线代 第一章

行列式

本章小结

一、知识结构图

- 行列式
  - 定义
    - 不同行不同列元素乘积的代数和
    - 逆序数、奇排列、偶排列
  - 性质
    - 五条性质、四个推论、七种变形手段
    - 转置、变换、倍乘、提取、拆分、合并、倍加
    - 三个为零：两行（列）相同、成比例、一行（列）全为零
  - 计算
    - 对角线法则：适用于二阶、三阶行列式
    - 利用性质化为上（下）三角行列式
    - 行列式按行（列）展开
      - 概念：余子式、代数余子式
      - 计算
        - 化为上（下）三角行列式
        - 降阶：利用代数余子式
    - 特殊行列式
      - 上（下）三角行列式
      - 范德蒙德行列式
  - 应用
    - 克拉默法则（n个方程n元线性方程组）
      - 齐次线性方程组
        - 系数行列式$D\neq0$，只有零解
        - 系数行列式$D=0$，有非零解
      - 非齐次线性方程组 — 系数行列式$D\neq0$，有唯一解

1.1 二阶与三阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

注：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=①+②+③-④-⑤-⑥$$

（把X的a替换为b）

$$x_1=\frac{D_1}{D} \quad x_2=\frac{D_2}{D} \quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

$$\begin{array}{c} ④ \\ ⑤ \\ ⑥ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

1.2 n阶行列式的定义

逆序数 $\tau(2341)=3$ $\quad 2\to1 \quad 3\to1 \quad 4\to1$ 奇排列

对换 定理1. 任一排列经过一次对换改变奇偶性

推论1.2 在由$n(n\geq2)$个元素构成的$n!$种全排列中，奇排列偶各占半

n阶行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}=\det(a_{ij})=|a_{ij}|$$

上/下三角行列式（主对角线上/下方均为0）= 主对角线相乘

次对角线行列式（次对角线…均为0）= 次对角线相乘$\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

1.3 n阶行列式的性质

1、转置性：行列式与其转置行列式相等

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2、反号性：互换行列式的任意两行(列)，行列式变号

i,j两行对换：$r_i\leftrightarrow r_j$ $\quad$ i,j两列对换：$c_i\leftrightarrow c_j$

推论：如行列式两行完全相同，则此行列式等于零

3、倍乘性：行列式某行/列所有元素$\times k$，可提出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

推论：行列式某行/列为0，行列式为0

推论：行列式有两行/列成比例，行列式为0

4、可加性：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & a_{i3}+a_{i3}' \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{i1}' & a_{i2}' & a_{i3}' \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5、倍加性：行列式某行/列各元素k倍加到另一行/列，行列式值不变

$$D\xlongequal{r_3-2r_1}D'$$ 化简目标：化解为上/下三角行列式

（用2倍r_1的值去减r_3）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=D_1D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4 行列式按行（列）展开

1、余子式、代数余子式

在n阶行列式中，把(i,j)元a_{ij}所在i,j行/列删除后，余下的$n-1$阶行列式称为(i,j)元a_{ij}的余子式，记M_{ij}，记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称A_{ij}为(i,j)元a_{ij}的代数余子式

2、行列式按行/列展开法则：（某行/列有较多零元时用）

行列式等于它任一行/列各元素与其对应的代数余子式乘积和

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{nj} \quad (i=1,2,\cdots n)$$

3、行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于0，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad i\neq j$$

4、由2.3可知
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

5、递推法：
$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_n=(a+b)\begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+2}ab\begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix}_{n-2}$$

递推公式：$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$ $\quad$ $\therefore D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$\therefore D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n$$

$$\therefore D_n=aD_{n-1}+b^n=a(aD_{n-2}+b^{n-1})+b^n=\cdots=a^n+a^{n-1}b+\cdots+b^n$$

6、范德蒙德行列式
$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$$

Π为连乘号，表示全体同类因子乘积

1.5 克拉默法则

$$(1.20)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如果线性方程组的系数行列式$D\neq0$，那么方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D} \quad x_2=\frac{D_2}{D} \quad \cdots \quad x_n=\frac{D_n}{D}$$ D_n是把第n列换成b_i列行列式

定理：如果线性方程组(1.20)的系数行列式$D\neq0$，则方程组有唯一解

逆否定理：如果线性方程组无解或有无穷多解，则$D=0$

齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$
：总是有解 $x_j=0$（零解）

x_j不全为0：非零解

常数项不全为0方程组称为非齐次线性方程组

推论：如齐次线性方程组的系数行列式$D\neq0$，则方程组只有零解

推论：如齐次线性方程组有非零解，则它的系数$D=0$

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源