Влияние сильно анизотропного турбулентного перемешивания на критическое поведение: Ренормгрупповой анализ двух необычных систем

Антонов Н.В., Малышев А.В.

Рассмотрено влияние сильно анизотропного турбулентного перемешивания на критическое поведение двух систем: критической динамики модели φ^3, описыващей универсальные свойства метастабильных состояний вблизи фазового перехода первого рода, и реакционно-диффузионной системы вблизи точки перехода второго рода между флуктуационным и абсорбционным состояниями (простой эпидемический процесс или процесс Грибова). В обоих случаях продемонстрировано существование нового сильно неравновесного и анизотропного скейлингового режима (класса универсальности), для которого существенны как перемешивание, так и нелинейность по параметру порядка. Соответствующие критические размерности вычислены в однопетлевом приближении ренормализационной группы.

1 Введение

Многочисленные системы самой разной физической природы (магнетики, системы типа жидкость–пар, бинарные смеси) демонстрируют очень интересное поведение в окрестности критической точки (фазового перехода второго рода). Различные термодинамические величины (теплоемкость, спонтанная намагниченность, восприимчивость и т.д.) обнаруживают степенные особенности. Количественные характеристики такого поведения (например, критические размерности) зависят только от глобальных свойств системы (таких как симметрия или размерность пространства) и поэтому могут быть описаны на основе небольшого числа базовых моделей. Это позволяет объединять системы, различающиеся множеством несущественных (с точки зрения критического поведения) деталей в единые классы, характеризуемые одним и тем же набором критических показателей.

Последовательное количественное описание критического поведения можно дать в рамках метода ренормализационной группы (РГ). В ренормгрупповом подходе возможные критические режимы связываются с инфракрасно-устойчивыми неподвижными точками некоторой ренормируемой теоретико-полевой модели. Цель теории – выделить основные классы универсальности, установить существование нужных неподвижных точек для соответствующих моделей, вычислить для них критические размерности и скейлинговые функции в рамках последовательной теории возмущений. Подробное изложение аппарата ренормгруппы и его применений в теории критического поведения содержится в монографии [1].

Наиболее типичные фазовые переходы принадлежат классу $O(n)$-симметричной модели φ^4 n-компонентного скалярного параметра порядка. Универсальные характеристики такого критического поведения зависят только от n и размерности пространства d. Однако, в последние годы все больший интерес привлекают фазовые переходы в системах, далеких от состояния термодинамического равновесия (см. например обзорную статью [2] и цитированную там литературу). Их критическое поведение гораздо более многообразно и пока недостаточно хорошо изучено.

Известно, что сильное влияние на критическое поведение могут оказывать внешние возмущения, примеси, гравитация, движение самой среды и т.д. Это может приводить к существенному искажению "идеального" критического поведения, а в некоторых случаях – даже к появлению новых классов универсальности [3]–[9]. Такие в целом разные системы как, например, магнетик со случайно распределенными примесями или бинарная смесь в турбулентной среде, объединяет общая особенность: существование неравновесных стационарных состояний с новым набором критических показателей. Кроме того, для таких систем, при наличии выделенного направления, критическое поведение оказывается сильно анизотропным: различным направлениям в пространстве соответствуют разные критические размерности.

Полномасштабная модель критической жидкости, подверженной сильно анизотропному турбулентному перемешиванию, должна описываться с помощью сохраняющегося (бинарная смесь, система жидкость–пар) или несохраняющегося (жидкие кристаллы) параметра порядка, взаимодействующего с полем скорости, которое в свою очередь подчиняется нелинейному динамическому уравнению (например, уравнению Навье-Стокса со случайной силой) и анизотропией, вводимой путем задания начальных или граничных условий.

В настоящей работе мы применяем РГ подход к несколько упрощенным моделям, в которых будет введено взаимодействие с гауссовым полем скорости, имитирующим некоторые реальные свойства турбулентности. Этого оказывается достаточно, чтобы уловить основную особенность проблемы: существование нового, неравновесного и сильно анизотропного класса универсальности. Мы рассмотрим две динамических модели. Первая из них – модель, описывающая фазовый переход между т.н. абсорбционным (неактивным) и флуктуационным (активным) состояниями некоторой реакционно-диффузионной системы. Более конкретно, будет рассмотрен процесс типа Грибова, называемый так потому, что соответствующая полевая модель близка к хорошо известной реджеонной теории поля [2]. Вторая же – релаксационная динамика несохраняющегося скалярного параметра порядка для модели с кубическим взаимодействием типа φ^3. Как обнаружено недавно, эта модель описывает некоторые универсальные свойства метастабильных состояний, возникающих при фазовых переходах первого рода [10].

План работы таков. В разделе 2 дано описание моделей в терминах теории поля с соответствующей диаграммной техникой. В разделе 3 анализируются ультрафиолетовые расходимости моделей. Показано, что модели является мультипликативно-ренормируемыми, и приведены ренормированные функционалы действия. Раздел 4 посвящен подсчету констант ренормировки Z для обеих моделей в однопетлевом приближении. В разделе 5 получены дифференциальные уравнения ренормгруппы и вычислены β-функции и аномальные размерности γ для всех полей и параметров (в том же приближении). Раздел 6 посвящен анализу неподвижных точек. В разделе 7 приведены результаты для наборов критических размерностей для всех режимов (всех неподвижных точек). Оказывается, что три из четырех неподвижных точек в обеих моделях отвечают уже известным типам критического поведения: свободной теории, пассивному скалярному полю и обычному процессу, отвечающему соответствующему взаимодействию. Четвертые точки отвечают новым неравновесным классам универсальности, для которых одновременно существенны и нелинейности моделей, и турбулентное перемешивание. В однопетлевом приближении получается, что для заданных значений параметров ε (отклонение размерности от логарифмической) и ξ (показатель степени в корреляторе поля скорости), по которым идет разложение, инфракрасно-устойчивой является лишь одна из точек, то есть реализуется определенный критический режим. В этом отношении результаты близки к полученным ранее в работе [8], где рассматривалось влияние турбулентного перемешивания на критическое поведение равновесной системы типа φ^4. В качестве частного следствия общих скейлинговых соотношений рассмотрено расплывание облака примесных частиц. Результаты работы кратко суммированы в Заключении.

В полевой формулировке обе модели выглядят схоже, отличаясь только видом потенциала взаимодействия и добавочным слагаемым в квадратичную часть, так что анализ их будет вестись параллельно. Где это необходимо, результаты для модели с взаимодействием Грибова будут помечаться индексом “1”, результатам же для второй модели в свою очередь будет отвечать индекс “2”.

2 Теоретико-полевая формулировка модели

Как уже упоминалось во Введении, в данной работе мы будем рассматривать две динамические модели. Обратимся теперь к их более детальному определению и переформулировке на языке теории поля.

В непрерывном пределе процесс Грибова (он же – направленный процесс протекания или простой эпидемический процесс) описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида [2]

$$\partial_t\varphi(t,\mathbf{x}) = \lambda_0(\partial^2-\tau_0)\varphi(t,\mathbf{x}) - \frac{g_0\lambda_0}{2}\varphi^2(t,\mathbf{x}) + \sqrt{\varphi(t,\mathbf{x})}\zeta(t,\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\varphi(t,\mathbf{x})$ – концентрация распространяющегося агента, $\tau \propto (p-p_c)$ – отклонение вероятности процесса инфицирования (для определенности, использована терминология процессов распространения эпидемий) от критического значения, g_0 – константа взаимодействия, а случайный шум $\zeta(t,\mathbf{x})$ с гауссовым распределением и заданным коррелятором

$$\langle \zeta(t,\mathbf{x})\zeta(t',\mathbf{x}')\rangle = g_0\lambda_0\delta(t-t')\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{2}$$

моделирует случайные флуктуации. Здесь и далее d – размерность пространства $\mathbf{x}$, индекс “0” помечает различные неренормированные параметры моделей. Множитель $\sqrt{\varphi}$ перед вкладом шума в (1) обеспечивает полное исчезновение флуктуаций в неактивной (абсорционной) фазе.

Обратимся ко второй модели. Релаксационную динамику несохраняющегося скалярного параметра порядка $\varphi(t,\mathbf{x})$ будем описывать с помощью стохастического дифференциального уравнения, подобного (1) , но с т.н. аддитивным шумом (без дополнительного зависящего от поля φ множителя):

$$\partial_t\varphi(t,\mathbf{x}) = \lambda_0(\partial^2-\tau_0)\varphi(t,\mathbf{x}) - \frac{g_0\lambda_0}{2}\varphi^2(t,\mathbf{x}) + \zeta(t,\mathbf{x}). \tag{3}$$

Под $\tau_0 \propto (T-T_0)$ теперь понимается отклонение температуры от ее критического значения (обозначения для двух моделей вводятся одинако для удобства дальнейшего анализа), а коррелятор гауссова случайного шума $\zeta(t,\mathbf{x})$ выбирается в виде:

$$\langle \zeta(t,\mathbf{x})\zeta(t',\mathbf{x}')\rangle = 2\lambda_0\delta(t-t')\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{4}$$

Подобная модель может описывать некоторые универсальные аспекты фазового перехода первого рода в системе жидкость–пар [10], тогда как поведение системы вблизи критической точки описывалось бы уравнением типа (3) с коррелятором (4) и нелинейностью φ^3 [1].

Различие в нормировке корреляторов шума в двух моделях объясняется соображениями удобства. Выбор (4) диктуется флуктуационно-диссипационной теоремой: одновременные корреляционные функции модели (1) описываются “статической” теорией φ^3 без дополнительных нормировочных множителей. Выбор (2) обеспечивает равенство (с точностью до знака) констант связи при двух вершинах взаимодействия в теоретико-полевой формулировке модели (3); см. выражение (10) ниже.

Взаимодействие с полем скорости вводится путем следующей замены:

$$\partial_t \to \nabla_t = \partial_t + v_i\partial_i, \tag{5}$$

где ∇_t – Лагранжева производная. В реальной ситуации поле скорости описывается нелинейным динамическим уравнением, например стохастическим уравнением Навье–Стокса со случайной силой, а анизотропия возникает из начальных и граничных условий. В настоящей работе турбулентный поток мы моделируем случайным полем скорости, имеющим гауссово распределение с исчезающе малым временем корреляции и степенным спектром, а анизотропия вводится следующим образом [11].

Пусть $\mathbf{n}$ – постоянный единичный вектор, задающий выделенное направление ("направление потока"). Тогда любой вектор может быть разложен на две компоненты – перпендикулярную и параллельную потоку, например $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{n}x_\parallel$ и $\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{n} = 0$. Поле скорости при этом выбирается в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}v(t, \mathbf{x}_\perp), \tag{6}$$

где $v(t, \mathbf{x}_\perp)$ – скалярная функция, не зависящая от $x_\parallel$. Легко заметить, что тогда условие поперечности (следствие несжимаемости жидкости) выполняется автоматически:

$$\partial_i v_i = \partial_\parallel v(t, \mathbf{x}_\perp) = 0. \tag{7}$$

Для $v(t, \mathbf{x}_\perp)$ примем гауссово распределение с нулевым средним и парным коррелятором вида:

$$\begin{aligned} \langle v(t, \mathbf{x}_\perp) v(t', \mathbf{x}'_\perp) \rangle = \delta(t-t') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \exp\{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} \, D_v(k) = \\ = \delta(t-t') \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \exp\{\mathrm{i}\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)\} \, \widetilde{D}_v(k_\perp), \quad k_\perp = |\mathbf{k}_\perp| \end{aligned} \tag{8}$$

со скалярной функцией

$$D_v(k) = 2\pi\delta(k_\parallel) \, \widetilde{D}_v(k_\perp), \quad \widetilde{D}_v(k_\perp) = D_0 \, k_\perp^{-d+1-\xi}. \tag{9}$$

Здесь $D_0 > 0$ – постоянная амплитуда, а ξ – произвольный показатель, который вместе ε (отклонением размерности пространства от ее логприфмического значения) будет играть роль формального малого параметра РГ-разложения. Инфракрасная (ИК) регуляризация обеспечивается обрезанием нижней границы интегрирования по $k_\perp$ на $k_\perp = m$ (по размерности $\tau_0 \propto m^2$). Конкретная форма ИК-регуляризации не играет особой роли; обрезание малых импульсов наиболее удобно для практических вычислений.

Естественная область определения для показателя ξ – интервал $0 < \xi < 2$, для которого т.н. "вихревая вязкость"

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}_\perp) = \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \, \{1 - \exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp\right)\} \, \widetilde{D}_v(k_\perp)$$

остается конечной при $m \to 0$. Это включает наиболее реалистическое значение $\xi = 4/3$, отвечающее предположениям теории Колмогорова–Обухова, тогда как $\xi \to 2$ соответствует "бэтчелоровскому" пределу большой вязкости. Добавим, что предложенный в [11] ансамбль [(8), (9)] является анизотропным аналогом известной модели Обухова–Крейчнана; см. например [12]. В последнее время подобные модели с "синтетическими" ансамблями поля скорости приобрели большую популярность, так как с ними был связан значительный прогресс в понимании явления развитой турбулентности, в особенности аномального скейлинга; см. обзоры [12, 13] и цитированную там литературу.

Для обеспечения мультипликативной ренормируемости моделей необходимо "расщепить" лапласиан в (1) на параллельную и перпендикулярную составляющие $\partial^2 \to \partial_\perp^2 + f_0 \partial_\parallel^2$ путем введения нового параметра $f_0 > 0$ (в случае анизотропной среды эти два члена будут ренормироваться по-разному). Такое расщепление нарушает $SO(d)$ симметрию наших уравнений; интерпретация этого факта может быть разной. Флуктуационные модели типа (1)–(4) являются феноменологическими и по построению должны включать все вклады, допустимые по размерности и симметрии, с независимыми коэффициентами. Поскольку исходная $SO(d)$ симметрия уравнений все равно нарушается до $SO(d-1)$ в полных моделях с заменой (5),(6), естественно с самого начала рассматривать $SO(d-1)$-симметричные аналоги наших уравнений, что и сводится к введению произвольного $f_0 \neq 1$. С другой стороны, можно было бы настаивать на изучении именно исходных моделей с $f_0 = 1$ и $SO(d)$-ковариантным (нерасщепленным) Лапласианом. Тогда введение на данном этапе параметра $f_0 \neq 1$ следует рассматривать лишь как технический трюк, гарантирующий мультипликативную ренормируемость модели и позволяющий вывести уравнения РГ. При этом сами эти уравнения должны решаться с физическим начальным условием $f_0 = 1$. Как мы увидим, ИК-устойчивая неподвижная точка уравнений РГ единственна для любого конкретного выбора параметров ε и ξ, поэтому асимптотическое ИК-поведение для $f_0 = 1$ оказывается таким же, как и в общем случае с $f_0 \neq 1$.

Согласно общей теореме (см. например [1]), наши стохастические задачи (1), (2) и (1), (4) после всех подстановок эквивалентны теоретико-полевым моделям с расширенным набором полей $\Phi = \{\varphi', \varphi, v\}$ и функционалами действия вида:

$$S_1(\Phi) = \varphi' \left[-\partial_t - v\partial_\parallel + \lambda_0 \left(\partial_\perp^2 + f_0 \partial_\parallel^2\right) - \lambda_0 \tau_0\right] \varphi + \frac{\lambda_0 g_0 f_0^{1/4}}{2} \left((\varphi')^2 \varphi - \varphi^2 \varphi'\right) + S_0(v) \tag{10}$$

и

$$S_2(\Phi) = \lambda_0 (\varphi')^2 + \varphi' \left[-\partial_t - v\partial_\parallel + \lambda_0 \left(\partial_\perp^2 + f_0 \partial_\parallel^2\right) - \lambda_0 \tau_0\right] \varphi - \frac{\lambda_0 g_0 f_0^{1/4}}{2} \varphi' \varphi^2 + S_0(v) \tag{11}$$

соответственно.

В (10) и (11) мы выделили из зарядов g_0 множители $f_0^{1/4}$. При этом здесь подразумеваются все необходимые интегрирования по $x = \{t, \mathbf{x}\}$ и суммирования по векторным индексам, например:

$$\varphi' \partial_\perp^2 \varphi = \int dt \int d\mathbf{x} \varphi'(x) \partial_\perp^2 \varphi(x).$$

К действиям так же добавлено дополнительное слагаемое $S_0(v)$, описывающее статистику поля скорости:

$$\mathcal{S}_0(v) = -\frac{1}{2} \int dt \int d\mathbf{x}_\perp d\mathbf{x}'_\perp v(t, \mathbf{x}_\perp) \widetilde{D}_v^{-1} \left(|\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp|\right) v(t, \mathbf{x}'_\perp), \tag{12}$$

где

$$\widetilde{D}_v^{-1}(r_\perp) \propto D_0^{-1} r_\perp^{2(1-d)-\xi}. \tag{13}$$

Такая формулировка означает, что корреляционные функции исходных стохастических задач совпадают с функциями Грина теоретико-полевых моделей с функционалами действия (10) и (11), которые, в свою очередь, представляются функциональными средними с весом $\exp \mathcal{S}(\Phi)$. Это и позволяет нам применить к данным задачам теоретико-полевой метод РГ. Функции Грина с участием вспомогательного поля φ' отвечают функциям отклика в исходных стохастических задачах.

Модели (10) соответствует фейнмановская диаграммная техника с двумя типами затравочных пропагаторов (линий в диаграммах): пропагатор поля скорости $\langle vv \rangle_0$ был приведен ранее в (8), а функция отклика скалярного поля в частотно-импульсном представлении имеет вид:

$$\langle \varphi' \varphi \rangle_0 = \langle \varphi \varphi' \rangle_0^* = \frac{1}{-i\omega + \lambda_0 (k_\perp^2 + f_0 k_\parallel^2 + \tau_0)}. \tag{14}$$

В импульсно-временном представлении она принимает вид

$$\langle \varphi'(t') \varphi(t) \rangle_0 = \theta(t - t') \exp \left\{ -\lambda_0 (k_\perp^2 + f_0 k_\parallel^2 + \tau_0)(t - t') \right\},$$

где $\theta(\dots)$ – функция Хэвисайда (в данной форме записи сразу видно, что функция отклика является запаздывающей).

Модель также включает три типа вершин взаимодействия: $-\varphi'\varphi^2$, $(\varphi')^2\varphi$ и $-\varphi'(v\partial_\parallel)\varphi$. Последняя, в силу поперечности поля скорости, равна $\varphi(v\partial_\parallel)\varphi'$ (можно перебросить производную на поле φ' интегрированием по частям).

Второй модели (11) отвечает диаграммная техника с тремя пропагаторами. Первые два совпадают с пропагаторами первой модели, а кроме того появляется дополнительный пропагатор

$$\langle \varphi \varphi \rangle_0 = \frac{2\lambda_0}{\omega^2 + \lambda_0^2 (k_\perp^2 + f_0 k_\parallel^2 + \tau_0)^2}. \tag{15}$$

Вершин же тут только две: $-\varphi'\varphi^2$ и прежняя $-\varphi'(v\partial_\parallel)\varphi$.

3 Канонические размерности

Как известно, анализ ультрафиолетовых (УФ-) расходимостей связан с анализом канонических размерностей, см. например [1]. Обычно в динамических задачах каноническая размерность любой величины полностью описывается двумя независимыми компонентами: частотной d_F^ω и импульсной d_F^k размерностями. Однако, в нашем случае из-за анизотропии необходимо ввести три независимых размерности – $d_{k_\perp}^F, d_{k_\parallel}^F, d_\omega^F$. Таким образом, для любой величины F можно написать:

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega}[L_\perp]^{-d_F^\perp}[L_\parallel]^{-d_F^\parallel},$$

где $L_\perp$ и $L_\parallel$ независимые характерные масштабы в соответствующих подпространствах. Канонические размерности всех полей и констант, входящих в действие, находятся с использованием очевидных нормировочных соотношений $d_{k_\perp}^\perp = -d_{\mathbf{x}_\perp}^\perp = 1$, $d_{k_\perp}^\parallel = -d_{\mathbf{x}_\perp}^\parallel = 0$, $d_{k_\perp}^\omega = d_{k_\parallel}^\omega = 0$, $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$ и т.д., а также из условия безразмерности (в каноническом смысле и для каждой из трех независимых размерностей) всех членов действия. Затем из этих трех независимых компонент можно составить суммарную размерность $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega = d_F^\perp + d_F^\parallel + 2d_F^\omega$ (в свободной теории $\partial_t \propto \partial^2$), которая играет в ренормировке нашей модели ту же роль, что и обычная d_F^k в статике. Полный набор независимых канонических размерностей нужен, в частности, для нахождения полностью безразмерных параметров, от которых будут зависеть константы ренормировки. Канонические размерности (в том числе и для ренормированных параметров) для моделей (10) и (11) приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1: Канонические размерности полей и параметров модели (10).

F	φ, φ'	v	λ, λ_0	f, f_0	τ, τ_0	g_0	D_0	w_0
d_F^ω	0	1	1	0	0	0	1	0
$d_F^\perp$	$(d-1)/2$	0	-2	2	2	$(4-d)/2$	ξ	ξ
$d_F^\parallel$	$1/2$	-1	0	-2	0	0	-2	0
$d_F^k = d_F^\perp + d_F^\parallel$	$d/2$	-1	-2	0	2	$(4-d)/2$	$-2+\xi$	ξ
$d_F = 2d_F^\omega + d_F^k$	$d/2$	1	0	0	2	$(4-d)/2$	ξ	ξ

Таблица 2: Канонические размерности полей и параметров модели (11).

F	φ	φ'	v	λ, λ_0	f, f_0	τ, τ_0	g_0	w_0
d_F^ω	0	0	1	1	0	0	0	0
$d_F^\perp$	$(d-3)/2$	$(d+1)/2$	0	-2	2	2	$(6-d)/2$	ξ
$d_F^\parallel$	$1/2$	$1/2$	-1	0	-2	0	0	0
$d_F^k = d_F^\perp + d_F^\parallel$	$d/2-1$	$d/2+1$	-1	-2	0	2	$(6-d)/2$	ξ
$d_F = 2d_F^\omega + d_F^k$	$d/2-1$	$d/2+1$	1	0	0	2	$(6-d)/2$	ξ

Здесь новая константа связи w_0 введена соотношением $D_0 = w_0\lambda_0 f_0$. Из таблицы 1 видно, что первая модель (10) логарифмична (обе константы взаимодействия безразмерны) при $d = 4, \xi = 0$. Поэтому УФ-расходимости в корреляционных функциях проявляются как сингулярности при $\varepsilon \equiv 4-d \to 0$, $\xi \to 0$, например, как полюса по этим параметрам и их линейным комбинациям. Анализ таблицы 2 показывает, что вторая модель логарифмична при $d=6, \xi=0$. Соответствующий параметр отклонения от логарифмичности мы также будем обозначать $\varepsilon = 6-d$.

Суммарная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина дается соотношением:

$$d_\Gamma = d + 2 - \sum_\Phi N_\Phi d_\Phi, \quad \sum_\Phi N_\Phi d_\Phi = N_{\varphi'} d_{\varphi'} + N_\varphi d_\varphi + N_{\mathbf{v}} d_{\mathbf{v}}. \tag{16}$$

Здесь $N_\Phi = \{N_\varphi,\, N_{\varphi'},\, N_{\mathbf{v}}\}$ – чи́сла соответствующих полей, входящих в функцию Г.

Суммарная размерность d_Γ в логарифмической теории (т.е. при $\varepsilon = \xi = 0$) является формальным индексом УФ-расходимости $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\varepsilon=\xi=0}$. Поверхностные расходимости, для устранения которых требуется введение контрчленов, могут возникать только в тех диаграммах, для которых индекс расходимости – неотрицательное целое число.

Соображения размерности могут быть дополнены некоторыми наблюдениями, позволяющими сократить количество реально необходимых контрчленов. Например, можно заметить, что для модели с взаимодействием Грибова (10) все 1-неприводимые диаграммы отличны от нуля, только если они включают оба поля φ и φ', т.е. одновременно $N_\varphi \geq 1$ и $N_{\varphi'} \geq 1$. В противном случае диаграммы обязательно содержат закороченный цикл запаздывающих пропагаторов $\langle \varphi\varphi' \rangle_0$ и следовательно исчезают, не требуя контрчленов. Подобное замечание можно сделать и для второй модели (11): здесь так же все 1-неприводимые функции без поля φ' исчезают и не требуют контрчленов. В частности, для обеих моделей любые функции, содержащие только поле скорости, подпадают под эти правила, и поэтому оно остается гауссовым. Функцию $\langle \varphi\varphi' vv \rangle$ также можно не рассматривать, т.к. соответствующий контрчлен $\varphi\varphi' v^2$ запрещен галилеевой инвариантностью. Аналогичная ситуация происходит и с функциями $\langle \varphi' v \rangle$ и $\langle \varphi' vv \rangle$ в модели (11). Для первой из них, контрчлен обязательно содержит пространственную производную, сворачивающуюся по индексу с полем скорости; это дает нуль в силу условия поперечности (7). Для второй из этих функций единственный контрчлен, не запрещенный галилеевой инвариантностью и поперечностью, имеет вид $\varphi'(\partial_i v_k)(\partial_k v_i)$. В общем случае он нетривиален, но для нашего поля скорости вида (6) он также обращается в нуль в силу (7): $(\partial_i n_k v)(\partial_k n_i v) = (n_i \partial_i\, v)(n_k \partial_k\, v) = 0$.

Кроме того, контрчлены типа $\varphi \partial_t \varphi'$ и $\varphi(v\partial_\|)\varphi'$ могут появляться в ренормированном действии только в виде галилеево-инвариантной комбинации типа $\varphi \nabla_t \varphi'$.

Выясним, в каких 1-неприводимых функциях могут содержаться УФ-расходимости, начав с модели (10). Формула (16) примет вид:

$$\delta_\Gamma = 6 - 2N_\varphi - 2N_{\varphi'} - N_v.$$

Выпишем все возможные функции (приведены сами функции, индексы расходимости и возможные контрчлены):

$$\begin{array}{lll}
\langle\varphi'\varphi\rangle & (\delta=2) & \varphi'\partial_t\varphi, \varphi'\partial^2\varphi, \varphi'\varphi, \\
\langle\varphi'\varphi\varphi\rangle & (\delta=0) & \varphi'\varphi^2, \\
\langle\varphi'\varphi'\varphi\rangle & (\delta=0) & (\varphi')^2\varphi', \\
\langle\varphi'\varphi v\rangle & (\delta=1), &
\end{array}$$

для которого контрчлен с необходимостью приводится к форме $\varphi'(v_i\partial_i)\varphi = \varphi'(v\partial_\parallel)\varphi$. Все такие члены представлены в действии (10), поэтому оказывается, что наша первая модель является мультипликативно-ренормируемой.

Обратимся ко второй модели. Формула (16) для модели (11) принимает вид:

$$\delta_\Gamma = 8 - 2N_\varphi - 4N_{\varphi'} - N_v.$$

Как уже указывалось выше, некоторые допустимые по формальному индексу расходимости в действительности запрещены галилеевой инвариантностью. В итоге остаются следующие 1-неприводимые функции:

$$\begin{array}{lll}
\langle\varphi'\varphi\rangle & (\delta=2) & \varphi'\varphi, \varphi'\partial_\perp^2\varphi, \varphi'\partial_\parallel^2\varphi, \\
\langle\varphi'\varphi'\rangle & (\delta=0) & (\varphi')^2, \\
\langle\varphi'\varphi\varphi\rangle & (\delta=0) & \varphi(\varphi)^2, \\
\langle\varphi'\varphi v\rangle & (\delta=1) & \varphi'(v\partial_\parallel)\varphi, \\
\langle\varphi'\rangle & (\delta=4) & \varphi'.
\end{array}$$

В действии (11) представлены все такие члены, кроме последнего, поэтому для обеспечения мультипликативности ренормировки к нему следовало бы добавить линейное по полю φ' слагаемое, то есть ввести его взаимодействие с некоторым внешним полем h. (Важно, что введение такого вклада не порождает новых расходимостей, т.е. не отражается на уже вычисленных при $h=0$ контрчленах). Это приведет к некоторым неоднородным вкладам в уравнениях РГ, не влияющим на вид β-функций и, в конечном счете, критических размерностей. Поэтому в дальнейшем мы будем просто игнорировать этот вклад, считая (с такой оговоркой) модель (11) мультипликативно-ренормируемой, как и первую.

В итоге, ренормированные действия наших двух моделей можно записать в виде:

$$\begin{aligned} S_{1R}(\Phi) = \varphi'\left[-Z_1\partial_t - Z_6 v\partial_\parallel + \lambda\left(Z_2\partial_\perp^2 + Z_3 f\partial_\parallel^2 - Z_4\tau\right)\right]\varphi + \\ + Z_5\frac{\lambda g f^{1/4}\mu^{\varepsilon/2}}{2}((\varphi')^2\varphi - \varphi^2\varphi') + S_R(v), \end{aligned} \tag{17}$$

$$S_{2R}(\Phi) = Z_7\lambda(\varphi')^2 + \varphi'\left[-Z_1\partial_t - Z_6 v\partial_\parallel + \lambda\left(Z_2\partial_\perp^2 + Z_3 f\partial_\parallel^2 - Z_4\tau\right)\right]\varphi - \\ -Z_5\frac{\lambda g f^{1/4}\mu^{\varepsilon/2}}{2}\varphi'\varphi^2 + S_R(v). \quad (18)$$

Здесь $S_R(v)$ – действие $S_0(v)$, выраженное в ренормированных переменных; само оно не ренормируется, потому что, как отмечалось выше, в наших моделях нет контрчленов, построенных только из поля скорости. Величины λ, τ, f, w и g – ренормированные аналоги исходных неренормированных параметров (отмеченных значком "0"). Как уже отмечалось выше, галилеева инвариантность требует, чтобы выражение $\partial_t + v\partial_\parallel$ входило в контрчлен как одно целое. Отсюда вытекает тождество $Z_1 = Z_6$, которое будет подтверждено прямым вычислением в однопетлевом приближении; пока же для общности мы мы будем различать эти константы.

Выражения (17) и (18) эквивалентны мультипликативной ренормировке полей $\varphi \to \varphi Z_\varphi$, $\varphi' \to \varphi' Z_{\varphi'}$, $v \to v Z_v$ и параметров:

$$\lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad f_0 = f Z_u, \\ g_0 = g\mu^{\varepsilon/2} Z_g, \quad w_0 = w\mu^\xi Z_w, \quad (19)$$

где μ – добавочный произвольный параметр ренормированной теории (это свободный параметр, размерность его совпадает с размерностью импульса, будем считать, то $d_\mu^\perp = 1, d_\mu^\parallel = 0$). Константы Z из первой модели (17) и в формулах (19) соотносятся следующим образом:

$$Z_1 = Z_{\varphi'}Z_\varphi, \quad Z_2 = Z_{\varphi'}Z_\lambda Z_\varphi, \quad Z_3 = Z_{\varphi'}Z_\lambda Z_f Z_\varphi, \\ Z_4 = Z_{\varphi'}Z_\lambda Z_\tau Z_\varphi, \quad Z_5 = Z_\lambda Z_g Z_f^{1/4} Z_{\varphi'} Z_\varphi^2, \\ Z_6 = Z_{\varphi'}Z_v Z_\varphi, \quad 1 = Z_v^2 Z_w^{-1} Z_f^{-1} Z_\lambda^{-1}. \quad (20)$$

Последнее соотношение – следствие отсутствия ренормировки вклада $S_0(v) = S_R(v)$.

Для второй модели (18) соотношения (20) остаются верными, но к ним добавляется выражение для константы ренормировки Z_7:

$$Z_7 = Z_\lambda\left(Z_{\varphi'}\right)^2. \quad (21)$$

Кроме того для первой модели в виду симметрии потенциала есть связь на константы ренормировки полей φ' и φ:

$$Z_{\varphi'} = Z_\varphi. \quad (22)$$

Наконец, из галилеевой инвариантности вытекает равенство $Z_1 = Z_6$ (оно будет проверено прямым вычислением в первом порядке), из которого, в свою очередь, следует отсутствие ренормировки поля скорости: $Z_v = 1$.

Константы ренормировки сокращают все сингулярности по ε, ξ так, что сами корреляционные функции ренормированной модели имеют конечный предел при

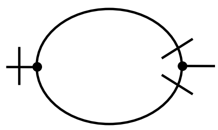
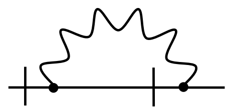
$\varepsilon, \xi = 0$. Для доопределения конечной части при вычислении констант ренормировки мы будем пользоваться схемой минимальных вычитаний (МВ), в которой константы имеют форму $Z_i = 1+$ только полюсные по ε, ξ части. Коэффициенты при этих полюсах будут зависеть только от безразмерных ренормированных констант взаимодействия g и w.

4 Вычисление констант ренормировки

Обратимся к вычислению констант ренормировки Z в однопетлевом приближении. Поясним сперва используемые ниже диаграммные обозначения. Волнистой линией будем обозначать пропагатор $\langle vv \rangle_0$; прямой линией со штрихом – пропагатор $\langle \varphi' \varphi \rangle_0$ (при чем штрих относится к полю φ'), а прямой линии без штрихов будет отвечать пропагатор $\langle \varphi\varphi \rangle_0$, имеющийся лишь во второй модели. Все диаграммные элементы должны быть выражены через ренормированные переменные (17)–(21). Однако, в однопетлевом приближении константы Z во всех затравочных слагаемых нужно брать в первом порядке по g^2 и w (реально разложение идет не по g, а по g^2), а в диаграммах их просто нужно заменить на единицы. Таким образом, переход к ренормированным переменным в диаграммах сводится к замене $\lambda_0 \to \lambda$, $f_0 \to f$, $\tau_0 \to \tau$, $g_0 \to g\mu^{\varepsilon/2}$ и $w_0 \to w\mu^{\xi}$.

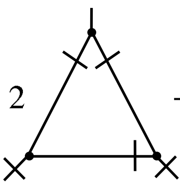
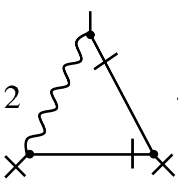
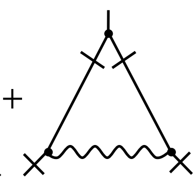
Обратимся к первой модели (17). Приведем все 1-неприводимые функции, необходимые для расчета полного набора констант ренормировки, с однопетлевой точностью. Уравнение Дайсона для 1-неприводимой функции Грина $\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir}$ в таком приближении примет вид:

$$\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir} = -\{-i\omega Z_1 + \lambda p_\perp^2 Z_2 + \lambda f p_\parallel^2 Z_3 + \lambda \tau Z_4\} +$$

$\frac{1}{2}$  $+$  . (23)

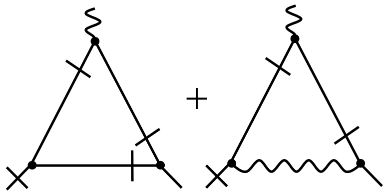
Для 1-неприводимой корреляционной функции $\langle \varphi' \varphi' \varphi \rangle_{1-ir}$ имеем:

$$\langle \varphi' \varphi' \varphi \rangle_{1-ir} = g\lambda f^{1/4} Z_5 +$$

2  $+ 2$  $+$  . (24)

Наконец, 1-неприводимая функция $\langle \varphi' v \varphi \rangle_{1-ir}$, нужная лишь для объявленной проверки следствий галилеевой инвариантности, такова:

$$\langle \varphi' v \varphi \rangle_{1-ir} = -ip_{\|} Z_6 +$$



$$. \tag{25}$$

Мы не будем подробно описывать процесс вычисления этих диаграмм, лишь прокомментируем основные моменты. Сразу можно заметить, что вторая и третья диаграммы в (24) и вторая диаграмма в (25) оказываются УФ конечными, а, следовательно, не дают вклад в константы ренормировки Z. Действительно, благодаря свойству поперечности поля скорости (7), производная $\partial_{\|}$ в тройной вершине $-\varphi' \left(v \partial_{\|} \right) \varphi$ может быть переброшена на внешнюю линию за счет интегрирования по частям. Таким образом, любая диаграмма, содержащая n внешних тройных вершин $-\varphi' \left(v \partial_{\|} \right) \varphi$, будет содержать множитель $p_{\|}^n$ с внешним импульсом $p_{\|}$. Это понижает размерность интеграла, и он может стать УФ конечным, что и происходит с указанными диаграммами (для них $n = 2$).

Более того, так как пропагатор (14) запаздывающий, а (8) содержит δ-функцию по времени, то вторые диаграммы в (24) и (25) содержат замкнутые циклы функций Хэвисайда по времени, а значит, исчезают тождественно. Такой аргумент, однако, неприменим ко второй диаграмме в (23), которая требует более тщательного рассмотрения. Аналитическое выражение для этой диаграммы имеет вид:

$$I_1 = -\lambda f w \mu^{\xi} \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp} dk_{\|} d\eta}{(2\pi)^d} \frac{\delta(k_{\|}) p_{\|} (p_{\|} - k_{\|})}{-i\eta + \lambda \left((p_{\perp} - k_{\perp})^2 + f(p_{\|} - k_{\|})^2 + \tau \right)} \cdot \frac{1}{k_{\perp}^{d-1+\xi}}$$

Заметим что вклад этой диаграммы в Z_1, Z_2 и Z_4 равен нулю. От внешней частоты она явно не зависит (внешнюю частоту можно “пропустить” по пропагатору скорости, а там нет зависимости от частоты), а независимость от τ и $p_{\perp}^2$ станет очевидной после интегрирования по внутренней частоте η. Покажем это, воспользовавшись равенством

$$\int \frac{d\eta}{2\pi} \frac{1}{(-i\eta + A)} = \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Фактически это доопределение $\theta(0) = 1/2$, которое можно оправдать симметричностью коррелятора $\langle vv \rangle_0$. После его применения приходим к выражению

$$I_1 = -\frac{\lambda f w \mu^{\xi} p_{\|}^2}{2(2\pi)^{d-1}} \int\limits_{k_{\perp} \geq m} d\mathbf{k}_{\perp} \frac{1}{k_{\perp}^{d-1+\xi}},$$

которое легко интегрируется в сферических координатах:

$$I_1 = -\frac{p_\parallel^2}{2\xi}\frac{f\lambda w}{(2\pi)^{d-1}} S_{d-1}\left(\frac{\mu}{m}\right)^{\xi} \simeq -p_\parallel^2 \frac{\lambda f w}{\xi},$$

где $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь единичной сферы в d-мерном пространстве. В последнем равенстве мы перешли к более удобной константе связи

$$w \to wS_{d-1}/2(2\pi)^{d-1} \to w/4\pi^2.$$

При этом, в соответствии с правилами схемы MB, мы заменили d его логарифмическим значением $d = 4$, отбросив тем самым множитель порядка $1 + O(\varepsilon)$, который не содержит полюса по ε и не отражается в нашем приближении на виде констант ренормировки. Теперь нетрудно найти, что вклад от этой диаграммы в Z_3 равен $-w/\xi$.

Рассмотрим теперь первую диаграмму в (23). Аналитическое выражение для нее имеет вид

$$I_2 = -\left(\lambda g f^{1/4}\mu^{\varepsilon/2}\right)^2 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{-i(\omega+\eta) + \lambda\left((\frac{p_\perp}{2}+k_\perp)^2 + f(\frac{p_\parallel}{2}+k_\parallel)^2 + \tau\right)} \times$$
$$\times \frac{1}{i\eta + \lambda\left((\frac{p_\perp}{2}-k_\perp)^2 + f(\frac{p_\parallel}{2}-k_\parallel)^2 + \tau\right)}.$$

Проинтегрировав по внутренней частоте η по вычетам и сделав стандартную для этих моделей замену $q_\perp = k_\perp, q_\parallel = f^{1/2}k_\parallel$, после интегрирования по q, получаем ($d = 4 - \varepsilon$):

$$I_2 = -\left(\lambda g f^{1/4}\mu^{\varepsilon/2}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{1}{2\lambda f^{1/2}}\left(-\frac{i\omega}{2\lambda} + \tau + \frac{p_\perp^2}{4} + \frac{f p_\parallel^2}{4}\right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} (\pi)^{d/2}\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right) =$$
$$= -\frac{u\lambda}{2}\left(-\frac{i\omega}{2\lambda} + \tau + \frac{p_\perp^2}{4} + \frac{f p_\parallel^2}{4}\right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} (2\mu)^{\varepsilon}\pi^{+\varepsilon/2}\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где также введен более удобный заряд

$$u = g^2\, S_d/2(2\pi)^d \to g^2/16\pi^2$$

(как и в случае с w, значение d заменено его логарифмическим значением в согласии со схемой MB). Отсюда находим вклады этой диаграммы в Z_1–Z_4, равные $u/4\varepsilon$, $u/8\varepsilon$, $u/8\varepsilon$ и $u/2\varepsilon$, соответственно.

Рассмотрим единственную оставшуюся диаграмму в (25). Ее индекс расходимости равен нулю, поэтому можно занулить все внешние импульсы и частоты, придя к аналитическому выражению вида

$$I_3 = -\left(\lambda g f^{1/4}\mu^{\varepsilon/2}\right)^3 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{\left(-i\eta + \lambda\left(k_\perp^2 + f k_\parallel^2 + \tau\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{i\eta + \lambda\left(k_\perp^2 + f k_\parallel^2 + \tau\right)}.$$

После интегрирования по η оно принимает вид:

$$I_3 = -\frac{\lambda g^3 f^{1/4} \mu^{3\varepsilon/2}}{4(2\pi)^d} \int d\mathbf{q} \frac{1}{(q^2+\tau)}.$$

Окончательно, выполнив интегрирование по q, приходим к

$$I_3 \simeq -\frac{\lambda u f^{1/4}}{2\varepsilon},$$

то есть вклад этой диаграммы в Z_5 составляет u/ε с учетом коэффициента 2 в (24).

Обратимся теперь к диаграмме (25). Так как нас интересует только зависимость ее от продольных импульсов, все прочие внешние параметры можно положить равными нулю. У этой диаграммы три внешних "хвоста", то есть число независимых внешних импульсов в общем случае равно двум. Однако, чтобы найти константу ренормировки, достаточно рассматривать только один импульс, текущий между хвостами φ и φ'. Действительно, пусть $p_\parallel$ течет от φ' к φ, а импульс $q_\parallel$ – от φ' к v. Тогда выражение для расходящейся части диаграммы будет иметь вид $\alpha p_\parallel + \beta q_\parallel$, где α и β – искомые величины. Однако контрчлен при β оказывается тождественно равным нулю: $\alpha\varphi'(v\partial_\parallel)\varphi + \beta\varphi'(\partial_\parallel v)\varphi$, а $\partial_\parallel v = 0$ согласно (7). Выпишем аналитическое выражение для этой диаграммы:

$$I_4 = \left(\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2}\right)^2 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{-ik_\parallel}{\left(-i\eta + \lambda\left(k_\perp^2 + f k_\parallel^2\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{i\eta + \lambda\left(k_\perp^2 + f k_\parallel^2\right)}.$$

После интегрирования по η и $\mathbf{k}_\perp$ и упоминавшейся выше замены приходим к выражению:

$$I_4 = -\frac{i}{(2\pi)^d} \frac{f^{-1/2} g^2 \mu^\varepsilon}{4} \int dq_\parallel q_\parallel \left(\left(q_\parallel - \frac{f^{1/2} p_\parallel}{2}\right)^2 + \frac{f p_\parallel}{2}\right)^{\frac{d-5}{2}} \pi^{(d-1)/2} \Gamma\left(\frac{5-d}{2}\right).$$

Вычитая и добавляя к $q_\parallel$ в подынтегральном выражении $f^{1/2} p_\parallel/2$, разбиваем интеграл на два. Первый исчезает по соображениям четности, а второй легко вычислить:

$$I_4 = \frac{-ip_\parallel}{(2\pi)^d} \frac{g^2\mu^\varepsilon}{8} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d-4}{2}\right) = \frac{-ip_\parallel}{8} u \pi^{\varepsilon/2} (2\mu)^\varepsilon \Gamma\left(\frac{d-4}{2}\right),$$

где мы также перешли к введенной ранее константе связи $u = (g/4\pi)^2$. Отсюда получаем $Z_6 = 1 + u/4\varepsilon$.

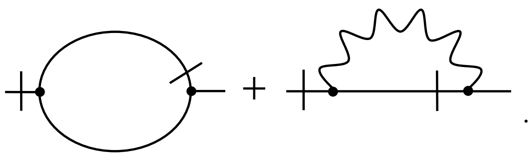
Приведем однопетлевые результаты для всех Z:

$$Z_1 = Z_6 = 1 + \frac{u}{4\varepsilon}, \quad Z_2 = 1 + \frac{u}{8\varepsilon}, \quad Z_3 = 1 + \frac{u}{8\varepsilon} - \frac{w}{\xi},$$
$$Z_4 = 1 + \frac{u}{2\varepsilon}, \quad Z_5 = 1 + \frac{u}{\varepsilon}, \tag{27}$$

Таким образом, для первой модели в однопетлевом приближении мы прямым расчетом подтвердили точное равенство $Z_1 = Z_6$, то есть $Z_v = 1$; см. (20).

Обратимся теперь к модели (18) и приведем все необходимые для расчета ее констант ренормировки 1-неприводимые функции в однопетлевом приближении. Уравнение Дайсона для $\langle\varphi'\varphi\rangle_{1-ir}$ здесь имеет вид:

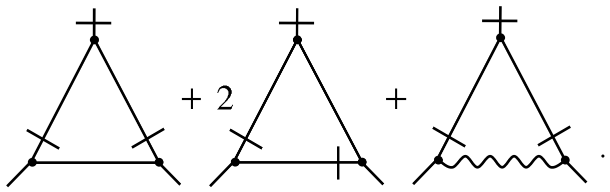
$$\langle\varphi'\varphi\rangle_{1-ir} = -\{-i\omega Z_1 + \lambda p_\perp^2 Z_2 + \lambda f p_\parallel^2 Z_3 + \lambda\tau Z_4\} +$$



(28)

Для 1-неприводимой корреляционной функции $\langle\varphi'\varphi\varphi\rangle_{1-ir}$ имеем:

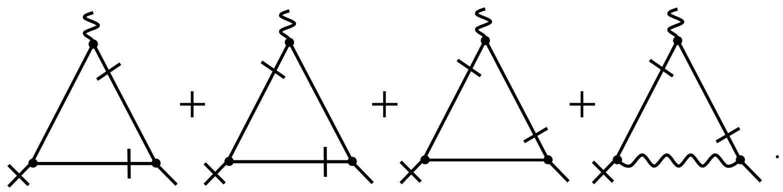
$$\langle\varphi'\varphi\varphi\rangle_{1-ir} = -g\lambda f^{1/4} Z_5 +$$



(29)

Функция, необходимая для проверки следствий галилеевой инвариантности такова:

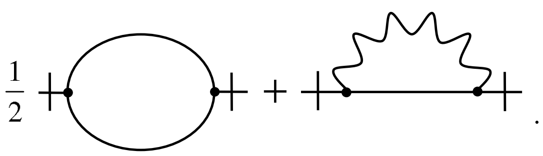
$$\langle\varphi' v\varphi\rangle_{1-ir} = -ip_\parallel Z_6 +$$



(30)

Наконец, для 1-неприводимой функции Грина $\langle\varphi\varphi\rangle_{1-ir}$ имеем:

$$\langle\varphi'\varphi'\rangle_{1-ir} = 2\lambda Z_7 +$$



(31)

Здесь также, благодаря специфическим особенностям нашей системы, некоторые диаграммы исчезают или оказываются УФ конечными и, следовательно, не дают вклада в ренормировочные константы. Например, за счет наличия двух внешних, тройных вершин $-\varphi' \left(v\partial_{\|} \right) \varphi$ последние диаграммы в (29), (30) и (31) – УФ конечны. Сделаем некоторые замечания по поводу вычисления оставшихся диаграмм.

Рассмотрим ренормировку 1-неприводимой функции $\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir}$. Вторые диаграммы в (23) и (28) совпадают, так что мы просто используем уже полученный ранее результат. Новые заряды введем следующим образом:

$$u = g^2 \, S_d / 2(2\pi)^d \to g^2 / 128\pi^3, \quad w \to w S_{d-1} / 2(2\pi)^{d-1} \to w / 24\pi^3,$$

поскольку теперь d нужно заменить логарифмическим значением $d = 6$. Аналитическое выражение для первой диаграммы таково:

$$I_5 = \left(-\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2} \right)^2 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\| d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{-i(\omega+\eta) + \lambda \left((\frac{p_\perp}{2} + k_\perp)^2 + f(\frac{p_\|}{2} + k_\|)^2 + \tau \right)} \times$$
$$\times \frac{2\lambda}{\eta^2 + \lambda^2 \left((\frac{p_\perp}{2} - k_\perp)^2 + f(\frac{p_\|}{2} - k_\|)^2 + \tau \right)^2}.$$

После интегрирования по внутренней частоте η и перехода к переменной q получаем:

$$I_5 = \frac{\lambda g^2 \mu^\varepsilon}{2(2\pi)^d} \int d\mathbf{q}_\perp dq_\| \frac{1}{\left((\frac{p_\perp}{2} - q_\perp)^2 + (\frac{f^{1/2} p_\|}{2} - q_\|)^2 + \tau \right)} \cdot \frac{1}{\frac{\omega}{2i\lambda} + \left(q_\perp^2 + q_\|^2 + \tau + \frac{p_\perp^2 + f p_\|^2}{4} \right)}.$$

Вводя обозначение $\widetilde{p}_\perp = p_\perp, \widetilde{p}_\| = f^{1/2} p_\|$ и применив формулу Фейнмана

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dt \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{[tA + (1-t)B]^{\alpha+\beta}}$$

получаем:

$$I_5 = \frac{\lambda g^2 \mu^\varepsilon}{2(2\pi)^d} \int d\mathbf{q} \int_0^1 dt \frac{1}{\left(k^2 - t(\widetilde{p} q) + \left(\tau + \frac{\widetilde{p}^2}{4} + \frac{\omega}{2i\lambda}(1-t) \right) \right)^2}.$$

Интеграл с квадратичной формой по импульсу в знаменателе вычисляется стандартным образом, а после выделения полюсной части легко выполняется и оставшееся интегрирование по t. Окончательно получаем:

$$I_5 \simeq -\frac{\lambda g^2}{(2\pi)^6} \frac{\pi^3}{\varepsilon} \left(\tau + \frac{\omega}{4i\lambda} + \frac{p_\perp^2 + f p_\|^2}{6} \right) \simeq -\frac{\lambda u}{\varepsilon} \left(2\tau - \frac{i\omega}{2\lambda} + \frac{p_\perp^2 + f p_\|^2}{3} \right).$$

Теперь нетрудно найти вклады этой диаграммы в Z_1–Z_4: они равны $-u/2\varepsilon$, $-u/3\varepsilon$, $-u/3\varepsilon$ и $-2u/\varepsilon$ соответственно.

Первая и вторая диаграммы в (29) вычисляются практически одинаково, так что остановимся только на первой из них. Индекс расходимости для этих диаграмм равен нулю, поэтому можем положить равными нулю внешние частоту и импульс (τ оставляем для ИК-регуляризации). Тогда получаем следующее аналитическое выражение для первой диаграммы:

$$I_6 = \left(-\lambda g f^{1/4}\mu^{\varepsilon/2}\right)^3 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2\lambda}{\eta^2+\lambda^2\left((\frac{p_\perp}{2}-k_\perp)^2+fk_\parallel^2+\tau\right)^2} \times$$
$$\times \frac{1}{-i\eta+\lambda\left(k_\perp^2+fk_\parallel^2+\tau\right)} \cdot \frac{1}{i\eta+\lambda\left(k_\perp^2+fk_\parallel^2+\tau\right)} =$$
$$= -\frac{2\lambda^4 g^3 f^{1/4}\mu^{3\varepsilon/2}}{(2\pi)^{d+1}} \int d\mathbf{q} d\eta \frac{1}{\left(\eta^2+\lambda^2\left(q^2+\tau\right)\right)^2}.$$

Проинтегрировав по η, получаем выражение, которое нетрудно проинтегрировать и по импульсу:

$$I_6 = -\frac{g^3 f^{1/4}\lambda\mu^{3\varepsilon/2}\pi}{(2\pi)^{d+1}} \int d\mathbf{q} \frac{1}{\left(q^2+\tau\right)^3} = -\frac{g^3 f^{1/4}\lambda\mu^{3\varepsilon/2}\pi}{2(2\pi)^{d+1}} \tau^{-\varepsilon/2}\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\pi^{d/2} \simeq -\frac{gf^{1/4}\lambda u}{\varepsilon}.$$

Таким образом, ее вклад в Z_5 составляет $-u/\varepsilon$.

Рассмотрим теперь диаграммы (30), чтобы проверить выполнение условия галилеевой инвариантности и для второй модели. Вычисление первой и третьей диаграмм не заключает в себе никаких трудностей, поэтому обратимся сразу ко второй диаграмме. Как и в первом случае, достаточно пропустить внешний импульс $p_\parallel$ от хвоста φ' к хвосту φ. Тогда аналитическое выражение для диаграммы принимает вид:

$$I_7 = \left(-\lambda g f^{1/4}\mu^{\varepsilon/2}\right)^2 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{-2i\lambda k_\parallel}{\eta^2+\lambda^2\left(k_\perp^2+fk_\parallel^2+\tau\right)} \times$$
$$\times \frac{1}{-i\eta+\lambda\left(k_\perp^2+fk_\parallel^2+\tau\right)} \cdot \frac{1}{i\eta+\lambda\left(k_\perp^2+f\left(k_\parallel-p_\parallel\right)^2+\tau\right)}.$$

Проинтегрировав по η по вычетам и сложив возникающие от двух полюсов вклады, после некоторых преобразований получаем:

$$I_7 = \frac{-ig^2\mu^\varepsilon}{4(2\pi)^d f^{1/2}} \int d\mathbf{q} q_\parallel \cdot \frac{2\left(q^2+\tau\right)+\widetilde{p}_\parallel\left(\frac{\widetilde{p}_\parallel}{2}-q_\parallel\right)}{\left(q^2+\tau\right)^2\left(q^2-q_\parallel\widetilde{p}_\parallel+\frac{\widetilde{p}_\parallel^2}{2}+\tau\right)^2}.$$

Все обозначения уже пояснялись выше. Нас интересует линейный по $\widetilde{p}_\parallel$ член. При $\widetilde{p}_\parallel = 0$ подынтегральное выражение конечно, поэтому разложим его в ряд по этому импульсу. В итоге остается вычислить следующий интеграл:

$$I_7 = \frac{-ig^2\mu^\varepsilon \widetilde{p}_\parallel}{4(2\pi)^d f^{1/2}} \int d\mathbf{q} \frac{3q_\parallel^2}{(q^2+\tau)^4}.$$

Заметим, что в оставшемся интеграле единственный источник анизотропии – множитель $q_\parallel^2$, поэтому можно заменить его на q^2/d, сведя подинтегральное выражение к изотропному. Вычисляя полученный интеграл, находим:

$$\int d\mathbf{q} \frac{q^2}{(q^2+\tau)^4} = \int d\mathbf{q} \frac{1}{(q^2+\tau)^3} - \tau \int d\mathbf{q} \frac{1}{(q^2+\tau)^4} =$$
$$= \pi^{d/2}\tau^{d/2-3}\left[\frac{\Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right)}{2} - \frac{\Gamma\left(4-\frac{d}{2}\right)}{6}\right].$$

Второе слагаемое конечно, так что его можно отбросить. Окончательно получаем:

$$I_7 = \frac{-3ip_\parallel g^2\mu^\varepsilon}{4d(2\pi)^d} \int d\mathbf{q} q^2 \left(q^2+\tau\right)^{-4} = \frac{-3ip_\parallel g^2\mu^\varepsilon}{8d(2\pi)^d} \tau^{-\varepsilon/2}\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\pi^{d/2} \simeq \frac{-ip_\parallel u}{4\varepsilon}.$$

Вычисление единственной оставшейся диаграммы в (31) не включает в себя никаких принципиально новых моментов.

Итак, суммируем окончательные результаты для констант ренормировки Z для второй модели:

$$Z_1 = Z_6 = Z_7 = 1 - \frac{u}{2\varepsilon}, \quad Z_2 = 1 - \frac{u}{3\varepsilon}, \quad Z_3 = 1 - \frac{u}{3\varepsilon} - \frac{w}{\xi}, \quad Z_4 = Z_5 = 1 - \frac{2u}{\varepsilon}. \tag{32}$$

Видно, что вытекающее из галилеевой инвариантности равество $Z_1 = Z_6$ для второй модели также выполняется.

5 Уравнение ренормгруппы

Уравнение ренормгруппы записывается для ренормированной корреляционной функции $G_R = \langle\Phi\cdots\Phi\rangle_R$, которая отличается от первоначальной (неренормированной) $G = \langle\Phi\cdots\Phi\rangle$ только нормировкой и выбором параметров и, следовательно, с равным правом может быть использована для анализа критического поведения. Соотношение $\mathcal{S}_{(1,2)R}(\Phi, e, \mu) = \mathcal{S}_{(1,2)}(\Phi, e_0)$ между функционалами действия (10), (11) и (17), (18) приводит к соотношению между корреляционными функциями:

$$G(e_0, \dots) = Z_\varphi^{N_\varphi} Z_{\varphi'}^{N_{\varphi'}} G_R(e, \mu, \dots). \tag{33}$$

Здесь, как обычно, N_{φ} и $N_{\varphi'}$ – степени входящих в G полей (напомним, что в силу галилеевой инвариантности поле скорости не ренормируется: $Z_v = 1$); $e_0 = \{\lambda_0, \tau_0, f_0, w_0, u_0\}$ – набор первоначальных параметров и $e = \{\lambda, \tau, f, w, u\}$ – их ренормированные аналоги; точки обозначают остальные переменные (время, координата, импульс и т.д.).

Применим оператор $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu} \equiv \mu\partial_{\mu}$ при фиксированных переменных набора e_0. Это дает основное дифференциальное уравнение ренормгруппы на функцию $G_R(e, \mu, \dots)$

$$\{\mathcal{D}_{RG} + N_{\varphi}\gamma_{\varphi} + N_{\varphi'}\gamma_{\varphi'}\}\ G_R(e, \mu, \dots) = 0, \tag{34}$$

где $\mathcal{D}_{RG}$ – оператор $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}$, выраженный в ренормированных переменных:

$$\mathcal{D}_{RG} \equiv \mathcal{D}_{\mu} + \beta_u\partial_u + \beta_w\partial_w - \gamma_f\mathcal{D}_f - \gamma_{\lambda}\mathcal{D}_{\lambda} - \gamma_{\tau}\mathcal{D}_{\tau}. \tag{35}$$

Здесь и далее $\mathcal{D}_x \equiv x\partial_x$ для любой переменной x и

$$\gamma_F \equiv \mathcal{D}_{\mu} \ln Z_F \tag{36}$$

– аномальная размерность для любой величины F. В свою очередь β функции для двух безразмерных констант u и w имеют вид:

$$\beta_u \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}u = u\,[-\varepsilon - \gamma_u], \quad \beta_w \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}w = w\,[-\xi - \gamma_w], \tag{37}$$

где вторые равенства следуют из определений и соотношений (19). Уравнения (20) приводят к следующим соотношениям между аномальными размерностями для первой модели (17):

$$\begin{gathered}\gamma_1 = \gamma_6 = \gamma_{\varphi'} + \gamma_{\varphi}, \quad \gamma_2 = \gamma_{\lambda} + \gamma_1, \quad \gamma_3 = \gamma_f + \gamma_2, \\ \gamma_4 = \gamma_{\tau} + \gamma_2, \quad \gamma_5 = \gamma_{\lambda} + \gamma_g + \frac{1}{4}\gamma_f + \gamma_{\varphi'} + 2\gamma_{\varphi}.\end{gathered} \tag{38}$$

В силу (22) получаем

$$\gamma_{\varphi'} = \gamma_{\varphi}.$$

Кроме того, так как $u \propto g^2$, то $Z_u = Z_g^2$, а значит $\gamma_u = 2\gamma_g$.

Для второй модели (18) появляется дополнительная аномальная размерность:

$$\gamma_7 = \gamma_{\lambda} + 2\gamma_{\varphi'} \tag{39}$$

Теперь можно разрешить соотношения (38) и (39) относительно РГ-функций, входящих в уравнение РГ. Для модели (17) с взаимодействием Грибова получаем:

$$\begin{gathered}\gamma_{\varphi'} = \gamma_{\varphi} = \frac{1}{2}\gamma_1, \quad \gamma_{\lambda} = \gamma_2 - \gamma_1, \\ \gamma_f = \gamma_3 - \gamma_2, \quad \gamma_{\tau} = \gamma_4 - \gamma_2, \\ \gamma_g = \gamma_5 - \frac{3}{4}\gamma_2 - \frac{1}{4}\gamma_3 - \frac{1}{2}\gamma_1, \quad \gamma_w = \gamma_1 - \gamma_3\end{gathered} \tag{40}$$

Выпишем сразу явные однопетлевые выражения для указанных величин, используя (27) и приближенное равенство, верное в первом порядке по ε и ξ:

$$\gamma_F = (\beta_u \partial_u + \beta_w \partial_w) \ln Z_F \simeq -(\varepsilon \mathcal{D}_u + \xi \mathcal{D}_w) \ln Z_F. \tag{41}$$

(При выводе этого выражения учтено, что величины Z зависят только от констант связи u и w.)

$$\gamma_1 = -\frac{u}{4} + O(u^2), \quad \gamma_2 = -\frac{u}{8} + O(u^2), \quad \gamma_3 = -\frac{u}{8} + w + O(u^2),$$
$$\gamma_4 = -\frac{u}{2} + O(u^2), \quad \gamma_5 = -u + O(u^2). \tag{42}$$

Из (40) тогда находим:

$$\gamma_{\varphi'} = \gamma_\varphi = -\frac{u}{8} + O(u^2), \quad \gamma_\lambda = \frac{u}{8} + O(u^2), \quad \gamma_f = w + O(u^2),$$
$$\gamma_\tau = -\frac{3u}{8} + O(u^2), \quad \gamma_g = -\frac{3u}{4} - \frac{w}{4} + O(u^2), \quad \gamma_w = -\frac{u}{8} - w + O(u^2). \tag{43}$$

Символ $O(u^2)$ здесь обозначает все старшие вклады типа u^2, w^2, uw и т.д. Аналогичные выражения для второй модели (18):

$$\gamma_{\varphi'} = \frac{1}{2}\left(\gamma_7 + \gamma_1 - \gamma_2\right), \quad \gamma_\varphi = \frac{1}{2}\left(-\gamma_7 + \gamma_1 + \gamma_2\right),$$
$$\gamma_\lambda = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \gamma_f = \gamma_3 - \gamma_2, \quad \gamma_\tau = \gamma_4 - \gamma_2,$$
$$\gamma_g = \frac{1}{2}\left(\gamma_7 - \gamma_1 - \frac{5}{2}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_3 + 2\gamma_5\right), \quad \gamma_w = \gamma_1 - \gamma_3. \tag{44}$$

В однопетлевом приближении, используя (32), получаем:

$$\gamma_1 = \gamma_7 = \frac{u}{2} + O(u^2), \quad \gamma_2 = \frac{u}{3} + O(u^2),$$
$$\gamma_3 = \frac{u}{3} + w + O(u^2), \quad \gamma_4 = \gamma_5 = 2u + O(u^2). \tag{45}$$

Используя (44), находим:

$$\gamma_{\varphi'} = \frac{u}{3} + O(u^2), \quad \gamma_\varphi = \frac{u}{6} + O(u^2), \quad \gamma_\lambda = -\frac{u}{6} + O(u^2),$$
$$\gamma_f = w + O(u^2), \quad \gamma_\tau = \frac{5u}{3} + O(u^2),$$
$$\gamma_g = \frac{3u}{2} - \frac{w}{4} + O(u^2), \quad \gamma_w = \frac{u}{6} - w + O(u^2). \tag{46}$$

6 Неподвижные точки

Как известно, возможные скейлинговые режимы (типы асимптотического поведения корреляционных функций в ИК-области) ренормируемой модели связаны с ИК-устойчивыми неподвижными точками уравнений ренормгруппы.

В общем случае неподвижные точки определяются условием обращения в нуль всех β-функций. В наших моделях координаты u_*, w_* неподвижных точек находятся из уравнений:

$$\beta_u(u_*, w_*) = 0, \quad \beta_w(u_*, w_*) = 0, \tag{47}$$

где β-функции определены в (37). Тип неподвижной точки определяется матрицей:

$$\Omega = \{\Omega_{ij} = \partial\beta_i/\partial g_j\}, \tag{48}$$

где β_i обозначает полный набор β-функций и $g_j = \{u, \omega\}$ – полный набор констант связи. Для ИК-устойчивой неподвижной точки матрица Ω положительно определена, т.е. вещественные части всех собственных чисел больше нуля.

Рассмотрим сперва модель (17). Из определения (37) и явных выражений (43) для аномальных размерностей, мы получаем следующие явные выражения (в главном порядке) для β-функций:

$$\beta_u = u\left[-\varepsilon + \frac{3u}{2} + \frac{w}{2}\right], \quad \beta_w = w\left[-\xi + \frac{u}{8} + w\right]. \tag{49}$$

Из (47) и (49) мы можем найти четыре различные неподвижные точки:

1. Гауссова (свободная) неподвижная точка: $u_* = w_* = 0$;

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}. \tag{50}$$

2. $u_* = 0;\ w_* = \xi$;

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} -\varepsilon + \frac{\xi}{2} & 0 \\ \frac{\xi}{8} & \xi \end{pmatrix}. \tag{51}$$

3. $w_* = 0;\ u_* = \frac{2\varepsilon}{3}$;

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{3} \\ 0 & -\xi + \frac{\varepsilon}{12} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

4. $u_* = \frac{8}{23}\,(2\varepsilon - \xi)\,;\ w_* = \frac{2}{23}\,(12\xi - \varepsilon)$;

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{12}{23}\,(2\varepsilon - \xi) & \frac{4}{23}\,(-\xi + 2\varepsilon) \\ \\ \frac{1}{23}\,(3\xi - 4\varepsilon) & \frac{2}{23}\,(12\xi - \varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Для трех первых точек собственные числа матриц Ω совпадают, очевидно, с их диагональными элементами, а для последнего случая они равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{11\varepsilon}{23} + \frac{6\xi}{23} \pm \frac{\sqrt{167\varepsilon^2 - 443\varepsilon\xi + 312\xi^2}}{23}. \tag{54}$$

Выражение под корнем положительно для любых ε, ξ, так что эти собственные числа вещественны.

Обратимся к модели (18). Для β-функций имеем:

$$\beta_u = u\left[-\varepsilon - 3u + \frac{w}{2}\right], \quad \beta_w = w\left[-\xi - \frac{u}{6} + w\right]. \tag{55}$$

Из (47) и (49) вновь можно найти четыре неподвижные точки;

1'. Гауссова (свободная) неподвижная точка: $u_* = w_* = 0$;

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}. \tag{56}$$

2'. $u_* = 0;\ w_* = \xi;$

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} -\varepsilon + \frac{\xi}{2} & 0 \\ -\frac{\xi}{6} & \xi \end{pmatrix}. \tag{57}$$

3'. $w_* = 0;\ u_* = -\frac{\varepsilon}{3};$

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\frac{\varepsilon}{6} \\ 0 & -\xi + \frac{\varepsilon}{18} \end{pmatrix}. \tag{58}$$

4'. $u_* = \frac{6}{35}\left(-2\varepsilon + \xi\right);\ w_* = \frac{2}{35}\left(18\xi - \varepsilon\right);$

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{18}{35}\left(2\varepsilon - \xi\right) & \frac{3}{35}\left(\xi - 2\varepsilon\right) \\ \\ \frac{1}{105}\left(\varepsilon - 18\xi\right) & \frac{2}{35}\left(18\xi - \varepsilon\right) \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Для трех первых точек собственные числа матриц Ω вновь совпадают с их диагональными элементами, а для последнего случая они таковы

$$\lambda_{1,2} = \frac{17\varepsilon}{35} + \frac{9\xi}{35} \pm \frac{\sqrt{359\varepsilon^2 - 989\varepsilon\xi + 711\xi^2}}{35}. \tag{60}$$

и также вещественны при любых значениях ε, ξ.

Здесь необходимо сделать следующее важное замечание. Для неподвижных точек 3' и 4', в которых величина u_* отлична от нуля, она отрицательна. Тем самым, в силу соотношения $u \propto g^2$, такая точка не реализуется в модели с вещественной константой связи g. Однако даже простая статическая модель с взаимодействием $g\varphi^3$ в таком случае является, по-видимому, неустойчивой, так как ее потенциал взаимодействия не ограничен снизу (функциональный интеграл "расходится"). Напротив, такая модель с чисто мнимой константой связи оказывается состоятельной и имеет физические приложения: она описывает критическое поведение вблизи т.н. края Янга-Ли (см. например [14]) и, что важно для в данном случае, описывает универсальные свойства метастабильных состояний, возникающих при фазовых переходах первого рода [10]. Более того, в псевдоевклидовом случае она отвечает удовлетворительной модели квантовой теории поля (спектр энергии положителен и ограничен снизу), см. [15]. Перейти к такой модели можно с помощью подстановки $g \to ig$. При этом во всех константах Z и функциях γ и β произойдет замена $u \to -u$, а величина u_* станет положительной. Поскольку такая замена никак не отразится на областях устойчивости и критических размерностях, мы не будем выполнять ее явно, а просто в дальнейшем будем считать константу взаимодействия g чисто мнимой.

В обеих моделях первая точка относится к гауссову режиму (свободная теория поля), когда ни одно из взаимодействий не влияет на критическое поведение (только в главном приближении ИК-асимптотики – т.к. они присутствуют в действии и определяют поправки к главным членам). Вторые точки отвечают критическому режиму, в котором нелинейности исходных моделей (взаимодействие Грибова и взаимодействие $\varphi'\varphi^2$ второй модели) оказываются несущественными с точки зрения критического поведения, это случай пассивного скалярного поля без самодействия, претерпевающего лишь турбулентный перенос. Для третьих точек в том же смысле оказывается несущественным турбулентное перемешивание, т.е. критическое поведение для них такое же, как в исходных моделях без поля скорости. Последняя, наиболее интересная, неподвижная точка в обеих моделях соответствует новому скейлинговому ИК-режиму, в котором существенны обе нелинейности. Соответствующие критические размерности зависят от обоих параметров ε, ξ уже в главном порядке и вычисляются как двойные ряды по этим параметрам.

Области ИК устойчивости для этих неподвижных точек в плоскости ξ–ε (т.е. области значений ε и ξ для которых собственные числа матрицы Ω для данной неподвижной точки положительны) для моделей (17) и (18) представлены на рисунке 1.

В главных приближениях (49) и (55) все границы областей устойчивости – просто прямые линии (границы этих областей, как уже было упомянуто, находятся из условия смены знака собственных чисел матрицы Ω). Таким образом в обеих моделях при любых ε и ξ мы попадаем в устойчивую область какой-то конкретной неподвижной точки; нет никаких "щелей" и перекрытий между различными областями (когда одновременно возникают несколько возможных скейлинговых режимов, выбор точки определяется начальными данными для уравнения ренормгруппы). В этом смысле критическое поведение универсально. Можно показать, что такая ситуация сохранится и при учете старших порядков в β-функциях, хотя сами границы могут при

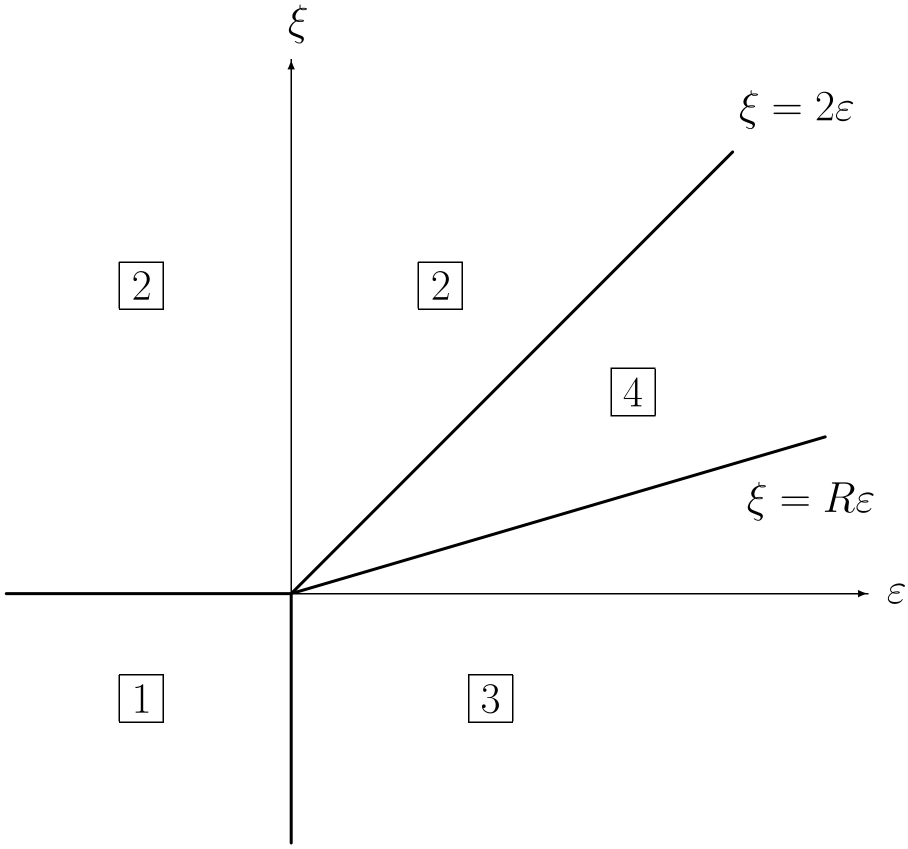


Рисунок 1. Области ИК-устойчивости неподвижных точек для моделей (17) и (18). В первом случае $\varepsilon = 4 - d$ и $R = 1/12$, во втором – $\varepsilon = 6 - d$ и $R = 1/18$.

этом искривляться. Это – следствие того факта, что у нас частные случаи $w = 0$ или $u = 0$ сами соответствуют замкнутым относительно ренормировки моделям, β-функции которых известны и имеют только одну гауссову и одну нетривиальную неподвижные точки.

Полученные результаты аналогичны выводам работы [8], где рассматривался тот же тип турбулентного перемешивания для критической динамики модели φ^4 (известной как модель A): характер неподвижных точек и области их устойчивости для всех трех случаев схожи. В частности, в однопетлевом приближении картина областей устойчивости для модели A дается рисунком 1 с $R = 0$ и $\varepsilon = 4 - d$. Видно, что при изменении исходной (без турбулентного перемешивания) модели смещается только граница, разделяющая области 3 и 4 ($\xi = \varepsilon/12$, $\xi = \varepsilon/18$ – у нас и $\xi = 0$ – в работе [8]. Это явление нетрудно объяснить. Во всех этих моделях β-функции имеют вид

$$\beta_u = u(-\varepsilon + au + bw), \quad \beta_w = w(-\xi + cu + dw)$$

с некоторыми параметрами a, b, c, d. Можно убедиться, что граница между областями 2 и 4 определяется значениями параметров b, d, которые сами находятся из диаграмм, не включающих нелинейности по скалярным полям. Напротив, граница между областями 4 и 3 определяется параметрами a, c, которые находятся по диаграммам без участия поля скорости. Поэтому граница областей 2 и 4 определяется ансамблем поля скорости (и одинакова для всех трех упомянутых выше моделей), а граница областей 3 и 4 определяется исходной моделью без турбулентного переноса и для всех этих случаев различна. Вероятнее всего, в данном случае это – свойства однопетлевого приближения.

7 Критический скейлинг и критические размерности

Напомним математическое определение обобщенной однородности. Пусть F – некая функция от n независимых аргументов $\{x_1, ..., x_n\}$, удовлетворяющая следующему размерному соотношению

$$F(\lambda^{\alpha_1} x_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^{\alpha_F} F(x_1, \ldots, x_n) \tag{61}$$

с определенным набором постоянных коэффициентов (скейлинговых размерностей) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_F\}$ и произвольным положительным параметром $\lambda > 0$. Дифференцируя соотношение (61) по λ и затем полагая $\lambda = 1$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{D}_i \, F(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_F \, F(x_1, \ldots, x_n), \quad \mathcal{D}_i = x_i \partial / \partial x_i \tag{62}$$

общее решение которого выглядит следующим образом

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_F/\alpha_1} \, \widetilde{F} \left(\frac{x_2}{x_1^{\alpha_2/\alpha_1}} \; , \ldots , \; \frac{x_n}{x_1^{\alpha_n/\alpha_1}} \right), \tag{63}$$

где $\widetilde{F}$ – произвольная функция от $(n-1)$ аргумента. Очевидно, размерности определены с точностью до общего множителя (видно из замены $\lambda \to \lambda^a$ в (61) или умножения (62) на a); эта произвольность может быть устранена, например, если положить $\alpha_1 = 1$. Если $\alpha_i = 0$ для какого-нибудь x_i, то эта переменная не преобразуется в (61), и соответствующая производная в (62) отсутствует.

Хорошо известно, что главный член, определяющий асимптотическое поведение (ренормированной) корреляционной функции на больших расстояниях, удовлетворяет РГ уравнению (34), в котором ренормированные константы связи заменены на их значения в неподвижных точках. В нашем случае это приводит к

$$\left\{ D_\mu - \gamma_f^* D_f - \gamma_\lambda^* D_\lambda - \gamma_\tau^* D_\tau + \gamma_\Phi^* N_\Phi \right\} G_{N_\Phi} = 0, \tag{64}$$

где $\gamma_f^* = \gamma_f(g = g_*, w = w_*)$ и так далее, G_{N_Φ} – ренормированная корреляционная функция с $N_\Phi = \{N_{\varphi'}, N_\varphi, N_v\}$ полями (подразумевается суммирование по повторяющимся индексам).

Каноническая масштабная инвариантность функции G_{N_Φ} по отношению к трем независимым размерностям может быть выражена с помощью трех дифференциальных уравнений в форме (62). Действительно, из безразмерности действия вытекает его инвариантность относительно преобразования типа $\varphi(x) \to \lambda^{d_\varphi}\varphi(\lambda^{-1}x)$ и т.д., а из этого вытекает свойство (61) для корреляционных функций, и, следовательно, система дифференциальных уравнений.

Канонические размерности полей в наших двух моделях, согласно таблицам 1 и 2, отличаются, поэтому выпишем пока указанные дифференциальные уравнения, не подставляя конкретные выражения.

$$\left\{D_\omega + D_\lambda - d_\Phi^\omega N_\Phi\right\} G_{N_\Phi} = 0, \tag{65}$$

$$\left\{D_\perp + D_\mu - 2D_\lambda + 2D_f + 2D_\tau - d_\Phi^\perp N_\Phi\right\} G_{N_\Phi} = 0, \tag{66}$$

$$\left\{D_\parallel - 2D_f - d_\Phi^\parallel N_\Phi\right\} G_{N_\Phi} = 0, \tag{67}$$

где $D_\parallel = k_\parallel \partial/\partial k_\parallel$, $D_\perp = k_\perp \partial/\partial k_\perp$. Ясно, что уравнение (64) соответствует скейлинговому поведению типа (61) функции G_{N_Φ} при растягиваемых параметрах μ, λ, f и τ и при фиксированных импульсно-частотных переменных. Нас интересует критическое скейлинговое поведение, т.е. поведение типа (61), в котором все ИК существенные параметры (импульс/координата, время/частота, параметр τ) меняются, в то время как ИК несущественные параметры (такие, которые конечны в неподвижной точке: λ, μ и f) фиксированы. Для этого мы скомбинируем уравнения (64)–(67) так, что производные по ИК несущественным параметрам исключатся; это приведет нас к желаемому уравнению, которое описывает критическое скейлинговое поведение:

$$\left\{D_\perp + \Delta_\parallel D_\parallel + \Delta_\omega D_\omega + \Delta_\tau D_\tau - N_\Phi \Delta_\Phi\right\} G_{N_\Phi} = 0. \tag{68}$$

здесь $\Delta_\perp = 1$ – условие нормировки, а критическая размерность любого ИК-существенного параметра F дается общим выражением

$$\Delta_F = d_F^\perp + \Delta_\parallel d_F^\parallel + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \tag{69}$$

с каноническими размерностями из таблиц 1 и 2 и соотношениями

$$\Delta_\omega = 2 - \gamma_\lambda^*, \quad \Delta_\parallel = \left(2 + \gamma_f^*\right)/2. \tag{70}$$

Выпишем теперь конечные однопетлевые результаты для критических размерностей. Для модели с взаимодействием Грибова (17) общие формулы (69) и (70) принимают вид:

$$\Delta_\omega = 2 - \frac{u^*}{8}, \quad \Delta_\parallel = 1 + \frac{w^*}{2}$$

$$\Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi = \frac{d}{2} - \frac{u^*}{8} + \frac{w^*}{4}, \quad \Delta_\tau = 2 - \frac{3u^*}{8}. \tag{71}$$

Подставляя явные выражения для координат неподвижных точек, с учетом $d = 4-\varepsilon$ получаем:
Для случая 1:

$$\Delta_\omega = 2, \quad \Delta_\| = 1, \quad \Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi = \frac{d}{2} = 2 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Delta_\tau = 2. \tag{72}$$

Для случая 2:

$$\Delta_\omega = 2, \quad \Delta_\| = 1 + \frac{\xi}{2}, \quad \Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi = \frac{d}{2} + \frac{\xi}{4} = 2 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\xi}{4}, \quad \Delta_\tau = 2. \tag{73}$$

Для случая 3:

$$\Delta_\omega = 2 - \frac{\varepsilon}{12}, \quad \Delta_\| = 1, \quad \Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi = \frac{d}{2} - \frac{\varepsilon}{12} = 2 - \frac{7\varepsilon}{12}, \quad \Delta_\tau = 2 - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{74}$$

Для случая 4:

$$\Delta_\omega = 2 - \frac{1}{23}\left(2\varepsilon - \xi\right), \quad \Delta_\| = 1 + \frac{1}{23}\left(12\xi - \varepsilon\right),$$
$$\Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi = \frac{d}{2} + \frac{1}{46}\left(14\xi - 5\varepsilon\right) = 2 + \frac{1}{23}\left(7\xi - 14\varepsilon\right), \quad \Delta_\tau = 2 + \frac{3}{23}\left(\xi - 2\varepsilon\right). \tag{75}$$

Повторим для второй модели (18), общие формулы (69) и (70) для этой модели имеют вид:

$$\Delta_\omega = 2 + \frac{u^*}{6}, \quad \Delta_\| = 1 + \frac{w^*}{2}, \quad \Delta_\tau = 2 + \frac{5u^*}{3}$$
$$\Delta_{\varphi'} = \frac{d}{2} + 1 + \frac{u^*}{3} + \frac{w^*}{4}, \quad \Delta_\varphi = \frac{d}{2} - 1 + \frac{u^*}{6} + \frac{w^*}{4}. \tag{76}$$

Подставляя явные выражения для координат неподвижных точек этой модели, получаем (теперь $d = 6-\varepsilon$):
Для случая 1':

$$\Delta_\omega = 2, \quad \Delta_\| = 1, \quad \Delta_\tau = 2,$$
$$\Delta_{\varphi'} = \frac{d}{2} + 1 = 4 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Delta_\varphi = \frac{d}{2} - 1 = 2 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{77}$$

Для случая 2':

$$\Delta_\omega = 2, \quad \Delta_\| = 1 + \frac{\xi}{2}, \quad \Delta_\tau = 2,$$
$$\Delta_{\varphi'} = \frac{d}{2} + 1 + \frac{\xi}{4} = 4 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\xi}{4}, \quad \Delta_\varphi = \frac{d}{2} - 1 + \frac{\xi}{4} = 2 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\xi}{4}. \tag{78}$$

Для случая 3':

$$\Delta_\omega = 2 - \frac{\varepsilon}{18}, \quad \Delta_\parallel = 1, \quad \Delta_\tau = 2 - \frac{5\varepsilon}{9},$$
$$\Delta_{\varphi'} = \frac{d}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{9} = 4 - \frac{11\varepsilon}{18}, \quad \Delta_\varphi = \frac{d}{2} - 1 - \frac{\varepsilon}{18} = 2 - \frac{5\varepsilon}{9}. \tag{79}$$

Для случая 4':

$$\Delta_\omega = 2 + \frac{1}{35}\left(\xi - 2\varepsilon\right), \quad \Delta_\parallel = 1 + \frac{1}{35}\left(18\xi - \varepsilon\right), \quad \Delta_\tau = 2 + \frac{2}{7}\left(\xi - 2\varepsilon\right),$$
$$\Delta_{\varphi'} = \frac{d}{2} + 1 + \frac{1}{70}\left(22\xi - 9\varepsilon\right) = 4 + \frac{11}{35}\left(\xi - 2\varepsilon\right),$$
$$\Delta_\varphi = \frac{d}{2} - 1 + \frac{1}{14}\left(4\xi - \varepsilon\right) = 2 + \frac{2}{7}\left(\xi - 2\varepsilon\right). \tag{80}$$

Все ответы для первых и вторых случаев – точные. Прочие размерности имеют поправки – старшие степени по ε для третьих случаев и по ε и ξ – для последних. Их расчет требует выхода за рамки однопетлевого приближения. Остается заметить, что в первом порядке критические размерности (72)-(75) и (77)-(80) на общих границах, разделяющих области устойчивости неподвижных точек, совпадают, т.е. оказываются непрерывными на этих прямых.

В качестве иллюстрации общих скейлинговых соотношений с размерностями (71)–(75) и (76)–(80) рассмотрим закон расплывания облака частиц распространяющегося в критической среде "агента". Для простоты положим $\tau = 0$, т.е. будем рассматривать непосредственно критическую точку.

В изотропном случае среднеквадратичный радиус облака выражается через функцию отклика следующим образом:

$$R^2(t) = \int d^d\mathbf{x}x^2 \langle\varphi'(0,\mathbf{0})\varphi(t,\mathbf{x})\rangle. \tag{81}$$

В нашем случае будем рассматривать аналоги величины (81) для отдельных компонент:

$$R_i^2(t) = \int d^{d-1}\mathbf{x}_\perp \int dx_\parallel \, x_i^2 \langle\varphi'(0,0,\mathbf{0})\varphi(t,x_\parallel,\mathbf{x}_\perp)\rangle, \tag{82}$$

где явно разделена зависимость от параллельных и перпендикулярных компонент $\mathbf{x}$. Подставим в (82) вытекающее из формул предыдущих разделов асимптотическое скейлинговое представление для функции отклика при $\tau = 0$:

$$\langle\varphi'(0,0,\mathbf{0})\varphi(t,x_\parallel,\mathbf{x}_\perp)\rangle = x_\perp^{-\Delta_\varphi-\Delta_{\varphi'}} F\left(x_\perp t^{-1/\Delta_\omega},\, x_\parallel t^{-\Delta_\parallel/\Delta_\omega}\right),$$

где $x_\perp = |\mathbf{x}_\perp|$ и F – некоторая функция полностью безразмерных (в смысле критического скейлинга) аргументов. Перейдем к новым переменным

$$y_\perp = x_\perp t^{-1/\Delta_\omega}, \quad y_\parallel = x_\parallel t^{-\Delta_\parallel/\Delta_\omega},$$

так что вся зависимость от времени t выделится из интегралов (82) в виде степенных множителей. При этом для перпендикулярной и параллельной компонент получаем:

$$R_{\perp}^{2}(t) \propto t^{\alpha_{\perp}}, \quad R_{\parallel}^{2}(t) \propto t^{\alpha_{\parallel}}$$

с показателями

$$\alpha_{\perp} = \left(d + 1 + \Delta_{\parallel} - \Delta_{\varphi} - \Delta_{\varphi'}\right)/\Delta_{\omega}, \quad \alpha_{\parallel} = \left(d - 1 + 3\Delta_{\parallel} - \Delta_{\varphi} - \Delta_{\varphi'}\right)/\Delta_{\omega}. \qquad (83)$$

Для изотропных режимов 1 и 3 (для обеих моделей) эти показатели совпадают, $\alpha_{\parallel} = \alpha_{\perp}$, причем для гауссовой точки получаем обычный закон диффузионного расплывания $R(t) \propto t^{1/2}$. Для режимов 2 и 4 расплывание облака оказывается анизотропным. В частности, для режима 2 (чисто турбулентный перенос пассивного скаляра) для обеих моделей получаем $\alpha_{\perp} = 1$ и $\alpha_{\parallel} = 1 + \xi/2$, то есть в перпендикулярном "потоку" направлении происходит простая диффузия, $R_{\perp}^{2}(t) \propto t$, а в направлении потока расплывание ускоряется, $R_{\parallel}^{2}(t) \propto t^{1+\xi/2}$. Последнее соотношение для "колмогоровского" значения $\xi = 4/3$ дает $R_{\parallel}^{2}(t) \propto t^{5/3}$, что можно представить также в виде $dR_{\parallel}^{2}/dt \propto R_{\parallel}^{4/5}$. Полученный "закон 4/5" отличается от известного "закона 4/3 Ричардсона" для изотропной турбулентности.

Для режима 4 оба показателя (83) нетривиальны, не равны друг другу и зависят от обоих параметров ренормгруппового разложения ε и ξ.

8 Заключение

Мы рассматривали критическое поведение двух динамических моделей: процесса Грибова и модели, описывающей фазовый переход первого рода в системе жидкость-пар. Поле скорости моделировалось гауссовой статистикой с исчезающим разновременным коррелятором и сильно анизотропной корреляционной функцией $\propto \delta(t - t')/k_{\perp}^{d-1+\xi}$; см. выражения (8), (9).

Модели, изначально описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями (1) и (3) с корреляторами шума (2) и (4), могут быть переформулированы в терминах мультипликативно-ренормируемых теорий поля, что позволяет применять метод ренормгруппы для изучения их критического поведения. Обе модели обнаруживают четыре разных ИК асимптотических режима, определяемых четырьмя различными неподвижными точками уравнения РГ; их области устойчивости в координатах ε–ξ найдены в главном порядке и отражены на рисунке 1. Эти режимы относятся к: (1) свободной неподвижной точке, (2) пассивному (нет обратного влияния на поле скорости) скалярному полю (пренебрежимым становится член самодействия полей φ и φ'), (3) равновесной критической динамике (взаимодействие с полем скорости становится несущественным) и (4) наиболее нетривиальному сильно анизотропному режиму, в котором одинаково существенны оба взаимодействия.

Эти результаты получены, однако, в рамках однопетлевого приближения РГ, то есть в главном порядке разложения по константам связи (для аномальных размерностей и β-функций) или параметров отклонения от логарифмичности ε и ξ (для критических размерностей, неподвижных точек и областей их устойчивости). Возможность их экстраполяции к реальным конечным значениям ε и ξ и достоверность полученных на их основе численных оценок для размерностей может вызывать сомнения, особенно для случая $\varepsilon = 6 - d$.

Серьезный анализ этих вопросов требует вычислений вкладов высших порядков РГ-разложений и применения к ним каких-либо процедур суммирования, как это было сделано, например, в работе [16] для статических моделей с кубичным взаимодействием типа φ^3. Подобный анализ выходит далеко за рамки данной работы, и мы надеемся выполнить его в дальнейшем. Однако, можно уже сейчас привести некоторые аргументы в пользу сохранения описанной в разделе 6 картины неподвижных точек при реальных значениях параметров. Именно, при $u = 0$ либо $w = 0$ наши модели сводятся к известным и относительно хорошо изученным моделям – анизотропной версии модели Обухова–Крейчнана [11] либо моделям критического поведения без учета движения среды. Поэтому положение неподвижных точек типа 2 и 3 полностью определяется β-функциями этих моделей. При этом положение точек 2 дается однопетлевым приближением точно; см. например [13]. В свою очередь, положение точек типа 3 определяется β-функциями моделей [2] и [16], которые известны в двух- и трехпетлевом приближении, соответственно. Выполненный в этих работах анализ подсказывает, что найденные в рамках ε-разложений точки "выживают" и при реальных ε. Тогда можно предположить, что и наиболее интересные для нас новые точки типа 4, лежащие в плоскости констант связи u–w в квадранте, ограниченном точками 1–3, также сохраняют свое положение и характер устойчивости при реальных значениях ε и ξ.

Таким образом мы можем заключить, что наши упрощенные модели с гауссовым распределением скорости уже в главном однопетлевом приближении улавливают наиболее важные характеристики фазовых переходов в турбулентной среде: неустойчивость равновесного критического режима, появление новых неравновесных классов универсальности с новыми наборами критических показателей, достаточно сильно отличающихся от классических, и существование (для сильно анизотропного поля скорости) двух независимых масштабов длины.

Авторы благодарят Л.Ц.Аджемяна, М.Гнатича и М.Ю.Налимова за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 08-02-00125a) и Российской Национальной Программы (грант 2.1.1/1575). А.В.М. благодарит за поддержку фонд "Династия".

Список литературы

[1] *Васильев А.Н.* Квантово-полевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. СПб.: Изд-во ПИЯФ, 1998.

[2] *Janssen H.-K., Täuber U.C.* // Ann. Phys. (NY) 2004. V.315. P.147.

[3] *Иванов Д.Ю.* Критическое поведение неидеализированных систем. Москва: Физматлит, 2003.

[4] *Onuki A., Kawasaki K.* // Progr. Theor. Phys. 1980. V.63. P.122;
Imaeda T., Onuki A., Kawasaki K. // Progr. Theor. Phys. 1984. V.71. P.16.

[5] *Beysens D., Gbadamassi M., Boyer L.* // Phys. Rev. Lett. 1979. V43. P.1253;
Beysens D., Gbadamassi M. // J. Phys. Lett. 1979. V.40. P.L565.

[6] *Ruiz R., Nelson D.R.* // Phys. Rev. A. 1981 V.23. P.3224; V.24. P.2727;
Aronowitz A., Nelson D.R. // Phys. Rev. A. 1984. V.29. P.2012.

[7] *Antonov N.V., Hnatich M., Honkonen J.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V.39. P.7867.

[8] *Antonov N.V., Ignatieva A.A.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V.39. P.13593;
Antonov N.V., Ignatieva A.A., Malyshev A.V. // Phys. Particles and Nuclei. 2010. V.41. P.998.

[9] *Antonov N.V., Iglovikov V.I., Kapustin A.S.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V.42. P.135001;
Antonov N.V., Kapustin A.S. // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. V.43. P.405001.

[10] *Zhong F., Chen Q.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V.95. P.175701.

[11] *Avellaneda M., Majda A.* // Commun. Math. Phys. 1990. V.131. P.381; 1992. V.146. P.139.

[12] *Falkovich G., Gawędzki K., Vergassola M.* // Rev. Mod. Phys. 2001. V.73. P.913.

[13] *Antonov N.V.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V.39. P.7825.

[14] *Fisher M.* // Phys. Rev. Lett. 1978. V.40. P.1610.

[15] *Bender C.M., Brody D.C., Jones H.F.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V.93. P.251601.

[16] *de Alcantara Bonfim O.F., Kirkham J.E., McKane A.J.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1980. V.L247. P.13; 1981. V.14. P.2391.

Effects of strongly anisotropic turbulent mixing on the critical behavior of two non-conventional systems.

N.V. Antonov, A.V.Malyshev

Effects of strongly anisotropic turbulent mixing on the critical behavior are studied for two systems: critical dynamics of the φ^3 model, which describes universal characteristics of metastable states near the first-order transition points, and the non-equilibrium reaction-diffusion system near the second-order transition between the absorbing and fluctuating states (known as simple epidemic process or Gribov process). For the both cases, existence of new non-equilibrium anisotropic types of critical regimes (universality classes) is established, for which both the mixing and the non-linearity in the order parameter are relevant. The corresponding critical dimensions are calculated in the one-loop approximation of the renormalization group.