第五章

大数定律及中心极限定理

5.1 大数定律： 大量重复试验的平均结果的稳定性

1.切比雪夫不等式

$E(X)$ $D(X)$存在，$\forall \varepsilon>0$ $P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ ①

（$E(X)$对称轴，落在ε之外的概率小于$\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$） $D(X)\downarrow$波动小 在外$\downarrow$

$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ ②

2.切比雪夫大数定律

依概率收敛 $X_n\xrightarrow{P}a$ $P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$ 总体逼近，个别不符

伯努利大数定律 n重伯努力，A发生m_n次，p概率，$\frac{m_n}{n}$频率

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{m_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1 \quad (频率\to概率)$$

弱大数定律（辛钦）

$X_1\cdots X_n$独立，服从同一分布 $E(X_i)=p$ $D(X_i)=(1-p)$

$m_n=\sum_{i=1}^n X_i$ $\frac{m_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ $p=E(\frac{m_n}{n})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)$

切比雪夫大数定律

$X_1\cdots X_n$不相关 $E(X_i)$ $D(X_i)$均存在，方差有界 $D(X_i)\leq M$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)|<\varepsilon\}=1$$

均值 $\xrightarrow{收敛}$ 期望均值

5.2 中心极限定理

No.

Date

1.独立同分布的中心极限定理

现象由大量相互独立的因素影响，变量和的极限分布为正态分布

$X_1\cdots X_n$独立分布，$E(X_i)=\mu$ $D(X_i)=\sigma^2$ $0<\sigma^2<+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x)=\Phi_0(x)$$

$Y=\sum_{i=1}^n X_i$ $EY=n\mu$ $DY=n\sigma^2$

$\frac{\sum X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ $N(0,1)$ $\sum_{i=1}^n X_i$ $N(n\mu,n\sigma^2)$

2.棣莫弗-拉普拉斯定理（特殊）

Y_n是n,p二项分布，有 $\lim_{n\to\infty}P(\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x)=\Phi_0(x)$

二项分布 $\xrightarrow{n大,np适中}$ 泊松分布

近似

二项分布 $\xrightarrow{n大,np大}$ 正态分布

3.李雅普诺夫定理

无论各个随机变量服从何分布，只要n很大时，就近似的服从正态分布.