim N(\mu,\sigma_0^2)$，σ_0^2 已知，检验 $\mu=\mu_0\longleftrightarrow$ 求 μ 的区间估计

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\longleftrightarrow U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

2、两个正态总体方差的差异性检验

μ_1 μ_2 未知，检验水平为 α，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$　$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

{ $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$
　$H_0: \sigma_1^2\leq\sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2>\sigma_2^2$

(1) $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_0$ 成立，$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

$W=\{F \mid F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}$

(2) $H_0: \sigma_1^2\leq\sigma_2^2$　$W=\{F \mid F>F_\alpha(n_1-1,n_2-1)\}$（右）

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源