线代 第五章

方阵的特征值与对角化

- 方阵的特征值、相似与对角化
  - 特征值与特征向量
    - 定义 — $A\alpha=\lambda\alpha, \alpha\neq 0$
    - 求法
      - 特征值
        - 定义法
        - 特征多项式法 $|A-\lambda E|=0$
      - 特征向量
        - 定义法
        - 基础解系法 $(A-\lambda E)x=0$
    - 性质
      - 不同特征值对应的特征向量线性无关
      - k重特征值至多有k个线性无关的特征向量
      - $\mathrm{tr}(A_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i, |A_n|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$
  - 相似矩阵
    - 定义 — $P^{-1}AP=B$，记作$A\sim B$
    - 性质 — $(A\sim B)\overset{\text{必要条件}}{\Rightarrow}$
      - $R(A)=R(B)$
      - $|A|=|B|$
      - $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$，即特征值相同
      - $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$
    - 可对角化
      - $\overset{\text{充要条件}}{\Leftrightarrow}$
        - A_n有n个线性无关的特征向量
        - 若λ是A的k重特征值，则λ必有k个线性无关的特征向量
        - $R(A-\lambda_i E)=n-r_i$（λ_i 为 A 的 r_i 重特征值）
      - $\overset{\text{充分条件}}{\Leftarrow}$
        - A_n有n个不同特征值
        - A为实对称矩阵
      - 求法：$P^{-1}A_nP=\Lambda$，其中$P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$
        $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$且$AP_i=\lambda_iP_i(i=1,2,\cdots,n)$
  - 实对称矩阵
    - 性质
      - 特征值为实数，特征向量为实向量
      - 不同特征值对应的特征向量必正交
    - 对角化
      - 必可对角化
      - 可用可逆矩阵、正交矩阵对角化
      - k重特征值必有k个线性无关的特征向量

注 （1）由 $A\sim B$ $\begin{cases}\Leftrightarrow A+kE\sim B+kE, & \text{常用于讨论矩阵}A\text{与}B\text{相似,}\\ \Rightarrow A^n\sim B^n, & \text{常用于讨论计算矩阵}A\text{的}n\text{次幂.}\end{cases}$

（2）设λ为n阶矩阵A的特征值，A的对应于特征值λ的特征向量为α，则有下列结果.

A	$A+kE$	A^m	$\varphi(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
λ	$\lambda+k$	λ^m	$\varphi(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
α	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$

其中k为任意不为0的常数，m为任意的自然数，$\varphi(A)$为矩阵A的m次多项式.

5.1 方阵的特征值与特征向量

1、方阵特征值与特征向量的概念

A是n阶方阵 存在数λ，存在非零列向量α，使$A\alpha=\lambda\alpha$

λ：一个特征值（根） α：对应于λ的特征向量

$$(A)_{n\times n}(\alpha)_{n\times 1}=\lambda(\alpha)_{n\times 1}$$

由$A\alpha=\lambda\alpha$ $\lambda E\alpha-A\alpha=0 \to (\lambda E-A)\alpha=0$ 有解（非零解）

∴求$|\lambda E-A|=0$：特征方程 $\lambda E-A$：特征矩阵 $|\lambda E-A|$：特征多项式

① λ是A的特征值，α是λ的特征向量，$c\alpha$也是λ的特征向量

② α_1,α_2是λ的特征向量，$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$也是λ的特征向量

2、方阵特征值和特征向量的求法

1、写出$|A-\lambda E|$ 2、$|A-\lambda E|=0$的根 $\lambda_1\lambda_2\cdots$（特征值）

3、对每个特征值求$(A-\lambda_i E)x=0$的一个基础解系、$\alpha_1\cdots\alpha_r$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$ 为A对应λ_i的全部特征向量

例：$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}$ 利用余子式化出一个根 $=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+7)$

∴根 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$

1°) $\lambda_1=-7$ $\lambda E-A=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\cdots\to$（行简化）同解方程组 $c_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

2°) $\lambda=2$ $\lambda E-A=\cdots\cdots\to\to$ $c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

3、特征值和特征向量的性质 $A\alpha=\lambda\alpha$ $|\lambda E-A|=0$

☆☆ 1°) A和A^T有相同的特征值，但特征向量不一定相同

$|\lambda E-A^T|=|\lambda E^T-A^T|=|(\lambda E-A)^T|=|\lambda E-A|$

2°) $\sum|a_{ij}|<1$ $i=1\cdots n$ / $\sum|a_{ij}|<1$ $j=1\cdots n$，$|\lambda_k|<1$

A的每行/列元素绝对值之和<1，则其特征值的模<1

☆☆☆ 3°) n个特征值$\lambda_1\cdots\lambda_n$ ① $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ ② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

记 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ A的迹 所有特征值相加=方阵对角和 特征值相乘=A的行列式

4°) 互不相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$对应的特征向量 $\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关

5°) 互不相同的特征$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$，$\lambda_1$对应特征向量$\alpha_1,\alpha_2$

λ_2对应α_3 λ_3对应$\alpha_4\alpha_5\alpha_6\cdots$（其中$\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ $\alpha_1\alpha_2$线性无关）

则$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_6\cdots\alpha_m$线性无关

6°) k重特征根（值）对应的线性无关的特征向量的个数$\leq k$

λ_1对应$\alpha_1\alpha_2$（2重） λ_2对应α_3（单根）

7°) $k\lambda$是kA的特征值 （λ是A的特征值）

8°) λ^k是A^k的特征值 （λ是A的特征值）

9°) c是A的特征值，求A的多项式的特征值：将A替换为c，$E\to1$

10°) $\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|$是A^*的特征值

$\frac{1}{\lambda}|A|^{n-2}$是$(A^*)^*$的特征值

$|\lambda E-A|=0$ 题 $|-3E-A|=0$ ∴$\lambda=-3$

如：$|E+2A|=0$ $|-2(-\frac{1}{2}E-A)|=0$ $(-2)^n(-\frac{1}{2}E-A)=0$

5.2 方阵的相似矩阵及对角化

1、相似：AB均n阶方阵，若∃可逆矩阵P，使得

$P^{-1}AP=B$，则AB相似，记$A\sim B$

性质：(1)反身性 $A\sim A$ (2)对称性 $A\sim B\to B\sim A$

(3)传递性 $A\sim B$ $B\sim C$ 则$A\sim C$

性质：AB均n阶方阵，若$A\sim B$，则

(1) A与B的特征多项式相同，AB相同特征值

(2) $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ (3) $R(A)=R(B)$

性质 $A\sim B$，A可逆$\Longleftrightarrow$B可逆 $A^{-1}\sim B^{-1}$

A不可逆$\Longleftrightarrow$B不可逆

性质：$A\sim B$ $A^m\sim B^m$

2、相似对角化：

性质：若A与$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)$相似，则$\lambda_1\cdots\lambda_n$为A的n个特征值，称A可相似对角化（A可对角化）

A相似于$\Lambda\Longleftrightarrow$A有n个线性无关的特征向量

推论 A有n个互异的特征值$\longrightarrow A\sim\Lambda$

A可对角化 $\leftarrow$ 每个重根线性无关的特征向量数=重数

例：$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{pmatrix}$ 相似Λ? $P=?$ $\Lambda=?$

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$ ∴$\lambda_1=-4$ $\lambda_2=\lambda_3=2$（☆）

$\lambda_1=4$ $(\lambda_1E-A)X=0$ $\xrightarrow{行}$ $\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}x_3\\x_2=-\frac{2}{3}x_3\end{cases}$ $\alpha_1\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=2$ $\xrightarrow{行}$ $\alpha_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ∴$P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$

$\Lambda=\begin{pmatrix}-4&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

5.3 实对称矩阵的对角化 （4.5?） 注：本后书如此表示

方阵A不一定能对角化，但当A为实对称矩阵时，必对角化

$[\alpha,\beta]$ △注 内积：$\alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\beta\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 行 列

$(\alpha,\alpha)\geqslant0$ 若$(\alpha,\alpha)=0$，$\alpha=0$

$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$ $(k\alpha,k\beta)=k^2(\alpha,\beta)$

$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta+\gamma)$

$|\alpha|$ △注 向量的长度/模/范数

$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ $(\alpha,\alpha)=\|\alpha\|^2$

单位向量 $\|\alpha\|=1$ 单位化（标准化） $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha=\beta$

性质 $\|\alpha\|\geqslant0$ $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$

柯西－施瓦兹不等式 $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\|\beta\|$

$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

3. 正交（垂直） $(\alpha,\beta)=0$，记$\alpha\perp\beta$ $(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$

正交向量组：$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_s$两两正交，且均不含零向量

标准正交向量组：$\begin{cases}(\alpha_i\alpha_i)=1\\(\alpha_i,\alpha_j)=0\end{cases}$

若$\alpha_1\alpha_2\alpha_s$正交向量组，则$\alpha_1\cdots\alpha_s$线性无关

4. 施密特正交化

给一组线性无关的$\alpha_1\cdots\alpha_s$，求与α等价的且正交的$\beta_1\cdots\beta_s$

$\beta_1=\alpha_1$ $\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3\beta_2)}{(\beta_2\beta_2)}\beta_2$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$ $\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4\ )}{(\ )}\beta_1-\frac{(\alpha_4\ )}{(\ )}\beta_2-\frac{(\alpha_4\beta_3)}{(\beta_3\beta_3)}\beta_3$

求出β之后，对β进行单位化 $\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1$

5、正交矩阵：A为n阶方阵，如果$A^TA=E$，则为正交矩阵

性质1) A正交，$|A|=1/-1$

性质2) A正交，$A^{-1}=A^T$，且A^{-1}和A^T均为正交

性质3) A、B正交，AB为正交

定理 A正交矩阵$\Longleftrightarrow$A的列（行）向量组是标准正交向量组

6、实对称矩阵的对角化

定理：实对称矩阵A的不同特征值所对的特征向量正交

正交相似：AB同阶，若∃正交矩阵P，有$P^{-1}AP=B$

相似：AB同阶，若∃可逆P，有$P^{-1}AP=0$

定理：设A为n阶实对称矩阵，则必存在正交矩阵$Q=(e_1\cdots e_n)$

使$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)$

$\lambda_1\cdots\lambda_n$是A的特征值 Q的列向量组是A对应于λ的规范正交的特征向量组

题：给实对称矩阵A，求正交矩阵Q，使$Q^{-1}AQ=\Lambda$

过程. (1)求特征值 (2)求特征向量 (3)特征向量正交化单位化

(4) 做成列，构成Q (5) $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

(3)正交化分析 (1) 三个根都单根：$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$已正交，直接单位化

(2) 一单一两重 只对$\alpha_2\alpha_3$进行schmit正交化

(3) 三重根：schmit正交化