第四章

刚体力学

Date

第四章 刚体力学

力矩的空间累积效应：力矩的功，转动动能，动能定理

刚体：力的作用下不发生形变的物体（特殊质点系，理想）

刚体的运动状态：平动，转动

定轴转动：

(1) 均圆周运动 (2) $\Delta\theta$ $\overline{\omega}$ $\overline{\alpha}$ 同，$\vec{v}$ $\vec{a}$ 不同

描绘：(1) 角量 (2) 线量 $\vec{r}$ $\vec{v}$ $\vec{a}$

角加速度：$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ s^{-2}/$rad\cdot s^{-2}$　角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ rad

$\omega = \omega_0 + \alpha t$　$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$　$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

定轴转动的转动定理：

$M_z = rF\sin\alpha = r_\perp F$

$r_\perp$ 力臂　$M_z > 0$ 逆时针 $M_z < 0$ 顺

若 F 与 r 不在一平面内，将 $\vec{F}$ 分解为 $\vec{F_\perp}$ 和 $\vec{F_z}$

$\vec{M} = \sum_i \vec{M_i} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}$

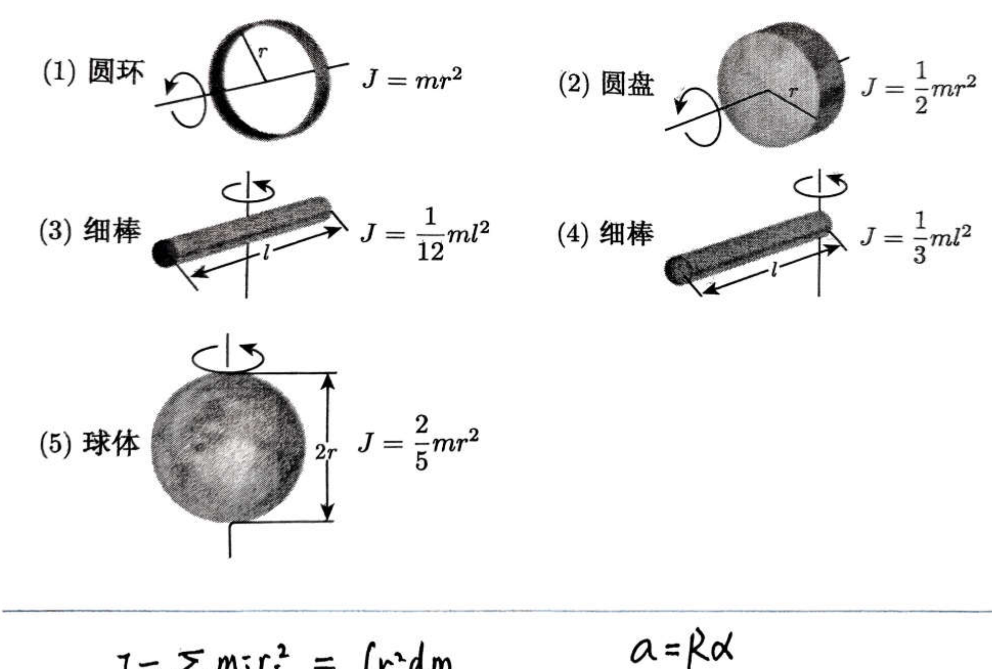
刚体内 作用力的力矩和反作用力力矩 相互抵消

转动定律 $M = J\alpha$　M：合外力矩　α：角加速度

$J = \sum m_j r_j^2 = \int r^2 dm$ 转动惯量

$\alpha = \frac{M}{J}$　$M = J\frac{d\omega}{dt}$　α M 方向相同 瞬时　转动 $M = J\alpha$ 平动 $F = ma$

J：转动惯量：描述刚体在转动中惯性大小



$J = \sum m_j r_j^2 = \int r^2 dm$　　$a = R\alpha$

质量线分布　$dm = \lambda dl$　$J = \int r^2 \lambda dl$　$\frac{dl}{l} = \frac{dm}{m}$ $\therefore \lambda = \frac{m}{l}$

质量面分布　$dm = \sigma ds$　$J = \int r^2 \sigma ds$　J 与转轴位置有关

质量体分布　$dm = \rho dv$　$J = \int r^2 \rho dv$　$dm = \sigma ds = \sigma 2\pi r dr$

圆盘绕中心轴转动惯量与厚度无关 $= \frac{1}{2}mR^2$

例　$M = \frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$

$J = \frac{1}{3}ml^2$　$\therefore \alpha = \frac{3g}{2l}\sin\theta$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$

$\int_0^\omega \omega d\omega = \frac{3g}{2l}\int_0^\theta \sin\theta d\theta$　$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

平行轴定理

$J_z = J_c + md^2$
$= \frac{1}{2}mR^2 + md^2$

垂直轴定理

$J_z = J_x + J_y$

$J_z = \frac{1}{2}mR^2$　$J_x = J_y = \frac{1}{4}mR^2$

4.3 定轴转动的动能定理

1. 力矩做功

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cos(90-\varphi)|d\vec{r}| = F\cos(90-\varphi)ds$

$(ds = rd\theta)$ $\therefore dW = F\sin\varphi\, r\, d\theta = M_z d\theta$ 力矩元功

$W = \int dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d\theta$　M_z：所有外力对 OZ 轴合外力矩

若力矩为恒力矩 $W = M_z(\theta_2 - \theta_1) = M_z\Delta\theta$

2. 力矩的功率

$P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega$　$(P = \vec{F}\vec{v})$

3. 转动动能

$E_k = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}(\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$

4. 定轴转动动能定理

$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{d\omega}{dt}d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega$

$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$

合外力矩对刚体所做的功等于刚体定轴转动动能增量

4.4 质心与质心运动定理

1. 质心位矢：$\vec{r_c} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + \cdots + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum m_i\vec{r_i}}{m}$

$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$　$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$　$z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$

连续性质心位置 $x_c = \frac{\int x dm}{\int dm}$　$y_c = \frac{\int y dm}{\int dm}$　$z_c = \frac{\int z dm}{\int dm}$

2. 质心位置公式

$m\vec{r_c} = \sum m_i \vec{r_i} \rightarrow m\vec{v_c} = \sum m_i \vec{v_i}$

质点系的总动量 = 总质量与其质心运动速度乘积

$\sum \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum m_i\vec{v_i}) = m\frac{d\vec{v_c}}{dt}$

质心运动定理　$\sum \vec{F_i} = m\vec{a_c}$

作用于质点系上的合外力等于质点系的总质量与质心加速度的乘积

(1) 质心运动守恒定律：合外力为零，质心速度不变，内力不改运动状态

(2) 质心加速度 = 外力的矢量和除以系质总质量

4.5 刚体系统的功能原理及机械能守恒定律

刚体的重力势能 $E_p = \sum m_i g h_i = mg\frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i} = mgh_c$ (质心)

刚体的机械能　$E = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 + mgh_c$

功能原理　$A_{外} + A_{非保内} = E_2 - E_1$　$= 0$ 时机械能守恒

力的时间累积效应：冲量，动量，动量定理

力矩的时间累积：冲量矩，角动量，角动量定理

4.6 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1. 刚体定轴转动的角动量

$L_{iz} = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$

$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_i m_i r_i^2)\omega = J\omega$

作定轴转动的刚体对转轴的角动量等于转动惯量与角速度的乘积　$L_z = J\omega$

2. 刚体定轴转动的角动量定理

转动定律 $M_z = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{dL_z}{dt}$

$\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1 = J\omega_2 - J\omega_1$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} M dt$，又叫角冲量

角动量定理：作用在定轴转动物体上的冲量矩等于角动量的增量

注意 (1) 角动量定理是过程方程

(2) 方程中各量相对同一转轴

(3) 角动量增与合外力矩方向同

(4) 角动量定理对非刚体也成立

3. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

$M_z = 0$ 时　$L_z = J\omega =$ 恒量

合外力矩为零/不受外力矩，则角动量不变

(1) 定律也适用于绕定轴转动的任意物体系统

(2) 内力矩不改变系统角动量

(3) 冲击等问题，$M^{in} >> M^{ex}$，L 为常量

(4) $\sum J_i\omega_i =$ 恒量

补：子弹打沙袋　　子弹打杆　　圆锥摆系统

子弹打沙袋	子弹打杆	圆锥摆系统
动量守恒	动量不守恒	动量不守恒
角动量守恒	角动量守恒	角动量守恒
机械能不守恒	机械能不守恒	机械能守恒

例. 质量 m 长 l 均匀细杆，有只虫 m 以 v_0 落 $\frac{l}{4}$，并向 A 爬，欲使细杆角速度恒定，求小虫 v？

$\vec{r}\times\vec{p} = J\omega$

$mv_0\frac{l}{4} = [\frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{4})^2]\omega$　$\omega = \frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$

$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = \omega\frac{dJ}{dt}$

$mgr\cos\theta = \omega\frac{d}{dt}(\frac{1}{12}ml^2 + mr^2) = 2mr\omega\frac{dr}{dt}$

$\theta = \omega t$　$v = \frac{dr}{dt} = \frac{g}{2\omega}\cos\omega t = \frac{7lg}{24v_0}\cos(\frac{12v_0}{7l}t)$

表 4-1　质点的运动规律和刚体的定轴转动规律对比

质点的运动		刚体的定轴转动
速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$v \backsim \omega$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	$a \backsim \alpha$	角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
力 $\vec{F}$	$F \backsim M$	力矩 $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$
质量 m	$m \backsim J$	转动惯量 $J = \int r^2 dm$
运动定律 $\vec{F} = m\vec{a}$	$r \backsim \theta$	转动定理 $M = J\alpha$
动量 $\vec{P} = m\vec{v}$、动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$P \backsim L$	动量 $\vec{P} = \sum_i \Delta m_i\vec{v_i}$、动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
角动量 $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$		角动量 $L = J\omega$
动量定理 $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$　$Ft = mv_2 - mv_1$		角动量定理 $M = \frac{d(J\omega)}{dt} = J\alpha$　$Mt = J\alpha - J\alpha$
动量守恒 $\sum_i \vec{F_i} = 0$，$m\vec{v} =$ 恒矢量		角动量守恒 $M = 0$，$J\omega =$ 恒量
动能定理 $A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$		动能定理 $A = \frac{1}{2}J\omega_B^2 - \frac{1}{2}J\omega_A^2$
$A = \int_a^b \vec{F}d\vec{r}$　$E_k = \frac{1}{2}mv^2$		$A = \int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta$　$E_k = J\omega^2/2$