第十二章

微分方程

第12章 微分方程

含导数就叫微分方程，阶：方程中最高阶数

通解：含任常数的个数与阶相等的解　　$y'=2x$　$y=x^2+c$　一个(一阶)

常微分方程：一元函数　　偏微分方程：多元函数

n阶线性微分方程：$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$

特解：$x=x_0$ 时，$y=y_0, y'=y_1 \cdots y^{(n-1)}=y_{n-1}$（初始条件）　n阶要n个初始条件

确定通解中的任一常数后得到的解为特解

12.2 变量可分离的微分方程

可化解为 $g(y)dy=f(x)dx$　　$y'=\frac{dy}{dx}$

求积分 $\int dy=\int 2x\,dx \to y=x^2+c$

12.3 齐次方程

$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$　　① $u=\frac{y}{x}$，$y=xu$　② $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

例：$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx} \to \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}$

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1} \to u-\ln u=\ln x+c$

可化为齐次的：$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$　　$x=X+h$，$y=Y+k$

$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}{a_2X+b_2Y+a_2h+b_2k+c_2}\right)$　　$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$

1°) 若 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$，则前式有唯一解

2°) 若 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$，前式无解，可化……

12.4 一阶线性微分方程

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$　　1°) $Q\equiv0$ 齐次　2°) $Q\neq0$ 非齐次

1°) $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$　通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$

2°) $Q\neq0$ 时，通解 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

伯努力方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ $(\alpha\neq0,1)$

$z=e^{-\int(1-\alpha)P(x)dx}\left(\int(1-\alpha)Q(x)e^{\int(1-\alpha)P(x)dx}dx+C\right)$

$z=y^{1-\alpha}$　（原式除 y^{α}，令 $z=y^{1-\alpha}$）

12.5 全微分方程

全解分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$　设左端为 $u(x,y)$ 的全微

$\therefore du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$\therefore$ 通解 $u(x,y)=C$

全微分方程的通解

1°) $C=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)$　　取$(0,0)$　$x_0y_0 \to (x,y_0) \to (x,y)$

2°) $\varphi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx$，再求积分出 $\varphi(y)$

代入 $u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$，可知

12.6 可降阶的高阶微分方程　　高阶 → 一阶

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型：逐次积分

2. $y''=f(x,y')$　$y'=p$　$y''=p'$　$\therefore p'=f(x,p)$

3. $y''=f(y,y')$　$y'=p$　$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$　$\therefore p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

12.7 高阶线性微分方程

$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$　$\begin{cases}f(x)\neq0 & 二阶线性非齐次\\f(x)=0 & 二阶线性齐次\end{cases}$

解的结构：

(1) 齐次：① $y_1(x)$ $y_2(x)$ 是解，$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是解

但不一定是通解

函数组的相关和线性无关：

$y_1 \cdots y_n$ 线性相关：存在不全为0 $k_1 \cdots k_n$，使 $k_1y_1+\cdots+k_ny_n=0$

（或 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的比是函数）

② y_1, y_2 是线性无关的特解，$C_1y_1+C_2y_2$ 是齐次方程通解

(2) 非齐次

① $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$，非齐次，y^* 是特解

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$，齐次，Y 是通解

$Y+y^*$ 是非齐次方程的通解，

② Y_1 Y_2 是非齐次方程的特解，Y_1-Y_2 是齐次特解

③ $u=f_1(x)+f_2(x)$，y_1^* 是 $u=f_1(x)$ 特解，y_2^* 是 $f_2(x)$，$y_1^*+y_2^*$ 特

12.8 二阶常系数齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$　$[f(x)=0$ 齐次　$f(x)\neq0$ 非齐次$]$

特征方程 $r^2+pr+q=0$，r 的解即为解

$\begin{cases}1°)\ r_1\neq r_2\ 实根 & y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\\2°)\ r_1=r_2\ 实根 & y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}\\3°)\ \alpha\pm\beta i & y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\end{cases}$　（通解）

$y=e^{x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$　$\therefore \alpha=1$　$\beta=2$　$r_1=1+2i$，$r_2=1-2i$

$\therefore (r-(1+2i))(r-(1-2i))=0$　$\therefore r^2-2r+5=0$

12.9 二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$

1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型　令 $y^*=R(x)e^{\lambda x}$

$R''(x)+(2\lambda+p)R'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)R(x)=P_m(x)$

① λ 不是 $r^2+pr+q=0$ 的根 $(\neq0)$

$R(x)$ 为 m 次多项式，$R(x)=b_0x^m+\ldots$ 对应相等

② λ 是 $r^2+pr+q=0$ 的单根　$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 但 $2\lambda+p\neq0$

$R'(x)$ m 次　　$R(x)=xR_m(x)$

③ λ 是 $r^2+pr+q=0$ 的重根　$\lambda^2+p\lambda+q=0$　$2\lambda+p=0$

$R''(x)$ m 次　　$R(x)=x^2R_m(x)$

2. $f(x)=e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x)$ 型

特解 $y^*=x^ke^{\alpha x}[A_m(x)\cos\beta x+B_m(x)\sin\beta x]$　$m=\max(l,n)$

① $\alpha+i\beta$ 不是 r^2+pr+q 的根　$k=0$

② $\alpha+i\beta$ 是特，$k=1$