Sztochasztikus folyamatok 2015-06-06 vizsga

2015. június 25.

Figyelem! Természetesen a kidolgozás elolvasása nem ment fel a készülés alól. Csak azoknak tud érdemben segítséget nyújtani, akik egyébként is készültek. A feladatok helyességére semmilyen garanciát nem vállalok! Ha hibát találsz benne, akkor jelezd, vagy javítsd ki. A LaTeX forrás és a `.pdf` elérhető az https://github.com/dyj216/msc-sze-vill címen. A fájlokat a „Raw" gombra való kattintással lehet letölteni.

A felkészüléshez ajánlom a tanár úr honlapján megtalálható `sztocha_01.pdf-sztocha_08.pdf`-eket. Ezekre vannak hivatkozások ebben a kidolgozásban is. Ezek elérhetőek a http://www.sze.hu/~harmati/sztocha2.html címen. A vizsgákon a feladattípusok ugyanazt a sémát követik, minden feladat egy–egy anyagrészre kérdez rá, természetesen a pontos feladattípusok vizsgáról vizsgára változnak.

1. feladat

Egy bolha ugrál az $1, 2, \ldots, 40$ számokon. Ha a $2, 3, \ldots 39$ számok valamelyikén van, akkor $1/2$ valószínűséggel lép jobbra, $1/2$ valószínűséggel lép balra, de ha 1-ben vagy 40-ben van, ott is marad. (a falak elnyelőek).

a) TFH 36-ból elindul. Mi a VSZ-e, hogy 1-ben végzi? (4p)

b) TFH 14-ből indul. Várhatóan hány lépés múlva fejeződik be a bolyongása? (4p)

a)

A bolyongás elnyelő falakkal megegyezik a tönkremenési problémával. Mivel $p = 1 - p = 1/2$, ezért $P = n/A$.

(Ebben nem vagyok biztos) Mivel most 1 az elnyelő állapot, ezért $A = 39$, és n az a közelebbi elnyelő állapottól való távolság: $n = 4$. Így a kérdésre a válasz:

$$P(\text{a bolha 1-ben végzi}) = \frac{n}{A} = \frac{4}{39} \approx 0,1026$$

b)

A bolyongás várható időtartama $p = 1-p = 1/2$ esetén: $d(n) = n(A-n)$. Most $n = 13$, $A = 39$.

$$d(n) = 13 \cdot (39 - 13) = 338$$

2. feladat

Egy Markov-lánc állapottere: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, átmenet-valószínűség mátrixa:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

a) Irreducibilis-e a Markov-lánc? (3p)

b) Határozzuk meg az invariáns eloszlást! (5p)

c) Tegyük fel, hogy 1-ből indulunk. Várhatóan hány lépés múlva érünk ismét 1-be? (3p)

a)

Irreducibilis a Markov-lánc, hiszen egyetlen rekurrens osztályból áll, ami azt jelenti, hogy bármely állapotból elérhető bármely másik állapot. Ez az egy rekurrens osztály az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b)

Egyszerű invariáns eloszlás számolás, segítségképpen a mátrix, oldalain feltüntetve az állapotokkal:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 00 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Az oszlopokba kell belenézni az invariáns eloszlás egyenletrendszerének felírásához:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1/2\pi_4 + 1/2\pi_5 \\ \pi_2 &= 1/4\pi_1 + 1/2\pi_4 \\ \pi_3 &= 1/4\pi_1 \\ \pi_4 &= 1/4\pi_1 + 1/2\pi_2 + 1/2\pi_3 \\ \pi_5 &= 1/4\pi_1 + 1/2\pi_2 + 1/2\pi_3 + 1/2\pi_5 \\ \sum_i \pi_i &= 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 \end{aligned}$$

Megoldva az egyenletrendszert (természetesen lehet egyszerűsíteni, ilyen formában viszont jól látszik, hogy az összegük 1-et ad):

$$\pi_1 = \frac{12}{46}, \quad \pi_2 = \frac{7}{46}, \quad \pi_3 = \frac{3}{46}, \quad \pi_4 = \frac{8}{46}, \quad \pi_5 = \frac{16}{46}$$

c)

Az invariáns eloszlás ismeretében ez könnyű:

$$E(T_{1\to1}) = \frac{1}{\pi_1} = \frac{46}{12} = \frac{23}{6}$$

3. feladat

Két dobozban (A és B) 3-3 golyó van, összesen 3 fehér és 3 piros. Egy lépés abból fog állni, hogy A-ból és B-ből is kihúzunk egy-egy golyót, és kicseréljük őket. Tekintsük a piros golyók számát az A dobozban.

a) Írjuk fel az átmenet-valószínűség mátrixot! (5p)

b) Hosszú távon az idő hányad részében nem lesz piros golyó az A-ban? (5p)

c) Tegyük fel, hogy kezdetben minden piros golyó A-ban volt. Várhatóan hány lépés múlva lesz benne csak fehér? (5p)

a)

Az piros golyók száma az A dobozban az alábbi értékeket vehetik fel: $\{0, 1, 2, 3\}$. Ennek megfelelően az átmenet-valószínűségmátrix:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 \cdot 1/3 = 1/9 & 4/9 & 2/3 \cdot 2/3 = 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ha 1 golyó piros A-ban, akkor úgy lehet, benne 0, ha a 3 golyóból egyedüli pirosat kivesszük, és kicseréljük a 3 golyóból 1 fehérrel a B-ből. Ahhoz, hogy kettő piros golyó legyen az A-ban, ahhoz a 3 golyóból a kettő fehér közül az egyiket kell kihúzni, aminek 2/3-ad a valószínűsége, és a B-ből a 3 golyó közül a 2 piros egyikét kell kihúzni, ennek a valószínűsége is 2/3, így kapjuk a kettő szorzatából a 4/9-es valószínűséget. Az $1 \to 1$ átmenethez 1-ből kivonjuk az adott sorban lévő többi valószínűséget (vagy végiggondoljuk).

b)

Ehhez invariáns eloszlást kell számolni. A keresett érték:

$$P(\text{nincs a 0 állapotban}) = 1 - \pi_0$$

Az invariáns eloszláshoz az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1/9\pi_1 \\ \pi_1 &= \pi_0 + 4/9\pi_1 + 4/9\pi_2 \\ \pi_2 &= 4/9\pi_1 + 4/9\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_3 &= 1/9\pi_2 \\ \sum_i \pi_i = 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

4. feladat

Egy boltba Poisson-folyamat szerint érkeznek a vevők, átlagosan két percenként egy.

a) Mi a valószínűsége, hogy 10 perc alatt pont 4 vevő érkezik? (3p)

b) Öt percig nem jött senki. Mi a VSZ-e, hogy a következő percben pont két vevő jön? (3p)

c) Tegyük fel, hogy 10 perc alatt 8-an jöttek. Mi a valószínűsége, hogy az első 2 percben nem jött senki? (4p)

5. feladat

Egy hivatalnál egyetlen ablaknál intézik az ügyeket. A kiszolgálási idő exponenciális eloszlású 10 perc várható értékkel. Az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 5. Tegyük fel, hogy a hivatal befogadóképessége végtelen.

a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 2 ügyfél van a hivatalban? (4p)

b) Átlagosan hányan várakoznak a hivatalban?(4p)

c) Átlagosan mennyi időt tölt el egy ügyfél a hivatalban? (4p)

d) Mennyi az átlagos várakozási idő? (4p)