高数 第二章

导数与微分

2.1 导数的概念

1、定义 $x_0 \to x_0+\Delta x$，$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在

则 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，记 $y'|_{x=x_0} / f'(x_0) / \frac{dy}{dx}\big|_{x=x_0} / \frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

若上式不存在，$f(x)$ 在 x_0 不可导 $\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty\right)$

2、左右导数 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$f(x)$ 在 x_0 可导 $\iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$（存在且相等）

3、(1) 如 $f(x)$ 在 (a,b) 每一点都可导，$f(x)$ 在 (a,b) 可导

(2) 若 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 也均存在，则 $[a,b]$ 可导

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$[f(x_0)]' = 0$，$f'(x_0) \neq [f(x_0)]'$

4. 函数在 x 处可导 $\to$ x 处必连续，反之不成立

2.2 导数的运算法则与基本公式

1、求导的四则运算法则

$(u\pm v)' = u'\pm v'$

$(uv)' = u'v+uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$

推导：$[Cu(x)]' = Cu'(x)$

$[u(x)\pm v(x)\pm w(x)]' = u'(x)\pm v'(x)\pm w'(x)$

$[u(x)v(x)w(x)]' = u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$

2、$(\tan x)' = \sec^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$ $\left(\frac{1}{\cot x} = \tan x\right)$ $\left(\csc x = \frac{1}{\sin x}\right)$

$(\sec x)' = \tan x\sec x$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$(\csc x)' = -\cot x\csc x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(x^u)' = ux^{u-1}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

3、反函数求导

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

4、复合函数求导

$(f[\varphi(x)])' = f'(u)\varphi'(x)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

链式法则 $(f\{\varphi[\psi(x)]\})' = f'(u)\varphi'(v)\cdot\psi'(x)$ / $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$

2.3 高阶导数

n阶导数 $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}$

$x=x_0$ 时导数记 $y^{(n)}|_{x=x_0}$，$f^{(n)}(x_0)$，$\frac{d^n y}{dx^n}\big|_{x=x_0}$，

常用初等函数的高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x\ln^n a\ (a>0)$ $(e^x)^n = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

(6) $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

高阶导数的运算法则

$[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$

$[u(x)\pm v(x)]'' = [u'(x)\pm v'(x)]' = u''(x)\pm v''(x)$

……

$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$

莱布尼兹公式 $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

2.4 隐函数与参数方程确定的函数的导数

1、$y=f(x)$ 显函数，隐函数无法用 $y=f(x)$ 表示

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ $\begin{cases} y=\varphi(t) \\ x=\psi(t)\end{cases}$

即：对式子左右两边求同导

例：$y^5-2y-x-3x^7=0$ $\xrightarrow{求导}$ $5y'y^4-2y'-1-21x^6=0$

2、隐函数2阶求导 $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dx^2}{dt^2}} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t}{x'(t)}$

1) 对左右求2次导，一次导 y' 代入二次导 2) 对 $y'=u$ 求二次导

3、如函数仅包含 $x \div x^2\ \sqrt{x}$，用对数求导数

两边同时取对数 $y=e^{2x}$ $\ln y = 2x\ln e$，后求导

4. 参数式导数

$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ $f''(x) = \frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$

5. 极坐标 $P(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

极点

6. 相关变化率

2.5 函数的微分及其应用

1、$y=f(x)$，$\Delta y = \underbrace{A(x_0)}_{常量}\Delta x + o(\Delta x)$，称 $y=f(x)$ 在 x_0 可微

微分 $dy|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x$

定理1：$y=f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $y=f(x)$ 在 x_0 处必连续

定理2：$y=f(x)$ 在 x_0 处可微 $\iff$ 可导

$dy = f'(x)dx$ $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ 微商

$\begin{cases} dx = \Delta x \\ y' = \frac{dy}{dx}\end{cases}$

2、微分的运算法则

$d(u\pm v) = du\pm dv$ $d(uv) = vdu+udv$

$d(Cu) = Cdu$ $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}\ (v\neq 0)$

$y=f[\varphi(x)]$ $dy = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

$dy = y'_x dx = y'_u du$（u 中间变量）

3、近似运算 $f(x) \simeq f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

$\sqrt[n]{1+x} \simeq 1+\frac{1}{n}x$ $\ln(1+x) \simeq x$

$e^x \simeq 1+x$ $\sin x \simeq x$ $\tan x \simeq x$

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源