Sztochasztikus folyamatok 2015-06-06 vizsga

2015. június 21.

Figyelem! Természetesen a kidolgozás elolvasása nem ment fel a készülés alól. Csak azoknak tud érdemben segítséget nyújtani, akik egyébként is készültek. A feladatok helyességére semmilyen garanciát nem vállalok! Ha hibát találsz benne, akkor jelezd, vagy javítsd ki. A LaTeX forrás és a `.pdf` elérhető az `https://github.com/dyj216/msc-sze-vill` címen. A fájlokat a „Raw" gombra való kattintással lehet letölteni.

A felkészüléshez ajánlom a tanár úr honlapján megtalálható `sztocha_01.pdf`-`sztocha_08.pdf`-eket. Ezekre vannak hivatkozások ebben a kidolgozásban is. Ezek elérhetőek a `http://www.sze.hu/~harmati/sztocha2.html` címen. A vizsgákon a feladattípusok ugyanazt a sémát követik, minden feladat egy–egy anyagrészre kérdez rá, természetesen a pontos feladattípusok vizsgáról vizsgára változnak.

Ezt a vizsgasort emlékezetből írtam meg, a feladatok megfogalmazása biztosan nem pontos.

1. feladat

Szerencsejátékot játszok, 0,49 valószínűséggel nyerem el ellenfelem pénzét, ő 0,51-gyel nyeri el az én pénzemet. 200 Ft-om van, ellenfelemnek 40.

(a) Milyen tét megválasztásával tudom maximalizálni a nyerési esélyemet?

(b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy nyerek ilyen tétek mellett, mennyi annak, hogy vesztek?

(c) Ha ellenfelemnek megengedem, hogy ő választhasson tétet, akkor ő mekkora tétet fog választani?

(d) Ha végtelen pénzem van, meddig növelhetem a nyerési esélyemet?

a)

Ha a játék nem nekünk kedvez (de nekünk van több pénzünk), akkor a lehető legnagyobb tét kiválasztásával tudjuk a nyerési esélyünket maximalizálni. Ez 40 Ft.

b)

Annak az esélye, hogy nyerek 40 Ft-os tét mellett ($n_1 = 200/40 = 5,\ n_2 = 40/40 = 1$):

$$P(\text{nyerek}) = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \frac{1-\left(\frac{0{,}51}{0{,}49}\right)^{5}}{1-\left(\frac{0{,}51}{0{,}49}\right)^{6}} \approx 0,8162$$

Annak a valószínűsége, hogy vesztünk:

$$P(\text{vesztek}) = 1 - P(\text{nyerek}) = 0,1838$$

c)

Ellenfelemnek kedvez a játék, így neki a lehető legkisebb tétet kell választania, hogy maximalizálja a nyerési esélyét. Ekkor $n_1 = 200$, $n_2 = 40$, és az én nyerési esélyem:

$$P(\text{nyerek}) = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \frac{1-\left(\frac{0{,}51}{0{,}49}\right)^{200}}{1-\left(\frac{0{,}51}{0{,}49}\right)^{240}} \approx 0,2018$$

d)

1 kört inkább elvesztünk, mint megnyerünk ($p < q$), ellenfelünk pénze konstans ($n_2 = 5$), így alkalmazhatjuk a következő határérték számítást:

$$P(\text{nyerünk}) = \lim_{n_1\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \lim_{n_1\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} =$$

$$= \lim_{n_1\to\infty} \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}} \cdot \frac{\frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}-1}{\frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} = \frac{-1}{-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} =$$

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{n_2} = \left(\frac{0,49}{0,51}\right)^{40} \approx 0,2019$$

2.feladat

Adott az $\{1,2\}$ állapotokkal rendelkező Markov-lánc az alábbi állapotvalószínűségi mátrixszal:

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}$$

(a) Adja meg a $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)$ valószínűséget!

(b) Adja meg a $P(X_4 = 2 \mid X_2 = 2)$ valószínűséget!

(c) Adja meg az invariáns eloszlást!

Bevezető

Az (a) és (b) jellegű kérdésekre borzasztóan egyszerű a válasz: meg kell nézni, hogy a keresett valószínűség az melyik időpillanatban (lépésben) van, ezt X alsó indexéből leolvashatjuk ((a) esetben ez 1, (b) esetben ez 4). Ebből le kell vonni a feltétel időpillanatának (lépésének) az értékét ((a) esetben ez 0, (b) esetben ez 2), tehát $1-0=1$ és $4-2=2$, és a P mátrix ennyiedik hatványát kell megnézni ((a) esetben P^1-et, (b) esetben P^2-t). A sorok jelölik az, hogy melyik állapotban vagyunk, az oszlopok, hogy melyik állapotba megyünk.

a)

Tekintsük tehát a P^1 mátrixot:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

A keresett valószínűség ennek a mátrixnak az első sorának második eleme.

$$P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2) = 0,6$$

b)

Mivel itt a különbség a két időpont között 2, ezért ki kell számolni a P^2 mátrixot. Akinek a számológépe tudja ezt az csak bepötyögi és lemásolja az eredményt, többiek kézzel kiszámolják.

$$P^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,36 & 0,64 \\ 0,32 & 0,68 \end{pmatrix} \end{array}$$

Innen a keresett valószínűség az ennek a mátrixnak a második sorának második eleme.

$$P(X_4 = 2 \mid X_2 = 2) = 0,68$$

c)

Ez a rész egy sima invariáns eloszlás (jelölése: $\underline{\pi}$, mert egy vektor) számolás. Az invariáns eloszlás az azt jelenti, hogy ha P kitevője már elég magas, akkor a kezdeti eloszlás elveszti jelentőségét (φ_0-val szoktuk jelölni, ebben a feladatban nem szerepel). Tehát:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_0 P^n = \underline{\pi}$$

Ebből következik, hogy a magas kitevőjű P-t $\underline{\pi}$-vel megszorozva $\underline{\pi}$-t kapunk:

$$\underline{\pi} = \lim_{n\to\infty} \varphi_0 P^n = \lim_{n\to\infty} \varphi_0 P^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi_0 P^n P = \underline{\pi} P$$

$$\underline{\pi} = \underline{\pi} P$$

Invariáns eloszlást a mátrix oszlopaiból felírt egyenletrendszerrel lehet számolni. π_1 az egyes állapot invariáns eloszlása π_2 a kettes állapoté. Ez az egyenletrendszer, tudva, hogy az invariáns eloszlások összege 1-et ad eredményül:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,2\pi_1 + 0,6\pi_2 \\ \pi_2 &= 0,4\pi_1 + 0,8\pi_2 \\ \sum_i \pi_i &= 1 = \pi_1 + \pi_2 \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva kapjuk az invariáns eloszlás értékeket, amit mátrix számolás képes számológéppel könnyen ellenőrizhetünk, úgy, hogy a mátrixunkat sokszor (mondjuk 5–10-szer négyzetre emeljük):

$$\pi_1 = \frac{1}{3}, \quad \pi_2 = \frac{2}{3}$$

3. feladat

Adott két doboz A és B, és 8 golyó: 6 fehér és 2 sárga. Egy lépés jelentse azt, hogy megfogunk A-ban és B-ben is egy–egy golyót és kicseréljük őket. Jelölje az állapotokat az A-ban lévő sárga golyók száma.

(a) Írja fel az állapotvalószínűségi mátrixot!

(b) ??? Talán az volt, hogy adja meg az invariáns eloszlást ???

a)

Ha megértjük, hogy miket jelentenek az állapotok, ez a feladat is könnyű lesz. Most az állapotaink lehetnek $\{0, 1, 2\}$, hiszen ennyi sárga golyó lehet maximálisan az A-ban. A mátrix:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \qquad\quad 0 \qquad\quad & \qquad 1 \qquad & \qquad\quad 2 \qquad\quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ (1/4 \cdot 3/4 = 3/16) & 10/16 & (1/4 \cdot 3/4 = 3/16) \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Egy kis magyarázat:

- Amikor 0 db sárga golyó van az A-ban, akkor 1 a valószínűsége annak, hogy az A-ból fehéret veszünk ki, és $1/2$ annak a valószínűsége, hogy a B-ből fehéret veszünk ki, ezek szorzata adja a mátrix $(0, 0)$ elemét.

- Szintén $1/2$ annak a valószínűsége, hogy sárgát veszünk ki a B-ből, ez a mátrix $(0,1)$-es elemét adja.
- Az $(1,0)$-ás elemet úgy kapjuk, hogy ha már van egy sárga golyó az A dobozban, akkor akkor $1/4$ annak a valószínűsége, hogy azt húzzuk ki és tesszük át a B-be, és akkor lesz 0 sárga golyó az A-ban, ha a B-ből fehér golyót teszünk át A-ba, aminek $3/4$ a valószínűsége. Ennek a kettőnek a szorzata adja a $3/16$-ot.
- Az $(1,2)$-es elemre is hasonlóan juthatunk, mint ahogy az előző pontban jutottunk.
- Az $(1,1)$-es elemet szintén megkaphatjuk, ha végiggondoljuk, hogy hogyan lehet az, hogy 1 sárga golyó volt az A-ban és 1 lesz a csere után is, de könnyebb onnan kiszámolni, hogy a sorok összegének 1-et kell adnia a Markov–láncokban, tehát $1 - 3/16 - 3/16 = 10/16$ ennek a valószínűsége.

4. feladat

Erre már nem emlékszem, csak annyira, hogy tipikus Poisson–eloszlású feladat volt, az (a) részben egy időtartam alatt érkezők száma volt a kérdés, a (b) részben egy független feltétel volt vizsgálva, azaz elhagyható volt az a feltétel, és a (c) részben pedig egy feltételes valószínűséget kellett számolni.

5. feladat

Erre sem emlékszem, de ez meg egy M/M/1-es típusú feladat volt.