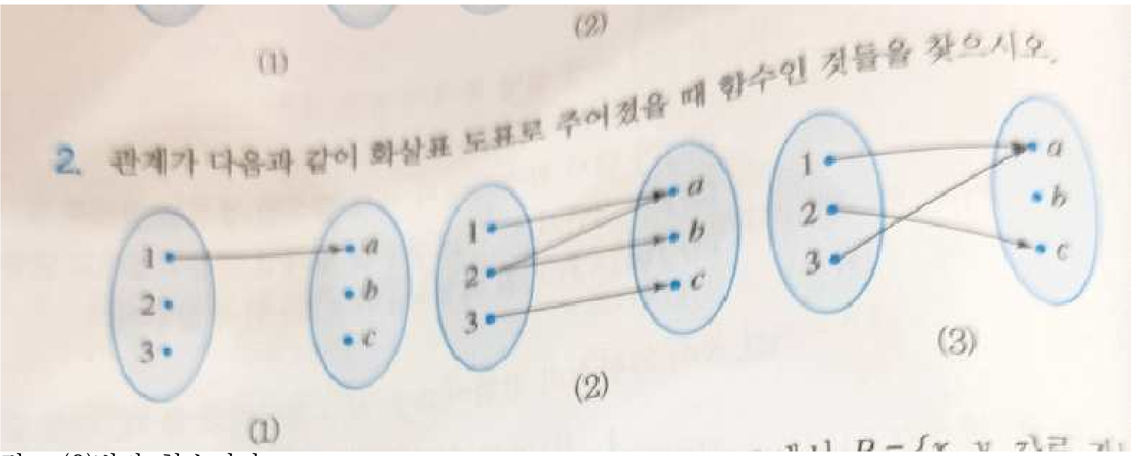
이산구조 HW#06

이름 : 안용상
학번 : 2019101074
학과 : 화학공학과



답 : (3)번만 함수이다.

4. 다음과 같은 함수에서 정의역, 공변역, 치역을 구하시오. 만약 실수 영역이라면 R로 표현하시오.

$\{(x, y) \mid x, y \in R,\ 3x + 2y = 1\}$

답 :
정의역 R
공변역 R
(치역 y = -3/2x +1/2이고 정의역이 R이므로 y도 R이다)
따라서 치역은 R이다.

6. $X = \{1, 2, 3\}$에서 $Y = \{a, b, c\}$로의 함수가 단사 함수, 전사 함수인지를 판별하시오.

$f = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$

단사함수는 정의역의 원소와 공역의 원소가 1대1 매칭되는 경우의 함수를 뜻하고
전사함수는 공역이 곧 치역이 되는 경우이다
f는 정의역이 {1,2,3}이고 공역이 {a,b,c}인데, 치역도 {a,b,c}이므로 전사함수이고

각 정의역의 원소가 공역(이 경우 치역)의 원소와 1대1 매칭되기만 하므로 단사함수이다
따라서
답 : 함수 f는 전사함수이며 단사함수이다.

8. $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$에 대한 함수 $f : A \rightarrow B$일 경우 만들어질 수 있는 모든 함수 4가지를 구하시오.(단 $a \neq b$이다.)

f : A-> B일 때
A의 원소는 정의역의 원소이고, 각 원소당 B에서 하나씩만 가질 수 있다.
그리고 A의 원소는 반드시 대응되는 B의 원소를 가져야하고
B의 원소는 모두 쓰이지 않아도 된다.
A의 한 원소가 두 개 이상 B원소를 가리키는 것은 문제가 되지만
A의 여러 원소가 B의 한 원소를 가리키는 것은 허용된다
이 경우 가능한 경우는
f = { (1,a) , (2,a) }
f = { (1,a) , (2,b) }
f = { (1,b) , (2,a) }
f = { (1,b) , (2,b) }
이렇게 네 가지를 구할 수 있다.
따라서
답 :
f = { (1,a) , (2,a) }
f = { (1,a) , (2,b) }
f = { (1,b) , (2,a) }
f = { (1,b) , (2,b) }

10. 다음의 함수 $f : R \rightarrow R$에서 이 함수가 단사 함수인지 전사 함수인지를 판별하고, 함수의 치역을 구하시오.
$f(x) = -x + 5$

정의역과 공변역은 R로 모두 실수집합이다.
이때 이 함수가 전사함수이려면 치역또한 공변역과 같은 실수 집합이여야한다.
이 경우 치역의 원소는 -x + 5로 실수 x값이 달라짐에 따라서 그 값에 -1을 곱하고 5를 더한값이 된다
이 경우에 치역 또한 실수집합이다.
또한 이 경우 함수는 선형적인 거동을 보이므로, 치역의 한 원소에 두 개 이상의 정의역원소가 대응되는 경우는 존재하지 않는다.
따라서 이 함수 f는
단사함수이며 전사함수이고
이 함수의 치역은 R 실수집합이다.

12. $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$, $C=\{1, 2\}$에 대하여 다음 각 함수의 간단한 예를 보이시오.

(1) $h: A \to A$, h는 단사 함수도 전사 함수도 아니다.

(2) $k: A \to A$, k는 전단사 함수이나 항등 함수는 아니다.

(1) h : A -> A이고 단사함수도 전사함수도 아닌 예시

h = { (1, 1) , (2, 1) , (3, 1) }

(2) k : A -> A이고 전단사함수이나 항등함수는 아닌 예시

k = { (1, 3) , (2, 2) , (3, 1) }

14. 함수 $f, g, h: Z \to Z$, $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$,

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \\ 1, & x \end{cases}$$

일 경우 다음을 구하시오.

(1) $f \circ g$ (2) $g \circ h$

(1) f*g = 3x - 1

(2) g*h = h(x)함수의 정의역원소가 0과 1을 동시에 가리키고 있으므로 h(x)는 함수가 아니며 이를 g에 합성한 g*h또한 함수가 될 수 없다.

16. $|A| = |B| = 3$이고 함수 $f: A \to B$일 경우, 역함수를 가질 수 있는 함수의 개수를 구하시오.

A = { a, b, c }

B = { 0, 1, 2 }라고 가정하자

역함수가 존재하려면 f가 전단사함수여야한다.

따라서 위 집합으로 만들 수 있는 서로다른 전단사함수의 개수를 구하면 된다

f = { (a, 0), (b, 1), (c, 2) }의 역함수 f^-1 = { (0, a), (1, b), (2, c) }

f = { (a, 0), (b, 2), (c, 1) }의 역함수 f^-1 = { (0, a), (2, b), (1, c) }

f = { (a, 1), (b, 0), (c, 2) }의 역함수 f^-1 = { (1, a), (0, b), (2, c) }

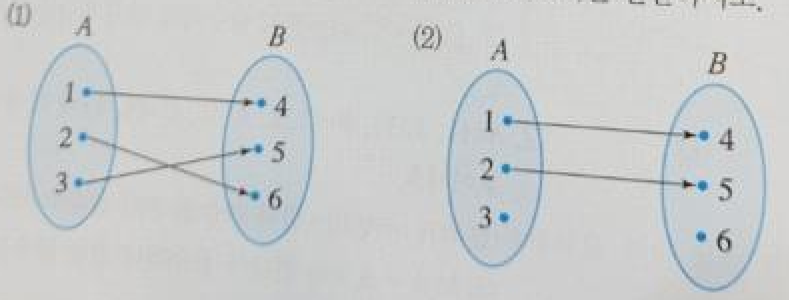
f = { (a, 1), (b, 2), (c, 0) }의 역함수 f^-1 = { (1, a), (2, b), (0, c) }

f = { (a, 2), (b, 0), (c, 1) }의 역함수 f^-1 = { (2, a), (0, b), (1, c) }

f = { (a, 2), (b, 1), (c, 0) }의 역함수 f^-1 = { (2, a), (1, b), (0, c) }

으로 총 6개가 존재한다.

18. 그림에서 {1, 2, 3}에서 {4, 5, 6}으로의 함수가 되는가를 판단하시오.



(1)은 문제에서 제시한 함수가 가능하지만
(2)는 정의역의 모든 원소가 쓰이지 않아(3이 쓰이지 않음) 함수가 되지 않는다.

20. (도전 문제) 함수 $f: R \to R$가 다음과 같을 때, 각 함수의 역함수가 존재하는지를 판별하고, 역함수가 존재하면 f^{-1}을 구하시오.

(1) $f = \{(x, y) | 2x + 3y = 7\}$ (2) $f = \{(x, y) | y = x^3\}$

(3) $f = \{(x, y) | ax + by = c, b \neq 0\}$ (4) $f = \{(x, y) | y = x^4 + x\}$

f:R -> R이므로 정의역과 공변역이 실수집합이다
역함수가 존재하려면 전단사함수여야한다.
(1)부터 (4)까지의 함수에 먼저 전사함수인지의 여부를 판단해보겠다
(1)은 전사함수이다
(2)는 전사함수이다
(3)은 전사함수이다
(4)는 최솟값을 가지며, 그 최솟값 아래로 y값을 가지지 않으므로 치역은 실수집합이 아니다.
따라서 전사함수인 함수는 (1) (2) (3)이다

(1)(2)(3)함수에 대해서 단사함수여부를 판단해보겠다.
(1)y = -2/3x + 7/3이므로 선형적인 거동을 보이며 각 정의역의 원소는 치역의 원소에 1대1 대응한다.
(2)y = x^3은 비록 선형적이지는 않지만, 해당 y의 x에 대한 도함수가 y' = 3x^2이므로 해당 도함수의 y'값이 0이상이다. 따라서 증가하다가, 다시 감소하는 경우가 없으므로, 모든 정의역 원소 x에대해서 실수집합->실수집합으로 1대1대응이 가능하다고 볼 수 있다.
따라서 이는 단사함수이다.
(3) y = -ax/b +c/b인데, 이때 a가 0이 아닌경우에는 선형적 거동을 보이기 때문에 단사함수지만, a가 0일경우에 어떤 x에 대해서 그 x는 어떤 y 값이든 가리킬 수 있는 상황이 되어버리므로, 다르게 말하면 제대로 정해진 1대 1 (x,y)짝이 없으므로 이는 단사함수가 될 수 없다.
따라서 단사함수인 경우는 (1)(2)(3)중에서 (1)(2)뿐이다

따라서 전단사함수를 만족하는 함수는 (1) (2)이며

이는 역함수를 가질수 있다

(1)의 역함수는 $f^{-1} = \{(x,y) | 2y+3x=7\}$

(2)의 역함수는 $f^{-1} = \{(x,y) | x = y^3\}$이다.

답 : 역함수를 가질 수 있는 함수 (1)과 (2)

(1)의 역함수 : $f^{-1} = \{(x,y) | 2y+3x=7\}$

(2)의 역함수 : $f^{-1} = \{(x,y) | x = y^3\}$