

1 Вопросы для самопроверки.

1. Запишите формулу Эйлера. Что она показывает?
2. Как зависит сила сопротивления от скорости в случае вязкого трения при малых и больших скоростях? С чем связано различие в зависимостях?
3. Как можно преобразовать второй закон Ньютона в случае действия силы, зависящей от координаты, чтобы с одной стороны равенства была часть, зависящая только от координаты, а с другой стороны - только от времени?
4. Как в общем виде зависит время движения от координаты в случае, когда на тело действует сила, зависящая от координаты?
5. Запишите уравнение Мещерского. Поясните смысл входящих в него величин
6. Запишите формулу Циолковского. Каким образом из уравнения Мещерского получается формула Циолковского?

2 Задачи с закрытой формой ответа.

Задача 1. (2)

Два груза массами $m_1 = 10$ кг и m_2 соединены между собой нитью, перекинутой через блок с трением, как показано на рисунке. Брусок массой m_1 лежит на шероховатой поверхности с коэффициентом трения $\mu = 0.3$. Какова масса m_2 , если грузики находятся в состоянии покоя? Коэффициент трения в блоке $k = 0.1$.

- а) 24.3
б) 28.4
в) 4.1 кг
г) 3.51 кг

Правильный ответ: г) 3.51 кг

$$m_2 = \mu m_1 \exp \frac{k\pi}{2}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$m_1 = 10, 15, 20, 25, 30 \text{ кг}$$

$$\mu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$$

$$k = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$$

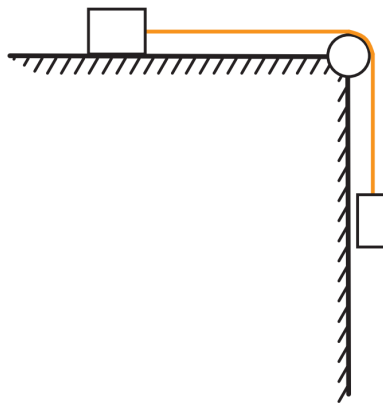


Рис. 1:

Задача 2. (2)

Два груза массами $m_1 = 1$ кг и m_2 , соединенные нитью, перекинутой через блок с трением, находятся в состоянии покоя. Первый груз массой m_1 находится на наклонной плоскости, образующей с горизонталью угол $\alpha = 30^\circ$, с коэффициентом трения $\mu = 0.1$. Какова масса m_2 ?

а) 1.19 кг

б) 0.72 кг

в) 0.65 кг

г) 0.23 кг

Правильный ответ: б) 0.72 кг

$$m_2 = m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)e^{\mu(\alpha + \frac{\pi}{2})}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$m_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ кг

$\mu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$

$\alpha = 30, 45, 60, 15, 75^\circ$

Задача 3. (2)

Серебряная цепь массы $m = 0.5$ кг, натянутая в форме полуокружности радиуса $r = 0.1$ м, удерживается двумя концами на четверти сферы, как показано на рисунке. Сферу начинают вращать с некоторой угловой скоростью ω вокруг её вертикальной стенки. При этом сила натяжения нити равна $T = 30$ Н. Найдите угловую скорость вращения сферы ω .

а) 60.6 рад/с

б) 44.6 рад/с

в) 62.2 рад/с

г) 42.2 рад/с

Правильный ответ: г) 41.0 рад/с

$$\omega = \sqrt{\frac{T\pi - gm}{rm}}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$r = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ м

$m = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ кг

$T = 30, 35, 40, 45, 50$ Н

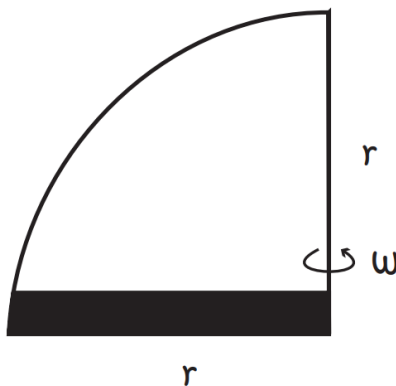


Рис. 2:

Задача 4. (1)

Рыбак на берегу озера ловит рыб. Леска удочки опущена в воду под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизон-тали. Рыбка массы $m = 0.1$ кг, двигающаяся по окружности радиуса R со скоростью $v = 2$ м/с, попалась на крючок. Рыбак, сделав 3 полных оборота лески, начал равномерно вытягивать рыб-ку, прикладывая силу $F = 1$ Н. При наматывании лески действует трение, причем коэффициент трения $\mu = 0.1$. Каков был радиус окружности, по которой двигалась рыбка?

а) 16.6 см

б) 6.9 см

в) 12.1 см

г) 42.6 см

Правильный ответ: в) 12.1 см

$$R = \frac{mv^2}{\sin \alpha F e^{6\pi\mu}}$$

Допустимые числовые значения переменных:

 $m = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ кг $v = 2, 2.5, 3, 3.5, 4$ м/с $\alpha = 30, 35, 40, 25, 20, 15^\circ$ $F = 1, 2, 3, 4, 5$ Н $\mu = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3$ **Задача 5. (1)**

Тело массой $m = 3$ кг падает с большой высоты с нулевой начальной скоростью. На него по-стоянно действует силы сопротивления $F_c = kv^2$. Считая $k = 0.2$ кг/м, найдите время, через которое скорость тела станет $v = 0.99v_\infty$, где v_∞ - это скорость, когда сила тяжести начинает уравновешивать силу сопротивления.

а) 3.24 с

б) 2.29 с

в) 1.83 с

г) 6.48 с

Правильный ответ: а) 3.24 с

$$t = 0.5 \sqrt{\frac{m}{kg}} \ln 199$$

Допустимые числовые значения переменных:

 $m = 3, 4, 5, 6, 7$ кг $k = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ кг/м**Задача 6. (1)**

Тело массой $m = 5$ кг двигалось с постоянной скоростью $v_0 = 2$ м/с. В некоторый момент времени на него начала действовать сила сопротивления $F = -kv$, где $k = 0.5$ кг/с. Какое расстояние пройдет тело через время $t = 5$ с?

а) 6.29 м

б) 1.57 м

в) 10.59 м

г) 3.14 м

Правильный ответ: б) 1.57 м

$$L = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Допустимые числовые значения переменных:

 $v_0 = 2, 3, 4, 5, 6$ м/с $k = 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7$ кг/м $m = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ кг

Задача 7. (2)

Тело массой $m = 5$ кг лежит на наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, при этом коэффициент трения меняется в зависимости от пройденного пути как $\mu = 0.01x$. Тело начинают тянуть вверх по наклонной плоскости, прикладывая силу, зависящую от пройденного пути как: $F = \beta x^2$, при этом $\beta = 1000$ кг/м. Какую скорость будет иметь тело, когда пройдет расстояние $L = 0.5$ м?

- а) 6.32 м/с
- б) 2.59 м/с
- в) 4.83 м/с
- г) 2.57 м/с

Правильный ответ: г) 2.57 м/с

$$v = \sqrt{\frac{2\beta L^3}{3m} - 2g \sin \alpha - 0.01g \cos \alpha L^2}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$m = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ кг}$$

$$\beta = 1000, 1100, 1200, 1300, 1400, 1500 \text{ кг/м}$$

Задача 8. (1)

На тело массой $m = 10$ кг действует сила вдоль оси x : $F_x = \gamma x$, и вдоль оси y : $F_y = A \cos \omega t$. Какую координату по оси x будет иметь тело через время $t = 10$ с, когда его полная скорость равна $v = 0.5$ м/с. Принять: $\gamma = 10$ кг/с², $A = 4$ Н, $\omega = 3$ рад/с.

- а) 0.34 м
- б) 0.56 м
- в) 0.62 м
- г) 0.43 м

Правильный ответ: в) 0.62 м

$$x = \sqrt{\frac{m}{\gamma} v^2 + \frac{2A}{\gamma \omega} \sin \omega t}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$m = 10, 11, 12, 13, 14 \text{ кг}$$

$$v = 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7 \text{ м/с}$$

$$\gamma = 6, 7, 8, 9, 10 \text{ кг/с}^2$$

$$= 2, 4, 6, 8, 10 \text{ Н}$$

$$\omega = 1, 3, 5, 7, 9 \text{ рад/с}$$

Задача 9. (1)

Скорость тела следующим образом зависит от координаты: $v = v_0 \cos \omega x$. Каким будет ускорение тела по оси x , когда координата тела равна $x_0 = 5$ м? Считать: $\omega = 3$ рад/с, $v_0 = 2$ м/с.

- а) -15.68 м/с²
- б) -7.84 м/с²
- в) -2.61 м/с²
- г) -3.92 м/с²

Правильный ответ: б) -7.84 м/с²

$$a = -\omega v_0 \cos \omega x \sin \omega x$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$\omega = 1, 3, 5, 7, 9 \text{ рад/с}$$

$$v_0 = 2, 4, 6, 8, 10 \text{ м/с}$$

$$x_0 = 5, 10, 15, 20, 25 \text{ м}$$

Задача 10. (1)

Грабители забрались в движущуюся машину с песком и начали высыпать оттуда песок против направления движения машины. За 1 с они выбрасывают 2 кг песка, при этом относительная скорость песка равна $u = 2$ м/с. Изначальная масса машины с песком равна $M = 1100$ кг. Какую скорость будет иметь машина через время $t = 300$ с, если изначально машина двигалась со скоростью $v_0 = 20$ м/с?

а) 20.32 м/с

б) 20.29 м/с

в) 19.52 м/с

г) 21.58 м/с

Правильный ответ: г) 21.58 м/с

$$v = v_0 + u \ln \frac{M}{M - \Delta m t}$$

Допустимые числовые значения переменных:

 $u = 2, 2.5, 3, 3.5, 4$ м/с $M = 1100, 1200, 1300, 1400, 1500$ кг $\Delta m = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ кг**Задача 11. (1)**

Тело с изменяющейся массой имеет следующую зависимость скорости от времени: $v = -v_0 e^{-0.001t}$. Какова будет масса тела через время $t = 100$ с, если в начальный момент времени тело имело массу $M_0 = 50$ кг и скорость $v_0 = 5$ м/с?

а) 80.47 кг

б) 55.23 кг

в) 52.55 кг

г) 50.09 кг

Правильный ответ: а) 80.47 кг

$$M = M_0 e^{v_0(1 - e^{-\gamma t})}$$

Допустимые числовые значения переменных:

 $t = 100, 110, 120, 130, 140$ с $M_0 = 50, 55, 60, 65, 70$ кг $v_0 = 5, 6, 7, 8, 9$ м/с**Задача 12. (1)**

На улице шёл дождь, но это не останавливает Петю, чтобы не поиграть в футбол. Он попросил своего брата скинуть мяч из окна многоэтажного дома. Каким будет ускорение мячика через время $t = 5$ с, если дождь капает со скоростью $u = 5$ м/с относительно мячика, при этом в секунду на поверхность мячика попадает 0.01 кг воды. Массу мяча считать равной $M = 0.45$ кг.

а) 24.75 м/с²б) 8.1 м/с²в) 10.1 м/с²г) 25.25 м/с²Правильный ответ: в) 10.1 м/с²

$$a = \frac{(M_0 + \Delta m t)g + u \Delta m}{M_0 + \Delta m t}$$

Допустимые числовые значения переменных:

 $M_0 = 0.41, 0.42, 0.43, 0.44, 0.45$ кг $\Delta m = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$ кг $u = 1, 2, 3, 4, 5$ м/с

Задача 13. (2)

На гладком столе стоит цилиндр с водой. Площадь дна цилиндра $S = 2 \text{ м}^2$. В цилиндре у его дна на вертикальной стенке сделали маленькую дырку, через которую начала выливаться вода с начальной скоростью относительно цилиндра $u = 1 \text{ м/с}$. При этом за время $T = 2 \text{ с}$ относительная скорость уменьшилась до $u/3$. Начальная масса цилиндра с водой $M = 4 \text{ кг}$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Какое ускорение будет иметь цилиндр через время $t = 10 \text{ с}$?

- а) 0.23 м/с^2
- б) 0.47 м/с^2
- в) 0.12 м/с^2
- г) 1.17 м/с^2

Правильный ответ: а) 0.23 м/с^2

$$a = \frac{(u - \frac{2u}{3T}t)\rho S(u - \frac{2u}{3T})}{M - \rho S(u - \frac{2u}{3T}t)}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$u = 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 \text{ кг}$

$t = 8, 9, 10, 11, 12 \text{ с}$

$S = 2, 2.5, 3, 3.5, 4 \text{ м}^2$

$M = 3, 3.5, 4, 4.5, 5 \text{ кг}$

Задача 14. (2)

Первая ракета теряет свою массу в следствие реактивного движения как: $M = M_0(1 - \mu t)$. Вторая ракета имеет реактивное движение, при этом её ускорение зависит от времени как: $a = \alpha t$. Относительная скорость истечения газов из сопла ракет равна $u = 1600 \text{ м/с}$. Считая $\mu = 0.001 \text{ с}^{-1}$ и $\alpha = 0.01 \text{ м/с}^3$, найдите отношение массы второй ракеты к первой, когда масса первой ракеты уменьшится в 3 раза.

- а) 1.49
- б) 2.96
- в) 0.75
- г) 0.25

Правильный ответ: в) 0.75

$$\frac{M_2}{M_1} = 3 \exp(-\frac{2\alpha}{9u\mu^2})$$

Допустимые числовые значения переменных:

$\alpha = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05 \text{ м/с}^3$

$u = 1600, 1700, 1800, 1900, 2000 \text{ м/с}$

$\mu = 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005 \text{ с}^{-1}$

Задача 15. (1)

Какой будет скорость астероида, приближающегося к Земле с бесконечности, на расстоянии $r = 1000 \text{ км}$ от центра Земли? Гравитационную постоянную и массу Земли считать известными.

- а) 447.5 м/с
- б) 632.8 м/с
- в) 2001.1 м/с
- г) 894.9 м/с

Правильный ответ: б) 632.8 м/с

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$r = 1000, 1100, 1200, 1300, 1400 \text{ км}$

3 Задачи с открытой формой ответа.**Задача 1. (3)**

Мальчик Петя решил сходить на водный аттракцион. В один момент трасса, по которой он ехал на ватрушке со скоростью $v_0 = 3 \text{ м/с}$ начала поворачивать влево. При этом радиус окружности,

образующей изгиб траектории, равен $R = 2$ м. Коэффициент трения об стенки трассы равен $\mu = 0.5$, на ватрушку постоянно действует сила сопротивления $F = 10v^2$. За какое время Петя пройдет поворот, если масса ватрушки и Пети равна $m = 60$ кг.

Правильный ответ: 2.16 с

$$t = \frac{mR(\exp(\frac{\pi(m\mu + kR) - 1}{2m}))}{v_0(m\mu + kR)}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$m = 60, 62, 64, 66, 68$ кг

$\mu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$

$v_0 = 2, 2.5, 3, 3.5, 4$ м/с

Задача 2. (2)

Ракета двигалась с выключенными двигателями. В момент времени $t = 0$ с включился двигатель, создающий реактивную струю в направлении, перпендикулярном направлению скорости ракеты. Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна $u = 1100$ м/с. Масса ракеты изменяется по закону: $m = m_0 e^{-0.1t}$. Какова траектория движения ракеты? Найдите модуль нормального ускорения ракеты.

Правильный ответ: окружность, 110 м/с²

$$a = 100u$$

Допустимые числовые значения переменных:

$u = 1100, 1200, 1300, 1400, 1500$ м/с

Задача 3. (3)

Тело массой $m = 50$ кг разгоняется под действием силы $F = \frac{ku^2}{2}(1 - \frac{v}{u})$, при этом на него постоянно действует сила сопротивления $F_{\text{сопр}} = kv^2$. Найдите, какой путь пройдет тело, когда оно достигнет скорости $u/3$. Коэффициент сопротивления k считать равным 0.6 кг/м.

Правильный ответ: 43.6 м

$$S = -\frac{m}{k} \ln \frac{16}{27}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$m = 50, 55, 60, 65, 70$ кг

$k = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ кг/м

Задача 4. (2)

Для мягкой вертикальной посадки космического корабля используются тормозные реактивные двигатели с постоянной скоростью истечения газов относительно корабля $u = 1100$ м/с. Корабль опускается с постоянным ускорением $4g$. За какое время корабль опустится до Земли, если за время спуска он потерял 1/4 своей массы.

Правильный ответ: 6.33 с

$$t = \frac{u}{a + g} \ln \frac{4}{3}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$a = 2g, 3g, 4g, 5g, 6g$

$u = 1100, 1200, 1300, 1400, 1500$ м/с

Задача 5. (1)

Тело движется, изменяя свою массу по следующему закону: $M = M_0 - \alpha t$. Относительная скорость, с которой газы выбрасываются из тела, равна $u = 1200$ м/с. Считая $\alpha = 4000$ кг/с и изначальную массу тела $M_0 = 400$ т, найдите, какое ускорение будет иметь тело через $t = 50$ с, если его начальная скорость равна нулю.

Правильный ответ: 14 м/с²

$$a = -g + \frac{u\alpha}{M - \alpha t}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$u = 1100, 1200, 1300, 1400, 1500$ м/с

4 Задачи на соответствие.

Задача 1. (2)

По горизонтальным рельсам без трения движутся параллельно две тележки с дворниками. В секунду на каждую тележку падает $\mu = 0.05$ кг снега. Считая начальную массу обеих тележек $m_0 = 50$ кг и их начальную скорость $v_0 = 2$ м/с, найдите, какие скорости будут иметь тележки через время $t = 500$ с, если первый из дворников сметает снег в направлении, перпендикулярном движению, при этом сохраняя массу тележки, а второй дворник ничего не делает.

1) - Скорость первой тележки 2) - Скорость второй тележки Варианты ответов:

- а) 1.33 м/с
- б) 1 м/с
- в) 1.9 м/с
- г) 1.21 м/с
- д) 1.95 м/с
- е) 1.8 м/с

Правильные ответы:

1) - г)

2) - а)

$$v_1 = v_0 \exp\left(-\frac{\mu t}{m_0}\right); v_2 = \frac{v_0}{1 + \frac{\mu t}{m_0}}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$\mu = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09 \text{ кг}$$

$$m_0 = 50, 55, 60, 65, 70 \text{ кг}$$

$$t = 500, 550, 600, 650, 700 \text{ с}$$

Задача 2. (3)

Ракета с начальной массой $m_0 = 400$ т движется с постоянной скоростью $v = 7000$ м/с, при этом на неё действует сила сопротивления $F_{\text{сопр}} = 0.001v^2$. Газы выбрасываются из сопла с относительной скоростью $u = 1100$ м/с. Найдите:

- 1) Массу корабля через время $t = 240$ с (в кг)
- 2) Расход топлива через время $t = 240$ с (в кг/с)

Варианты ответов:

- а) 166.3
- б) 4108.2
- в) 50587.4
- г) 4098.1
- д) 40787.4
- е) 5153.4

Правильные ответы:

1) - д)

2) - б)

$$m = \frac{1}{g}[(0.001v^2 + m_0g) \exp\left(-\frac{gt}{u}\right) - 0.001v^2]; \frac{dm}{dt} = -\frac{g}{u}\left(\frac{0.001v^2}{g} + m_0g\right) \exp\left(-\frac{gt}{u}\right)$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$m_0 = 400, 410, 420, 430, 440 \text{ т}$$

$$v_0 = 7000, 7100, 7200, 7300, 7400 \text{ м/с}$$

$$u = 1000, 1100, 1200, 1300, 1400 \text{ м/с}$$

Задача 3. (3)

Ракета поднимается вверх, изменяя свою массу по следующему закону: $m = m_0 e^{-\alpha t}$. Относительная скорость, с которой из ракеты вылетают газы равна $u = 1000$ м/с.

- 1) Найдите высоту, на которую поднимется ракета через время $t = 100$ с, если $\alpha = 0.1 \text{ с}^{-1}$ (в км).
- 2) За некоторое время масса ракеты стала равной $0.1m_0$. Найдите параметр α_{max} , который максимизирует высоту, на которой ракета окажется через это время.

Варианты ответов:

- а) 0.01
- б) 550
- в) 0.005

- г) 900
- д) 0.02
- е) 450

Правильные ответы:

- 1) - е)
- 2) - д)

$$H = (u\alpha - g)\frac{t^2}{2}; \alpha_{max} = \frac{2g}{u}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$u = 1000, 1100, 1200, 1300, 1400 \text{ м/с}$$

$$t = 100, 110, 120, 130, 140 \text{ с}$$

Задача 4. (2)

Двухступенчатая ракета состоит из двух одинаковых ракет с одним и тем же отношением массы топлива к массе конструкции $\alpha_2 = 15$. Трёхступенчатая ракета состоит из трех одинаковых ракет с одним и тем же отношением массы топлива к массе конструкции $\alpha_3 = 20$. Относительные скорости истечения газов у двух ракет одинаковы и равна $u = 1200 \text{ м/с}$. Найдите:

- 1) Скорость двухступенчатой ракеты (в м/с).
- 2) Скорость трёхступенчатой ракеты (в м/с).

Варианты ответов:

- а) 759.03
- б) 2737.59
- в) 4086.13
- г) 8596.95
- д) 4887.7
- е) 7485.99

Правильные ответы:

- 1) - в)
- 2) - д)

$$v_2 = u \ln \frac{2(1 + \alpha_2)^2}{2 + \alpha_2}; v_3 = u \ln \frac{6(1 + \alpha_3)^3}{(2 + \alpha_3)(3 + 2\alpha_3)}$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$\alpha_2 = 5, 10, 15, 20, 25$$

$$\alpha_3 = 15, 20, 25, 30, 35$$

$$u = 1000, 1100, 1200, 1300, 1400 \text{ м/с}$$

Задача 5. (2)

Падающие капли воды сначала движутся ускоренно, а потом выходят на установившийся режим с постоянной скоростью v_∞ . Для мелких капель радиусом $r = 0.2 \text{ мм}$ сила сопротивления воздуха равна $F_{\text{сопр}} = 6\pi\eta r v$, где вязкость воздуха равна $\eta = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ г/(см}\cdot\text{с)}$. Плотность воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$. Найдите:

- 1) Скорость в установившемся режиме v_∞ (в м/с).
- 2) Время, за которое скорость капли достигнет значения $0.99v_\infty$ (в с).

Варианты ответов:

- а) 4.94
- б) 1.14
- в) 0.49
- г) 2.27
- д) 0.23
- е) 2.47

Правильные ответы:

- 1) - а)
- 2) - г)

$$v_\infty = \frac{2r^2\rho g}{9\eta}; T = \frac{2r^2\rho}{9\eta} \ln 100$$

Допустимые числовые значения переменных:

$$r = 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2 \text{ мм}$$