

Sztochasztikus folyamatok 2015-06-06 vizsga

2015. június 22.

Figyelem! Természetesen a kidolgozás elolvasása nem ment fel a készülés alól. Csak azoknak tud érdemben segítséget nyújtani, akik egyébként is készültek. A feladatok helyességére semmilyen garanciát nem vállalok! Ha hibát találsz benne, akkor jelezd, vagy javítsd ki. A \LaTeX forrás és a `.pdf` elérhető az <https://github.com/dyj216/msc-sze-vill> címen. A fájlokat a „Raw” gombra való kattintással lehet letölteni.

A felkészüléshez ajánlom a tanár úr honlapján megtalálható `sztocha_01.pdf-sztocha_08.pdf`-eket. Ezekre vannak hivatkozások ebben a kidolgozásban is. Ezek elérhetőek a <http://www.sze.hu/~harmati/sztocha2.html> címen. A vizsgákon a feladattípusok ugyanazt a sémát követik, minden feladat egy-egy anyagrészre kérdez rá, természetesen a pontos feladattípusok vizsgáról vizsgára változnak.

Ezt a vizsgasort emlékezetből írtam meg, a feladatok megfogalmazása biztosan nem pontos.

1. feladat

Szerencsejátékot játszok, 0,49 valószínűséggel nyerem el ellenfelem pénzét, ő 0,51-gyel nyeri el az én pénzemet. 200 Ft-om van, ellenfelemnek 40.

- (a) Milyen tét megválasztásával tudom maximalizálni a nyerési esélyemet?
- (b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy nyerek ilyen tétek mellett, mennyi annak, hogy veszek?
- (c) Ha ellenfelemnek megengedem, hogy ő választhasson tétet, akkor ő mekkora tétet fog választani?
- (d) Ha végtelen pénzem van, meddig növelhetem a nyerési esélyemet?

a)

Ha a játék nem nekünk kedvez (de nekünk van több pénzünk), akkor a lehető legnagyobb tét kiválasztásával tudjuk a nyerési esélyünket maximalizálni. Ez 40 Ft.

b)

Annak az esélye, hogy nyerek 40 Ft-os tét mellett ($n_1 = 200/40 = 5$, $n_2 = 40/40 = 1$):

$$P(\text{nyerek}) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \frac{1 - \left(\frac{0,51}{0,49}\right)^5}{1 - \left(\frac{0,51}{0,49}\right)^6} \approx 0,8162$$

Annak a valószínűsége, hogy veszünk:

$$P(\text{vesztek}) = 1 - P(\text{nyerek}) = 0,1838$$

c)

Ellenfelemnek kedvez a játék, így neki a lehető legkisebb tétet kell választania, hogy maximalizálja a nyerési esélyét. Ekkor $n_1 = 200$, $n_2 = 40$, és az én nyerési esélyem:

$$P(\text{nyerek}) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \frac{1 - \left(\frac{0,51}{0,49}\right)^{200}}{1 - \left(\frac{0,51}{0,49}\right)^{240}} \approx 0,2018$$

d)

1 kört inkább elvesztünk, mint megnyerünk ($p < q$), ellenfelünk pénze konstans ($n_2 = 5$), így alkalmazhatjuk a következő határérték számítást:

$$\begin{aligned}
P(\text{nyerünk}) &= \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} = \\
&= \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}} \cdot \frac{\frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}} - 1}{\frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} = \frac{-1}{-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} = \\
&= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{n_2} = \left(\frac{0,49}{0,51}\right)^{40} \approx 0,2019
\end{aligned}$$

2.feladat

Adott az $\{1, 2\}$ állapotokkal rendelkező Markov-lánc az alábbi állapotvalószínűségi mátrixszal:

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

- (a) Adja meg a $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)$ valószínűséget!
- (b) Adja meg a $P(X_4 = 2 \mid X_2 = 2)$ valószínűséget!
- (c) Adja meg az invariáns eloszlást!

Bevezető

Az (a) és (b) jellegű kérdésekre borzasztóan egyszerű a válasz: meg kell nézni, hogy a keresett valószínűség az melyik időpillanatban (lépésben) van, ezt X alsó indexéből leolvashatjuk ((a) esetben ez 1, (b) esetben ez 4). Ebből le kell vonni a feltétel időpillanatának (lépésének) az értékét ((a) esetben ez 0, (b) esetben ez 2), tehát $1 - 0 = 1$ és $4 - 2 = 2$, és a P mátrix ennyiedik hatványát kell megnézni ((a) esetben P^1 -et, (b) esetben P^2 -t). A sorok jelölik az, hogy melyik állapotban vagyunk, az oszlopok, hogy melyik állapotba megyünk.

a)

Tekintsük tehát a P^1 mátrixot:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

A keresett valószínűség ennek a mátrixnak az első sorának második eleme.

$$P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2) = 0,8$$

b)

Mivel itt a különbség a két időpont között 2, ezért ki kell számolni a P^2 mátrixot. Akinek a számológépe tudja ezt az csak bepötyögi és lemásolja az eredményt, többiek kézzel kiszámolják.

$$P^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,36 & 0,64 \\ 0,32 & 0,68 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Innen a keresett valószínűség az ennek a mátrixnak a második sorának második eleme.

$$P(X_4 = 2 \mid X_2 = 2) = 0,68$$

c)

Ez a rész egy sima invariáns eloszlás (jelölése: π , mert egy vektor) számolás. Az invariáns eloszlás az azt jelenti, hogy ha P kitevője már elég magas, akkor a kezdeti eloszlás elveszti jelentőségét (φ_0 -val szoktuk jelölni, ebben a feladatban nem szerepel). Tehát:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n = \pi$$

Ebből következik, hogy a magas kitevőjű P -t π -vel megszorozva π -t kapunk:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n P = \pi P$$

$$\pi = \pi P$$

Invariáns eloszlást a mátrix oszlopaiból felírt egyenletrendszerrel lehet számolni. π_1 az egyes állapot invariáns eloszlása π_2 a kettes állapoté. Ez az egyenletrendszer, tudva, hogy az invariáns eloszlások összege 1-et ad eredményül:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0,2\pi_1 + 0,4\pi_2 \\ \pi_2 &= 0,8\pi_1 + 0,6\pi_2 \\ \sum_i \pi_i &= 1 = \pi_1 + \pi_2\end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva kapjuk az invariáns eloszlás értékeit, amit mátrix számolás képes számológéppel könnyen ellenőrizhetünk, úgy, hogy a mátrixunkat sokszor (mondjuk 5–10-szer négyzetre emeljük):

$$\pi_1 = \frac{1}{3}, \quad \pi_2 = \frac{2}{3}$$

3. feladat

Adott két doboz A és B , és 8 golyó: 6 fehér és 2 sárga. Egy lépés jelentse azt, hogy megfogunk A -ban és B -ben is egy-egy golyót és kicseréljük őket. Jelölje az állapotokat az A -ban lévő sárga golyók száma.

- (a) Írja fel az állapotvalószínűségi mátrixot!
 (b) ??? Talán az volt, hogy adja meg az invariáns eloszlást ???

a)

Ha megértjük, hogy miket jelentenek az állapotok, ez a feladat is könnyű lesz. Most az állapotaink lehetnek $\{0, 1, 2\}$, hiszen ennyi sárga golyó lehet maximálisan az A -ban. A mátrix:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ (1/4 \cdot 3/4 = 3/16) & 10/16 & (1/4 \cdot 3/4 = 3/16) \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Egy kis magyarázat:

- Amikor 0 db sárga golyó van az A -ban, akkor 1 a valószínűsége annak, hogy az A -ból fehéret veszünk ki, és $1/2$ annak a valószínűsége, hogy a B -ből fehéret veszünk ki, ezek szorzata adja a mátrix $(0, 0)$ elemét.

- Szintén $1/2$ annak a valószínűsége, hogy sárgát veszünk ki a B -ből, ez a mátrix $(0, 1)$ -es elemét adja.
- Az $(1, 0)$ -ás elemet úgy kapjuk, hogy ha már van egy sárga golyó az A dobozban, akkor akkor $1/4$ annak a valószínűsége, hogy azt húzzuk ki és tesszük át a B -be, és akkor lesz 0 sárga golyó az A -ban, ha a B -ből fehér golyót teszünk át A -ba, aminek $3/4$ a valószínűsége. Ennek a kettőnek a szorzata adja a $3/16$ -ot.
- Az $(1, 2)$ -es elemre is hasonlóan juthatunk, mint ahogy az előző pontban jutottunk.
- Az $(1, 1)$ -es elemet szintén megkaphatjuk, ha végiggondoljuk, hogy hogyan lehet az, hogy 1 sárga golyó volt az A -ban és 1 lesz a csere után is, de könnyebb onnan kiszámolni, hogy a sorok összegének 1 -et kell adnia a Markov-láncokban, tehát $1 - 3/16 - 3/16 = 10/16$ ennek a valószínűsége.

4. feladat

Erre már nem emlékszem, csak annyira, hogy tipikus Poisson-eloszlású feladat volt, az (a) részben egy időtartam alatt érkezők száma volt a kérdés, a (b) részben egy független feltétel volt vizsgálva, azaz elhagyható volt az a feltétel, és a (c) részben pedig egy feltételes valószínűséget kellett számolni.

5. feladat

Erre sem emlékszem, de ez meg egy M/M/1-es típusú feladat volt.