

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Мистонов Александр Андреевич

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И МАГНИТНЫХ  
СВОЙСТВ ИНВЕРТИРОВАННЫХ ОПАЛОПОДОБНЫХ  
СТРУКТУР МЕТОДАМИ МАЛОУГЛОВОЙ ДИФРАКЦИИ  
НЕЙТРОНОВ И СКВИД-МАГНИТОМЕТРИИ

01.04.07 — физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
Григорьев С. В.

Санкт-Петербург — 2013

## Оглавление

Введение	3
1 Описание моделей. Теоретико-полевая формулировка моделей	9
Литература	13

## Введение

Многочисленные физические системы самой разной природы (магнетики, системы типа жидкость-пар, бинарные смеси) обнаруживают необычное поведение вблизи точки фазового перехода второго рода (критической точки). Корреляционные функции и некоторые термодинамические величины (теплоемкость, восприимчивость и др.) демонстрируют степенное поведение (критический скейлинг). При этом соответствующие критические показатели оказываются универсальными, т.е. зависящими лишь от глобальных характеристик системы, таких как размерность пространства или симметрия. Это свойство позволяет объединить системы, различающихся множеством несущественных (с точки зрения критического поведения) деталей в единые классы универсальности, характеризуемые одним и тем же набором критических показателей и скейлинговых функций.

Последовательное количественное описание критического поведения можно дать в рамках метода РГ. В ренормгрупповом подходе возможные критические режимы связываются с инфракрасно-устойчивыми неподвижными точками некоторой ренормируемой теоретико-полевой модели. Цель теории - выделить основные классы универсальности, установить существование нужных неподвижных точек для соответствующих моделей, вычислить для них критические размерности и скейлинговые функции в рамках какой-либо последовательной теории возмущений. Подробное изложение ренормгрупповых методов и их применения к теории фазовых перехо-

дов можно найти в монографии [1].

Наиболее типичные фазовые переходы в равновесных системах принадлежат к классу универсальности  $O(N)$ -симметричной модели  $\phi^4 N$ -компонентного скалярного параметра порядка. Её критические показатели зависят только от  $N$  и размерности пространства  $d$ . Они могут быть рассчитаны в виде разложения по  $\varepsilon = 4 - d$  или в рамках других схем теории возмущения, см. монографии [1, 2] и цитированную там литературу. Большой интерес в последние годы привлекают фазовые переходы в системах, далеких от состояния термодинамического равновесия. Их критическое поведение гораздо более многообразно и пока недостаточно хорошо изучено. Показательным примером являются разнообразные и часто встречающиеся в природе процессы распространения, такие как: эпидемии, каталитические реакции, лесные пожары, диффузия в пористых или флуктуирующих средах. Для определенности мы будем использовать терминологию первого случая (эпидемий). В зависимости от конкретных условий процесс распространения (в случае эпидемий – распространения инфекции) может либо продолжаться и охватить всю популяцию, либо полностью прекратиться через некоторое время. Как теперь известно, переход (при изменении параметров типа вероятностей инфицирования) от флуктуирующего (активного) к абсорбционному (неактивному) состоянию является фазовым переходом второго рода и описывается несколькими классами универсальности. Простая модель описывающая распространения агента (например, инфекционные заболевания) - модель Грибова. Эта модель эквивалентна Реджеонной теории поля и была изучена в рамках РГ подхода и  $\varepsilon$ -разложения. Однако, как уже давно поняли, поведение реальной системы вблизи

критической точки является чрезвычайно чувствительным к внешним воздействиям: к гравитации, движению самой среды, наличию примесей и т.д. Более того, некоторые нарушения (примеси или турбулентное перемешивание) могут привести к совершенно новым типам критического поведения с богатыми и весьма экзотическими свойствами, например, разложение по  $\sqrt{\varepsilon}$ , а не по  $\varepsilon$  [19, 20]. Эти вопросы становятся особенно актуальными для неравновесных фазовых переходов, так как идеальные условия для «чистого» стационарного критического состояния вряд ли могут быть достигнуты в реальных химических или биологических системах, а также влияние различных нарушений (гравитации, перемешивание и т.д.) никогда не может быть полностью исключено. В частности, нельзя пренебрегать эффектом турбулентности в химических каталитических реакциях или лесных пожарах. Так же можно предположить, что атмосферная турбулентность может сыграть важную роль в распространении инфекционных заболеваний на летающих насекомых или птицах. Исследование влияния различных видов перемешиваний (ламинарных сдвиговых течений, турбулентной конвекции и так далее) на поведение критической жидкости (например, бинарная жидкая смесь) показало, что это перемешивание может нарушить обычное критическое поведение системы, характерное для  $\phi^4$  или Реджеонной модели. В данной работе мы изучаем влияние эффектов турбулентного перемешивания на критическое поведение трех систем вблизи критических точек, обращая особое внимание на сжимаемость жидкости. Для описания фазовых переходов мы используем три модели динамического критического поведения. Первая из моделей описывает фазовый переход между т.н. абсорбционным (неактивным) и флуктуационным (активным) состояниями.

ми некоторой реакционно-диффузионной системы. Более конкретно будет рассмотрен процесс типа Грибова, называемый так потому, что соответствующая полевая модель близка к хорошо известной Реджеонной теории поля [1]. Вторая же - релаксационная динамика несохраняющегося скалярного параметра порядка для модели с взаимодействием типа  $\phi^4$  (в работе будет представлена как модель A).

Третья модель - модель Ашкина-Теллера-Поттса (или просто Поттса) - целый класс моделей, см. [3–9]. Такая модель описывает некоторую систему, которая локально имеет  $n$  состояний, при этом энергия любой заданной конфигурации зависит от того, находятся ли элементы в соседних узлах в том же состоянии или нет. В непрерывной формулировке модель Поттса удобно представить эффективным гамильтонианом для  $n$ -компонентного параметра порядка с трилинейным членом взаимодействия и инвариантным относительно группы симметрии  $n$ -мерного гипертетраэдра см. [5–9].

Модели типа Поттса имеют многочисленные физические приложения: твердые и магнитные материалы с нетривиальной симметрией, спиновые стекла, переходы от нематического к изотропному состоянию в жидких кристаллах, проблемы перколяции, случайные резисторные цепи и многие другие, см. работы [5–9] и ссылки в них.

Данный класс моделей (особенно случай  $n = d = 2$  - знаменитая двумерная модель Изинга) давно стал источником вдохновений для новых физических и математических идей, таких как интегрируемость, конформная инвариантность, дискретная голоморфность и т.д. см. [10, 11] и ссылки в них.

Вопрос о природе фазового перехода в модели Поттса имеет долгую

и запутанную историю, см. обсуждение в [8]. Согласно теории критического поведения Ландау в модели типа Поттса не может быть фазового перехода второго рода из-за трехлинейной вершины взаимодействия в гамильтониане. С другой стороны, точные двумерные результаты, численное моделирование и ренормгрупповой анализ предполагают, для достаточно малого  $n$ , фазовый переход второго рода в модели Поттса существует. Мы не будем пытаться пролить новый свет на этот интересный и сложный вопрос: для начала, он должен быть решен для исходной статической проблемы. В данной работе мы принимаем точку зрения, что существование ИК-притягивающей неподвижной точки уравнения РГ подразумевает существование некоторого ИК асимптотического режима и, следовательно, существование какого-то критического сосотояния.

Для модели турбулентного перемешивания мы используем известную модель Казанцева - Обухова - Крейчнана, которая верно передает основные черты реальной развитой турбулентности. В последнее время эта модель приобрела огромную популярность в связи с проблемой аномального скейлинга в задачах турбулентности и турбулентного переноса пассивной примеси, см. обзор [17] и цитированную там литературу. В нашем случае особенно важно, что такое описание перемешивания позволяет легко моделировать сжимаемую жидкость, что оказывается весьма трудно, если скорость моделируется динамическими уравнениями.

План работы таков. В разделе 2 дано описание моделей в терминах теории поля с соответствующей диаграммной техникой. В разделе 3 анализируются ультрафиолетовые расходимости моделей. Показано, что модели являются мультипликативно-ренормируемыми, и преведены ренорми-

рованные функционалы действия. Таким образом, можно получить уравнения РГ и ввести РГ-функции ( $\beta$  функции и аномальные размерности  $\gamma$ ) стандартным образом (раздел 4). В разделе 5 показано



# 1. Описание моделей. Теоретико-полевая формулировка моделей

В Ланжевеновой формулировке формулировке наши модели определены стохастическими дифференциальными уравнениями для параметра порядка  $\psi = \psi(x)$  с  $x \equiv t, \mathbf{x}$ :

$$\partial_t \psi(x) = -\lambda_0 \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi(\mathbf{x})} \Big|_{x \rightarrow \mathbf{x}} + \zeta(x), \quad (1.1)$$

В случае модели Поттса мы имеем дело с  $n$ -компонентным параметром порядка  $\psi_a = \psi(t, \mathbf{x})_a$ , и Ланжевеново описание очевидным образом обобщается:

$$\partial_t \psi(x)_a = -\lambda_0 \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi_a(\mathbf{x})} \Big|_{x \rightarrow \mathbf{x}} + \zeta, \quad (1.2)$$

Где  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\lambda_0 > 0$  - кинематический коэффициент. Гауссов шум  $\zeta = \zeta(t, x)$  с нулевым средним задается парной корреляционной функцией:

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = 2\lambda_0 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.3)$$

Для модели A,

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = g_0 \lambda_0 \psi(t, \mathbf{x}) \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.4)$$

Для процесса Грибова,

$$\langle \zeta_a(t, \mathbf{x}) \zeta_b(t', \mathbf{x}') \rangle = 2\lambda_0 \delta_{ab} \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.5)$$

Для модели Поттса.

$d$  - размерность пространства  $\mathbf{x}$ . Множитель  $\psi$  в передней части коррелятора (1.4) обеспечивает полное исчезновение флуктуаций в неактивной (абсорбционной) фазе. (Такая специфическая форма амплитуды может быть получена в результате перерастяжения шума и поля). А член  $2\lambda_0$  в (1.3, 1.5) связан с флуктуационно-диссипационной теоремой: он обеспечивает соответствие с статистической моделью  $\psi^4$ . Здесь и далее затравочные (ненормированные) параметры обозначаются индексом "0". Их ренормированные аналоги (без индекса) появятся позже.

Гамильтониан в уравнении (1.1) задается следующими соотношениями:

$$H(\psi) = \int d\mathbf{x} \left\{ -\frac{1}{2}\psi(\mathbf{x})\partial^2\psi(\mathbf{x}) + \frac{\tau_0}{2}\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) + V(\psi) \right\} \quad (1.6)$$

Нелинейный член  $V(\psi)$  для модели  $A$  имеет вид  $V(\psi) = u_0\psi^4/4!$ , для процесса Грибова  $V(\psi) = g_0\psi^3/3!$ ;  $g_0$  и  $u_0 > 0$  - константы связи. Вблизи критической точки статический Гамильтониан  $H(\psi)$  для модели Поттса представим в виде [5–7]:

$$H(\psi) = \int d\mathbf{x} \left\{ -\frac{1}{2}\psi_a(\mathbf{x})\partial^2\psi_a(\mathbf{x}) + \frac{\tau_0}{2}\psi_a(\mathbf{x})\psi_a(\mathbf{x}) + \frac{g_0}{3!}R_{abc}\psi_a(\mathbf{x})\psi_b(\mathbf{x})\psi_c(\mathbf{x}) \right\}, \quad (1.7)$$

где  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  - частная производная,  $\partial^2 = \partial_i\partial_i$  - оператор Лапласа.  $\tau_0 \propto (T - T_c)$  - отклонение температуры или ее аналога от критического значения,  $g_0 > g$  - константа связи. Во всех наших формулах мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам ( $a, b, c = 1, \dots, n$  и  $i = 1, \dots, d$ ). После взятия функциональной производной  $\frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi_a(\mathbf{x})}$  в формулах

(1.1, 1.2) поле  $\psi(\mathbf{x})$  необходимо заменить на  $\psi(x) = \psi(\mathbf{x}, t)$

Следуя [9], мы будем рассматривать общий случай с определенной группой симметрии  $G$ , для которой неприводимый инвариант - тензор третьего ранга  $R_{abc}$ , который без ограничения общности можно считать симметричным. В однопетлевом приближении нам достаточно знать лишь коэффициенты  $R_{1,2}$ , определяемые из соотношений:

$$R_{abc}R_{abe} = R_1\delta_{ce}, \quad R_{aec}R_{chb}R_{bfa} = R_2R_{ehf}. \quad (1.8)$$

В оригинальной модели Поттса  $G = Z_n$  - группа симметрии гипертетраэдра в  $n$  - мерном пространстве. В данном случае тензор  $R_{abc}$  легко представим в терминах набора  $(n+1)$  вектора  $e^\alpha$ , определенных в [5, 6]:

$$R_{abc} = \sum_{\alpha} e_a^\alpha e_b^\alpha e_c^\alpha, \quad (1.9)$$

где  $e_a^\alpha$  удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} e_a^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{n+1} e_a^\alpha e_b^\alpha = (n+1)\delta_{ab}, \quad \sum_{a=1}^n e_a^\alpha e_a^\beta = (n+1)\delta^{\alpha\beta} - 1. \quad (1.10)$$

Соотношения (1.10) позволяют представить коэффициенты (1.8) в следующем виде:

$$R_1 = (n+1)^2(n-1), \quad R_2 = (n+1)^2(n-2) \quad (1.11)$$

Стохастические проблемы (1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5) могут быть переформулированы в виде теоретико-полевых моделей с удвоенным набором полей  $\Phi = \psi, \psi^\dagger$ . В такой формулировке они будут описываться функционалами действия:

$$S(\psi, \psi^\dagger) = \psi^\dagger (-\partial_t + \lambda_0 \partial^2 - \lambda_0 \tau_0) \psi + \lambda_0 (\psi^\dagger)^2 - u_0 \psi^\dagger \psi^3 / 3! \quad (1.12)$$

для модели А,

$$S(\psi, \psi^\dagger) = \psi^\dagger (-\partial_t + \lambda_0 \partial^2 - \lambda_0 \tau_0) \psi + \frac{g_0 \lambda_0}{2} \{ (\psi^\dagger)^2 \psi - \psi^\dagger \psi^2 \} \quad (1.13)$$

для процесса Грибова,

$$S(\psi, \psi^\dagger) = \psi_a^\dagger (-\partial_t + \lambda_0 \partial^2 - \lambda_0 \tau_0) \psi_a + \lambda_0 \psi_a^\dagger \psi_a^\dagger - \frac{g_0 \lambda_0}{2} R_{abc} \psi_a^\dagger \psi_b \psi_c \quad (1.14)$$

Для модели Поттса. Где  $\psi^\dagger = \psi^\dagger(t, \mathbf{x})$  - вспомогательное поле "поле отклика". В приведенных формулах подразумевается интегрирование по аргументам полей и суммирование по индексам, например:

$$\psi^\dagger \partial_t \psi = \int dt \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \partial_t \psi(t, \mathbf{x})$$

или

$$\psi_a^\dagger \partial_t \psi_a = \sum_{a=1}^n \int dt \int d\mathbf{x} \psi_a^\dagger(t, \mathbf{x}) \partial_t \psi_a(t, \mathbf{x}).$$

Теоретико-полевая формулировка означает, что статистические средние случайных величин в исходных стохастических задачах могут быть представлены как функциональные интегралы с полным набором полей с весом  $\exp S(\Phi)$ . А это есть ничто иное, как функции Грина теоретико-полевых моделей с действиями (1.12, 1.13, 1.14). Для примера, линейная функция отклика задач (1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5) задается функцией Грина:

$$G = \langle \psi(t, \mathbf{x}) \psi^\dagger(t', \mathbf{x}') \rangle = \int D\psi \int D\psi^\dagger \psi(t, \mathbf{x}) \psi^\dagger(t', \mathbf{x}') \exp S(\psi, \psi^\dagger) \quad (1.15)$$

для каждой конкретной модели.

## References

## Литература

1. Zinn-Justin J 1989 *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon)
2. Vasil'ev A N 2004 *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics* (Boca Raton: Chapman & Hall/CRC)
3. Ashkin J and Teller E 1943 *Phys. Rev.* **64** 178;  
Potts R B 1952 *Proc. Camb. Phil. Soc.* **48** 106
4. Baxter R J 1973 *J.Phys. C: Solid St. Phys* **6** L445
5. Golner G R 1973 *Phys. Rev. A* **8** 3419
6. Zia R K P and Wallace D J 1975 *J. Phys. A: Math. Gen.* **8** 1495
7. Priest R G and Lubensky 1976 *Phys. Rev. B* **13** 4159; Erratum: *B* **14** 5125(E)
8. Amit D J 1976 *J. Phys. A: Math. Gen* **9** 1441
9. de Alcantara Bonfim O F, Kirkham J E and McKane A J 1980 *J. Phys. A: Math. Gen* **13** L247;  
de Alcantara Bonfim O F, Kirkham J E and McKane A J 1981 *J. Phys. A: Math. Gen* **14** 2391

10. Cardy J 2009 *J. Stat. Phys.* **137** 814;  
Ikhelf Y and Cardy J 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 102001
11. International Meeting *Conformal Invariance, Discrete Holomorphicity and Integrability* (Helsinki, 10–16 June 2012).  
<https://wiki.helsinki.fi/display/mathphys/cidhi2012>
12. Ivanov D Yu 2008 *Critical Behaviour of Non-Ideal Systems* (Weinheim, Germany: Wiley-VCH)
13. Lacasta A M, Sancho J M and Sagués F 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1791;  
Berthier L 2001 *Phys. Rev. E* **63** 051503;  
Berthier L, Barrat J-L and Kurchan J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2014;  
Berti S, Boffetta G, Cencini M and Vulpiani A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 224501
14. Chan C K, Perrot F and Beysens D 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 412;  
Chan C K, Perrot F and Beysens D 1989 *Europhys. Lett.* **9** 65;  
Chan C K 1990 *Chinese J. Phys.* **28** 75;  
Chan C K, Perrot F and Beysens D 1991 *Phys. Rev. A.* **43** 1826
15. Halperin B I and Hohenberg P C 1977 *Rev. Mod. Phys.* **49** 435;  
Folk R and Moser G 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** R207
16. Hinrichsen H 2000 *Adv. Phys.* **49** 815;  
Ódor G 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 663
17. Janssen H-K and Täuber U C 2004 *Ann. Phys. (NY)* **315** 147
18. Ivanov D Yu 2003 *Critical Behaviour of Non-Idealized Systems* (Moscow: Fizmatlit) [in Russian]

19. Khmel'nitski D E 1975 *Sov. Phys. JETP* **41** 981;  
 Shalaev B N 1977 *Sov. Phys. JETP* **26** 1204;  
 Janssen H-K, Oerding K and Sengespeick E 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.*  
**28** 6073
20. Satten G and Ronis D 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 91; 1986 *Phys. Rev. A* **33**  
 3415
21. Onuki A and Kawasaki K 1980 *Progr. Theor. Phys.* **63** 122;  
 Onuki A, Yamazaki K and Kawasaki K 1981 *Ann. Phys.* **131** 217;  
 Imaeda T, Onuki A and Kawasaki K 1984 *Progr. Theor. Phys.* **71** 16
22. Beysens D, Gbadamassi M and Boyer L 1979 *Phys. Rev. Lett* **43** 1253;  
 Beysens D and Gbadamassi M 1979 *J. Phys. Lett.* **40** L565
23. Ruiz R and Nelson D R 1981 *Phys. Rev. A* **23** 3224; **24** 2727;  
 Aronowitz A and Nelson D R 1984 *Phys. Rev. A* **29** 2012
24. Antonov N V, Hnatich M and Honkonen J 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.*  
**39** 7867
25. Antonov N V and Ignatieva A A 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 13593
26. Antonov N V, Iglovikov V I and Kapustin A S 2009 *J. Phys. A: Math.*  
*Theor.* **42** 135001
27. Antonov N V, Ignatieva A A and Malyshev A V 2010 E-print LANL  
 arXiv:1003.2855 [cond-mat]; to appear in *PEPAN (Phys. Elementary*  
*Particles and Atomic Nuclei, published by JINR)* **41**

28. Antonov N V, Kapustin A S and Malyshev A V 2011 *Theor. Math. Phys.* **169** 1470
29. Antonov N V and Malyshev A V 2011 *Theor. Math. Phys.* **167** 444
30. Antonov N V and Malyshev A V 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 255004
31. Antonov N V and Kapustin A S 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 405001
32. Falkovich G, Gawędzki K and Vergassola M 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 913
33. Antonov N V 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 7825
34. Antonov N V, Hnatich M and Nalimov M Yu 1999 *Phys. Rev. E* **60** 4043
35. van Kampen N G 2007 *Stochastic Processes in Physics and Chemistry, 3rd ed.* (Amsterdam: North Holland)
36. Sak J 1973 *Phys. Rev. B* **8** 281;  
Honkonen J and Nalimov M Yu 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** 751;  
Janssen H-K 1998 *Phys. Rev. E* **58** R2673;  
Antonov N V 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6691;  
2000 *Physica D* **144** 370
37. Janssen H-K, Oerding K, van Wijland F and Hilhorst H J 1999 *Eur. Phys. J. B* **7** 137; Janssen H-K and Stenull O 2008 *Phys. Rev. E* **78** 061117