线代 第三章

矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换
  - 初等变换
    - 等价 — A经过有限次初等变换得到B，则$A \cong B$
    - 矩阵的行阶梯形、行最简形、标准形
    - 初等矩阵 — 单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵 $E(i,j), E(i(k)), E(i,j(k))$
    - 求逆矩阵的初等变换法
  - 秩
    - 概念 — 最高阶非零子式的阶数
    - 求法 — 定义法、初等变换法
    - 性质
      - 初等变换不改变矩阵的秩
      - $0 \leqslant R(A_{m\times n}) \leqslant \min\{m,n\}$
      - $R(A)=R(A^T)$
      - $|A_n| \neq 0 \Leftrightarrow R(A_n)=n$; $|A_n|=0 \Leftrightarrow R(A_n)<n$
  - 线性方程组
    - $Ax=0$
      - 仅有零解（唯一解）$\Leftrightarrow R(A)=n$
      - 有非零解（无穷多解）$\Leftrightarrow R(A)<n$
    - $Ax=b$
      - 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})$
        - 唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})=n$
        - 无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})<n$
      - 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(\overline{A})$

第三章 矩阵的初等变换

第一节 矩阵的初等变换与初等矩阵

高斯消元法

A $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=19 & ① \\ 2x_1+8x_2+3x_3=-22 & +①\cdot(-2) \\ x_1+3x_2+2x_3=-11 & +①\cdot(-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=19 \\ 4x_2+13x_3=-60 \\ x_2+7x_3=-30 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=19 \\ x_2+7x_3=-30 \\ 4x_2+13x_3=-60 \end{cases} \cdot(-4)②$

$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=19 \\ x_2+7x_3=-30 \\ -15x_3=60 \end{cases}$

线性方程组的初等变换
(1) i个与j个方程互换位置
(2) 第i个方程乘以一个非零常数k
(3) 把第j个方程的k倍加到i个方程上

初等变换（矩阵）
- 初等行变换
- 初等列变换

$r_i \leftrightarrow r_j$ 对换变换
$r_i \times k / kr_i$ 倍乘变换
$r_i + kr_j$ 倍加变换

矩阵A经过有限次初等变换变为B，A B等价 $A \cong B$，$A \to B$

性质 1. $A \cong A$ 2. 若$A \cong B$，则$B \cong A$ 3. 若$A \cong B$，$B \cong C$，则$A \cong C$

上式A可用增广矩阵表示 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 19 \\ 2 & 8 & 3 & -22 \\ 1 & 3 & 2 & -11 \end{array}\right)$

行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{有限次初等变换}}$ 行最简形矩阵 $\xrightarrow{\text{列变换}}$ 标准行矩阵

行阶梯形矩阵	行最简形矩阵	标准形矩阵
(1) 以每行非零首元为转折线画一条阶梯线	1) 非零首元为1	1) 左上角为单位矩阵
(2) 每个阶梯只有一行 $\overline{\text{B}\text{日}}$ ×	(2) 所在列的其余元素为0	(2) 其余元素为0
(3) 阶梯线下方均为0		$F=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

二、初等矩阵（初等方阵）：

对单位矩阵E进行一次初等变换得到的矩阵为初等矩阵

(1) 互换E中的两行 $E(i,j)$ $|E(i,j)|=-1$
(2) E的第i行（列）乘k $E(i(k))$ $|E(i(k))|=k$
(3) j行k倍加i行 $E(i,j(k))$ $|E(i,j(k))|=1$

$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$ $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$ $E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$

$A_{m\times n}$
对矩阵A进行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以m阶初等…
对矩阵A进行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以n阶初等

$E(2(3))A=A(2(3))$ 行变换
$AE(1,2(2))=A(1,2(2))$ 列变换

推论：A B等价的充要条件 $B=P_1P_2\cdots P_lAQ_1\cdots Q_t$
A可逆 $\Leftrightarrow$ $A=P_1P_2\cdots P_m$ P为初等矩阵

推论：$A_{m\times n}$ $B_{m\times n}$ 等价 $\Leftrightarrow$ $\exists$ m阶可逆矩阵P，n阶…Q，使$B=PAQ$
A可逆 $\Leftrightarrow$ A的标准形为E（满秩）

三、求逆矩阵的初等变换法

1. 求A^{-1}

伴随矩阵法 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

初等变换法： $(A|E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E|A^{-1})$

行变换：$Q_1Q_2\cdots Q_tA=E$
$Q_1Q_2\cdots Q_tE=A^{-1}$
对A、E都做初等行变换，A化为E时
E得到的就是A^{-1}

方法：$(A\vdots E)=\left(\begin{array}{c|ccc} A & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$ 从第一列开始

3.2 矩阵的秩

1. m×n矩阵时，取k行k列处交叉的行列式：k阶子式（$1 \le k \le \min\{m,n\}$）
2. 矩阵$A_{m\times n}$，其r阶子式不为0，r+1阶子式均为0 → r为矩阵的秩
   记$R(A)(r(A))=k$ r阶子式为A的最高阶非零子式

若$R(A)=\min\{m,n\}$ 满秩矩阵 $R(A)\neq\min\{m,n\}$ 降秩矩阵

A阶方阵，A满秩 $\Leftrightarrow$ A可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$

3. 阶梯形（行阶梯形矩阵）：横线可跨多列，竖线只跨一行
   行最简形矩阵：①是阶梯形 ②非零首元1 ③非零首元所在列均0
4. 行阶梯形 非零首元个数 = 矩阵的秩
5. 初等变换不改变矩阵的秩

线代的解代回原题可消

6. 性质 $r(A)=r(A^T)$ 矩阵乘以可逆矩阵 秩不变

$A_{m\times n}$，P_m阶可逆 Q_n阶可逆

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

3.3 线性方程组解

非齐次线性方程组

$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

齐次线性方程组（导出组） 矩阵：$Ax=0$

$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$

$x_1=c_1, x_2=c_2 \cdots x_n=c_n$ 有解 → 解集 解集相同：同解方程组

$X=(c_1,c_2,\cdots c_n)^T$ 解向量 → 所有解集：通解

对n元线性方程组 $Ax=b$

无解 $\Leftrightarrow R(A)\neq R(\overline{A})$ 有唯一解 $R(A)=R(\overline{A})=n$
无穷多解 $R(A)=R(\overline{A})<n$ $\overline{A}$：增广矩阵

对n元齐次线性方程组 $Ax=0$

只有零解 $R(A)=n$，有非零解 $R(A)<n$

本笔记在https://github.com/dydcyy-gh/study-notes开源