高数 第三章

微分中值定理与导数的应用

第3章 微分中值定理与导数的应用

费马定理：$f(x)$在x_0某邻域有定义，$f(x) \geq / \leq f(x_0)$，$f(x)$在x_0可导

$f'(x_0)=0$ （光滑曲线在其极值点处必有水平切线）

↓

罗尔定理：(1) $[a,b]$ 连续
(2) (a,b) 可导 → 在(a,b)存在一点ξ
(3) $f(a)=f(b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

↓

微分中值定理
（拉格朗日中值定理）
(1) $[a,b]$连续
(2) (a,b) 可导 → $\exists \xi \in (a,b)$，$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

设$a=x_0$ $b=x_0+\Delta x$ $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$ $(0<\theta<1)$

推论1：$f(x)$在I上导数恒为0，$f(x)$在I上为常数

推论2：恒有$f'(x)=g'(x)$，在I上$f(x)$与$g(x)$只差一个常数 $F(x)=g(x)-f(x)=C$

↓

柯西中值定理

设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导 且$g'(x)\neq 0$

$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

3.2 洛必达法则

(1) $x \to a$ $f(x)$ $g(x) \to 0/\infty$；(2) 在a某邻域内$f'(x)g'(x)$存在

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在/无穷大：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\frac{0}{0}$型 $\frac{\infty}{\infty}$型

$0\cdot\infty$型：恒等变形

$\infty-\infty$型：取倒数，通分

① 若$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，$\lim[f(x)^{g(x)}]$称为0^0型

② $f(x)\to\infty$ $g(x)\to 0$，$\lim[f(x)^{g(x)}]$称为∞^0型

③ $f(x)\to 1$ $g(x)\to\infty$，$\lim[f(x)^{g(x)}]$称为1^∞型

利用e指数法 或 取对数法

洛必达法则 / 等价无穷小 / 恒等变换

3.3 泰勒公式

$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \to f(x)-f(x_0) \approx f'(x)(x-x_0)$

$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 一次表达式 不精确

$y=b+kx$ ↓推广

$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+$余项$=f(x)$

两边求导，得 $a_0=f(x_0)$ $a_1=f'(x_0)$ $a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$ … $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

1. $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$

$R_n(x)$ 误差项（余项） $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 拉格朗日型余项

$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ 佩亚诺型余项 ξ介于x和x_0之间

2. 麦克劳林公式 令$x_0=0$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ $0<\theta<1$

$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

3.4 函数的单调性和曲线的凹凸性

单调性：(a,b)内$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$[a,b]$上严格单增
↓ 证明不等式
(a,b)内$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$[a,b]$上严格单减

凹凸性：(a,b)内任取2点x_1x_2，恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 凹弧
↓ 证明不等式
恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 凸弧

证明：(a,b)上恒有$f''(x)>0$，$[a,b]$上为凹弧
(a,b)上恒有$f''(x)<0$，$[a,b]$上为凸弧

拐点：$(x_0,f(x_0))$左右两侧凹凸性恰好相反，则为拐点。

证明：$y=f(x)$在$\mathring{U}(x_0)$具有二阶导数，且$f''(x_0)=0$或$f''(x_0)$不存在
(1) 左右两侧$f''(x)$符号相反，$(x_0,f(x_0))$为拐点。
(2) 左右两侧$f''(x)$符号相同，$(x_0\ f(x_0))$不是拐点。

3.5 函数的极值与最大值最小值

极值是局部的最值，极值点一定在内部，最值可能在端点。

驻点：$f'(x)=0$的点x

必要条件：$f(x)$在x_0可导，x_0处取极值 → $f'(x_0)=0$

极值点：驻点处，不可导点处

极值第一充条件：(1) $x\in(x_0-\delta,x_0)$时$f'(x)>0$，$(x_0,x_0+\delta)$时$f'(x)<0$：极大值
(2) $x\in(x_0-\delta,x_0)$时$f'(x)<0$，$(x_0+x_0+\delta)$时$f'(x)>0$：极小值
(3) $x\in(x_0-\delta,x_0-\delta)$ $f'(x)$恒正/负：不取极值

极值第二充分条件：$f'(x_0)=0$ $f''(x_0)<0$：极大值，$f''(x_0)>0$，极小值

极大/小值：比较极值点

3.6 函数图形的描绘

渐近线：垂直渐近线，水平渐近线，斜渐近线

斜渐近线 $y=a_1x+b_1$ $y=f(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-a_1x)=b_1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a_1$

∴ $\lim\limits_{x\to x_0/x_0^{\pm}}f(x)=\infty$ ：$x=x_0$为垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to x_0/x_0^{\pm}}f(x)=b$ ：$y=b$为水平渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty/\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ $(a\neq 0)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，$y=ax+b$为斜渐近线

二、函数图形的描绘

为了准确而快速地作出函数的图形，可先利用函数的一阶、二阶导数，分析函数的单调性、极值、凹凸性与拐点等性态．并考察曲线的渐近线，根据这些信息，就可确定曲线的基本形态，这时就只需再给出几个特殊的点（如函数的驻点、不可导点与拐点等），再进行描点作图时，就可大大减少描点个数，还保证了所作函数图形的基本准确性，称这种作图方法为分析作图法．其一般步骤如下：

① 确定 $f(x)$ 的定义域，并讨论函数的奇偶性、周期性；

② 求出函数的一、二阶导数为零或不存在的点，并用这些点将定义域划分成若干部分区间；

③ 在每个部分区间内确定一、二阶导数的符号，并由此确定函数在这些区间内的单调性和凹凸性、极值点与拐点；

④ 讨论曲线的渐近线；

⑤ 计算若干关键点（部分区间的端点、驻点、不可导点、拐点等）的函数值；

⑥ 综合上面讨论的图像性态，再描点作图．

3.7 曲率

1. 弧微分公式：

(1) $y=f(x)$，$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

(2) $x=g(y)$，$ds=\sqrt{1+x'^2}\,dy$

(3) $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$

(4) 极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ $ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

2. 平均曲率

$\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ Δs为弧长 $\Delta\alpha$为两点切线夹角

3. 曲率K

$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$ 直线曲率=0 圆周上曲率为$\frac{1}{R}$（R为半径）

曲率计算公式 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

对$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $K=\frac{|\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$

3. 曲率半径：$\frac{1}{K}$

$R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$

曲线在$M(x,y)$处曲率K，在M处曲线的法线上，在凹向的一侧取一点$M_0(x_0y_0)$，使$|MM_0|=\frac{1}{K}=R$，以M_0为圆心，R为半径作圆，此圆为曲率圆，M为曲率中心

在M处曲率圆方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

圆心为 $\begin{cases}x_0=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\\y_0=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源