

1 ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные физические системы самой разной природы (магнетики, системы типа газ-жидкость, бинарные смеси) обнаруживают необычное поведение вблизи точки фазового перехода второго рода (критической точки). Корреляционные функции и некоторые термодинамические величины (теплоемкость, восприимчивость и др.) демонстрируют степенное поведение (критический скейлинг). При этом соответствующие критические показатели оказываются универсальными, т.е. зависящими лишь от глобальных характеристик системы, таких как размерность пространства или симметрия. Это свойство позволяет объединять системы, различающиеся множеством несущественных (с точки зрения критического поведения) деталей в единые классы универсальности, характеризуемые одним и тем же набором критических показателей и скейлинговых функций.

Последовательное количественное описание критического поведения можно дать в рамках метода ренормализационной группы. В ренормгрупповом подходе возможные критические режимы связываются с инфракрасно-устойчивыми неподвижными точками некоторой ренормируемой теоретико-полевой модели. Цель теории – выделить основные классы универсальности, установить существование нужных неподвижных точек для соответствующих моделей, вычислить для них критические размерности и скейлинговые функции в рамках какой-либо последовательной теории возмущений. Подробное изложение ренормгрупповых методов и их применения к теории фазовых переходов можно найти в монографии [1].

Наиболее типичные фазовые переходы в равновесных системах принадлежат к классу универсальности $O(N)$ -симметричной модели φ^4 N -компонентного скалярного параметра порядка. Ее критические показатели зависят только от N и размерности пространства d и теперь хорошо изучены, см. [1]. Большой интерес в последние годы привлекают фазовые переходы в системах, далеких от состояния термодинамического равновесия. Их критическое поведение гораздо более многообразно и пока недостаточно хорошо изучено.

Показательным примером являются разнообразные и часто встречающиеся в природе процессы распространения, такие как эпидемии, каталитические реакции, лесные пожары, диффузия в пористых или флуктуирующих средах. Для определенности мы будем использовать терминологию первого случая (эпидемий). В зависимости от конкретных условий, процесс распространения (в случае эпидемий – распространения инфекции) может либо продолжаться и охватить всю популяцию, либо полностью прекратиться через некоторое время. Основные черты перехода между выживанием и вымиранием распространяющегося агента описываются упрощенными моделями случайных блужданий на решетке, дополненных некоторыми вероятностными правилами, моделирующими инфицирование, излечение, иммунизацию и т.п.

Распространение агента зависит от относительной вероятности этих конкурирующих процессов. Например, если вероятность инфицирования низка, все особи через некоторое время будут излечены (или иммунизированы), процесс распространения полностью прекратится, и система окажется в неактивном (т.н. абсорбционном) состоянии, в котором больше ничего не происходит. При другом соотношении вероятностей система будет бесконечно долго находиться в активном состоянии, где сосуществуют инфицированные и здоровые особи, причем каждая из них многократно заболевает и излечивается, а плотность их чисел флуктуирует. Как теперь известно, переход (при изменении параметров типа вероятностей инфицирования) от флуктуирующего (активного) к абсорбционному (неактивному) состоянию является фазовым переходом второго рода и описывается несколькими новыми классами универсальности. Критическому поведению таких систем посвящено множество работ; их подробное изложение можно найти, например, в недавних обзорах [2,3].

Наиболее важным классом универсальности является т.н. направленный процесс протекания, или процесс Грибова (называемый так потому, что соответствующая полевая модель совпадает с хорошо известной реджеонной теорией поля [4]). В настоящее время он довольно хорошо изучен. Соответствующие критические размерности вычислены во втором порядке разложения по $\varepsilon = 4 - d$ — отклонению размерности пространства d от т.н. верхнего критического значения $d = 4$, выше которого критическое поведение тривиализуется.

Известно, что сильное влияние на критическое поведение могут оказывать внешние возмущения, примеси, гравитация, движение самой среды и т.д. Это может приводить к существенному изменению “идеального” поведения, а в некоторых случаях — к появлению новых классов универсальности. В настоящей работе рассмотрена модель, описывающая фазовый переход для процесса типа Грибова, протекающего в сильно флуктуирующей (например турбулентной) среде. При этом скорость среды описывается с помощью известной модели Обухова-Крейкнана, которая верно передает основные черты реальной развитой турбулентности. В последнее время эта модель приобрела огромную популярность в связи с проблемой аномального скейлинга в задачах турбулентности и турбулентного переноса пассивной примеси, см. обзор [5] и цитированную там литературу.

План работы таков. В разделе 2 дано описание модели в терминах теории поля с соответствующей диаграммной техникой. В разделе 3 анализируются ультрафиолетовые расходимости модели. Показано, что модель является мультипликативно ренормируемой и приведен ренормированный функционал действия. В разделе 4 получено дифференциальное уравнение ренормгруппы и вычислены в однопетлевом приближении β -функции и аномальные размерности γ для всех полей и параметров. Раздел 5 посвящен анализу неподвижных точек и их областей устойчивости на плоскости ε - ξ , где ξ — показатель степени в корреляторе поля скорости.

Три из четырех неподвижных точек отвечают уже известным типам критического поведения: свободной теории, пассивному скалярному полю и обычному процессу Грибова. Четвертая точка отвечает новому неравновесному классу универсальности, для которого одновременно существенны и стандартная нелинейность модели

Грибова, и турбулентное перемешивание. В однопетлевом приближении оказывается, что для заданных значений ε и ξ инфракрасно-устойчивой является лишь одна из точек, то есть реализуется определенный критический режим. В этом отношении результаты близки к полученным ранее в работе [6], где рассматривалось влияние турбулентного перемешивания на критическое поведение равновесной системы типа φ^4 . Соответствующие критические размерности могут быть вычислены в форме двойных рядов по ε и ξ ; в разделе 7 они получены в однопетлевом приближении.

В разделе 7 рассматривается распыление облака диффундирующих частиц в данной модели. Показано, что влияние нелинейности и турбулентного перемешивания приводит к изменению обычного для диффузии “закона $1/2$ ” для радиуса облака.

2 Теоретико-полевая формулировка модели

Дискретная (решеточная) модель направленного процесса протекания описывается в непрерывном пределе стохастическим дифференциальным уравнением вида [2,3]

$$\partial_t \psi(t, \mathbf{x}) = (\tau + D\partial^2)\psi(t, \mathbf{x}) - \lambda\psi^2(t, \mathbf{x}) + \zeta(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\psi(t, \mathbf{x})$ – концентрация частиц (представителей популяции), $\tau \propto (p - p_c)$ – отклонение вероятности процесса инфицирования от критического значения (аналог $\tau = T - T_c$ для равновесных фазовых переходов), вклад с лапласианом описывает инфицирование ближайших соседей. Нелинейность, отвечающая исключению частиц на решетке, взята в простейшей (квадратичной) форме (в духе теории Ландау – отбрасывание всех старших вкладов как инфракрасно-несущественных). Случайный шум $\zeta(t, \mathbf{x})$ с гауссовым распределением и заданным коррелятором

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = 2\Gamma\psi(t, \mathbf{x})\delta(t - t')\delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2)$$

моделирует случайные флуктуации.

Согласно общей теореме (см. например [1]) стохастическая задача (1), (2) эквивалентна теоретико-полевой модели удвоенного набора полей ψ, ψ' с функционалом действия:

$$\mathcal{S}(\Phi) = \int dx \int dt \{ \psi^\dagger (\partial_t + \nu\Delta + \tau\nu)\psi + \frac{\nu g}{2}(\psi^\dagger \psi^2 - (\psi^\dagger)^2 \psi) \} \quad (3)$$

В (3) введены новые параметры g, ν (определенным образом связанные с параметрами D, Γ, λ в исходной стохастической задаче) и выполнено некоторое растяжение полей с тем чтобы коэффициенты при двух вершинах взаимодействия отличались лишь знаком. Полевая формулировка означает, что различные корреляционные функции стохастической задачи представляются функциональными средними с весом $\exp S(\psi, \psi')$. В частности, функция $\langle \psi\psi' \rangle$ в полевой модели отвечает линейной функции отклика в задаче (1), (2).

Отметим, что функционал (3) инвариантен относительно преобразования

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi'(-t, -\mathbf{x}), \quad \psi'(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi(-t, -\mathbf{x}), \quad g \rightarrow -g, \quad (4)$$

причем изменение знака константы связи фактически несущественно, т.к. реальным параметром разложения в теории возмущений является g^2 . Введение поля скорости не нарушает этой инвариантности.

Взаимодействие с полем скорости вводится путем замены

$$\partial_t \rightarrow \nabla_t = \partial_t + v_i \partial_i, \quad (5)$$

где ∇_t – Лагранжева производная. И добавлением к действию члена $S_0(v) = -\frac{1}{2} \int dx \int dx' v D_v^{-1} v$.

Будем рассматривать поле скорости с гауссовым распределением ($\langle v_i \rangle = 0$), поперечное ($\partial_i v_i = 0$), с парным коррелятором вида:

$$\langle v_i(t, x); v_j(t, x') \rangle = A_0 \delta(t - t') \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{ik(x-x')} P_{ij}(k) \frac{1}{k^{d+\xi}} \quad (6)$$

Где A_0 – константа, а P_{ij} – проектор, равный $\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$.

Учитывая, что в d -мерном пространстве $\int d\vec{k} \exp i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}') k^{d+\xi} \sim r^{(-2d-\xi)}$, где $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$, добавка к действию поля скорости будет иметь вид:

$$\mathcal{S}_0(v) = -\frac{1}{2} \int dt \int dx \int dx' v_i(t, x) A_0^{-1} v_j(t, x') r^{-2d-\xi} [\delta_{ij} + c \frac{r_i r_j}{r^2}] \quad (7)$$

В итоге наше действие переписывается в виде:

$$\mathcal{S}(\Phi) = \int dx \int dt \{ \psi^\dagger (\partial_t - v_i \partial_i + \nu \Delta + \tau \nu) \psi + \frac{\nu g}{2} (\psi^\dagger \psi^2 - (\psi^\dagger)^2 \psi) \} + S_0(v) \quad (8)$$

Модели (8) соответствует диаграммная техника с тремя затравочными пропагаторами (линии в диаграммах): $\langle vv \rangle_0$ – был выписан ранее (6), $\langle \psi^\dagger \psi \rangle_0$, $\langle \psi \psi^\dagger \rangle_0$

$$\langle \psi^\dagger \psi \rangle = \frac{1}{-i\omega + \nu k^2 + \tau} \quad \langle \psi \psi^\dagger \rangle = \frac{1}{i\omega + \nu k^2 + \tau} \quad (9)$$

Модель также включает три типа вершин взаимодействия: $\psi^\dagger \psi^2$, $(\psi^\dagger)^2 \psi$ и $\psi^\dagger v_i \partial_i \psi$. Последняя, в силу поперечности поля скорости, равна $-\psi (v_i \partial_i) \psi^\dagger$ (Можно протащить производную внутри действия).

3 Канонические размерности

Обычно в динамических задачах каноническая размерность любой величины полностью описывается двумя независимыми компонентами: частотной d_F^ω и импульсной d_F^k размерностями. Канонические размерности всех полей и констант, входящих в действие, находятся с использованием нормировочных соотношений $d_k^k = -d_x^x = 1$, $d_\omega^\omega = -d_t^t = 1$, а также из условия безразмерности (в каноническом смысле и для каждой из трех независимых компонент отдельно) всех членов действия. Затем из этих трех независимых компонент можно составить суммарную размерность $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$.

Таблица 1: Канонические размерности полей и параметров модели (8)

F	ψ	ψ^\dagger	v	ν	τ	g	A	ω
d_F^ω	0	0	1	1	0	0	1	0
d_F^k	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	-1	-2	2	$2 - \frac{d}{2}$	$-2 + \xi$	ξ
$d_F = 2d_F^\omega + d_F^k$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	1	0	2	$2 - \frac{d}{2}$	ξ	ξ

Канонические размерности (в том числе и для ренормированных параметров) будут приведены в таблице 1.

Где $A = \nu\omega$. Из нее видно, что модель логарифмична (обе константы взаимодействия безразмерны) при $d = 4, \epsilon = 0$. Поэтому ультрафиолетовые расходимости в корреляционных функциях проявляются как сингулярности при $\epsilon \equiv 4 - d \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$, например как полюса по этим параметрам и их линейным комбинациям. Суммарная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина дается соотношением:

$$d_\Gamma = d + 2 - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi, \quad \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi = N_\psi d_\psi + N_{\psi^\dagger} d_{\psi^\dagger} + N_v d_v. \quad (10)$$

Где $N_\Phi = \{N_\psi, N_{\psi^\dagger}, N_v\}$ – числа соответствующих полей, входящих в функцию Г.

Суммарная размерность d_Γ в логарифмической теории (т.е. при $\epsilon = \xi = 0$) является формальным индексом ультрафиолетовой расходимости $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\epsilon=\xi=0}$. Поверхностные расходимости, для устранения которых требуется введение контрчленов, могут возникать только в тех диаграммах, для которых индекс расходимости — неотрицательное целое число. Из таблицы 1 мы находим, что $\delta_\Gamma = 6 - 2N_\psi - 2N_{\psi^\dagger} - N_v$. Вышеупомянутые соотношения могут быть дополнены некоторыми наблюдениями, позволяющими сократить количество необходимых контрчленов и объем вычислений. Например, можно заметить, что все 1-неприводимые диаграммы, содержащие только поле скорости содержат закороченный запаздывающий пропагатор $\langle \psi\psi^\dagger \rangle_0$ и, следовательно исчезают, не требуя контрчленов. Функции $\langle \psi, \psi^\dagger vv \rangle$, также можно не рассматривать, т.к. она запрещены галилеевой инвариантностью. Более того, члены типа $\psi\partial_t\psi^\dagger$ и $\psi(v_i\partial_i)\psi^\dagger$ появляются в ренормированном действии только таким образом, что образуют инвариантную комбинацию типа $\psi\nabla_t\psi^\dagger$. Поэтому поверхностные ультрафиолетовые расходимости могут содержаться только в следующих 1-неприводимых функциях:

$$\begin{aligned} &< \psi, \psi^\dagger >, (\delta = 2) \quad (\psi\partial_t\psi^\dagger), (\psi\tau\nu\psi^\dagger), (\psi\nu\Delta\psi^\dagger) \\ &< \psi, \psi^\dagger, \psi >, < \psi, \psi^\dagger, \psi^\dagger >, (\delta = 0) \quad (\psi(\psi^\dagger)^2\nu g), (\psi^2\psi^\dagger\nu g) \\ &< v, \psi, \psi^\dagger >, (\delta = 1) \quad (\psi(v_i\partial_i)\psi^\dagger) \end{aligned} \quad (11)$$

Все такие члены представлены в действии (8), поэтому оказывается, что наша модель является мультипликативно ренормируемой. Таким образом, мы заключаем,

что ренормированное действие может быть записано в виде:

$$\mathcal{S}_R(\Phi) = \mathcal{S}_0(v) + \psi^\dagger [Z_1 \partial_t - Z_2 \nu \Delta + Z_3 \tau + Z_5 (v_i \partial_i)] \psi + \frac{g \nu Z_4}{2} (\psi^\dagger \psi^2 - (\psi^\dagger)^2 \psi) \quad (12)$$

Здесь ν, τ, w, g – ренормированные аналоги первоначальных констант и μ – добавочный произвольный параметр ренормированной теории. Выражение (12) эквивалентно мультипликативной ренормировке полей $\psi \rightarrow \psi Z_\psi, \psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger Z_{\psi^\dagger}$ и параметров:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \nu Z_\nu, & \tau_0 &= \tau Z_\tau, \\ u_0 &= u \mu^\varepsilon Z_u, & w_0 &= w \mu^\xi Z_w, \end{aligned} \quad (13)$$

Где $Z_u = Z_g^2$. Поле v ренормировки не требует ($Z_v = 1$). Константы в (12) и (13) соотносятся следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\psi Z_{\psi^\dagger}, & Z_2 &= Z_\psi Z_{\psi^\dagger} Z_\nu, & Z_3 &= Z_\psi Z_{\psi^\dagger} Z_\nu Z_\tau, \\ Z_4 &= Z_\psi Z_{\psi^\dagger}^2 Z_g Z_\nu, & Z_5 &= Z_v Z_\psi Z_{\psi^\dagger}, \end{aligned} \quad (14)$$

Константы ренормировки сокращают все сингулярности по ε, ξ так, что сами корреляционные функции ренормированной модели имеют конечный предел при $\varepsilon, \xi = 0$. Для доопределения конечной части при вычислении констант ренормировки мы будем пользоваться схемой минимальных вычитаний в которой константы имеют форму $Z_i = 1 +$ только полюсные по ε, ξ части. Коэффициенты при этих полюсах будут зависеть только от безразмерных ренормированных констант взаимодействия g и w .

4 Вычисление констант ренормировки

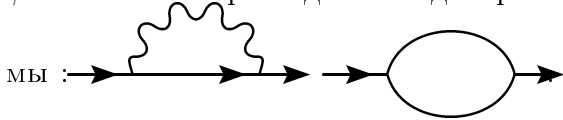
Запишем уравнение Дайсона для пропагатора $\langle \psi^\dagger, \psi \rangle$:

$$D^{-1} = D_0^{-1} - \sum \quad (15)$$

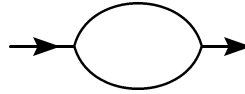
Где D_0^{-1} из 8 имеет вид:

$$D_0^{-1} = -Z_1 i\omega + \nu k^2 Z_2 + \tau Z_3 \quad (16)$$

А \sum состоит из всех возможных диаграмм с двумя хвостами: одно поле ψ и одно поле ψ^\dagger . Из анализа расходимости диаграмм видно, что в \sum Расходятся будут 2 диаграммы :



Константы ренормировки выбираются так, чтоб расходящиеся члены из \sum сокращались с соответствующими полюсными слагаемыми в D_0 . Рассмотрим 2 диаграмму. В P – представлении ей соответствует интеграл:



$$= -\frac{(g\nu)^2}{2(2\pi)^d} \int \frac{d\vec{k}}{-i\omega + \nu(k + \frac{p}{2})^2 + \tau + (\frac{p}{2} - k)^2\nu + \tau} \quad (17)$$

Преобразуем выражение (17):

$$-\frac{(g\nu)^2}{2(2\pi)^d} \int \frac{d\vec{k}}{(-i\omega + \nu\frac{p^2}{2} + 2\tau) + 2\nu k^2} = -\frac{(g\nu)^2}{2(2\pi)^d} \int \frac{d\vec{k}}{2\nu k^2(1 + \frac{B}{2\nu k^2})} = \quad (18)$$

$$= -\frac{(g\nu)^2}{2(2\pi)^d} \int d\vec{k} \frac{1}{2\nu k^2} (1 - \frac{B}{2\nu k^2}) \quad (19)$$

Где $B = -i\omega + \nu\frac{p^2}{2} + 2\tau$. Нас интересуют полюсные слагаемые в этом интеграле при $-i\omega, \nu p^2, \tau$

Следовательно, полюса в 17 имеют вид:

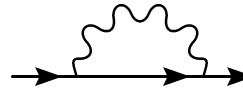
$$\frac{(g\nu)^2}{2(2\pi)^d} \int \frac{d\vec{k} B}{4\nu^2 k^4} \quad (20)$$

Перейдем в сферические координаты и сделаем регуляризацию интеграла, ограничив область интегрирования по $|k| > m$, тогда получим:

$$\frac{g^2 B}{8(2\pi)^d} S_d \frac{m^{-\epsilon}}{\epsilon} = \frac{u}{4\epsilon} \quad (21)$$

Где $u = \frac{g^2 S_d}{2(2\pi)^d}$. Тогда получим что из 15 вклад от этой диаграммы в Z_1 будет равен $\frac{u}{4\epsilon}$, в $Z_2 - \frac{u}{8\epsilon}$, а в $Z_3 - \frac{u}{2\epsilon}$

Теперь рассмотрим вклады 1 диаграммы. В P -представлении ей соответствует интеграл:



$$= -A_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{P_{ij}(k)(p-k)_i p_j}{k^{d+\xi}(-i\omega + (p-k)^2 + \tau)} \quad (22)$$

Из-за поперечности поля v можно $(p-k)_i$ заменить на $-(p)_i$. Заметим что вклад этой диаграммы в Z_1 и Z_3 равны 0. От ω она просто не зависит, а от τ интеграл перестанет зависеть после того, как будет взято интегрирование по ω . Покажем это, воспользовавшись формулой:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{(-i\omega + A)} = \frac{1}{2} \quad (23)$$

Фактически это доопределение $\theta(0) = \frac{1}{2}$, которое можно оправдать симметричностью коррелятора $\langle v_i, v_j \rangle$ в (22). Тогда (22) примет вид:

$$-p_i p_j A_0 \int \frac{d\vec{k}}{2(2\pi)^d} \frac{P_{ij}(k)}{k^{d+\xi}} \quad (24)$$

Пользуясь тем, что

$$\int d\vec{k} \frac{k_i k_j}{k^2} f(k) = \frac{\delta_{ij}}{d} \int d\vec{k} f(k) \quad (25)$$

получим, что вклад в Z_2 от 1 диаграммы будет равен $-\frac{3w}{4\xi}$. Где $w = \frac{A_0 S_d}{2(2\pi)^d}$.

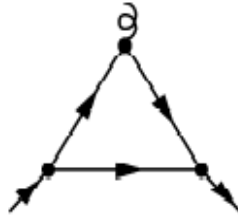
Рассмотрим теперь уравнение Дайсона для вершины $\langle \psi, \psi^\dagger, \psi^\dagger \rangle$. Из анализа расходимости диаграмм видно, что в константу ренормировки Z_4 даст вклад лишь одна диаграмма:



Этой диаграмме соответствует интеграл:

$$2g^3 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{(i\omega + k^2)^2 (-i\omega + k^2)} = g^3 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{4k^4}. \quad (26)$$

Получили известный нам интеграл. Произведя интегрирование, получим $Z_4 = 1 + \frac{u}{\epsilon}$. Наконец, осталось вычислить последнюю константу - Z_5 . В нее даст вклад диаграмма:



Ей соответствует интеграл:

$$g^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{ik_i}{(i\omega + k^2)^2 (-i\omega + (p-k)^2)} = g^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{ik_i}{4k^4} \left(1 - \frac{p^2}{k^2} + 2\frac{p_j k_j}{k^2} + \dots\right). \quad (27)$$

Первое и второе слагаемые в интеграле равны 0, а для 3 слагаемого надо воспользоваться формулой 25. После вычисления этого интеграла и использования уравнения Дайсона для данной вершины, получим : $Z_5 = 1 + \frac{u}{4\epsilon}$. В итоге имеем:

$$\begin{aligned} Z_1 = Z_5 = 1 + \frac{u}{4\epsilon}, \quad Z_2 = 1 + \frac{u}{8\epsilon} - \frac{3\omega}{4\xi} \\ Z_3 = 1 + \frac{u}{2\epsilon}, \quad Z_4 = \frac{u}{\epsilon} \end{aligned} \quad (28)$$

5 Уравнение ренормгруппы

Уравнение ренормгруппы записывается для ренормированной корреляционной функции $G_R = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle_R$, которая отличается от первоначальной (неренормированной) $G = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle$ только нормировкой и выбором параметров и, следовательно, с равным правом может быть использована для анализа. Соотношение $\mathcal{S}_R(\Phi, e, \mu) = \mathcal{S}(\Phi, e_0)$ между функционалами действия (3) и (12) приводит к соотношению между функциями гринна:

$$G(e_0, \dots) = Z_\psi^{N_\psi} Z_{\psi^\dagger}^{N_{\psi^\dagger}} G_R(e, \mu, \dots). \quad (29)$$

Здесь, как обычно, N_ψ и N_{ψ^\dagger} – степени входящих в Γ полей (повторим, что в нашей модели $Z_v = 1$); $e_0 = \{\nu_0, \tau_0, w_0, g_0\}$ набор первоначальных параметров и $e = \{\nu, \tau, w, g\}$ их ренормированные аналоги; точки символизируют остальные переменные (время, координата, импульс и т.д.).

Применим оператор $\tilde{\mathcal{D}}_\mu = \mu \partial_\mu$ к (29) при фиксированном наборе e_0 . Это даст нам основное дифференциальное уравнение ренормгруппы на функцию $G^R(e, \mu, \dots)$

$$\{\mathcal{D}_{RG} + N_\psi \gamma_\psi + N_{\psi^\dagger} \gamma_{\psi^\dagger}\} G^R(e, \mu, \dots) = 0, \quad (30)$$

где \mathcal{D}_{RG} – оператор $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, выраженный в ренормированных переменных:

$$\mathcal{D}_{RG} \equiv \mathcal{D}_\mu + \beta_u \partial_u + \beta_w \partial_w - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu. \quad (31)$$

Здесь мы пользуемся обозначением $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x , и

$$\gamma_F \equiv \mathcal{D}_\mu \ln Z_F \quad (32)$$

– аномальная размерность для любой величины F . В свою очередь β функции для двух безразмерных констант u и w приобретают вид:

$$\beta_u \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu u = u [-\varepsilon - \gamma_u], \quad \beta_w \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu w = w [-\xi - \gamma_w], \quad (33)$$

где вторые равенства следуют из определений и соотношений (13). Уравнение (14) приводит к следующим соотношениям между аномальными размерностями:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_\psi + \gamma_{\psi^\dagger}, \quad \gamma_2 = \gamma_\psi + \gamma_{\psi^\dagger} + \gamma_\nu, \quad \gamma_3 = \gamma_\psi + \gamma_{\psi^\dagger} + \gamma_\nu + \gamma_\tau, \\ \gamma_4 = \gamma_\psi + 2\gamma_{\psi^\dagger} + \gamma_g + \gamma_\nu, \quad \gamma_5 = \gamma_v + \gamma_\psi + \gamma_{\psi^\dagger}, \end{aligned} \quad (34)$$

Аномальные размерности γ_1 – γ_5 могут быть найдены из соответствующих констант ренормировки с помощью определения (32), и функции, входящие в уравнение ренормгруппы можно найти из (34):

$$\begin{aligned}\gamma_\psi &= \gamma_{\psi^\dagger} = \frac{\gamma_1}{2}, & \gamma_\nu &= \gamma_2 - \gamma_1, \\ \gamma_\tau &= \gamma_3 - \gamma_2, & \gamma_v &= \gamma_5 - \gamma_1, & \gamma_g &= \gamma_4 - \gamma_2 - \frac{\gamma_1}{2},\end{aligned}\tag{35}$$

Явные выражения для аномальных размерностей выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \gamma_5 &= -\frac{u}{4} + O(g^3), & \gamma_2 &= -\frac{u}{8} + \frac{3\omega}{4} + O(g^3), \\ \gamma_3 &= -\frac{u}{2} + O(g^3), & \gamma_4 &= -u + O(g^3)\end{aligned}\tag{36}$$

Из (35) получим:

$$\begin{aligned}\gamma_\psi &= \gamma_{\psi^\dagger} = -\frac{u}{8} + O(g^3), & \gamma_\nu &= \frac{u}{8} + \frac{3\omega}{4} + O(g^3), \\ \gamma_\tau &= -\frac{3u}{8} - \frac{3\omega}{4} + O(g^3), & \gamma_v &= 0 + O(g^3), & \gamma_g &= -\frac{3u}{4} - \frac{3\omega}{4} + O(g^3),\end{aligned}\tag{37}$$

6 Неподвижные точки

Как известно, возможные скейлинговые режимы (разные варианты асимптотического поведения корреляционных функций) ренормируемой модели связаны с инфракрасно устойчивыми неподвижными точками уравнения ренормгруппы.

В общем случае неподвижные точки задаются условием обращения в ноль всех β функций. В нашей модели координаты u_* , w_* неподвижных точек находятся из уравнений:

$$\beta_u(u_*, \omega_*) = 0, \quad \beta_\omega(u_*, \omega_*) = 0,\tag{38}$$

где β функции определены в (33). Тип неподвижной точки определяется матрицей:

$$\Omega = \{\Omega_{ij} = \partial\beta_i/\partial u_j\},\tag{39}$$

где β_i обозначает полный набор β функций и $g_j = \{u, \omega\}$ полный набор констант. Для ИК устойчивой неподвижной точки матрица Ω положительно определена, т.е. вещественные части всех собственных чисел больше нуля.

Из определения (33) и явных выражений (37) для аномальных размерностей, мы получаем следующие явные выражения (в главном порядке) для β функций:

$$\beta_u = u \left[-\varepsilon + 3\frac{u}{2} + 3\frac{\omega}{2} \right], \quad \beta_\omega = \omega \left[-\xi + \frac{u}{8} + 3\frac{w}{4} \right]\tag{40}$$

Из (38) и (40) мы можем найти четыре различные неподвижные точки;

1. Гауссова (свободная) неподвижная точка: $u_* = \omega_* = 0$;

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix} \quad (41)$$

Собственные числа матрицы равны:

$$\lambda_1 = -\epsilon \quad \lambda_2 = -\xi \quad (42)$$

2. $u_* = 0$; $\omega = \frac{4\xi}{3}$;

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} -\epsilon + 2\xi & 0 \\ \frac{\xi}{6} & +\xi \end{pmatrix} \quad (43)$$

Собственные числа матрицы равны:

$$\lambda_1 = 2\xi - \epsilon \quad \lambda_2 = \xi \quad (44)$$

3. $\omega_* = 0$; $u = \frac{2\epsilon}{3}$;

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ 0 & -\xi + \frac{\epsilon}{12} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Собственные числа матрицы равны:

$$\lambda_1 = \epsilon \quad \lambda_2 = -\xi + \frac{\epsilon}{12} \quad (46)$$

4. $\omega_* = \frac{8\xi}{5} - \frac{2\epsilon}{15}$; $u = \frac{4\epsilon}{5} - \frac{8\xi}{5}$;

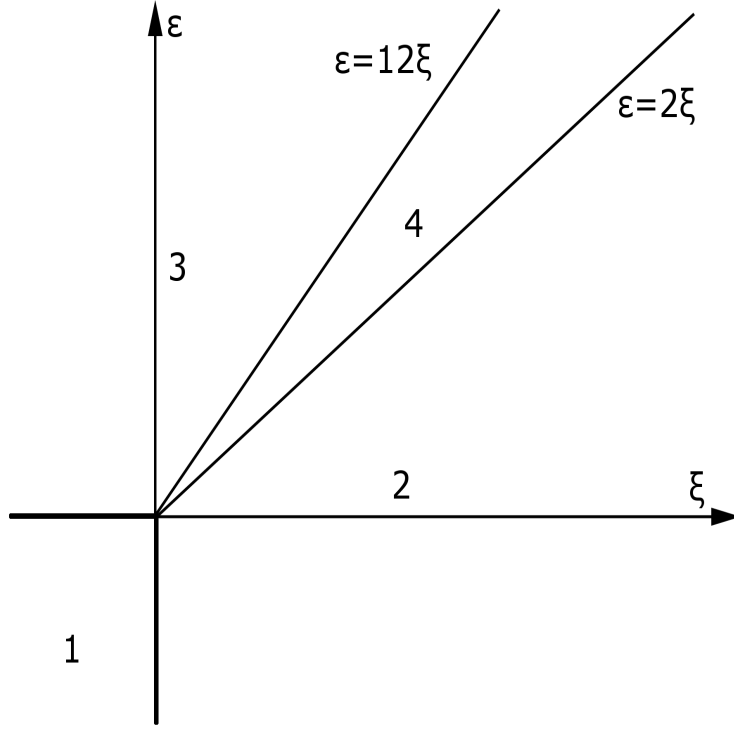
$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} -\epsilon + \frac{3}{2}\omega & \frac{3}{2}u \\ \frac{\omega}{8} & \frac{u}{8} - \xi + \frac{3\omega}{2} \end{pmatrix} \quad (47)$$

Собственные числа матрицы равны:

$$\lambda_{1,2} = \frac{11\epsilon}{20} - \frac{3\xi}{5} \pm \frac{\sqrt{161\epsilon^2 - 824\epsilon\xi + 1104\xi^2}}{20}. \quad (48)$$

Выражение под корнем больше 0 для любых ϵ, ξ . Собственные числа матрицы вещественные. Эта неподвижная точка соответствует нетривиальному ИК скейлинговому режиму, в котором необходимо учитывать обе нелинейности. Соответствующие критические размерности зависят от обоих параметров ϵ, ξ уже в главном порядке и вычисляются как двойные ряды по этим параметрам.

Области ИК устойчивости для этих неподвижных точек в плоскости ϵ – ξ (т.е. области значений ϵ и ξ для которых собственные числа матрицы Ω для данной неподвижной точки положительны) показаны на рисунке 1.



В главном приближении (40) все границы областей устойчивости - просто прямые линии (границы этих областей, как уже было упомянуто, находятся из условия смены знака Ω_g, Ω_w), таким образом при любых ε - ξ мы попадаем в устойчивую область какой-то конкретной неподвижной точки; нет никаких “окон” и перекрытий (если возникают несколько возможных скейлинговых режимов, то выбор точки определяется начальными данными для уравнения ренормгруппы) между различными областями. Однако, вероятнее всего, такая ситуация является следствием того, что мы учитывали только ведущие члены в β функциях, если же брать в расчет поправки, то границы могут искривляться и перекрываться. В дальнейшем мы будем рассматривать наиболее интересный случай неравновесного режима, соответствующего точке 4.

7 Критический скейлинг и критические размерности

Пусть F некая функция от n независимых аргументов $\{x_1, \dots, x_n\}$, удовлетворяющая следующему размерному соотношению

$$F(\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^{\alpha_F} F(x_1, \dots, x_n) \quad (49)$$

с определенным набором постоянных коэффициентов (скейлинговые размерности) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_F\}$ и произвольным положительным параметром $\lambda > 0$. Дифференцируя соотношение (49) по λ и затем полагая $\lambda = 1$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{D}_i F(x_1, \dots, x_n) = \alpha_F F(x_1, \dots, x_n), \quad \mathcal{D}_i = x_i \partial / \partial x_i \quad (50)$$

общее решение которого выглядит следующим образом

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_F/\alpha_1} \tilde{F} \left(\frac{x_2}{x_1^{\alpha_2/\alpha_1}}, \dots, \frac{x_n}{x_1^{\alpha_n/\alpha_1}} \right), \quad (51)$$

где \tilde{F} – произвольная функция от $(n-1)$ аргумента. Очевидно, размерности определены с точностью до общего множителя (видно из замены $\lambda \rightarrow \lambda^a$ в (49) или умножения (50) на a); эта произвольность может быть устранена, например, если положить $\alpha_1 = 1$. Если $\alpha_i = 0$ для какого-нибудь x_i , то эта переменная не преобразуется в (49), и соответствующая производная в (50) отсутствует. Хорошо известно, что главный член, определяющий асимптотическое поведение (ренормированной) корреляционной функции на больших расстояниях, удовлетворяет РГ уравнению (30), в котором ренормированные константы связи заменены на их значения в неподвижных точках. В нашем случае это приводит к

$$\{D_\mu - \gamma_\tau^* D_\tau - \gamma_\nu^* D_\nu + N_\Phi \gamma_\Phi^*\} G_{N_\Phi} = 0, \quad (52)$$

где $\gamma_\tau^* = \gamma_u(u = u_*, w = w_*)$ и так далее, G_{N_Φ} – ренормированная корреляционная функция с $N_\Phi = \{N_{\psi^\dagger}, N_\psi, N_v\}$ полями (подразумевается суммирование по повторяющимся индексам).

Каноническая масштабная инвариантность функции G_{N_Φ} по отношению к двум независимым размерностям может быть выражена с помощью двух дифференциальных уравнений в форме (51). Действительно, из безразмерности действия вытекает его инвариантность относительно преобразования типа $\psi(x) \rightarrow \lambda^{d_\psi} \psi(\lambda^{-1}x)$ и т.д., а из этого свойства вытекает свойство (49) для корреляционных функций, и, следовательно, система дифференциальных уравнений:

$$\{D_\mu + D_k + 2D_\tau - 2D_\nu + d_\Phi^k N_\Phi\} G_{N_\Phi} = 0, \quad (53)$$

$$\{D_\omega + D_\nu + d_\Phi^\omega N_\Phi\} G_{N_\Phi} = 0, \quad (54)$$

Нас интересует критическое скейлинговое поведение, т.е. поведение типа (53) в котором все ИК существенные параметры (импульс/ координата, время/частота меняются, в то время как ИК несущественные параметры (такие, которые конечны в неподвижной точке: ν, μ) фиксированы. Для этого, мы скомбинируем уравнения (52)–(54) так, что производные по ИК существенным параметрам исключаются; это приводит нас к желаемому уравнению, которое описывает критическое скейлинговое поведение

$$\{D_k + \Delta_\omega D_\omega + \Delta_\tau D_\tau - N_\Phi \Delta_\Phi\} G_{N_\Phi} = 0. \quad (55)$$

Критическая размерность для любого ИК существенного параметра F дается общим выражением

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad (56)$$

Воспользовавшись каноническими размерностями таблицы 1 получим:

$$\Delta_\omega = 2 - \frac{u}{8} - \frac{3\omega}{4} \quad (57)$$

$$\Delta_\psi = \frac{d}{2} - \frac{u}{8} \quad (58)$$

$$\Delta_\tau = 2 - \frac{3u}{8} - \frac{3\omega}{4}. \quad (59)$$

В итоге имеем:
для 1 случая:

$$\Delta_\omega = 2, \Delta_\psi = \frac{d}{2}, \Delta_\tau = 2. \quad (60)$$

для 2 случая:

$$\Delta_\omega = 2 - \xi, \Delta_\psi = \frac{d}{2}, \Delta_\tau = -\xi + 2. \quad (61)$$

для 3 случая:

$$\Delta_\omega = 2 + \frac{\epsilon}{12}, \Delta_\psi = \frac{d}{2} - \frac{\epsilon}{12}, \Delta_\tau = 2 - \frac{\epsilon}{4}. \quad (62)$$

для 4 случая:

$$\Delta_\omega = 2 - \xi, \Delta_\psi = \frac{d}{2} - \frac{\epsilon}{10} + \frac{\xi}{5}, \Delta_\tau = 2 - \frac{\epsilon}{5} - \frac{3\xi}{5}. \quad (63)$$

Рассмотрим некоторые следствия общих соотношений (60-63) для радиуса расплывающегося облака диффундирующих частиц:

$$R^2(t) = \int dx x^2 \langle \psi^\dagger(0, 0), \psi(\vec{x}, t) \rangle = \int dx x^2 \frac{1}{|x|^{2\Delta_\psi}} f\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\Delta_\omega}}}, \tau x^{\Delta_\tau}\right). \quad (64)$$

Сделаем замену переменных в интеграле $y = \frac{x}{t^{\frac{1}{\Delta_\omega}}} \Rightarrow x = yt^{\frac{1}{\Delta_\omega}}, dx = (dy)t^{-\frac{d}{\Delta_\omega}}$ и в место второго аргумента в f напомним другую безразмерную комбинацию (для удобства).

$$R^2(t) = \int dy y^2 t^{\frac{2\Delta_\omega - d}{\Delta_\omega}} f\left(y, \frac{t}{\tau^{\frac{\Delta_\omega}{\Delta_\tau}}}\right) \quad (65)$$

После взятия интегрирования по y , получим:

$$R^2(t) = t^{\frac{2\Delta\omega-d}{\Delta\omega}} F\left(\frac{t}{\tau \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau}}\right) \quad (66)$$

Если положить $\tau = 0$, то получим подправленный закон распывания облака вблизи точки фазового периода. Обычный закон диффузии $R^2(t) \propto t$.