第三章

守恒定律

第三章 运动的守恒量和守恒定律
- 力对时间：动量，冲量，动量定理
- 力对空间：功，功率，动能定理

1、动量 冲量 动量定理

动量 $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ $\vec{p} = m\vec{v}$ kg·m/s 矢量，状态量，相对量

动量代表物体在碰撞一类的运动过程运动量转移

冲量 $\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1)$ $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$ $\vec{F}(t_2 - t_1) = mv_2 - mv_1$ N·S 过程量

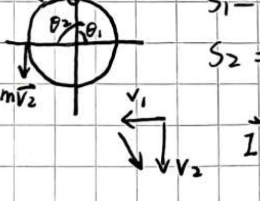
反映力对时间的累积效应

动量定理：质点在运动过程中，所受合外力的冲量等于质点 Δp 增

$\vec{I} = \vec{p_2} - \vec{p_1} = \Delta\vec{p}$ 方向一致

动量定理适用于惯性参考系的一切力学过程

例：$m=1kg$ 的质点从O开始沿半径 $R=2m$ 的圆周运动，以O点为自然坐标原点，已知质点的运动方程为 $s=0.5\pi t^2$，试求从 $t_0=\sqrt{2}s$ 到 $t_1=2s$ 这段时间内质点所受合外力的冲量



$S_1 = \pi$ $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ $v = \frac{ds}{dt} = \pi t$

$S_2 = 2\pi$ $\theta_2 = \pi$ $v_1 = \sqrt{2}\pi m/s$ $v_2 = 2\pi m/s$

$\vec{I} = m\vec{v_2} - m\vec{v_1}$ $|\Delta m\vec{v}| = \sqrt{(mv_1^2) + (mv_2^2)} = \sqrt{6}\pi$ kg·m/s

$|\vec{I}| = \sqrt{6}\pi = 7.69$ kg·m/s $\theta = 54°44'$

2、质点系的动量定理（n个质点）

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t}\sum\vec{F_i}dt}_{合外力的冲量} = \underbrace{\sum m_i\vec{v_i}}_{末动量} - \underbrace{\sum m_i\vec{v}_{i0}}_{初动量} = \vec{p} - \vec{p_0} = \Delta\vec{p}$$

微分式 $\sum\vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ 系统的内力不能改变整个系统的总动量

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v_i}\right)$$

3、动量守恒定律：

系统所受合外力为零时，系统的总动量保持不变

$\vec{p} = \sum m_i\vec{v_i} =$ 常矢量 条件：$\sum\vec{F_i} = 0$

动量守恒的分量式

4、功 功率 动能定理

功：反映力对空间的累积作用

$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$ 单位：J

元功：$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 总功：$W = \int_a^b \vec{F}d\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta|d\vec{r}|$

合力对质点作功 = 每个分力做功代数和

一对作用力/反作用力做功之和 = 一质点相对另一质点移动下做的功

功是标量，过程量，相对量，相互作用力的功与参考系无关

功率：单位时间所做的功

$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ $w = J/s$ $P = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

功能定理：$W = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

5、保守力与非保守力 势能

(1) 万有引力做功 $\vec{F} = -G\frac{m_0 m}{r^2}\vec{e_r} \to W = -Gm_0m\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

(2) 重力做功 $W_{ab} = \int_{h_a}^{h_b} -mg\,dz = mg(h_a - h_b)$

(3) 弹性力做功 $W = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$

以上均为保守力：做功与路径无关，只与始末位置有关

势能 E_p $E_{pa} - E_{pb} = \int_a^b \vec{F}d\vec{r} = W_{ab} = -\Delta E_p$

保守力做功在数值上等于系统势能的减少

几个典型势能

引力势能 $E_p = -G\frac{m_0 m}{r}$（无限远处为势能零点）

重力势能 $E_p = mgh$（地面 $h=0$ 处为势能零点）

弹性势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$（弹簧自由端为势能零点）

保守力做正功时，系统势能减少；做负功，势能增加

对应一种保守力就可以引出一种相关的势能

结论：保守力沿各坐标方向的分量，在数值上等于系统的势能沿相应方向的空间变化率的负值，其方向指向势能降低的方向

6、质点系功能原理 机械能守恒定律

质点系动能的增量等于作用于系统的所有外力和内力的代数和 $W_{内} + W_{外} = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$

$W_{外} + W_{非保守内力} = E_2 - E_1$

质点系机械能的增量等于所有外力和所有非保守内力代数和

机械能守恒：系统只有保守内力作功，则恒守

7、碰撞

$e=1$ 完全弹性碰撞：机械能无损失（$m_1=m_2$ 交换速度）

$0<e<1$ 非弹性碰撞：机械能有损 $\Delta E_{损} = \frac{m_1m_2(v_{10}-v_{20})^2}{2(m_1+m_2)}$

$e=0$ 完全非弹性碰撞：有损且物体合为一体

e：恢复系数 动量守恒 $m_1\vec{v_{10}} + m_2\vec{v_{20}} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$（动量守恒）

8、能量守恒

9.角动量守恒 角动量

角动量：$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$ ($kg\cdot m^2/s$)（叉乘）

运动质点相对参考点O的角动量

大小：$L = mrv\sin\alpha = r_\perp mv$

方向：位矢 $\vec{r}$ 和动量 $m\vec{v}$ 的矢积方向（右手螺旋）

力矩：$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ 外力F对参考点O的力矩 (N·m)（叉乘）

力矩是改变物体运动状态的物理量

力矩大小：$M = rF\sin\alpha$

角动量定理：质点对某一参考点所受的冲量矩 = 质点角动量增量

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times\vec{p} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt = \vec{L_2} - \vec{L_1}$

$\vec{M}_{外} = \sum\vec{r_i}\times\vec{F_i} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

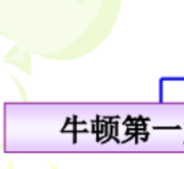
质点系角动量定理 $L = \sum_{i=1}^{n}l_i = \sum_{i=1}^{n}r_i\times m_iv_i$

$\int_{t_1}^{t_2}M_{外}dt = L_{末} - L_{初}$

角动量守恒定律

如果 $\vec{M}_{外} = 0$，则 $\vec{L} =$ 恒矢量

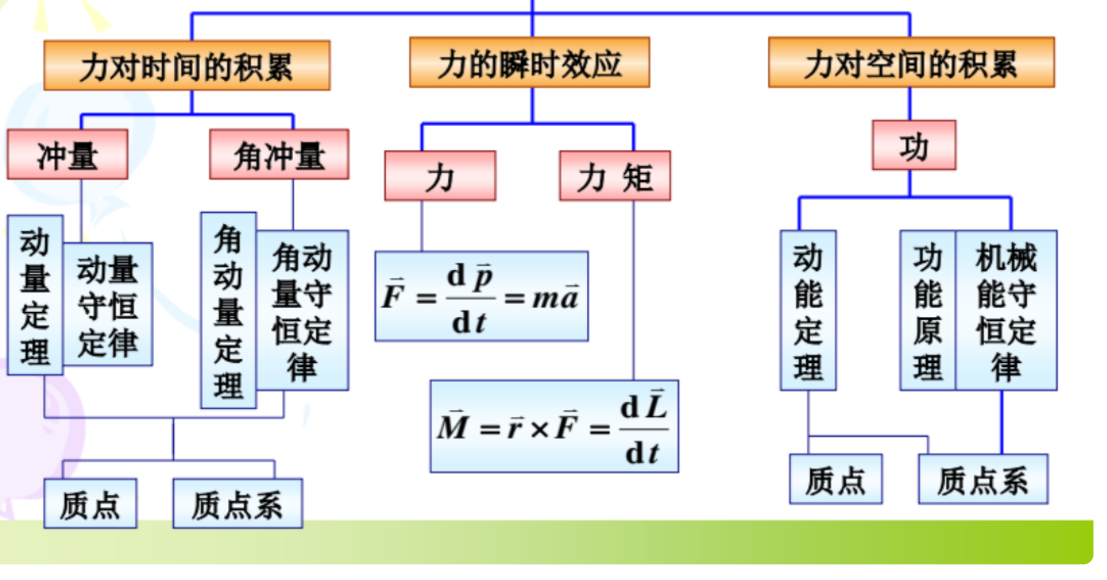
① $\vec{r}=0$ ② $F=0$ ③ r F 同/反向



线密度 λ，长度 L，下落 y 时对桌面瞬时作用力

$$\begin{cases}\frac{1}{2}mv^2 = mgy \\ (N-G)dt = 0 - [\lambda dy(-v)]\end{cases}$$

$N = \lambda v^2 + \lambda yg = 3\lambda yg$



本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源