线代 第二章

矩阵的运算

A^T 转置

$(KA)^T = KA^T$

$(A^T)^T = A$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

A^* 伴随

$|A^*| = |A|^{n-1}$

$A^* = |A| A^{-1}$

A^{-1} 逆矩阵

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$AA^{-1} = E$

$|A|^{-1} = |A^{-1}|$

$AA^* = |A|E$

$|A|$

$|A^T| = A$

$|kA| = k^n |A|$

$|AB| = |BA|$

矩阵的运算
- 概念 — $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表 $A = (a_{ij})_{m\times n}$
- 特殊矩阵
  - 方阵 — n 行 n 列矩阵 A_n
  - 行（列）矩阵 → 对角矩阵 → 数量矩阵 → 单位矩阵
  - 零矩阵 — 所有元素全为0的矩阵
  - 分块矩阵
  - 对称矩阵 — $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$
  - 反对称矩阵 — $A^T = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$
  - 伴随矩阵 — $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, $AA^* = A^*A = |A|E$
- 运算 — $A \pm B, kA, AB, A^T$, 方阵的幂, 矩阵多项式
- 方阵的行列式
  - 概念 — 由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式
  - 运算 — $|A^T| = A, |kA| = k^n|A|, |AB| = |A|\cdot|B| = |BA|$
- 逆矩阵
  - 概念 — 若 $AB = BA = E$，则 $A^{-1} = B$
  - 求法 — 定义法，伴随矩阵法
  - 运算 — $(A^{-1})^{-1} = A, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, |A^{-1}| = |A|^{-1}$

2.1 矩阵的概念

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1. 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表称为 $m\times n$ 矩阵

记作 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A_{m\times n}$　a_{ij} 表示 $A_{m\times n}$ 的 i行j列元素，记(i,j)元

元素均实数：实矩阵　有复数：复矩阵

2. 两矩阵行数，列数分别相等：同型矩阵

矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 为同型矩阵且元素对应相等

$a_{ij} = b_{ij}$，A与B相等，记 $A = B$

3. 行数 = 列数，称 n 阶矩阵或 n 阶方阵，记作 A_n

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

\ 主对角线

/ 副对角线

4. 只有一列矩阵：列矩阵（列向量）/ 行矩阵（行向量）

5. n阶方阵主对角线下（上）元素均0，为上（下）三角矩阵

6. 对角矩阵：除主对角线上其它元素均为0，用A表示

$A = diag(a_{11}, a_{22} \cdots a_{nn})$

对角矩阵的主对角线上元素均为k，称为数量矩阵

$kE = \begin{pmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{pmatrix}$

7. 单位矩阵：对角线上元素均为1　$E_n / E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

8. 零矩阵：所元素为0，记为 O　注：不同型的零矩阵不等

2.2 矩阵的基本运算

1. 线性运算：同型矩阵下

$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots \\ a_{21}+b_{21} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$

$A-B = A+(-B) = (a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$　$-B$ 为 B 的负矩阵

$KA = (Ka_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$　此处与数列不同

2. 矩阵的乘法：左边矩阵A的列数等于右边矩阵B的行数

$A = (a_{ij})_{m\times n}$　$B = (b_{ij})_{n\times s}$　称 $m\times s$ 矩阵 $C = (c_{ij})$ 为 A与B 乘积　$C = AB$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a+2b+3c & 1d+2e+3f \\ 4a+5b+6c & 4d+5e+6f \\ 7a+8b+9c & 7d+8e+9f \end{pmatrix}$$

AB = BA 可交换

① 矩阵不满足交换律 $AB \neq BA$，AB有意义，BA不一定有意义

② 两非零矩阵乘积可能为零矩阵　$AB = 0$，但A、B不一定 $= 0$

③ 不满足消去律，$BA = BC$ 且 $B \neq 0$ $\not\Rightarrow A = C$

④ 成立的：结合律 $(AB)C = A(BC)$　分配律 $A(B+C) = AB+AC$

$K(AB) = (KA)B = A(KB)$（K常数）　$(B+C)A = BA + CA$

⑤ $EA = AE = A$　E为单位矩阵　$(kE)A = k(EA) = k(AE) = A(kE)$

幂运算：(1) $A^k A^l = A^{k+l}$　$(A^k)^l = A^{kl}$　$(AB)^k \neq A^k B^k$

$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

3. 矩阵的转置

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$　$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \end{pmatrix}$

$(A^T)^T = A$　$(A+B)^T = A^T + B^T$　$(kA)^T = kA^T$　$(AB)^T = B^T A^T$

对称矩阵：A为n阶矩阵，$A^T = A$ 即 $(a_{ij} = a_{ji})$

反对称矩阵：$A^T = -A$　$(a_{ij} = -a_{ji})$　主对角线为零

对称矩阵以主对角线对称，反对称矩阵以主对角线互为相反数

任一矩阵均可记为一对称矩阵与一反对称矩阵之和

2.3 分块矩阵

按列分块，记 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots)$　按行分块　记 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$

标准行：从左上角开始的一串1（不断）　$D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

全0也行，$1,1,0,1,0,0$ 不行　$D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. 分块加法　$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}$

2. 数乘　$\begin{pmatrix} kA_1 & kA_2 \\ kA_3 & kA_4 \end{pmatrix}$　3. 乘法　$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1+A_2B_3, & A_1B_2+A_2B_4 \\ A_3B_1+A_4B_3, & A_3B_2+A_4B_4 \end{pmatrix}$

4. 转置　$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}$　$A^T = \begin{pmatrix} A_1^T & A_4^T \\ A_2^T & A_5^T \\ A_3^T & A_6^T \end{pmatrix}$

1°) 分块矩阵转置　2°) 分块内部矩阵转置

$H = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$　$H^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$　分块对角矩阵

记 $A = diag(A_1, A_2 \cdots A_s)$

AB均为同阶分块对角矩阵　$A+B = diag(A_1+B_1, \cdots, A_s+B_s)$

$AB = diag(A_1B_1, \cdots A_sB_s)$　$A^n = diag(A_1^n, A_2^n \cdots A_s^n)$

矩阵与线性变换的关系

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

称其为从未知数 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 到未知数 $y_1 \cdots y_n$ 的一个线性变换

线性变换的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

令 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$　$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$　线性变换表示为 $y = AX$

若存在线性变换 $y = AX$，$Z = By$，则 $x_1 \cdots x_n$ 到 $z_1 \cdots z_l$ 表示为

$Z = By = (BA)X$

线性方程组的表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 系数矩阵　$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 增广矩阵

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 未知数向量　$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 常数项向量

$AX = b$　$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$　$\overline{A} = (A, b)$ 或 $\overline{A} = (A|b)$

将A分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ 列

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$　还可分行块 ···

2.4 方阵的行列式及其逆矩阵

1. 行列式：n阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

性质：$|A^T| = |A|$　$|kA| = k^n|A|$　$|AB| = |A||B| = |BA|$

A^* 2. 伴随矩阵（方阵）：**川**有均有

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 1°) 求所有元素代数余子式 2°) 按行求的代数余子式按列放

$A_{11} = 4$　$A_{12} = -3$

$A_{21} = -2$　$A_{22} = 1$

A^* 4 -3

　-2 1

$A = (5)$　$A^* = (1)$

性质：$AA^* = A^*A = |A|E$　$(|A| \neq 0)$ $|A^*| = |A|^{n-1}$

A^{-1} 3. 逆矩阵（方阵）：非川有：先判断是否可逆！

A为n阶方阵，存在n阶方阵B，存在 $AB = BA = E$，则A的逆矩阵为B，记 $A^{-1} = B$，B唯一

是否可逆？ $|A| \neq 0$ / 非奇异 / 非退化 / 满秩 → 可逆

怎么求？ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$（伴随矩阵法）

推论：$AB = E$ / $BA = E$ → $A^{-1} = B$

怎么求？ 初等函数变换法！

性质：1. A可逆 A^{-1} 可逆 $(A^{-1})^{-1} = A$ | $(A^T)^T = A$

2. $k \neq 0$　$(KA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ | $(AB)^T = B^T A^T$

4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$　6. $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$