第一章

概率论的基本概念

一、概率论的基本概念

随机试验 E　　样本空间 Ω　　样本点 ω

必然事件 Ω　　不可能事件 ϕ　　空集 ϕ

事件间的关系

1、包含　$A \subset B / B \supset A$　　A发生必然导致B发生

$\phi \subset A \subset \Omega$　　ω(元素) $\in \Omega$(集合)

2、并(和)　$A \cup B / A+B$　　A与B中至少有一个发生

3、交(积)　$A \cap B / AB$　　A与B同时发生

无限可列个（可以列出来表示无穷的数）

4、事件的差　$A-B$　　A发生而B不发生

5、互不相容事件：$AB=\phi$　　AB不同时发生

6、对立事件：$A=\overline{B}$　$B=\overline{A}$　　AB互不相容且$A \cup B=\Omega$

7、完备事件组：$A_1 \cdots A_n$两两互不相容，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$（并出全集）

运算律

① 交换律　$A \cup B = B \cup A$　　$A \cap B = B \cap A$

② 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　$\cap$同理

③ 分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

④ 对偶律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$　　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

频率　　概率　① $A_1 A_2 \cdots A_n$互不相容 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

② $A \subset B$，$P(B-A)=P(B)-P(A)$

③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

等可能概型（古典概型）

① 元素有限　② 等可能

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

条件概率

$P(B|A)$：在A发生的条件下 B发生的概率

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$互不相容　$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

乘法公式：

$$P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1)\cdots P(A_n|A_{n-1}\cdots A_1)$$

全概率公式　① 互不相容　② 包括住B

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

先验概率　$P(A_i)$　　后验概率　$P(A_i|B)$

事件的独立性

定义：$P(A|B)=P(A)$　A的概率不受B发生与否影响

$P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow$ A.B独立，$P(A)>0$，$P(B)>0$

ϕ，Ω与任意事件A独立；$P(A)=0$，$P(A)=1$与任一事件独立

$\phi \rightleftarrows$ 概率为0　　$\Omega \rightleftarrows$ 概率为1

AB独立，A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B独立

$\begin{cases} \text{独立：发生的可能性互不影响} \\ \text{互不相容：} AB=\phi \end{cases}$　　两者不同时成立

伯努力模型

伯努利实验：结果只有两种　$\Omega = \{A, \overline{A}\}$

n重伯努力：n次，独立，结果只有两种

$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$　（二项分布）

超几何分布：

$$P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

$H(k; n; M, N)$

样本中次品数　样本容量　次品数　总体中个体总数

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源