

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА
ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

МАГИСТЕРСКАЯ РАБОТА

ТЕМА :

**Влияние турбулентного перемешивания на
критическое поведение в присутствии
сжимаемости: ренормгрупповой анализ двух
моделей**

Магистрант : Капустин А. С.

Научный руководитель : Проф. Антонов Н. В.

Рецензент : Проф. Аджемян Л. Ц.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2011

1 Введение

Многочисленные физические системы самой разной природы (магнетики, системы типа газ-жидкость, бинарные смеси) обнаруживают необычное поведение вблизи точки фазового перехода второго рода (критической точки). Корреляционные функции и некоторые термодинамические величины (теплоемкость, восприимчивость и др.) демонстрируют степенное поведение (критический скейлинг). При этом соответствующие критические показатели оказываются универсальными, т.е. зависящими лишь от глобальных характеристик системы, таких как размерность пространства или симметрия. Это свойство позволяет объединять системы, различающиеся множеством несущественных (с точки зрения критического поведения) деталей в единые классы универсальности, характеризуемые одним и тем же набором критических показателей и скейлинговых функций.

Последовательное количественное описание критического поведения можно дать в рамках метода РГ. В ренормгрупповом подходе возможные критические режимы связываются с инфракрасно-устойчивыми неподвижными точками некоторой ренормируемой теоретико-полевой модели. Цель теории – выделить основные классы универсальности, установить существование нужных неподвижных точек для соответствующих моделей, вычислить для них критические размерности и скейлинговые функции в рамках какой-либо последовательной теории возмущений. Подробное изложение ренормгрупповых методов и их применения к теории фазовых переходов можно найти в монографии [1].

Наиболее типичные фазовые переходы в равновесных системах принадлежат к классу универсальности $O(N)$ -симметричной модели φ^4 N -компонентного скалярного параметра порядка. Её критические показатели зависят только от N и размерности пространства d . Они могут быть рассчитаны в виде разложения по $\varepsilon = 4 - d$ или в рамках других схем теории возмущения, см. монографии [1, 2] и цитированную там литературу. Большой интерес в последние годы привлекают фазовые переходы в системах, далеких от состояния термодинамического равновесия. Их критическое поведение гораздо более многообразно и пока недостаточно хорошо изучено.

Показательным примером являются разнообразные и часто встречающиеся в природе процессы распространения, такие как: эпидемии, каталитические реакции, лесные пожары, диффузия в пористых или флуктуирующих средах. Для определенности мы будем использовать терминологию первого случая (эпидемий). В зависимости от конкретных условий процесс распространения (в случае эпидемий – распростране-

ния инфекции) может либо продолжаться и охватить всю популяцию, либо полностью прекратиться через некоторое время. Как теперь известно, переход (при изменении параметров типа вероятностей инфицирования) от флуктуирующего (активного) к абсорбционному (неактивному) состоянию является фазовым переходом второго рода и описывается несколькими классами универсальности. Простая модель описывающая распространение агента (например, инфекционные заболевания) – модель Грибова. Эта модель эквивалентна Реджеонной теории поля и была изучена в рамках РГ подхода и ε -разложения. Однако, как уже давно поняли, поведение реальной системы вблизи критической точки является чрезвычайно чувствительным к внешним воздействиям: к гравитации, движению самой среды, наличию примесей и т. д. Более того, некоторые нарушения (примеси или турбулентное перемешивание) могут привести к совершенно новым типам критического поведения с богатыми и весьма экзотическими свойствами, например, разложение по $\sqrt{\varepsilon}$, а не по ε [7, 8]. Эти вопросы становятся особенно актуальными для неравновесных фазовых переходов, так как идеальные условия для “чистого” стационарного критического состояния вряд ли могут быть достигнуты в реальных химических или биологических системах, а также влияние различных нарушений (гравитации, перемешивания и т.д.) никогда не может быть полностью исключено. В частности, нельзя пренебрегать эффектами турбулентности в химических каталитических реакциях или лесных пожарах. Так же можно предположить, что атмосферная турбулентность может сыграть важную роль в распространении инфекционных заболеваний на летающих насекомых или птицах. Исследование влияния различных видов перемешиваний (ламинарных сдвиговых течений, турбулентной конвекции и так далее) на поведение критической жидкости (например, бинарная жидкая смесь) показало, что это перемешивание может разрушить обычное критическое поведение системы, характерное для ψ^4 или Реджеонной моделей. В данной работе мы изучаем влияние эффектов турбулентного перемешивания на критическое поведение двух систем вблизи их критических точек, обращая особое внимание на *сжимаемость* жидкости. Для описания фазовых переходов мы используем две модели динамического критического поведения. Первая из моделей, описывает фазовый переход между т.н. абсорбционным (неактивным) и флуктуационным (активным) состояниями некоторой реакционно-диффузионной системы. Более конкретно будет рассмотрен процесс типа Грибова, называемый так потому, что соответствующая полевая модель близка к хорошо известной Реджеонной теории поля [1]. Вторая же – релаксационная динамика несохраняющегося скалярного параметра порядка для модели с взаимодействием типа φ^4 . Для модели

турбулентного перемешивания мы используем известную модель Казанцева - Крейчнана. В нашем случае особенно важно, что такое описание перемешивания позволяет легко моделировать *сжимаемую* жидкость, что оказывается весьма трудно, если скорость моделируется динамическими уравнениями.

План работы таков. В разделе 2 дано описание моделей в терминах теории поля с соответствующей диаграммной техникой. В разделе 3 анализируются ультрафиолетовые расходимости моделей. Показано, что модели являются мультипликативно-ренормируемыми, и приведены ренормированные функционалы действия. Таким образом, можно получить уравнения РГ и ввести РГ-функции (β функции и аномальные размерности γ) стандартным образом (раздел 4). В разделе 5 показано, что в зависимости от соотношения между показателем ξ и пространственной размерностью d , обе системы имеют четыре различных типа критического поведения, связанные с четырьмя возможными неподвижными точками уравнения ренормгруппы. Оказывается, что три из четырех неподвижных точек в обеих моделях отвечают уже известным типам критического поведения: свободной теории, пассивному скалярному полю и обычному процессу, отвечающему соответствующему взаимодействию. Четвертые точки относятся к новым неравновесным классам универсальности, для которых одновременно существенны и нелинейности моделей и турбулентное перемешивание. В однопетлевом приближении получается, что для заданных значений параметров ε (отклонение размерности от логарифмической) и ξ (показатель степени в корреляторе поля скорости) по которым идет разложение, инфракрасно-устойчивой является лишь одна из точек, то есть реализуется определенный критический режим. В этом отношении результаты близки к полученным ранее в работе [13], где рассматривалось влияние турбулентного перемешивания на критическое поведение равновесной системы типа φ^4 . Были вычислены в однопетлевом приближении константы перенормировки, РГ-функций, области ИК устойчивости и критические размерности, причем некоторые из результатов оказались точными. В общем случае, критические индексы и границы между областями устойчивости критических режимов в плоскости ε - ξ зависят от степени сжимаемости.

Полученные результаты обсуждаются в разделе 7. Основной качественный вывод из нашего анализа является таким. Для обеих моделей сжимаемость повышает роль нелинейных членов в динамических уравнениях. Область в ε - ξ -плоскости, где устойчив новый нетривиальный режим, становится шире при возрастании степени сжимаемости. В случае несжимаемой жидкости, наиболее реалистичные значения $d = 3$ и $\xi = 4/3$ лежат в области устойчивости режима пассивного скалярного

поля, то есть нелинейные члены не имеют значения для критического поведения. Если сжимаемость становится достаточно сильной, эти значения (d и ξ) попадают в область устойчивости нового режима, где и адвекция и нелинейность являются существенными. Эти общие соображения проиллюстрированы на примере облака примесных частиц, которые случайно двигаются в близкой к критической турбулентной среде. Для слабо сжимаемой жидкости распространение такого облака определяется только турбулентным переносом. Если сжимаемость становится достаточно сильной, система попадает в новый класс универсальности, и расширение облака становится быстрее за счет комбинированного воздействия перемешивания и нелинейных членов. Это расширение явно зависит от степени сжимаемости и отличается от известных “1/2 закона” для обычной диффузии и от “4/3 закона Ричардсона” для турбулентного переноса.

2 Описание модели. Теоретико-полевая формулировка модели

В Ланжевеновой формулировке наши модели определены стохастическими дифференциальными уравнениями для параметра порядка $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$:

$$\partial_t \psi = \lambda_0 \{(-\tau_0 + \partial^2) \psi - V(\psi)\} + \zeta, \quad (1)$$

Где $\partial_t = \partial/\partial t$, ∂^2 – оператор Лапласа, $\lambda_0 > 0$ – кинематический коэффициент диффузии и $\tau_0 \propto (T - T_c)$ – отклонение температуры или ее аналога от критического значения. Нелинейный член имеет вид $V(\psi) = u_0 \psi^3/3!$ для модели А и $V(\psi) = g_0 \psi^2/2$ для процесса Грибова; g_0 и $u_0 > 0$ – константы связи. Гауссов шум $\zeta = \zeta(t, \mathbf{x})$ с нулевым средним задается парной корреляционной функцией:

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = 2\lambda_0 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2)$$

для модели А и

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = g_0 \lambda_0 \psi(t, \mathbf{x}) \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3)$$

для процесса Грибова.

d – размерность пространства \mathbf{x} . Множитель ψ в передней части коррелятора (3) обеспечивает полное исчезновение флуктуаций в неактивной (абсорбционной) фазе. *(Такая специфическая форма амплитуды может*

быть получена в результате перерастяжения шума и поля). А член $2\lambda_0$ в (2) связан с флуктуационно-диссипационной теоремой: он обеспечивает соответствие с статической моделью ψ^4 . Здесь и далее затравочные (неренормированные) параметры обозначены индексом “0.” Их перенормированные аналоги (без индекса) появятся позже. Стохастические проблемы (1), (2), (3) могут быть переформулированы в виде теоретико-полевых моделей с удвоенным набором полей $\Phi = \{\psi, \psi^\dagger\}$. В такой формулировке они будут описываться функционалами действия

$$\mathcal{S}(\psi, \psi^\dagger) = \psi^\dagger (-\partial_t + \lambda_0 \partial^2 - \lambda_0 \tau_0) \psi + \lambda_0 (\psi^\dagger)^2 - u_0 \psi^\dagger \psi^3 / 3! \quad (4)$$

для модели А и

$$\mathcal{S}(\psi, \psi^\dagger) = \psi^\dagger (-\partial_t + \lambda_0 \partial^2 - \lambda_0 \tau_0) \psi + \frac{g_0 \lambda_0}{2} \{(\psi^\dagger)^2 \psi - \psi^\dagger \psi^2\} \quad (5)$$

для модели Грибова. Где, $\psi^\dagger = \psi^\dagger(t, \mathbf{x})$ – вспомогательное “поле отклика”. Здесь подразумевается интегрирование по аргументам полей, например

$$\psi^\dagger \partial_t \psi = \int dt \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \partial_t \psi(t, \mathbf{x}).$$

Теоретико-полевая формулировка означает, что статистические средние случайных величин в исходной стохастической проблеме могут быть представлены как функциональные интегралы с полными наборами полей с весом $\exp \mathcal{S}(\Phi)$. А это есть ничто иное, как функции Грина теоретико-полевых моделей с действиями (4), (5). Для примера, линейная функция отклика задач (1), (2), (3) задается функцией Грина

$$G = \langle \psi(t, \mathbf{x}) \psi^\dagger(t', \mathbf{x}') \rangle = \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\psi^\dagger \psi(t, \mathbf{x}) \psi^\dagger(t', \mathbf{x}') \exp \mathcal{S}(\psi, \psi^\dagger) \quad (6)$$

для каждой конкретной модели. Модель (5) подразумевает стандартную Фейнмановскую диаграммную технику с одним пропагатором $\langle \psi \psi^\dagger \rangle_0$ и двумя тройными вершинами $\sim (\psi^\dagger)^2 \psi, \psi^\dagger \psi^2$. В импульсно-временном и частотно-импульсном представлении пропагатор имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \psi \psi^\dagger \rangle_0(t, k) &= \theta(t) \exp \{ -\lambda_0 (k^2 + \tau_0) t \}, \\ \langle \psi \psi^\dagger \rangle_0(\omega, k) &= \frac{1}{-i\omega + \lambda_0 (k^2 + \tau_0)}. \end{aligned} \quad (7)$$

$\theta(\dots)$ – функция Хевисайда, из-за чего пропагатор (7) является запаздывающим. Вследствие этого, при анализе диаграмм становится ясно,

что все функции Грина, которые зависят только от полей ψ или ψ^\dagger , обязательно имеют замкнутые циклы, и поэтому все такие функции Грина равны нулю. Для функций $\langle \psi^\dagger \dots \psi^\dagger \rangle$ этот факт является общим следствием причинности, которая справедлива для любой стохастической модели; см. например, обсуждение в [2].

Обнуление функций $\langle \psi \dots \psi \rangle$ в модели (5) может рассматриваться как следствие симметрии

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi^\dagger(-t, -\mathbf{x}), \quad \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi(-t, -\mathbf{x}), \quad g_0 \rightarrow -g_0. \quad (8)$$

Отражение константы g_0 на самом деле несущественно, поскольку, как легко видеть, в модели (5) фактический параметр разложения в теории возмущений g_0^2 , а не g_0 . В дальнейшем мы будем обозначать его как $u_0 \equiv g_0^2$.

В дополнении к (7) диаграммная техника модели A включает в себя пропагатор $\langle \psi\psi \rangle_0$, который имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle \psi\psi \rangle_0(t, k) &= \frac{1}{(k^2 + \tau_0)} \exp \{ -\lambda_0(k^2 + \tau_0)|t| \}, \\ \langle \psi\psi \rangle_0(\omega, k) &= \frac{2\lambda_0}{\omega^2 + \lambda_0^2(k^2 + \tau_0)^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

и одну тройную вершину $\sim \psi^\dagger \psi^3$.

Галилеево инвариантное взаимодействие с полем скорости $\mathbf{v} = \{v_i(t, \mathbf{x})\}$ для сжимаемой жидкости ($\partial_i v_i \neq 0$) вводится путем замены

$$\partial_t \psi \rightarrow \partial_t \psi + a_0 \partial_i (v_i \psi) + (a_0 - 1)(v_i \partial_i) \psi = \nabla_t \psi + a_0 (\partial_i v_i) \psi \quad (10)$$

в (1). Где $\nabla_t \equiv \partial_t + v_i \partial_i$ – Лагранжева производная, a_0 – произвольный параметр и $\partial_i = \partial / \partial x_i$. Как мы увидим позже, присутствие нелинейности в (1) обязывает нас включить оба члена из (10) для обеспечения мультипликативной перенормируемости.

В реальной проблеме поле $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ описывается с помощью уравнения Навье-Стокса. Однако, мы будем использовать известную модель Обухова-Крейчнана, которая верно передает основные черты реальной развитой турбулентности [16]. В этой модели скорость подчиняется Гауссовскому распределению с нулевым средним и задается корреляционной функцией

$$\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \delta(t - t') D_{ij}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \quad (11)$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = D_0 \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^{d+\xi}} \{P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k})\} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (12)$$

$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$, $Q_{ij}(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ – поперечный и продольный проекторы, $k \equiv |\mathbf{k}|$ – волновое число, $D_0 > 0$ – множитель в амплитуде и $\alpha > 0$ – произвольный параметр. Случай, когда $\alpha = 0$, соответствует несжимаемой жидкости ($\partial_i v_i = 0$). Показатель $0 < \xi < 2$ – произвольный параметр; “Колмогоровское” значение $\xi = 4/3$. Обрезание в интеграле (12) снизу $k = m$, где $m \equiv 1/\mathcal{L}$ – величина, обратная к масштабу турбулентности \mathcal{L} , обеспечивающая ИК-регуляризацию. Его точная форма не имеет значения; просто такое обрезание является простейшим выбором для практических расчетов. Функционалы действия с полным набором полей $\Phi = \{\psi, \psi^\dagger, \mathbf{v}\}$:

$$\mathcal{S}_A(\Phi) = \mathcal{S}_C(\Phi) + \lambda_0(\psi^\dagger)^2 - u_0 \lambda_0 \psi^\dagger \psi^3 / 3! \quad (13)$$

для модели A и

$$\mathcal{S}_G(\Phi) = \mathcal{S}_C(\Phi) + \frac{g_0 \lambda_0}{2} \{(\psi^\dagger)^2 \psi - \psi^\dagger \psi^2\} \quad (14)$$

для модели Грибова, где общая часть этих действий имеет вид:

$$\mathcal{S}_C(\Phi) = \psi^\dagger \{ -\nabla_t + \lambda_0 (\partial^2 - \tau_0) - a_0 (\partial_i v_i) \} \psi + \mathcal{S}(\mathbf{v}), \quad (15)$$

получаются из (4), (5) путем замены (10) и добавления члена, соответствующего Гауссовскому полю \mathbf{v} с коррелятором (11), (12):

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \int dt \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' v_i(t, \mathbf{x}) D_{ij}^{-1}(\mathbf{r}) v_j(t, \mathbf{x}'), \quad (16)$$

Где

$$D_{ij}^{-1}(\mathbf{r}) \propto D_0^{-1} r^{-2d-\xi}$$

является ядром обратной линейной операции для функции $D_{ij}(\mathbf{r})$ из (12).

В добавлении к (7), в Фейнмановской диаграммной технике (13)–(15) появляется новый пропагатор $\langle vv \rangle_0$, задающийся соотношением (11), (12) и новая вершина

$$\psi^\dagger v_i V_i \psi \equiv -\psi^\dagger \{ (v_i \partial_i) \psi + a_0 (\partial_i v_i) \} \psi. \quad (17)$$

Для диаграмм это подразумевает добавление в вершину множителя

$$V_i = -ik_i - ia_0 q_i, \quad (18)$$

где k_i – импульс поля ψ , а q_i – импульс поля v_i .

Симметрия $\psi, \psi^\dagger \rightarrow -\psi, -\psi^\dagger$ в модели A сохраняется и в полной модели (13), в то время как для полной модели (14) к соотношениям (8) следует добавить преобразование

$$a_0 \rightarrow (1 - a_0), \quad (19)$$

что легко проверить в (15) путем интегрирования по частям.

В обеих полных моделях роль констант связи (параметров разложения в теории возмущения) играют три параметра

$$u_0 \sim \Lambda^{4-d}, \quad w_0 = D_0/\lambda_0 \sim \Lambda^\xi, \quad w_0 a_0 \sim \Lambda^\xi. \quad (20)$$

Последние соотношения вытекают из соображений размерности (см. следующий раздел). Из этих выражений (20) следует, что взаимодействия $\psi^\dagger \psi^3$, $(\psi^\dagger)^2 \psi$ и $\psi^\dagger \psi^2$ будут логарифмическими (константа u_0 становится безразмерной) при $d = 4$. Таким образом, для моделей с одним зарядом (4), (5), значение $d = d_c = 4$ является верхней критической размерностью, и отклонение $\varepsilon = 4 - d_c$ играет роль формального параметра разложения в РГ подходе: критические индексы вычисляются как ряды по ε .

Взаимодействие $\sim \psi^\dagger v \partial \psi$ в полных моделях (13), (14) становится логарифмическим, когда $\xi = 0$. Параметр ξ не связан с пространственной размерностью. Однако, для РГ анализа полной модели важно, чтоб все взаимодействия были логарифмическими. В противном случае, одно из них будет слабее, чем другое с РГ точки зрения, и тем самым не будет влиять на ИК поведение в главном порядке. В результате, некоторые из скейлинговых режимов полной модели будут упущены. Для того, чтобы изучить все возможные классы универсальности, нам необходимо, чтобы в нашей теории все взаимодействия рассматривались на равных основаниях. Таким образом, мы будем обращаться с ε и ξ как с малыми параметрами одинакового порядка, $\varepsilon \propto \xi$. Вместо простого ε -разложения в однозарядной теории, координаты фиксированных точек, критические размерности и другие величины будут вычисляться в виде двойного разложения в ε - ξ -плоскости вблизи начала координат, то есть вокруг точки, в которой все константы в (20) безразмерны. Аналогичная ситуация была и раньше в различных моделях турбулентности и критического поведения, например [12–15, 20].

3 Канонические размерности, УФ-расходимости и перенормировка

Как известно, анализ ультрафиолетовых (УФ-) расходимостей связан с анализом канонических размерностей. Динамические модели типа (4), (5) и (13)–(15), в отличие от статических, имеют два независимых масштаба: масштаб времени T и масштаб длины L . Таким образом, каноническая размерность любой величины F (поле или параметр) характеризуется двумя числами: частотной размерностью d_F^ω и импульсной d_F^k , которые определяются так, что $[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}$. Эти размерности находятся из условий нормировки

$$d_k^k = -d_{\mathbf{x}}^k = 1, \quad d_k^\omega = d_{\mathbf{x}}^\omega = 0, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$$

и требования, что каждый член функционала действия должен быть безразмерным (по отношению к импульсной и частотной размерности по отдельности). Затем, основываясь на d_F^k и d_F^ω , можно ввести полную каноническую размерность $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$.

Канонические размерности для моделей (13)–(15) приведены в таблице 1, в том числе и размерности для перенормированных параметров (без индекса “0”), которые скоро будут введены. Поля модели A отмечены индексом A , а поля модели Грибова - G . Размерности параметров λ_0 , τ_0 и т.д. одинаковы в обеих моделях.

Таблица 1: Канонические размерности в моделях (13)–(15).

F	ψ_A	ψ_A^\dagger	ψ_G, ψ_G^\dagger	\mathbf{v}	λ_0, λ	τ_0, τ	m, μ, Λ	g_0^2, u_0	w_0	u, w, α, a_0, a
d_F^k	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	$d/2$	-1	-2	2	1	$4 - d$	ξ	0
d_F^ω	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
d_F	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	$d/2$	1	0	2	1	$4 - d$	ξ	0

Как уже говорилось в конце предыдущего раздела, обе полные модели логарифмичны (все константы связи одновременно безразмерные) при $d = 4$ и $\xi = 0$. Таким образом, УФ-расходимости в функциях Грина проявляются в виде полюсов по $\varepsilon = 4 - d$, ξ и их линейных комбинаций. Полная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle_{1\text{-ir}}$ задается отношением [2]

$$d_\Gamma = d_\Gamma^k + 2d_\Gamma^\omega = d + 2 - N_\Phi d_\Phi, \quad (21)$$

где $N_\Phi = \{N_\psi, N_{\psi^\dagger}, N_v\}$ – число соответствующих полей, входящих в функцию Γ , при этом подразумевается суммирование по всем типам полей. Полная размерность d_Γ в логарифмичной теории (такая, что $\varepsilon = \xi = 0$) является формальным индексом УФ расходимости $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\varepsilon=\xi=0}$. Поверхностные УФ расходимости, устранение которых требует контрчленов, могут присутствовать только в тех функциях Γ , для которых δ_Γ не отрицательно.

Из таблицы 1 и (21) находим

$$\delta_\Gamma = 6 - N_\psi - 3N_{\psi^\dagger} - N_v \quad (22)$$

для модели A и

$$\delta_\Gamma = 6 - 2N_\psi - 2N_{\psi^\dagger} - N_v \quad (23)$$

для модели Грибова.

В динамических моделях 1-неприводимые функции Грина, в которых нет полей ψ^\dagger , равны 0. Поэтому необходимо рассматривать только те функции, в которых $N_{\psi^\dagger} \geq 1$. Для модели Грибова функции Грина, построенные только из полей ψ^\dagger , так же обнуляются из-за симметрий (8), (19), поэтому будем рассматривать только функции, для которых еще и $N_\psi \geq 1$ в (23). Для модели A из-за симметрии отражения достаточно рассматривать в (22) только функции с $N_{\psi^\dagger} + N_\psi$ кратным 2. С помощью этих ограничений, анализ выражений (22), (23) показывает, что в обеих моделях поверхностные УФ расходимости могут быть лишь в следующих 1-неприводимых функциях Грина (приведены сами функции, индексы расходимости и возможные контрчлены):

$$\begin{aligned} \langle \psi^\dagger \psi \rangle \quad (\delta = 2) & \quad \psi^\dagger \partial_t \psi, \quad \psi^\dagger \partial^2 \psi, \quad \psi^\dagger \psi, \\ \langle \psi^\dagger \psi v \rangle \quad (\delta = 1) & \quad \psi^\dagger (v \partial) \psi, \quad \psi^\dagger (\partial v) \psi. \end{aligned}$$

Для модели A поверхностные расходимости могут быть еще и в таких функциях:

$$\langle \psi^\dagger \psi \psi \psi \rangle \quad (\delta = 0) \quad \psi^\dagger \psi^3,$$

для модели Грибова:

$$\begin{aligned} \langle \psi^\dagger \psi \psi \rangle \quad (\delta = 0) & \quad \psi^\dagger \psi^2, \\ \langle \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \rangle \quad (\delta = 0) & \quad (\psi^\dagger)^2 \psi. \end{aligned}$$

Поверхностные расходимости в функциях $\langle \psi^\dagger \psi v v \rangle$ с $\delta = 0$ и контрчленом $\psi^\dagger \psi v^2$, появляющиеся по размерности в обеих моделях, исчезают из-за

присутствия Галилеевой симметрии.¹

Все такие члены представлены в действии (13) и (14), так что наши модели мультипликативно перенормируемы. Галилеева симметрия требует, чтобы контрчлены $\psi^\dagger \partial_t \psi$ и $\psi^\dagger (v \partial) \psi$ входили в перенормированное действие только в форме Лагранжевой производной $\psi^\dagger \nabla_t \psi$. Таким образом, перенормированные действия могут быть записаны в виде:

$$\mathcal{S}_A^R(\Phi) = \mathcal{S}_C^R(\Phi) + \lambda Z_4 (\psi^\dagger)^2 - u \mu^\varepsilon \lambda Z_5 \psi^\dagger \psi^3 / 3! \quad (24)$$

для модели A и

$$\mathcal{S}_G^R(\Phi) = \mathcal{S}_C^R(\Phi) + \frac{g \mu^{\varepsilon/2} \lambda}{2} \{ Z_4 (\psi^\dagger)^2 \psi - Z_5 \psi^\dagger \psi^2 \} \quad (25)$$

для модели Грибова, где

$$\mathcal{S}_C^R(\Phi) = \psi^\dagger \{ -Z_1 \nabla_t + \lambda (Z_2 \partial^2 - Z_3 \tau) - a Z_6 (\partial_i v_i) \} \psi + \mathcal{S}(\mathbf{v}), \quad (26)$$

а $\mathcal{S}(\mathbf{v})$ из (16).

Здесь λ , τ , g , u и a – ренормированные аналоги первоначальных затравочных констант (которые теперь будут помечаться индексом “0”), и нормировочная масса μ – добавочный произвольный параметр ренормированной теории. Выражение (24)–(26) эквивалентно мультипликативной ренормировке полей $\psi \rightarrow \psi Z_\psi$, $\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger Z_{\psi^\dagger}$ и параметров:

$$\begin{aligned} g_0 &= g \mu^{\varepsilon/2} Z_g, & u_0 &= g \mu^\varepsilon Z_u, & w_0 &= w \mu^\xi Z_w, \\ \lambda_0 &= \lambda Z_\lambda, & \tau_0 &= \tau Z_\tau, & a_0 &= a Z_a. \end{aligned} \quad (27)$$

Константы ренормировки Z_i имеют полюса по ε и ξ и зависят только от безразмерных параметров u , w , α и a .

Вследствие того, что $\mathcal{S}(\mathbf{v})$ заданное (16) не ренормируется, D_0 из (12) выражается через ренормированные параметры: $D_0 = w_0 \lambda_0 = w \lambda \mu^\xi$. Параметры m и α не ренормируются: $m_0 = m$, $\alpha_0 = \alpha$. Благодаря Галилеевой симметрии оба слагаемых в ковариантной производной ∇_t перенормируются одной константой Z_1 . Вследствие чего имеем соотношения:

$$Z_w Z_\lambda = 1, \quad Z_m = Z_\alpha = Z_v = 1. \quad (28)$$

¹Использование Галилеевой симметрии применимо для поля скорости, которое описывается уравнением Навье-Стокса, и вообще это не так для специальных моделей, описывающих поле скорости с Гауссовым распределением. Однако, для нашей используемой модели это справедливо. Детальное обсуждение проблемы было проведено в работе [13]. И доказательство справедливости применимо и в наших случаях, как для модели (13), так и для (14).

Сравнивая выражения (13)–(15) и (24)–(26), получаем соотношения между константами ренормировки Z_1 – Z_6 и Z из (27):

$$Z_1 = Z_\psi Z_{\psi^\dagger}, \quad Z_2 = Z_1 Z_\lambda, \quad Z_3 = Z_2 Z_\tau, \quad Z_6 = Z_1 Z_a \quad (29)$$

для обеих моделей,

$$Z_4 = Z_\lambda Z_{\psi^\dagger}^2, \quad Z_5 = Z_\lambda Z_u Z_\psi^3 Z_{\psi^\dagger} \quad (30)$$

для модели A и

$$Z_4 = Z_g Z_\lambda Z_{\psi^\dagger}^2 Z_\psi, \quad Z_5 = Z_g Z_\lambda Z_{\psi^\dagger} Z_\psi^2 \quad (31)$$

для модели Грибова. Решая эти соотношения относительно констант перенормировки поля и параметров, имеем

$$Z_\lambda = Z_1^{-1} Z_2, \quad Z_\tau = Z_2^{-1} Z_3, \quad Z_a = Z_1^{-1} Z_6, \quad Z_u = Z_1^{-1} Z_2^{-2} Z_4 Z_5 \quad (32)$$

для обеих моделей (в модели Грибова мы произвели замену $u = g^2$, $Z_u = Z_g^2$),

$$Z_\psi = Z_1^{1/2} Z_2^{1/2} Z_4^{-1/2}, \quad Z_\psi^\dagger = Z_1^{1/2} Z_2^{-1/2} Z_4^{1/2} \quad (33)$$

для модели A и

$$Z_\psi = Z_1^{1/2} Z_4^{-1/2} Z_5^{1/2}, \quad Z_\psi^\dagger = Z_1^{1/2} Z_4^{1/2} Z_5^{-1/2}, \quad (34)$$

для модели Грибова.

Константы перенормировки находятся из требования, что функции Грина перенормированных моделей (24)–(26), когда они пишутся в терминах перенормированных переменных, должны быть УФ конечными (в нашем случае конечные при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$). Константы Z_1 – Z_6 вычисляются прямо из диаграмм, а затем константы из (27) находятся из соотношений (32)–(34). Для того, чтобы найти полный набор констант, необходимо рассматривать 1-неприводимые функции Грина, имеющие поверхностные расходимости. Все эти функции были перечисленные выше. В однопетлевом приближении они приведены на рисунке 1 для модели A и на рисунке 2 для модели Грибова. Сплошные линии со стрелками обозначают пропагатор (7), стрелка указывает на поле ψ^\dagger . Сплошные линии без стрелок соответствует пропагатору (9), а волнистые линии обозначают пропагатор скорости $\langle vv \rangle_0$, указанный в (11). Внешние концы с входящей стрелки соответствуют полю ψ^\dagger , а концы без стрелки соответствуют ψ . Тройная вершина с одной волнистой линией соответствует множителю (18).

$$\langle \psi^\dagger \psi \rangle_{1\text{-ir}} = -\{-i\omega Z_1 + \lambda p^2 Z_2 + \lambda \tau Z_3\} + \frac{1}{2} \text{---} \text{loop} \text{---} + \text{---} \text{bubble} \text{---}$$

$$\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \rangle_{1\text{-ir}} = 2\lambda Z_4 + \text{diagram}$$

$$\langle \psi^\dagger \psi \psi \psi \rangle_{1\text{-ir}} = -u\mu^\varepsilon \lambda Z_5 + 3 \text{ (bubble)} + 3 \text{ (triangle with wavy)} + 3 \text{ (triangle with arrows)}$$

$$\langle \psi^\dagger \psi \mathbf{v} \rangle_{1\text{-ir}} = -i\mathbf{p}Z_1 - i\mathbf{a}\mathbf{q}Z_6 + \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

Рис. 1: Однопетлевое приближение для 1-неприводимых функций Грина в модели (13).

$$\begin{aligned}
\langle \psi^\dagger \psi \rangle_{1-ir} &= - \{ -i\omega Z_1 + \lambda p^2 Z_2 + \lambda \tau Z_3 \} + \frac{1}{2} \text{ (diagram: two vertices connected by two lines forming a loop) } + \text{ (diagram: two vertices connected by a wavy line loop) } \\
\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \rangle_{1-ir} &= g\mu^{\varepsilon/2} \lambda Z_4 + 2 \text{ (diagram: triangle with two fermion lines and one fermion line) } + \text{ (diagram: triangle with two fermion lines and one wavy line) } + 2 \text{ (diagram: triangle with two fermion lines and one wavy line) } \\
\langle \psi \psi \psi^\dagger \rangle_{1-ir} &= -g\mu^{\varepsilon/2} \lambda Z_5 + 2 \text{ (diagram: triangle with two fermion lines and one fermion line) } + \text{ (diagram: triangle with two fermion lines and one wavy line) } + 2 \text{ (diagram: triangle with two fermion lines and one wavy line) } \\
\langle \psi^\dagger \psi \mathbf{v} \rangle_{1-ir} &= -i\mathbf{p} Z_1 - i\mathbf{a} \mathbf{q} Z_6 + \text{ (diagram: triangle with two fermion lines and one fermion line) } + \text{ (diagram: triangle with two fermion lines and one wavy line) }
\end{aligned}$$

Рис. 2: Однопетлевое приближение для 1-неприводимых функций Грина в модели (14).

Минус перед первым слагаемым для функции $\langle \psi^\dagger \psi \rangle_{1-ir}$ появляется вследствие уравнения Дайсона. Первые и последние диаграммы в функциях $\langle \psi^\dagger \psi \rangle_{1-ir}$ и $\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \rangle_{1-ir}$ для модели Грибова имеют различный вид (зеркально отражены), но их вклад в константы ренормировки одинаков, и поэтому мы ставим перед ними множитель 2. Более того, последние диаграммы для этих функций имеют замкнутый цикл пропагаторов $\langle \psi \psi^\dagger \rangle_0$ и поэтому равны 0. По этой же причине, последние диаграммы в выражении $\langle \psi^\dagger \psi \psi \rangle_{1-ir}$ для модели A и $\langle \psi^\dagger \psi \mathbf{v} \rangle_{1-ir}$ для обеих моделей обнуляются. Все элементы диаграмм должны быть выражены в перенормированных переменных с помощью соотношений (27)–(29). В однопетлевом приближении Z в первых слагаемых рисунков 1 и 2 должны быть записаны до первого порядка малости по $u = g^2$ и w , в то время как в диаграммах они должны быть просто заменены единицами $Z_i \rightarrow 1$. Таким образом, переход к перенормированным переменным в диаграммах достигается за счет простой замены $\lambda_0 \rightarrow \lambda$, $\tau_0 \rightarrow \tau$, $g_0 \rightarrow g\mu^{\varepsilon/2}$ и $w_0 \rightarrow w\mu^\xi$. В расчетах мы использовали схему минимальных вычитаний (MS), в которой константы перенормировки выглядят как $Z_i = 1 + \dots$ и имеют особенности по ε и ξ , с коэффициентами зависящими только от безразмерных перенормированных параметров u , w , a и α . Однопетлевой

расчет довольно схож с расчетом в несжимаемом случае ($\alpha = 0$), который подробно обсуждался в [14] (см. также [12, 13]). И здесь мы приведем лишь результаты:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1, \quad Z_2 = 1 - \frac{w}{4\xi}(3 + \alpha), \quad Z_3 = 1 + \frac{u}{\varepsilon}, \\ Z_4 &= 1 - \frac{w}{\xi}\alpha(a - 1)^2, \quad Z_5 = 1 + \frac{3u}{\varepsilon} - \frac{3w}{\xi}\alpha a^2, \\ Z_6 &= 1 + \frac{u}{\varepsilon} \frac{(4a - 1)}{4a} \end{aligned} \quad (35)$$

для модели А и

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \frac{u}{4\varepsilon}, \quad Z_2 = 1 + \frac{u}{8\varepsilon} - \frac{w}{4\xi}(3 + \alpha), \quad Z_3 = 1 + \frac{u}{\varepsilon}, \\ Z_4 &= 1 + \frac{u}{\varepsilon} - \frac{w}{\xi}\alpha(a - 1)^2, \quad Z_5 = 1 + \frac{u}{\varepsilon} - \frac{w}{\xi}\alpha a^2, \\ Z_6 &= 1 + \frac{u}{\varepsilon} \frac{(4a - 1)}{8a} \end{aligned} \quad (36)$$

для модели Грибова.

Для упрощения полученных выражений, мы сделали в (35) и (36) замену переменных

$$u \rightarrow u/16\pi^2, \quad w \rightarrow w/16\pi^2.$$

Здесь и далее они будут обозначаться теми же символами u и w . Для $w = 0$, были уже хорошо известны однопетлевые результаты в моделях (4), (5). С точностью до обозначений они получились и в наших расчетах. Для несжимаемой жидкости (случай $\alpha = 0$) выражения (36) также находятся в соответствии с полученными ранее результатами в работе [14]. Более того, в первом порядке выражения (36) удовлетворяют точным соотношениям

$$\begin{aligned} Z_i(a) &= Z_i(1 - a) \quad i = 1, 2, 3; \\ Z_4(a) &= Z_5(1 - a), \quad Z_1(a) - aZ_6(a) = (1 - a)Z_6(1 - a), \end{aligned} \quad (37)$$

которые являются следствием симметрий (8), (19) для модели Грибова. Эти соотношения играют важную роль в анализе ИК-притягивающих точек модели (14).

4 Уравнение ренормгруппы

Напомним вывод уравнений РГ; подробное изложение можно найти в [1, 2].

Уравнение ренормгруппы записывается для ренормированной корреляционной функции $G_R = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle_R$, которая отличается от первоначальной (неренормированной) $G = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle$ только нормировкой и выбором параметров и, следовательно, с равным правом может быть использована для анализа критического поведения. Соотношение $\mathcal{S}_R(\Phi, e, \mu) = \mathcal{S}(\Phi, e_0)$ между функционалами действия (13)–(15) и (24)–(26) приводит к соотношению между функциями Грина:

$$G(e_0, \dots) = Z_\psi^{N_\psi} Z_{\psi^\dagger}^{N_{\psi^\dagger}} G_R(e, \mu, \dots). \quad (38)$$

Здесь, как обычно, N_ψ и N_{ψ^\dagger} – числа входящих в G полей (напомним, что в нашей модели $Z_v = 1$); $e_0 = \{\nu_0, \tau_0, w_0, g_0\}$ – набор первоначальных параметров и $e = \{\nu, \tau, w, g\}$ – их ренормированные аналоги; точки символизируют остальные переменные (время, координата, импульс и т.д.)

Применим к обеим частям равенства (38) операцию $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ – производную вида $\mu \partial_\mu$ при фиксированном наборе затравочных параметров e_0 . Это даст нам основное дифференциальное уравнение ренормгруппы на функцию $G^R(e, \mu, \dots)$

$$\{\mathcal{D}_{RG} + N_\psi \gamma_\psi + N_{\psi^\dagger} \gamma_{\psi^\dagger}\} G^R(e, \mu, \dots) = 0, \quad (39)$$

где \mathcal{D}_{RG} – оператор $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, выраженный в ренормированных переменных:

$$\mathcal{D}_{RG} \equiv \mathcal{D}_\mu + \beta_u \partial_u + \beta_w \partial_w - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu. \quad (40)$$

Здесь и далее мы пользуемся обозначением $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x , и

$$\gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F \quad (41)$$

– аномальная размерность для любой величины (поля или параметра) F . В свою очередь, вводимые для безразмерных констант u, w и a (зарядов), β -функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \beta_u &\equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu u = u(-\varepsilon - \gamma_u), \\ \beta_w &\equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu w = w(-\xi - \gamma_w), \\ \beta_a &\equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu a = -a\gamma_a, \end{aligned} \quad (42)$$

где вторые равенства следуют из определений и соотношений (27). Четвертая β функция

$$\beta_\alpha = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \alpha = -\alpha\gamma_\alpha \quad (43)$$

тождественно равна 0, вследствие (52). Аномальные размерности для данной константы перенормировки Z_F легко получить из соотношений

$$\gamma_F = (\beta_u \partial_u + \beta_w \partial_w + \beta_a \partial_a) \ln Z_F \simeq -(\varepsilon \mathcal{D}_u + \xi \mathcal{D}_w) \ln Z_F. \quad (44)$$

В первом равенстве мы использовали определение (41), выражение (40) для операции $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ в ренормированных переменных и тот факт, что Z зависят только от полностью безразмерных констант связи u , w и a . Во втором соотношении мы сохранили лишь главные члены в β функциях (42). Этого достаточно в нашем приближении. В первом порядке выражения (35), (36) для констант ренормировки имеют вид

$$Z_F = 1 + \frac{u}{\varepsilon} A_F(a, \alpha) + \frac{w}{\xi} B_F(a, \alpha). \quad (45)$$

Подставляя (45) в (44), получаем итоговое УФ конечное выражение для аномальных размерностей:

$$\gamma_F = -u A_F(a, \alpha) - w B_F(a, \alpha) \quad (46)$$

И в наших случаях имеем:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = w(3 + \alpha)/4, \quad \gamma_3 = -u, \quad \gamma_4 = w\alpha(a - 1)^2, \\ \gamma_5 = -3u + 3w\alpha a^2, \quad \gamma_6 = u(1 - 4a)/4a \end{aligned} \quad (47)$$

для модели A и

$$\begin{aligned} \gamma_1 = -u/4, \quad \gamma_2 = -u/8 + w(3 + \alpha)/4, \quad \gamma_3 = -u/2, \\ \gamma_4 = -u + w\alpha(a - 1)^2, \quad \gamma_5 = -u + w\alpha a^2, \quad \gamma_6 = u(1 - 4a)/8a \end{aligned} \quad (48)$$

для модели Грибова.

Соотношения (32)–(34) между константами ренормировки приводят к линейным соотношениям между соответствующими аномальными размерностями:

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \gamma_\tau = \gamma_3 - \gamma_2, \\ \gamma_a = \gamma_6 - \gamma_1, \quad \gamma_u = -\gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_5 \end{aligned} \quad (49)$$

для обеих моделей,

$$2\gamma_\psi = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_4, \quad 2\gamma_\psi^\dagger = \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_4 \quad (50)$$

для модели A и

$$2\gamma_\psi = \gamma_1 - \gamma_4 + \gamma_5, \quad 2\gamma_\psi^\dagger = \gamma_1 + \gamma_4 - \gamma_5 \quad (51)$$

для модели Грибова.

Вместе с (47), (48) эти выражения дают конечные ответы в первом порядке для аномальных размерностей полей и параметров. Точные соотношения в (28) приводят к

$$\gamma_w = -\gamma_\lambda, \quad \gamma_m = \gamma_\alpha = \gamma_v = 0, \quad (52)$$

а из (37) мы имеем

$$\begin{aligned} \gamma_i(a) &= \gamma_i(1-a) \quad i = 1, 2, 3; \\ \gamma_4(a) &= \gamma_5(1-a), \quad \gamma_1(a) - a\gamma_6(a) = (1-a)\gamma_6(1-a) \end{aligned} \quad (53)$$

для модели Грибова.

5 Неподвижные точки

Хорошо известно, что возможные скейлинговые режимы перенормируемой теоретико-полевой модели определяются асимптотикой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для инвариантной (бегущей) константы:

$$\mathcal{D}_s \bar{g}_i(s, g) = \beta_i(\bar{g}), \quad \bar{g}_i(1, g) = g_i, \quad (54)$$

где $s = k/\mu$, k – импульс, $g = \{g_i\}$ – полный набор констант связи и $\bar{g}_i(s, g)$ – соответствующие им инвариантные переменные.

Как правило, ИК ($s \rightarrow 0$) и УФ ($s \rightarrow \infty$) поведение таких систем определяются неподвижными точками g_{i*} . Координаты возможных неподвижных точек находятся из требования, чтобы все β функции обращались в нуль:

$$\beta_i(g_*) = 0, \quad (55)$$

а тип данной неподвижной точки определяется матрицей:

$$\Omega_{ij} = \partial \beta_i / \partial g_j|_{g=g_*} \quad (56)$$

Для ИК притягивающей неподвижной точки (которые нас и интересуют) матрица Ω положительно определена, то есть вещественные части всех ее собственных значений положительны. В наших моделях неподвижные точки для полного набора констант u , w , a , α должны определяться уравнениями

$$\beta_{u,w,a,\alpha}(u_*, w_*, a_*, \alpha_*) = 0, \quad (57)$$

где β - функции определенные нами ранее.

Однако, в наших моделях аттракторы системы (54) лежат на двумерных поверхностях в полном четырехмерном пространстве. Во-первых, функция (43) тождественно равна нулю, так что уравнение $\beta_\alpha = 0$ не дает никаких ограничений на параметр α . Поэтому удобно рассматривать аттракторы систем (54) в трехмерном пространстве u, w, a ; их координаты, матрица (56) и критические индексы будут зависеть от свободного параметра α . Хотя общая картина аттракторов выглядит довольно одинаково для обеих моделей, мы будем рассматривать их отдельно.

5.1 Скейлинговые режимы в модели Грибова

Однопетлевые выражения для β -функций в модели (25), (26) легко выводятся из определений (42), отношений (49), (51) и (52) и выражений (48):

$$\begin{aligned}\beta_u &= u [-\varepsilon + 3u/2 + w(3 + \alpha)/2 - w\alpha f(a)], \\ \beta_w &= w [-\xi + u/8 + w(3 + \alpha)/4], \\ \beta_a &= u(2a - 1)/8,\end{aligned}\tag{58}$$

где $f(a) = a^2 + (a - 1)^2$ имеет минимальное значение $f(1/2) = 1/2$ при $a = 1/2$. Для наших (58) функций в модели Грибова уравнения (57) имеют следующие решения:

(1) Гауссова (свободная) неподвижная точка: $u_* = w_* = 0, a_* = \forall$.

(2) Точка $w_* = 0, u_* = 2\varepsilon/3, a_* = 1/2$, что соответствует чистой модели Грибова (турбулентный перенос не имеет значения).

(3) Линия неподвижных точек

$$u_* = 0, \quad w_* = 4\xi/(3 + \alpha), \quad a_* = \forall,\tag{59}$$

соответствует скалярному полю без самовзаимодействия.

(4) Самая интересная, не тривиальная точка соответствует новому режиму (классу универсальности), где важно как само Грибовское взаимодействие, так и перемешивание :

$$u_* = \frac{4[\varepsilon(3 + \alpha) - 6\xi]}{3(5 + 2\alpha)}, \quad w_* = \frac{8[-\varepsilon/4 + 3\xi]}{3(5 + 2\alpha)}, \quad a_* = 1/2.\tag{60}$$

Напомним, что α рассматривается здесь как свободный параметр, от которого зависят координаты неподвижных точек. При $a = 1/2$, из соотношений (49) и (53) следует $\gamma_a = \gamma_6 - \gamma_1 = 0$, поэтому $\beta_a = -a\gamma_a$ обращается в нуль во всех порядках теории возмущений, независимо от значений параметров u и w . Это означает, что для фиксированных точек (2) и (4) значение $a_* = 1/2$, на самом деле, точное, и оно справедливо во всех порядках разложения по ε и ξ . Выражение для w_* в (3) точке, что соответствует точно решаемой модели Крейчнана, также является точным, в то время как выражения для u_* и w_* для четвертой точки является лишь членом первого порядка двойного разложения по ε и ξ . Допустимая неподвижная точка должна быть ИК притягивающей и удовлетворять условиям $u_* > 0$, $w_* > 0$, которые вытекают из физического смысла этих параметров. В однопетлевом приближении эти два требования совпадают для всех неподвижных точек. На рисунке 3 показаны ИК устойчивые области неподвижных точек (1) - (4) в плоскости ε - ξ . Для точек (1) - (3), матрица (56) либо диагональная, либо треугольная, тогда области устойчивости определяется лишь ее диагональными элементами $\Omega_i = \partial\beta_i/\partial g_i$.

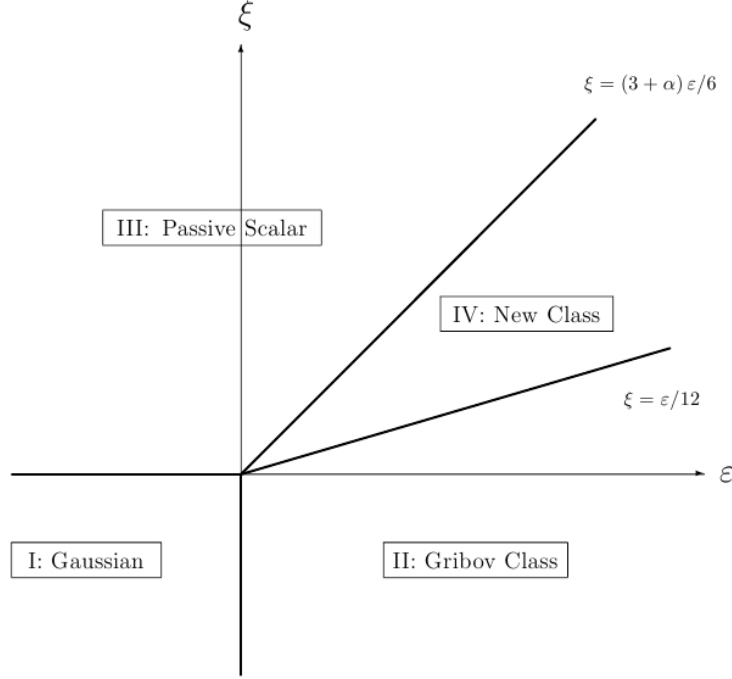


Рис. 3: Области устойчивости неподвижных точек в модели (14).

Для (1) точки имеем

$$\Omega_u = -\varepsilon, \quad \Omega_w = -\xi, \quad \Omega_a = 0,$$

поэтому допустимая область $\varepsilon < 0, \xi < 0$ (I область на рис. 3). Исчезновение элемента Ω_a отражает тот факт, что параметр a_* для I точки произволен. Для точки (2) можно найти

$$\Omega_u = \varepsilon, \quad \Omega_w = -\xi + u_*/8 = -\xi + \varepsilon/12, \quad \Omega_a = u_*/4 = \varepsilon/6,$$

отсюда следует область $\varepsilon > 0, \xi < \varepsilon/12$ (область II на рис. 3). Для (4) точки матричные элементы $\partial\beta_a/\partial u, \partial\beta_a/\partial w$ обращаются в нуль, поэтому матрица Ω имеет блочно-треугольный вид, и одно собственное число $\Omega_a = u_*/4$ легко находится. Собственные числа оставшейся 2×2 матрицы для u, w выглядят довольно сложно, но её определитель $w_*u_*(\alpha + 5/2)$ простой. Это выражение показывает, что матрица положительно определена при $u_* > 0, w_* > 0$ и более тщательный анализ показывает, что это действительно так. Из явного выражения (60) мы заключаем, что для точки (4) допустимая область $\xi > \varepsilon/12, \xi < (3 + \alpha)\varepsilon/6$ (область IV

на рис. 3). Оставшийся сектор III на рис. 3 определяется неравенствами

$$\xi > 0, \quad (3 + \alpha)\varepsilon - 6\xi < 0, \quad (61)$$

при этом собственные значения матрицы (56) в точке (3):

$$\Omega_u = -\varepsilon + 2\xi - \frac{4\alpha\xi}{(3 + \alpha)} f(a_*), \quad \Omega_w = \xi, \quad \Omega_a = 0, \quad (62)$$

где $f(a)$ из (58). Первое неравенство в (61) совпадает с $\Omega_w > 0$, а второе может быть переписано в виде

$$\Omega_u(a_* = 1/2) = -\varepsilon + 2\xi - \frac{4\alpha\xi}{(3 + \alpha)} f(1/2) > 0. \quad (63)$$

Сравнение неравенств (62) и (63) показывает, что условие $\Omega_u > 0$ может быть выполнено только в области III при условии, что a_* удовлетворяет неравенству

$$(a_* - 1/2)^2 \leq \frac{1}{8\alpha\xi} [6\xi - (3 + \alpha)\varepsilon] \quad (64)$$

(Здесь важно, что $f(1/2) = 1/2$ является минимальным значением f).

Таким образом, мы заключаем, что третий режим, для которого самодействие не имеет значения, лежит в секторе III, границы которого описывают неравенства (61). Соответствующий аттрактор имеет вид отрезка на прямой (59) с центром в $a_* = 1/2$ и определяется неравенством (64). Этот интервал становится бесконечным при $\alpha = 0$ и сужается до одной точки $a_* = 1/2$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Следует заметить, что для чисто поперечного поля скорости ($\alpha = 0$) член с коэффициентом a_0 в (10) обнуляется и этот параметр на исчезает из модели.

В однопетлевом приближении (58) все границы между областями устойчивости - прямые линии. При этом нет ни пробелов, ни перекрываний между различными областями. В более высоком порядке границы между областями II и IV, а также между III и IV могут измениться и стать изогнутыми. Тем не менее, можно утверждать, что перекрывания областей, а также пустоты между ними не появятся и в более высоких порядках.

В данном случае важно, что модели с $u = 0$ или $w = 0$ “замкнуты относительно перенормировки”, поэтому функции β_u для $w = 0$ и β_w для $u = 0$ совпадают с β функциями Грибова и Крейчнана во всех порядках теории возмущения.

Остается отметить, что расположение границы между областями III и IV зависит от параметра α . При $\alpha = 0$, граница задается лучом $\xi =$

$\varepsilon/2$, что совпадает с результатом, полученным ранее в [14] в несжимаемом случае. Если α растет, граница начинает вращаться против часовой стрелки и в пределе $\alpha \rightarrow \infty$ становится вертикальной линией $\varepsilon = 0$, $\xi > 0$.

5.2 Скейлинговые режимы в A модели

Однопетлевые выражения для β -функций в модели (24), (26) легко выводятся из определений (42), соотношений (49), (50), (52) и явных выражений (47):

$$\begin{aligned}\beta_u &= u [-\varepsilon + 3u + w(3 + \alpha)/2 - w\alpha f(a)], \\ \beta_w &= w [-\xi + w(3 + \alpha)/4], \\ \beta_a &= u(4a - 1)/4,\end{aligned}\tag{65}$$

где функция $f(a) = 3a^2 + (a - 1)^2$ достигает минимального значения $f(1/4) = 3/4$ при $a = 1/4$.

(1) Гауссова (свободная) линия неподвижных точек: $u_* = w_* = 0$, $a_* = \forall$. ИК-притягивающая при $\varepsilon < 0$, $\xi < 0$.

(2) Точка $w_* = 0$, $u_* = \varepsilon/3$, $a_* = 1/4$, что соответствует чистой модели Грибова (турбулентный перенос не имеет значения). ИК-притягивающая при $\xi < 0$, $\varepsilon < 0$.

(3) Линия неподвижных точек:

$$u_* = 0, \quad w_* = 4\xi/(3 + \alpha), \quad a_* = \forall\tag{66}$$

соответствует перемешивающему скалярному полю без самодействия. Она находится в интервале

$$(a_* - 1/4)^2 < \frac{1}{16\alpha\xi} [-\varepsilon(3 + \alpha) + \xi(6 - \alpha)],\tag{67}$$

который ИК-притягивающий при $\xi > 0$, $\varepsilon < \xi(6 - \alpha)/(3 + \alpha)$. Этот интервал становится бесконечным при $\alpha \rightarrow 0$ и стремится к конечному значению $-(\varepsilon + \xi)/16\xi$ при $\alpha \rightarrow \infty$ (обратите внимание, что правая часть неравенства (67) положительна в ИК-области устойчивости).

(4) Точка соответствует новому режиму, где важно как взаимодействие начальной модели, так и перемешивание :

$$w_* = 4\xi/(3 + \alpha), \quad u_* = \frac{\varepsilon(3 + \alpha) - \xi(6 - \alpha)}{3(3 + \alpha)}, \quad a_* = 1/4.\tag{68}$$

ИК притягивающая при $\xi > 0$, $\varepsilon > \xi(6 - \alpha)/(3 + \alpha)$

С ростом α , граница между областями режимов (3) и (4) вращается в верхней полуплоскости ε - ξ против часовой стрелки от луча $\xi = \varepsilon/2$ ($\alpha \rightarrow 0$) к $\xi = -\varepsilon$ ($\alpha \rightarrow \infty$).

ИК-устойчивые области неподвижных точек (1) - (4) в ε - ξ -плоскости изображены на рис. 4. На этом рисунке показаны области при значении $\alpha < 6$, когда граница между областями III и IV находится в правом верхнем квадранте. Когда же $\alpha > 6$, граница попадает в левый верхний квадрант.

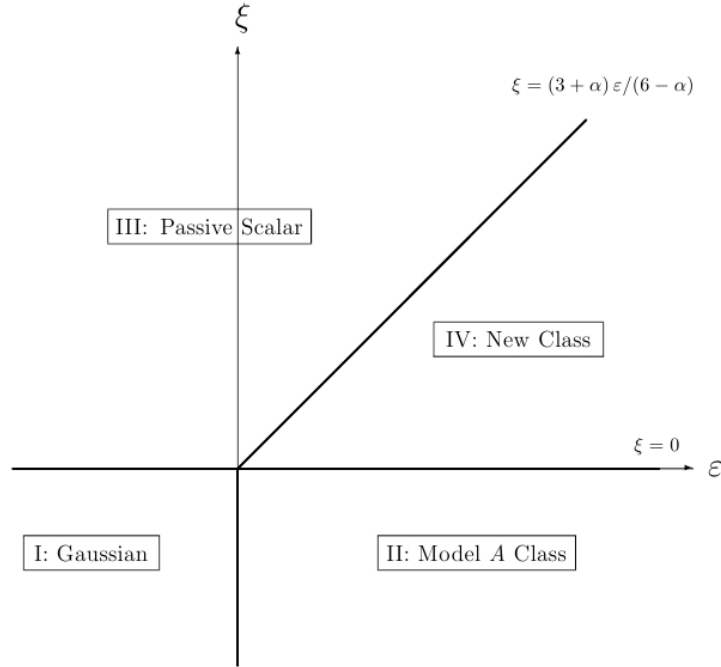


Рис. 4: Области устойчивости неподвижных точек в модели (13). Приведен случай $\alpha < 6$; для $\alpha > 6$ граница между III, IV лежит в верхнем левом квадранте.

6 Критический скейлинг и критические размерности

Из существования ИК притягивающих точек уравнений РГ вытекает скейлинговое поведение функций Грина в ИК-области. При крити-

ческом скейлинге фиксируются все ИК-несущественные параметры (λ , μ и константы связи), а растягиваются только ИК-существенные (время/частота, координаты/импульсы, τ , поля).

В динамической модели, критические размерности Δ_F ИК-существенных величин F задаются соотношениями:

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad \Delta_\omega = 2 - \gamma_\lambda^*, \quad (69)$$

с условием нормировки $\Delta_k = 1$; более подробно см., например, [2]. Здесь $d_F^{k,\omega}$ – канонические размерности величин F , приведенные в таблице 1. γ_F^* – значение соответствующей аномальной размерности (41) в фиксированной точке $\gamma_F^* = \gamma_F(u_*, w_*, a_*)$. В нашем случае: $\Delta_\psi = d/2 + \gamma_\psi^*$, $\Delta_{\psi^\dagger} = d/2 + \gamma_{\psi^\dagger}^*$ для модели Грибова, $\Delta_\psi = d/2 - 1 + \gamma_\psi^*$, $\Delta_{\psi^\dagger} = d/2 + 1 + \gamma_{\psi^\dagger}^*$ для модели A и $\Delta_\omega = 2 + \gamma_\tau^*$ для обеих моделей.

Подставляя координаты фиксированных точек из разделов 5.1 и 5.2 в однопетлевые выражения (47), (48) для аномальных размерностей и используя точные соотношения (49)–(51), получаем в первом порядке выражения для критических размерностей. Ответы для критических размерностей можно найти в таблицах 2 и 3 для модели Грибова и модели A .

Таблица 2: Критические размерности полей и параметров в модели (14), (15).

	FP1	FP2	FP3	FP4
Δ_ω	2	$2 - \frac{\varepsilon}{12}$	$2 - \xi$	$2 - \xi$
Δ_ψ	$d/2$	$2 - \frac{7\varepsilon}{12}$	$2 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\xi\alpha(2a-1)}{(3+\alpha)}$	$2 - \frac{\varepsilon(18+7\alpha)-6\xi}{6(5+2\alpha)}$
Δ_{ψ^\dagger}	$d/2$	$2 - \frac{7\varepsilon}{12}$	$2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2\xi\alpha(2a-1)}{(3+\alpha)}$	$2 - \frac{\varepsilon(18+7\alpha)-6\xi}{6(5+2\alpha)}$
Δ_τ	2	$2 - \frac{\varepsilon}{4}$	$2 - \xi$	$2 - \frac{\varepsilon(3+\alpha)+3\xi(3+2\alpha)}{3(5+2\alpha)}$

Таблица 3: Критические размерности полей и параметров в модели (13), (15).

	FP1	FP2	FP3	FP4
Δ_ω	2	2	$2 - \xi$	$2 - \xi$
Δ_ψ	$d/2 - 1$	$1 - \frac{\varepsilon}{2}$	$1 + \frac{\xi-\varepsilon}{2} - \frac{2\xi\alpha(a-1)^2}{(3+\alpha)}$	$1 - \frac{4\varepsilon(3+\alpha)+\xi(5\alpha-12)}{3(3+\alpha)}$
Δ_{ψ^\dagger}	$d/2 + 1$	$3 - \frac{\varepsilon}{2}$	$3 - \frac{\xi+\varepsilon}{2} + \frac{2\xi\alpha(a-1)^2}{(3+\alpha)}$	$3 - \frac{4\varepsilon(3+\alpha)-\xi(5\alpha-12)}{3(3+\alpha)}$
Δ_τ	2	$2 - \frac{\varepsilon}{3}$	$2 - \xi$	$2 - \frac{\varepsilon(3+\alpha)+\xi(3+4\alpha)}{(3+\alpha)}$

Результаты для Гауссовских точек (1) точные. Все результаты для фиксированной точки (2) имеют поправки порядка ε^2 и выше.

Результат $\Delta_\omega = 2 - \xi$ для неподвижных точек (3) и (4) тоже точен. Это следует из общих соотношений $\gamma_\lambda = \gamma_w$ в (52) и $\Delta_\omega = 2 - \gamma_\lambda^*$ в (69) и тождества $\gamma_w^* = \xi$, которое является следствием уравнения $\beta_w = 0$ для любой неподвижной точки с $w_* \neq 0$. Другие результаты для неподвижной точки (4) имеют высшие поправки по ε и ξ . Результат $\Delta_\tau = 2 - \xi$ для неподвижной точки (3) также точен: при $u = 0$, 1-неприводимые функции $\langle \psi^\dagger \psi \rangle$ имеют только одно-петлевые диаграммы, что приводит только к контрчлену $\psi^\dagger \partial^2 \psi$, ср. [17] для модели Крейчнана. Отсюда следует, что $Z_1 = Z_3 = 1$ при $u = 0$. Затем из соотношений (29) и (52) следует, $\gamma_\tau = -\gamma_\lambda = \gamma_w$, что дает $\gamma_\tau^* = -\xi$ для неподвижных точек с $w_* \neq 0$. Неподвижная точка (3) в таблице 2 иллюстрирует тот факт, что размерности Δ_ψ и Δ_{ψ^\dagger} в модели Грибова меняются при преобразовании $a \rightarrow 1 - a$. Остается отметить, что для любой неподвижной точки критическая размерность поля скорости дается точным соотношением $2\Delta_v = -\xi + \Delta_\omega$, которое следует из вида парных корреляционных функций (11), (12).

7 Обсуждение и выводы

Мы изучили эффекты влияния турбулентного перемешивания на критическое поведение, при этом уделяли особое внимание *сжимаемости* жидкости. Были рассмотрены два представителя динамических моделей критического поведения: модель A , описывающая релаксационную динамику без сохранения параметра порядка в критической равновесной системе, и сильно неравновесная модель Грибова, которая описывает распространение процессов в системе реакция-диффузия. Турбулентное перемешивание моделировалось моделью Казанцева - Крейчнана с Гауссовым полем скорости с степенным спектром $\propto k^{-d-\xi}$. Обе стохастические задачи можно переформулировать в виде мультипликативно-перенормируемых теоретико-полевых моделей, что позволяет применять метод РГ для анализа их ИК поведения. Было показано, что в зависимости от соотношения между пространственной размерностью d и показателем ξ , обе модели демонстрируют четыре различных вида критического поведения, связанных с четырьмя возможными неподвижными точками уравнения РГ. Три неподвижные точки соответствуют известным режимам: (1) Гауссовой неподвижной точке; (2) критическому поведению типичному для чистой модели без турбулентного переноса (то есть, модель A или Грибова); (3) скалярному полю без самодействия (нелинейность параметра порядка в исходных динамических уравнениях является несущественной). Наиболее интересной четвертой точке соответствует новый тип критического поведения (4), в котором важны как нелиней-

ность, так и турбулентное перемешивание. Критические показатели зависят от d , ξ и параметра сжимаемости α . Были вычислены критические индексы и области устойчивости для всех режимов в однопетлевом приближении, что соответствует главным членам двойного разложения по параметрам ξ и $\varepsilon = 4 - d$. Было показано, что для обеих моделей сжимаемость усиливает роль нелинейных членов в динамических уравнениях. В плоскости ε - ξ область устойчивости (4) режима становится шире при возрастании степени сжимаемости.

Проиллюстрируем эти общие слова на примере облака частиц в системе реакция-диффузия, распространяющегося в близкой к критической турбулентной среде. Среднеквадратичный радиус $R(t)$ облака частиц связан с функцией отклика (6) в координатно-временном представлении следующим образом:

$$R^2(t) = \int d\mathbf{x} x^2 G(t, \mathbf{x}), \quad G(t, \mathbf{x}) = \langle \psi(t, \mathbf{x}) \psi^\dagger(0, \mathbf{0}) \rangle, \quad x = |\mathbf{x}|. \quad (70)$$

Для функции $G(t, \mathbf{x})$ скейлинговые соотношения в предыдущем разделе дают следующие ИК-асимптотики:

$$G(t, \mathbf{x}) = x^{-\Delta_\psi - \Delta_{\psi^\dagger}} F\left(\frac{x}{t^{1/\Delta_\omega}}, \frac{\tau}{t^{\Delta_\tau/\Delta_\omega}}\right), \quad (71)$$

с некоторой функцией F . Подставляя (71) в (70), получаем скейлинговое выражение для радиуса:

$$R^2(t) = t^{(d+2-\Delta_\psi-\Delta_{\psi^\dagger})/\Delta_\omega} f\left(\frac{\tau}{t^{\Delta_\tau/\Delta_\omega}}\right), \quad (72)$$

где скейлинговая функция f связана с F из (71)

$$f(z) = \int d\mathbf{x} x^{2-2\Delta_\psi} F(x, z).$$

Непосредственно в критической точке (предполагается, что функции f конечна при $\tau = 0$) получаем из (72) степенной закон для радиуса:

$$R^2(t) \propto t^\Omega, \quad \Omega \equiv (d+2-\Delta_\psi-\Delta_{\psi^\dagger})/\Delta_\omega = (2-\gamma_\psi^*-\gamma_{\psi^\dagger}^*)/\Delta_\omega; \quad (73)$$

Последнее равенство следует из соотношения (69). Для Гауссовой неподвижной точки имеем обычный закон диффузии $R(t) \propto t^{1/2}$. Для режима (3) получаем результат $R(t) \propto t^{1/(2-\xi)}$. Для Колмогоровского значения $\xi = 4/3$, $R(t) \propto t^{3/2}$ он находится в соответствии с “законом Ричардсона $4/3$ ” $dR^2/dt \propto R^{4/3}$ для турбулентности. Для двух других неподвижных точек показатели в (72), (73) задаются бесконечными рядами по ε

(для точки 2) и ε , ξ (для точки 4). Ответы в первом приближении легко получить из результатов, приведенных в таблицах 2 и 3. В случае несжимаемой жидкости ($\alpha = 0$), наиболее реалистичные значения $d = 2$ или 3 и $\xi = 4/3$ лежат в области режима (3), так что распространение облака полностью определяется турбулентным переносом и описывается степенным законом (73) с точным показателем $\Omega^{(3)} = 2/(2 - \xi)$. При возрастании степени сжимаемости α , область устойчивости (4) режима становится шире (см. обсуждение в разделе 5). Когда α становится достаточно большим, физические величины d и ξ попадают в область устойчивости нового режима (4), происходит изменение критического поведения. Новый показатель в (73) можно представить в виде:

$$\Omega^{(4)} = \Omega^{(3)} + \delta\Omega, \quad \delta\Omega = -(\gamma_\psi^* + \gamma_{\psi^\dagger}^*)/(2 - \xi) \quad (74)$$

(напомним, что $\Delta_\omega = (2 - \xi)$ – точное для обоих режимов (3) и (4)). В модели Грибова подстановка однопетлевых выражений для размерностей γ_ψ^* и $\gamma_{\psi^\dagger}^*$ из таблицы 2 в (74) дает

$$\delta\Omega = \frac{(3 + \alpha)\varepsilon - 6\xi}{3(5 + 2\alpha)(2 - \xi)}. \quad (75)$$

Простой анализ выражения (75) показывает, что в области устойчивости (4) режима величина $\delta\Omega$ положительна и монотонно растет с α . В самом деле, непосредственно проверяется, что отношения $\delta\Omega > 0$ и $\partial_\alpha \delta\Omega > 0$ эквивалентны неравенствам $(3 + \alpha)\varepsilon - 6\xi > 0$ и $-\varepsilon + 12\xi > 0$, которые определяют область устойчивости режима (60) в однопетлевом приближении. Таким образом, распространение облака становится быстрее в сравнении с чистым турбулентным переносом, за счет комбинированного воздействия перемешивания и нелинейных членов, и ускоряется при росте степени сжимаемости. Для модели A показатели Ω в (73) для режимов (3) и (4) совпадают в однопетлевом приближении, но основной количественный вывод остается прежним: сжимаемость повышает роль нелинейных членов и ведет к расширению области устойчивости (4) режима. Хотя системы реакции-диффузии, подвергающиеся турбулентному перемешиванию широко распространены в природе, на данный момент мы не можем предложить любые существующие или возможные экспериментальные тесты, которые могут быть использованы для проверки аналитических результатов этой работы. Проблема заключается в тщательном измерении показателей в таких неидеальных системах, при этом особое внимание должно уделяться управлению степенью сжимаемости. Скорее всего, развитие в этой области будут связаны с численным моделированием, как это произошло для систем реакции-диффузии без перемешивания [4].

Список литературы

- [1] Zinn-Justin J 1989 *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon)
- [2] Vasil'ev A N 2004 *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics* (Boca Raton: Chapman & Hall/CRC)
- [3] Halperin B I and Hohenberg P C 1977 *Rev. Mod. Phys.* **49** 435; Folk R and Moser G 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** R207
- [4] Hinrichsen H 2000 *Adv. Phys.* **49** 815; Ódor G 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 663
- [5] Janssen H-K and Täuber U C 2004 *Ann. Phys. (NY)* **315** 147
- [6] Ivanov D Yu 2003 *Critical Behaviour of Non-Idealized Systems* (Moscow: Fizmatlit) [in Russian]
- [7] Khmel'nitski D E 1975 *Sov. Phys. JETP* **41** 981; Shalaev B N 1977 *Sov. Phys. JETP* **26** 1204; Janssen H-K, Oerding K and Sengespeick E 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** 6073
- [8] Satten G and Ronis D 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 91; 1986 *Phys. Rev. A* **33** 3415
- [9] Onuki A and Kawasaki K 1980 *Progr. Theor. Phys.* **63** 122; Onuki A, Yamazaki K and Kawasaki K 1981 *Ann. Phys.* **131** 217; Imaeda T, Onuki A and Kawasaki K 1984 *Progr. Theor. Phys.* **71** 16
- [10] Beysens D, Gbadamassi M and Boyer L 1979 *Phys. Rev. Lett* **43** 1253; Beysens D and Gbadamassi M 1979 *J. Phys. Lett.* **40** L565
- [11] Ruiz R and Nelson D R 1981 *Phys. Rev. A* **23** 3224; **24** 2727; Aronowitz A and Nelson D R 1984 *Phys. Rev. A* **29** 2012
- [12] Antonov N V, Hnatich M and Honkonen J 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 7867
- [13] Antonov N V and Ignatieva A A 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 13593

- [14] Antonov N V, Iglovikov V I and Kapustin A S 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 135001
- [15] Antonov N V, Ignatieva A A and Malyshev A V 2010 E-print LANL arXiv:1003.2855 [cond-mat]; to appear in *PEPAN (Phys. Elementary Particles and Atomic Nuclei, published by JINR)* **41**
- [16] Falkovich G, Gawędzki K and Vergassola M 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 913
- [17] Antonov N V 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 7825
- [18] Antonov N V, Hnatich M and Nalimov M Yu 1999 *Phys. Rev. E* **60** 4043
- [19] van Kampen N G 2007 *Stochastic Processes in Physics and Chemistry, 3rd ed.* (Amsterdam: North Holland)
- [20] Sak J 1973 *Phys. Rev. B* **8** 281; Honkonen J and Nalimov M Yu 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** 751 Janssen H-K 1998 *Phys. Rev. E* **58** R2673; Antonov N V 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6691; 2000 *Physica D* **144** 370
- [21] Janssen H-K, Oerding K, van Wijland F and Hilhorst H J 1999 *Eur. Phys. J. B* **7** 137; Janssen H-K and Stenull O 2008 *Phys. Rev. E* **78** 061117