线代 第四章

向量空间及线性方程组解的结构

- n维向量
  - 运算 — 加法、数乘
  - 线性组合 — 概念 — $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$
  - 线性表示
    - 判别法
      - 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$ 有解
      - $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$
      - $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关
    - 等价 — $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 相互线性表示
  - 线性相关
    - 概念 — 存在不全为 0 的数 $k_1,k_1,\cdots,k_s$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$
    - 判别法
      - 充要条件
        - $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$
        - 至少有一向量由其余向量线性表示
        - $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)x=0$ 有非零解
      - 充分条件
        - $n+1$ 个 n 维向量线性相关
        - 多数向量能用少数向量线性表示
  - 线性无关
    - 概念 — 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则 $k_1,k_1,\cdots,k_s$ 全为0
    - 判别法 — 充要条件
      - $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$
      - 任一向量都不可由其余向量线性表示
      - $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)x=0$ 只有零解
  - 向量组的秩
    - 概念 — 极大线性无关组中向量的个数
    - 性质 — 矩阵的秩＝行向量组的秩＝列向量组的秩
  - 向量的内积 — 正交向量 — 正交矩阵 — 施密特正交化
  - 向量空间
    - 基与维数 — 规范（标准）正交基
    - 过渡矩阵 — 坐标
  - 线性方程组解的结构
    - $Ax=0$ — 基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t(t=n-R(A))$ — 通解 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$
    - $Ax=b$
      - 特解 η^*
      - 通解 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+\eta^*$

第四章

4.1 n维向量及其线性运算

(1) 由 n个数 $a_1\,a_2\cdots a_n$ 构成的有序数组 称为 n维向量.
n维向量可以是行向量 $(a_1\,a_2\cdots a_n)$ 也可以是列向量 $(a_1,a_2\cdots a_n)^T$

(2) 线性运算（加减/数乘）
$(0,0,0)^T$ 为零向量，记为 0

(3) 线性运算满足：交换律，结合律，分配律
$0\alpha=0$

4.2 向量组的线性关系

线性组合：设 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta$ 都是n维向量，$\exists k_1k_2\cdots k_m$ 是一组实数
则向量 β 可以表示成 $\beta=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_m\alpha_m$
则 β 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 的一个线性组合，$k\ldots$ 为系数

(1) $\beta=k\alpha$，α与β成比例 (2) 零向量可由任意向量组线性表示
(3) 向量组任一向量可由向量组表示 (4) $e_1=(1,0,0\ldots0)^T\,e_2=(0,1,\ldots0)^T\ldots$
$e_1,e_2\cdots e_n$ 为n维单位坐标向量组

β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\cdots+x_m\alpha_m=\beta$
（即 $R(A)=R(B)$，$A=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\,B=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta)$） 有解

等价：$A:\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \xrightarrow[\text{可由向量组B线性表示}]{\text{任一向量均}} B:\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$
具有反身性，对称性，传递性 3种性质

$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{分块}]{\text{按列}}A=(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n)\quad a_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为矩阵A的列向量组

推广：$A=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\quad B=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_s)\quad K=(k_{ij})_{m\times s}$

$(\beta_1\beta_2\cdots\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1s}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ms}\end{pmatrix}=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)K$

$B=AK$

若列向量组B能由列向量组A线性表示，则存在 $m\times s$ 矩阵K
使得 $B=AK$，K为系数矩阵

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$
方程有解 $\leftrightarrow$ 有线性组合　　方程无解 $\leftrightarrow$ 不是线性组合

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$
线性相关 $\leftrightarrow$ 有非零解　　线性无关 $\leftrightarrow$ 只有零解

Date

线性相关和线性无关

$\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是n个m维向量（n维向量组），若存在一组不全为0的 $k_1\cdots k_n$，有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$
则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关，否则线性无关

注 (1) 若向量组只含一个向量 α，则当 $\alpha\neq0$ 时，线性无关
$\alpha=0$ 时，向量组线性相关
(2) 向量组中两向量成比例，线性相关
(3) 含有0向量的向量组一定线性相关
(4) n个n维单位坐标向量组 $e_1,e_2\cdots e_n$ 线性无关

定理：向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\cdots x_m\alpha_m=0$ 有非零解
$R(A)<m$
向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\cdots x_m\alpha_m=0$ 只有零解
$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)$　　$R(A)=m$

推论：A是n阶方阵，A列向量组线性相关 $\Leftrightarrow|A|=0$
推论：$m>n$ 时，任m个n维向量都线性相关，n+1个n维向量必相关
推论：$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ 中至少有一向量可由其余向量线性表示

定理：$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta$ 线性相关，则向量 β
可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示，且唯一

定理：向量组中有一部分向量（部分组）线性相关，该向量组也线性相关，反之，向量组线性无关，任一部分组也无关

定理：n维向量组 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ 线性无关，在向量组中每个向量上添加S个分量，则所得到的n+S维向量组 $\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$
（称延伸组）仍线性无关，反之，延伸组线性相关，原组为线性相关

4.3 向量组的秩

极大无关组：向量组A，取出r个向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$，$\alpha_1\cdots\alpha_r$ 线性无关，A中任一向量可由 $\alpha_1,\cdots\alpha_r$ 线性表示（不唯一）
或
$\alpha_1\cdots\alpha_r$ 线性无关，任 r+1个向量均线性相关

极大无关组与向量组 等价

向量组的秩：极大无关组所含向量个数 $r(\alpha_1,\cdots\alpha_s)$
1°) $0\le r(\alpha_1,\cdots\alpha_s)\le\min\{$向量的个数，维数$\}$
2°) $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow r=s$
3°) A可由B线性表示，则 $R_A\le R_B$

向量组的行秩＝向量组的列秩＝矩阵的秩

$r(AB)\le\min\{r(A)\,r(B)\}$

初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性关系

求极大无关组：① 不管原向量是行/列，均按列构成矩阵
② 化为行简化阶梯形（只能行变换）
最简行
③ 首非零元所在列做极大无关组 $(\beta_1\beta_2)$
④ 其余向量表示系数直接写出来

$$\begin{array}{cccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{array}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\-2&-4&4&-6\\2&8&-2&0\\-1&0&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3&6\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4\\\uparrow&\uparrow&&\end{array}$$

$\beta_3=-3\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2$
$\beta_4=6\beta_1-\frac{3}{2}\beta_2$

$\alpha_3=-3\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$
$\alpha_4=6\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2$

KOKUYO

4.4 向量空间

1、向量空间V：$\begin{cases}\text{任意}\alpha,\beta\in V,\text{都有}\alpha+\beta\in V\\\text{任意}\alpha\in V\text{及实数}k,\text{都有}k\alpha\in V\end{cases}$
V对线性运算封闭

{0}是向量空间，称零空间，所有n维向量集合 R^n

$V=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\mid k_1\cdots k_s\in R\}$ 是由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 生成的
$V_1\,V_2$ 都为向量空间，$V_2\subseteq V_1$，V_2 是 V_1 的子空间，总有 $V\subseteq R^n$

2、V中的r个向量 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$ 满足 ① $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 线性无关
② V中任意向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 线性表示

$\alpha_1\cdots\alpha_r$ 为V的基，r为V的维数，V为r维向量空间
$\updownarrow$　　　$\updownarrow$
极大线性无关组　　向量组的秩

零空间没有基，维数是0
向量组 $\alpha_1,\ldots\alpha_s$ 可由 $\beta_1\cdots\beta_s$ 线性表示，则 $L(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)\subseteq L(\beta_1\cdots\beta_t)$
$\alpha_1\cdots\alpha_s$ 和 $\beta_1\cdots\beta_t$ 生成相同向量空间 $\Longleftrightarrow$ 向量组等价

3、$\alpha_1,\cdots\alpha_r$ 是V的一个基，对任 $\alpha\in V$，若有 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r$
则 $x_1,x_2\cdots x_r$ 为向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 下的坐标，
记为 $(x_1\,x_2\cdots x_r)^T$

n维向量 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 和 $\beta_1\cdots\beta_n$ 是V的两个基，$\because\alpha_1\cdots\alpha_n$ 与 $\beta_1\cdots\beta_n$ 等价
$\therefore$ 存在可逆矩阵P，使 $(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)P$
P为从基 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 到基 $\beta_1\cdots\beta_n$ 的过渡矩阵　注意顺序！
$P=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)^{-1}(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)$

KOKUYO

$\because$ 对任意 $\alpha\in V$，有 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+\cdots+y_n\beta_n$

$(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\quad\therefore x=Py$ 坐标变换公式
x，y 分别为向量 α 在基 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 和 $(\beta_1\cdots\beta_n)$ 下的坐标

4.5 向量的内积与正交矩阵

内积：$[\alpha,\beta]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(a_1\cdots a_n)\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\alpha^T\beta$ 矩阵表达式

α,β,r 为n维向量，有
$[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]\quad[k\alpha,\beta]=k[\alpha,\beta]$
$[\alpha+\beta,r]=[\alpha,r]+[\beta,r]\quad[a,a]\ge0$，当且仅当 $a=0$ 时 $[a,a]=0$

长度：$|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}=\sqrt{[a,a]}$　$|a|$ 为 α 的长度，$|a|=1$，单位向量

$|a|\ge0$，$|k\alpha|=|k||\alpha|$，$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$，$|[\alpha,\beta]|\le|\alpha|\cdot|\beta|$

规范正交基：α,β 为n维非零向量，$[\alpha,\beta]=0$，α,β 正交
0与任何向量都正交
一非零n维向量组，两两正交，称其为正交向量组
正交向量组一定线性无关
正交向量组作向量空间V的一个基，称正交基
若正交基中均为单位向量，称规范正交基

$r_1,r_2\cdots r_r$ 是向量空间V的一个规范正交基 $\Leftrightarrow[r_i,r_j]=\begin{cases}1&i=j\\0&i\neq j\end{cases}$
$r_1\cdots r_r$ 是V的一个规范正交基，V中任意向量 α 可表示为
$\alpha=\alpha_1r_1+\cdots+\alpha_rr_r$
$[\alpha,r_i]=\alpha_i[r_i,r_i]=a_i|r_i|^2=\alpha_i$
$\therefore\alpha$ 在规范正交基 $r_1\cdots r_r$ 下的坐标 $\alpha_i=[\alpha,r_i]$

施密特正交化

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 是向量空间V的一个基，要求向量空间的一个规范正交基，即要找一组两两正交的单位向量 $r_1r_2\cdots r_r$
使得 $r_1r_2\cdots r_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 等价，$\alpha\to r$ 称规范正交化

1.正交化
取 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2+\lambda_1\beta_1$ 要 $[\beta_2\,\beta_1]=0$，$\lambda_1=-\frac{[\alpha_2\beta_1]}{[\beta_1\beta_1]}$

$\therefore\beta_1=\alpha_1$
$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2\beta_1]}{[\beta_1\beta_1]}\beta_1$

令 $\beta_3=\alpha_3+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$ 使 $[\beta_3,\beta_1]=0$，$[\beta_3\beta_2]=0$
$\begin{cases}[\alpha_3\beta_1]+\lambda_1[\beta_1\beta_1]+\lambda_2[\beta_2\beta_1]=0\\[\alpha_3\beta_2]+\lambda_1[\beta_1\beta_2]+\lambda_2[\beta_2\beta_2]=0\end{cases}$

$\lambda_1=-\frac{[\alpha_3\beta_1]}{[\beta_1\beta_1]}\quad\lambda_2=-\frac{[\alpha_3\beta_2]}{[\beta_2\beta_2]}$

$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3\beta_1]}{[\beta_1\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3\beta_2]}{[\beta_2\beta_2]}\beta_2$

$\beta_r=\alpha_r-\frac{[\alpha_r\beta_1]}{[\beta_1\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_r\beta_2]}{[\beta_2\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\alpha_r\beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1}\beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$

2、单位化　$r_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|}$　得 $r_1\,r_2\cdots r_r$ 为规范正交基

KOKUYO

正交矩阵

A为n阶方阵，若 $A^TA=AA^T=E$，A为正交矩阵
A可逆且 $A^{-1}=A^T$ 时，A正交矩阵

$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\alpha_1^T\alpha_2&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1&\alpha_2^T\alpha_2&\cdots&\alpha_2^T\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n^T\alpha_1&\alpha_n^T\alpha_2&\cdots&\alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=E$

$\therefore\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1&i=j\\0&i\neq j\end{cases}$

n阶方阵A为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A的列（行）向量组是 R^n 的一组规范正交基

AB 都n阶正交矩阵
(1) $|A|=1$ 或 $|A|=-1$
(2) A^T，A^*（A的伴随矩阵），$A^k(k>1)$ 也是正交矩阵
(3) AB 也是正交矩阵

若P正交矩阵，则称线性变换 $y=Px$ 为正交变换
$y=Px$ 为正交变换，有 $|y|=\sqrt{y^Ty}=\sqrt{x^TP^TPx}=\sqrt{x^Tx}=|x|$

非齐次线性方程组 $Ax=b$

$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$

若 $D\neq0$，方程组有唯一解.
$D=0$ 无解或无穷多解

n元方程组：
无解：$R(A)\neq R(\bar{A})$
有解 无穷多解：$R(A)=R(\bar{A})<n$
有解 唯一解 $R(A)=R(\bar{A})=n$
n为未知数个数

齐次线性方程组 $Ax=0$

$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$

方程个数 < 未知量个数：有非零解
方程个数 = 未知量个数：$D=0$：有非零解
$D\neq0$：只有零解

n元方程组：
只有零解：$R(A)=n$：线性无关
有非零解：$R(A)<n$：线性相关

4.6 线性方程组解的结构

1、线性方程组有解判定（向量版）

$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1-x_2-x_3=-3\\2x_1+9x_2+10x_3=11\end{cases}\quad x_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\-1\\9\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\11\end{pmatrix}\quad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

矩阵版 $\begin{cases}r(A)=r(\bar{A})=\text{未知数个数}\to\text{唯一解}\\r(A)=r(\bar{A})<\text{未知数个数}\to\text{无穷多解}\\r(A)\neq r(\bar{A})=\text{未知数个数}\to\text{无解}\end{cases}$

2、齐次线性方程组解的结构（右边都为0）
1°) $r(A)=r(\bar{A})=n$：有唯一的零解
2°) $r(A)<n$：有非零解
3°) 方程个数 < 未知量个数：有非零解
4°) 方程个数 = 未知量个数时：有非零解 $\Leftrightarrow|A|=0$
只有零解 $\Leftrightarrow|A|\neq0$

3、线性方程组解的结构
唯一解，无穷多解，无解

1°) 齐次方程解的结构 $Ax=0$
① η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的解，$\eta_1+\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解
② η 是解，$c\eta$ 也是解

基础解系：$\eta_1\cdots\eta_s$ ① $\eta_1\cdots\eta_s$ 线性无关 ② 任何解由 $\eta_1,\cdots\eta_s$ 线性表示
（极大无关组）

求基础解系：

$A=(\;)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{9}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&\frac{3}{4}&-\frac{7}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1=\frac{9}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5\\x_2=-\frac{3}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4+\frac{5}{4}x_5\end{cases}$

x_1x_2 已知，令 $x_3\,x_4\,x_5$ 取 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\therefore\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\-\frac{3}{4}\\1\\0\\0\end{pmatrix}\;\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\\0\end{pmatrix}\;\eta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{5}{4}\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5\\-\frac{3}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4+\frac{5}{4}x_5\\x_3+0x_4+0x_5\\0x_3+x_4+0x_5\\0x_3+0x_4+x_5\end{pmatrix}=x_3\eta_1+x_4\eta_2+x_5\eta_3$

此处x可取任意值，与k相同

当 $R(A_{m\times n})=n$ 时，方程组 $AX=0$ 只有零解，无基础解系
当 $R(A_{m\times n})=r<n$ 时，方程组 $AX=0$ 的基础解系必有 n−r 个解向量

$A\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1=-x_6\\x_3=0\end{cases}$　$x_2\,x_4\,x_5\,x_6$ 为自由未知量，取 $\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}$

例：$A_{m\times n}$，$B_{n\times s}$，$AB=O_{m\times s}$，求证 $r(A)+r(B)\le n$
$B=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s)\quad AB=A(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots A\beta_s)=(0,0,0)$
$\therefore A\beta_i=0,\;i=1,2\ldots s\quad\therefore\beta_i$ 是 $AX=0$ 的解
1°) $R(A)=n$，唯一零解 $\therefore\beta_i=0$，$R(A)\le n$ 成立
2°) $R(A)<n$，有无穷多解 基础解系中有 $n-r(A)$ 个解

2°) 非齐次方程解的结构
$\underset{\text{非齐次}}{Ax=b}\longrightarrow\underset{\text{齐次}}{Ax=0}$：齐次叫非齐次的导出组

1. $\alpha_1\alpha_2$ 是 $Ax=b$ 的解，$\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解
2. α_0 是 $Ax=b$ 解，η 是 $Ax=0$ 解，$\alpha_0+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解

1. α_0 是 $Ax=b$ 的一个解（特解），η 是 $Ax=0$ 的通解
则 $\alpha_0+c_1\eta_1+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$ 是 $Ax=b$ 的全解（通解）　$\eta=c_1\eta_1+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$，$\eta_1\cdots\eta_{n-r}$ 基础解系

即 $Ax=b$ 的一个特解 + $Ax=0$ 基础解系的线性组合 = $Ax=b$ 的全解

例：$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{7}&\frac{13}{7}&\frac{13}{7}\\0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1=\frac{13}{7}-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4\\x_2=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$

取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 均取0　$\alpha_0=\begin{pmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{pmatrix}$ 是 $Ax=b$ 的一个特解

导出组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=\cancel{\frac{13}{7}}-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4\\x_2=\cancel{-\frac{4}{7}}+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 取 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}\\1\\0\end{pmatrix}\;\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{13}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$