



謝定裕

## 關於應用數學

外行人，尤其是中國人聽到應用數學這個名詞，不免會感到納悶。我國有一句老話：「學以致用。」許多人更有「中學為體，西學為用」這個觀念。既然近代數學是門西洋學問，不言而喻它必然是有用了。所以在數學前面加上應用兩個字，豈不有點兒多餘。其實若就這一點申論下去，就可以發現，如果應用這兩個字並不是多餘的話，那麼一定是現在還有一種不太好應用的數學了。

貝爾(E. T. Bell)在「數學名家小傳」裏推舉歷代三位最偉大的數學家是阿幾米德(Archimedes)、牛頓(Newton)及高斯(Gauss)。他的選擇雖未必為所有的人所贊同，但至少誰都會承認這三人是非常偉大的數學家。這三人在數學上的成就，大部分與應用有直接或間接的關係。事實上截至上一世紀為止，很難找到一個有成就的數學家，而他沒有在應用數學方面表現過他的才能。也可以說，那時的數學家，除了數學中的抽象世界外，他們的心目中還有一個充滿了各種自然現象的真實世界。近四百年來西方文明能够長足發展的基本原因，也正是由於這兩種世界的配合。

甚至在這一世紀，還是有許多偉大的數學家，如 Weyl, Von Neumann, Wiener, Kolmogorov，應僅以「數學家」冠之，而不應前加「純粹」或「應用」的分類來限制他們的成就。可是另外有許多數學家，卻因時尚或是個人的興趣而變成了純粹的數學家。我說「時尚」是有根據的。因為純粹數學家對「應用」歧視的例子是屢見不鮮的。

當代的數理邏輯大家維根斯坦(Wittgenstein)，早年在劍橋上過羅素(Russel)的課，羅素在其回憶錄中曾說，第一學期快終了時，維氏曾去問他：「我是不是一個大笨蛋？」羅素答道：「我不知道。你為什麼這樣問我呢？」他說：「因為我假使是

個大笨蛋，我就去學航空。如果我不是，我就去學哲學。」其實用這一例子來奚落應用科學並不是一個最好的例子。因為在那時，維根斯坦對於才開始出現的飛機設計，已經相當有心得。所以他才有資格說這種話。而一般的哲學家或數學家，當然未必有維根斯坦那樣廣泛的天賦。

在哈代(G. H. Hardy)的「一個數學家的辯解」中有這樣一段：「數學有兩種：一種是真正的數學家所研究的真正的數學；另一種，無以名之，姑稱名為膚淺的數學。……大體而言，膚淺的數學是有用的，而真正的數學則否，……在應用數學中，固然有些部門，如彈道學以及空氣動力學，也許很難說它們『膚淺』；但它們却也毫無資格被稱為『真正』。事實上它們是醜得可厭，無聊得難以忍受。甚至連李脫伍(J. E. Littlewood)都不能使彈道學體面一點。如連他都不能，誰還能呢？」

在這樣的氛圍中，數學遂逐漸變愈純。三年前我曾遇到一位出自名門的年青數學家，他甚至宣稱：「只有與自然界無關，完全從腦子裏產生出來的數學，才是數學。」他認為數學與其說是科學，還不如說是一種藝術。這當然是非常極端的一種態度。但由此也可見，今日所謂數學，與外行人心目中的數學，已有多大的距離了。

可是，科學上、工程上的實際問題，却又必須藉數學之助而解決不可。數學家既然拋棄了他們，工程師、物理學家、化學家就只好自己來負起這份任務。這就是現代應用數學的萌芽。漸漸地也有些數學家，厭倦了在雲端上的飄揚，願意回到可以實踏的地上；再加上其他支流，終於匯成了今日的「應用數學」。

應用數學的內容，大體言之，可以分為兩類：一類是「應用的數學」，一類是「數學的應用」。



讓我們先談談「應用的數學」。

所謂「應用的數學」又可包括：對可以應用的數學的研討，數學方法及數學工具的發展。

嚴格而言，即使是最純粹的數學，大概也有可以應用的一天。因為人既然不能脫離自然律而存在，人腦的產物終究是與自然界的規律有關。這裏所謂「可以應用的」，意思是說對它之應用是指日可期的，而不是在渺茫的未來。現在這些「可以應用的數學」包括或然率、統計學、代數中的一些問題以及在古典分析中許許多多尚未解決的問題。在許多沒有單獨成立應用數學系的大學，這些數學當然還是名正言順地在數學系的範圍以內。可是因為趣味及重點不太相同，這些數學家覺得在「應用數學」的領域中，可以呼吸得更舒暢些。

許多科學上及工程上的問題都可用方程式來表達。常常是微分方程，積分方程，或者是代數方程；有線型的，有非線型的。如何去解這些複雜困難的方程，是發展數學方法的主要目的。解這些方程的最後目的，自然是在於想得到一個肯定的數量的解答；事實上，衡量一門科學的發展，可以依其數量化的程度來決定。目前純粹數學的重點，顯然有偏於性質方面的研究，而忽視數量方面的解答。因此助長了純粹數學與應用的脫節。

所謂數學工具，最主要的當然是電子計算機。計算機學現在已是一門方興未艾的大學問，牽涉甚廣。直接與應用數學有關的，至少有下列幾方面：一、如何有效地使用計算機。二、如何利用計算機促進數學方法的發展（如數字分析）。三、如何利用計算機來幫助解答純數學的問題（如幫助解答數論上的問題，又如用計算機來證明代數及幾何上的定理）。四、對因計算機而引起的數學問題的研究。由此可知，與計算機有關的應用數學，絕不僅只是計算機的使用而已。

應用數學的另一方面是「數學的應用」。就以上「應用的數學」而言，研學的重心還是在數學，應用只是背景而已。就「數學的應用」而言，重心就在應用的對象了，數學只是一種工具。我們知道所有其他應用科學，無論是農學、醫學、或者是工程學，其重心都在達成應用的目的，科學也只是工具而已。所以這一層意義而言，應用數學之包括「數學的應用」這一部份是十分自然的。而且就應用數學的發展而言，當其自立門戶之始，所謂「應用數學」幾乎就只是「數學的應用」。但應用數學與

其他應用科學還略有不同之處。一般應用科學，其內容可以說是直接與實用有關。但應用數學，固然可應用於農、醫、工、商而直接與實用有關，却也可應用於其他基本科學，乃至人文科學，而不必定與實用有直接關係。

傳統的應用數學，可以說只是數學在工程學及古典物理學方面的應用。所以美國科學院在1968年出的報告中，就稱這一方面的應用數學物理數學，目舉流體力學作為代表性的例子。主要原因是古典物理學，尤其是力學，是最成熟的科學，因此最適於作嚴密的數學性的分析。現在許多其他學科也逐漸接受高深數學的應用。舉例言之，化學、生物學、醫學、經濟學、語言學都已經用到很多的高深的數學。甚至就流體力學而言，本來主要是為工程上的應用而發展的，也在天文學、太空科學、地質學、海洋學、氣象學等方面找到新的，直接應用的對象。至於在其發展過程中，對數學方法所作的貢獻，當然使其應用範圍更加擴大。

將數學應用於自然科學、工程學、社會科學以及人文科學時，往往包括二步驟：第一步是將實際問題用數學模型表達出來，也就是說把實際問題變成一個數學上的問題。第二步是解那個數學問題。這第一步常比第二步更重要，也更難。做第二步往往只需會數學就行了，而要做到第一步，却非對應用的那門學問有相當程度的瞭解不可。事實上，在解決這種特別問題的時候，應用數學家就變成了理論科學家，或者理論工程師。這也是為什麼大學的應用數學系組成份子中，常有理論工程師及理論科學家。

但無論是數學模型的創造或者數學問題的解決，已有的數學知識往往是不够用的，於是就不得不創造新的數學。這些為應用而發展的數學新觀念或新方法，在草創時往往並不十分嚴謹。這對純粹數學家常是一種刺激或考驗，因而有更深刻的研究。即使在廿世紀的現在，由應用數學發展成為純粹數學的例子，也是屢見不鮮。

所以，應用數學在一端連上了純粹數學，使純粹數學玄美隱深的成就不致永遠鎖在象牙塔中；另一端又銜接到實實在在的自然世界。一方面幫助探索自然的奧秘，也一方面從自然中吸取靈感來充實數學的內容。貝爾所舉的阿幾米德、牛頓及高斯正是這樣的應用數學家。

（作者通訊處：本刊轉）