高数 第五章

定积分

5.1 定积分的概念与性质

定义：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，在 $[a,b]$ 上任意插入分点，分成 n 个小区间，$\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$，任取一点 ξ_i

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2\}$$

只与 $f(x)$，$[a,b]$ 有关，与积分变量 x 无关

可积：① 连续 ② 有界，有限个间断点

定积分的几何意义：① $f(x) \geq 0$ 上方的面积 ② $f(x) \leq 0$ 下方面积的相反数

③ $f(x)$ 有正有负：上方面积减下方面积

求积分的方法：矩形法，梯形法，抛物线法（取三点似合）

定积分的性质：

(1) $b=a$ $\int_a^a f(x)=0$ (2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

(4) $a<c<b$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$a<b<c$

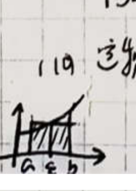
(5) $f(x)$ 恒等于 1. $\int_a^b 1dx = b-a$ $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

(6) $f(x) \geq 0$ $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ $f(x) \leq 0$ $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

(7) $f(x) \leq g(x)$ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (9) $M_{max}\ N_{min}$ $N \leq f(x) \leq M$ $N(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

(10) 定积分中值定理 $f(x)$ 连续 $\exists\, \xi \in [a,b]$ $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$



$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$ 可找一点 ξ，使 $\underbrace{f(\xi)}_{\text{平均值}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

5.2 微积分基本定理

积分上限的函数

1. $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ （是关于 x 的函数

2. $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

即 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

3. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

$\left(\int_x^a f(t)dt\right)' = -f(x)$

4. $\left\{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right]' = f(\beta(x))\beta'(x) - f[\alpha(x)]\alpha'(x)$

牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

5.3 定积分的换元积分法和分部积分法

1、定积分的换元积分法 $x=\varphi(t)$

$\varphi(\alpha)=a$ $\varphi(\beta)=b$ 且 $a \leq \varphi(t) \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d(\varphi(t)) = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi(t)dt$$

① $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 偶，$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 奇，$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

② $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

$\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

③ $f(x)$ 连续周期函数，a 常数，周期 T

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$，$n \in N$

2、定积分的分部积分法

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

5.4 反常积分

$\int_a^b f(x)dx$：常义/正常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$：反常/广义积分

1、无穷限的反常积分

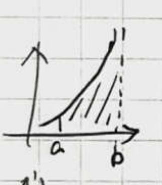
$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty}\int_a^t f(x)dx$ 极限存在：收敛；极限不存在：发散

广义的牛顿—莱布尼茨公式

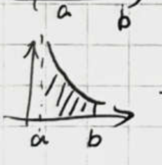
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$ $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数

2、无界函数的反常积分（瑕积分）

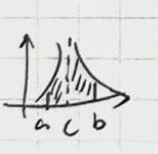
瑕点：函数不存在的点



$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-}\int_a^t f(x)dx = F(b^-) - F(a)$ b 为瑕点



$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+}\int_t^b f(x)dx = F(b) - F(a^-)$ a 为瑕点



$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+}\int_t^b f(x)dx$ c 为瑕点

中间瑕点有欺骗性，如

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ 不这样会出错

3、反常积分也有与定积分类似的分部积分法和换元积分法

其中换元函数要单调

* 反常积分的审敛法

1、无穷限反常积分的审敛法

① $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，且 $f(x) \geq 0$，若 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,+\infty)$ 有界，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

比较审敛原理（非负）

② $f(x)\ g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，且 $\forall x \in [a,+\infty)$，$0 \leq f(x) \leq g(x)$

(1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)$ 也收敛

(2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)$ 也发散

收敛审敛法

③ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$a>0$，$f(x) \geq 0$

(1) $\exists M>0$ 及 $P>1$，使 $\forall x \in [a,+\infty)$，有 $f(x) \leq \frac{M}{x^P}$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

(2) $\exists N>0$，使得 $\forall [a,+\infty)$，有 $f(x) \geq \frac{N}{x}$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

比较审敛法的极限形式

④ $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$f(x) \geq 0$ $g(x)>0$ $\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$

(1) $0 \leq l < +\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛

(2) $0 < l \leq +\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散

极限审敛法

⑤ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$a>0$，$f(x) \geq 0$ $\lim_{x \to +\infty} x^P f(x) = l$

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$，$P>1$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$，$P \leq 1$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

⑥ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛

⑦ $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 条件收敛

2、无界函数的反常积分的审敛法

⑧ $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续，$f(x) \geq 0$，$x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点

(1) 若 $\exists M>0$ 及 $P<1$，使得 $\forall x \in (a,b]$，有 $f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^P}$

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛

(2) 若 $\exists N>0$，使得 $\forall x \in (a,b]$ 有 $f(x) \geq \frac{N}{x-a}$，$\int_a^b f(x)$ 发散

⑨ $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续，$f(x) \geq 0$ $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点

若 $\lim_{x \to a^+}(x-a)^P f(x) = l$，则

(1) $0 \leq l < +\infty$，$p<1$ 时，反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

(2) $0 < l \leq +\infty$，$P \geq 1$ 时，反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源