线代 第六章

二次型

- n元二次型
  - 表示法
    - 和式表示 — $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$
    - 矩阵表示 — $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\ (A^{\mathrm{T}}=A)$ — 二次型的秩 $=R(A)$
  - 标准形
    - 惯性定理 — 合同变换不改变二次型的惯性指数
    - 化标准形
      - 配方法（一次一个字母）
      - 正变交换法
      - 初等变换法
    - 合同
      - 定义：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$ 其中$\boldsymbol{C}$可逆，记作$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$
      - 判定：$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的正负惯性指数
  - 正定二次型（正定矩阵）
    - 定义 — 对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$
    - 充要条件
      - 特征值全大于0
      - 正惯性指数 $p=n$, $\boldsymbol{A}$为n阶矩阵
      - $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，其中$\boldsymbol{P}$为可逆矩阵
      - $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}$合同
      - 顺序主子式全大于0
    - 必要条件
      - $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$
      - $|\boldsymbol{A}|>0$
    - 性质 — 若$\boldsymbol{A}$正定，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{*},\boldsymbol{A}^{m}$正定

二次型的秩 $R(A)=p+q$.

第六章 二次型 $\underset{2次}{x^2}+\underset{2次}{xy}+\underset{2次}{y^2}$ x^2, y^2 平方项 xy 交叉项

6.1 二次型及其矩阵表示

含有n个变量的二次齐次多项式 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 称n元二次型

二次型f的矩阵（均对称）

①平方项的系数直接做成主对角线元素

②交叉项的系数除以2放两个对称的相应位置上

$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+2x_3^2-2x_1x_3$

$$A:\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3\\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2\end{pmatrix} \qquad = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-\frac12\\-1&-\frac12&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

若不对称 $\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ 把2、3改成 $\frac{2+3}{2}$ 即可

只含平方项的二次型称标准二次型，简称标准形

$f(x_1x_2\cdots x_n)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots+k_nx_n^2\ (k\in R)$

线性替换 $(X=\underline{\underline{C}}Y)$

$f(x)=X^TAX$，令 $X=CY$ $f(x)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y$

使 C^TAC 为标准型

$|C|\neq0$ 可逆/非退化/满秩替换 $|C|=0$，退化替换

$X=C_1C_2Z$ $X^TAX=Z^T(C_1C_2)^TA(C_1C_2)Z$

合同：A、B为n阶方阵，∃可逆矩阵C，使 $C^TAC=B$

则A与B合同，记作 $A\simeq B$，C为合同变换矩阵

(1) 自反性 $A\simeq A$ (2) 对称性：若 $A\simeq B$，则 $B\simeq A$

(3) 传递性 $A\simeq B$，$B\simeq C$，则 $A\simeq C$

(4) $A\simeq B$，则 $r(A)=r(B)$ (5) $A\simeq B$，$A^T=A\Leftrightarrow B^T=B$

(6) $A\simeq B$，如果A、B可逆，$A^{-1}\simeq B^{-1}$ (7) $A\simeq B$，$A^T\simeq B^T$

矩阵间的关系.

1、等价（初等变换）：A B同型，存在可逆PQ，使 $PAQ=B$

2、相似：A B同阶方阵，存在可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=B$

正交相似：A B同阶方阵，若存在正交矩阵P，使 $P^{-1}AP=B$

3、合同：A B同阶方阵 若存在可逆P，使 $P^TAP=B$

正交相似：相似，且合同，也等价

正交相似，合同，相似的都等价

6.2 化二次型为标准形 ①配方法 ②初等变换* ③正交替换 (5.3)

正交替换：5.3 实对称矩阵的正交对角化

配方法：1°) 按 $x_1, x_2\cdots$ 顺序配方 2°) 配完 x_i 后不能再出现 x_i

$$\begin{aligned}f(x_1x_2x_3)&=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3)+x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3(x_2^2+\tfrac43x_2x_3)-3x_3^2\\&=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3(x_2+\tfrac23x_3)^2-\tfrac53x_3^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+2x_3\\y_2=x_2+\frac23x_3\\y_3=x_3\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x_1=y_1-2y_2-\frac23y_3\\x_2=y_2-\frac23y_3\\x_3=y_3\end{cases}\quad C=\begin{pmatrix}1&-2&-\frac23\\0&1&-\frac23\\0&0&1\end{pmatrix}$$

只有交叉项：$2x_1x_2-4x_1x_3+10x_2x_3$

$\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 代入上式，出现平方项

*初等变换法

补：初等变换化标准形

$f(x)=X^TAX$ 令 $X=CY$，使 $f(x)=C^TAC=\Lambda$ ①$C=?$ ②$\Lambda=?$

1°) 对A、E做同样的初等列变换

2°) 只对A做相应的初等行变换

) 配套进行

（A、E交换1、3列，A交换1、3行）

（$\frac12\times$ A.E 第3列，$\frac12\times$ A 第3行）

3°) A化成对角矩阵之时，E化成的就是C

$$A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{列}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&1&1\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[列行]{列行}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}A\\\hline E\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\Lambda\\\hline C\end{pmatrix}\xrightarrow{行/列}$ Λ 可化为 $\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&-1&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&-1&\\&&&&&&0\\&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}$（规范形）

6.3 正定二次型

$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots y_r^2$

$x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 不是规范形 $x_1^2+x_2^2+x_4^2$ 不是规范形

化为规范形后，r为二次型的秩（-1，1的总数）

1\. 惯性定理：二次型的标准形不唯一，但标准形中系数不为零的平方项项数相同

正项个数：正惯性指数 任一矩阵A

负项个数：负惯性指数 与 $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$ 合同

正－负：符号差

AB 合同 $\Leftrightarrow$ A、B有相同的秩，正负惯性指数分别相等

2\. 正定二次型的概念 $(x\neq0)$

有定的
- (1) $f=X^TAX>0$，则称f为正定二次型，A为正定矩阵
- (2) $f=X^TAX\geq0$，则称f为半正定二次型，A为半正定矩阵
- (3) $f=X^TAX<0$，则称f为负定二次型，A为负定矩阵
- (4) $f=X^TAX\leq0$，则称f为半负定二次型，A为半负定矩阵

半正/负定：$f(x_1\cdots x_n)$ 中有某项系数为0

不定的：$f=X^TAX$ 既不是半正定，也不是半负定，如 $f(x_1x_2x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2$

3、正定二次型的判定方法

1°) 正定二次型经过线性替换，仍是正定

2°) $f(x)=X^TAX$ 正定 $\Leftrightarrow$ 标准形是 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，$d_i>0$

$\Downarrow$ $\Leftrightarrow$ 正惯性指数为n

$|A|>0$ $\Leftrightarrow$ $A\simeq E$ $\Leftrightarrow$ 所有(n个)特征值 >0

3°) 顺序主子式 $\Leftrightarrow$ 各阶顺序主子式 >0

$A=\begin{pmatrix}\boxed{1阶}\ 2阶 & 3阶 & k阶\end{pmatrix}$

对称矩阵A为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ 各阶均正

对称矩阵A为负定矩阵 $\Leftrightarrow$ 奇阶负，偶阶正

4°) A为正定矩阵，A^k A^T A^{-1} A^* 均为正定矩阵

5°) A正定 B正定/半正定 A+B 一定正定

6°) A正定，A的主对角线元素全大于0

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源