① 行列式

- 交号 可加
- 倍乘 倍加

→ 值

② 矩阵

- 运算 $|A|$ A^T 分块 A^* A^+ 求逆
  - 初等变换
  - 伴随矩阵
- 初等变换
  - $r_i \leftrightarrow r_j$
  - $r_i \times k$
  - $r_i + kr_j$

  行阶梯 行最简 标准行

  ≌ 等价
- 秩：非零子式的最高阶数 ← 行阶梯非零首元个数

  $r \leq \min\{m, n\}$

③ 线性方程组解的判定

- 非齐次线性方程组：$r(A) \neq r(\bar{A})$ 无解

  $Ax=b$ $r(A)=r(\bar{A})$ 有解 (n元)
  - $=n$ 唯一解
  - $<n$ 无穷解
- 齐次线性方程组（必有解）

  $Ax=0$ 方程数 < 未知数个数：有非零解

  方程数 = 未知数个数
  - $r(A)=n$（满秩）只有零解
  - $r(A)<n$（降秩）：有非零解

④ 线性方程组解的结构

- $Ax=0$ 解的结构：

  求基础解系 $\eta_1 \cdots \eta_s$（极大无关组）

  A → 行最简 → 非零首元左，自由未知量 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ → 基础解系 η_1 η_2 η_3

  通解 $(x_1 x_2 x_3 x_4)^T = c_1\eta_1 + c_2\eta_2$

  $r(A_{m\times n})=n$ 时，$AX=0$ 只有零解，无基础解系

  $r(A_{m\times n})<n$，方程基础解系必有 $n-r$ 个解向量
- $AX=b$ 解的结构

  将自由未知量均取0，得 $AX=b$ 一个特解

  通解：$\alpha_0 + c_1\eta_1 + \cdots + c_n\eta_n$

⑤ 向量组

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{2} \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ → 按列分块

$A=\underbrace{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)}_{\text{列向量组}}$ $\alpha_1 \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots \\a_{m1}\end{pmatrix}$ n维向量

⑥ 向量组

- 线性表示：$\exists k$，$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m$，是线性组合

  （有解）β 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性表示
- 向量组的等价 $A: \alpha_1 \cdots \alpha_m \xleftrightarrow[\text{对方线性表示}]{\text{任一向量由}} B: \beta_1 \cdots \beta_m$
- 线性相关/无关：$\alpha_1 \cdots \alpha_n$（n个m维向量）

  $\exists k$，$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$ 线性相关
  - 线性相关：有非零解
  - 线性无关：只有零解
- 向量组的秩：极大无关组 $\alpha_1 - \alpha_r$ 线性无关，可表示 A_x

  极大无关组所含向量个数 → 秩

  矩阵的秩 = 行向量组的秩 = 列向量组的秩

求极大无关组/向量组的秩

按列放 → 行最简 → 非零首元极大无关组 → 表示

⑦ n维向量

- 向量空间 V（任 $\alpha, \beta \in V$，都有 $\alpha+\beta \in V$；$\alpha \in V$，$k\alpha \in V$）

  V 中 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 满足（线性无关，表示其他）→ $\alpha_1 - \alpha_r$ 为基（极大线性无关组）

  r 为 V 的维数（向量组的秩）

  向量组AB等价 ⟷ AB生成相同的向量空间

  $P = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)^{-1}(\beta_1 \cdots \beta_n)$ P 为 $A \to B$ 的过渡矩阵（AB为V的基）

  对任 $\alpha \in V$，有 $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$，$x$ 为 α 为 α_n 下的坐标
- 向量内积 $(\underset{\text{行}}{\alpha}, \underset{\text{列}}{\beta}) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$
- 向量长度 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 单位化 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|} = \beta$
- 向量正交 $(\alpha, \beta) = 0$，记 $\alpha \perp \beta$

  正交向量组：$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 两两正交且无0向量

  → 作向量空间V的一个基 → 正交基

  标准正交向量组：$\begin{cases}(\alpha_i \alpha_j) = 0 \\ (\alpha_i \alpha_i) = 1\end{cases}$ $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关

  → 作向量空间V的一个基 → 规范正交基

正交化：给一组线性无关的 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 求与 α 等价且正交的 $\beta_1 \cdots \beta_s$

⑧ 方阵

- 特征值与特征向量

  $A\alpha = \lambda\alpha$ $|\lambda E - A| = 0$

  对应λ的特征向量 特征值/根

  求：求根（λ），见④，通解为特征向量 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$

  $\alpha \cdots \alpha$ 线性无关

  $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

  A的迹 = 方阵对角和 = 所有特征值相加

  $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$
- 相似方阵与对角化

  $A \sim B$ 相似 $P^{-1}AP = B$：AB特值，秩，迹相同

  （相似）对角化：$A \sim \Lambda = diag(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)$，λ为A的特值

  可对角化 ← 每个线性无关的特征向量数 = 重数

  题：1)是否相似 2) P? 3) Λ? $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ $\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}$

  可对角化 ← A为实对称矩阵
- 正交矩阵 ⟺ A的行（列）向量组为标准正交向量组

  A为n阶方阵如果 $A^TA = E$ → 正交矩阵

  $|A| = \pm 1$ $A^{-1} = A^T$
- 实对称矩阵的对角化

  实对称矩阵A，求正交矩阵Q，使 $Q^{-1}AQ = \Lambda = diag(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$

  (1) 求特值 (2) 求特征向量 (3) 特征向量正交化、单位化

  (4) 按列，Q (5) $\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$
  - 三根都单根 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 已正交
  - 一单一两重 对 $\alpha_2\alpha_3$ 施密特正交化
  - 三重根：施密特正交化

⑨ 二次型

- 二次型 ⟷ 矩阵
- 线性替换 $x = CY$
- 二次型 → 标准型（只有平方项）

  ①配方法 ②初等变换 ③正交替换
- 合同：$C^TAC = B$ $A \simeq B$
- 正定二次型 $f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots y_r^2$

  惯性定理
- 正定二次型的定性
- 正定二次型的判定

/dydcyy-gh/study-notes (github)