Sztochasztikus folyamatok 2015-01-23 vizsga

2015. június 21.

Figyelem! Természetesen a kidolgozás elolvasása nem ment fel a készülés alól. Csak azoknak tud érdemben segítséget nyújtani, akik egyébként is készültek. A feladatok helyességére semmilyen garanciát nem vállalok! Ha hibát találsz benne, akkor jelezd, vagy javítsd ki. A LaTeX forrás elérhető az `https://github.com/dyj216/msc-sze-vill` címen. A fájlokat a „Raw" gombra való kattintással lehet letölteni.

A felkészüléshez ajánlom a tanár úr honlapján megtalálható `sztocha_01.pdf`-`sztocha_08.pdf`-eket. Ezekre vannak hivatkozások ebben a kidolgozásban is. Ezek elérhetőek a `http://www.sze.hu/~harmati/sztocha2.html` címen. A vizsgákon a feladattípusok ugyanazt a sémát követik, minden feladat egy–egy anyagrészre kérdez rá, természetesen a pontos feladattípusok vizsgáról vizsgára változnak.

1. feladat

Szerencsejátékot játszunk, minden egyes játszmában 0,49 valószínűséggel nyerünk 100 Ft-ot, 0,51 valószínűséggel pedig veszítünk ugyanennyit. Kezdetben nekünk 1000 Ft-unk van, ellenfelünknek pedig 500. A játék addig tart, amíg valaki el nem veszíti az összes pénzét.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy nyerünk, illetve veszítünk? (4 pont)

(b) Ha több pénzzel kezdünk játszani, akkor nyilvánvalóan nagyobb valószínűséggel nyerünk. Legfeljebb mekkora lehet a nyerésünk valószínűsége? (4 pont)

a)

Egy játék nyerési valószínűsége p, a vesztési valószínűség $1 - p = q$.

$$p = 0,49$$
$$1 - p = q = 0,51$$

A tét mértéke: 100 Ft. A saját pénzünk 1000 Ft. Ebből $n_1 = 1000/100 = 10$ a játékaink száma. Az ellenfél pénze: 500 Ft. Ebből $n_2 = 500/100 = 5$. $n_1 + n_2 = 15$.

A nyerés valószínűsége:

$$P(\text{nyerünk}) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \frac{1 - \left(\frac{0,51}{1,49}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{0,51}{0,49}\right)^{15}} \approx 0,4045$$

$$P(\text{vesztünk}) = 1 - P(\text{nyerünk}) = 1 - 0,4045 = 0,5955$$

b)

1 kört inkább elvesztünk, mint megnyerünk ($p < q$), ellenfelünk pénze konstans ($n_2 = 5$), így alkalmazhatjuk a következő határérték számítást:

$$P(\text{nyerünk}) = \lim_{n_1\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \lim_{n_1\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} =$$
$$= \lim_{n_1\to\infty} \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}} \cdot \frac{\frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}} - 1}{\frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} = \frac{-1}{-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_2}} =$$
$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{n_2} = \left(\frac{0,49}{0,51}\right)^5 \approx 0,8187$$

2. feladat

Egy Markov-lánc állapottere legyen $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, átmenetvalószínűségi mátrixa pedig:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Irreducibilis-e a Markov-lánc? (3 pont)

(b) Határozzuk meg az invariáns eloszlást! (5 pont)

(c) Tegyük fel, hogy az 1-esből indulunk. Átlagosan hány lépéssel érünk vissza? (3 pont)

(d) Tegyük fel, hogy a 2-esből indulunk. Átlagosan hány lépéssel érünk az 5-ösbe? (5 pont)

a)

Szerintem sokat segít, ha felrajzoljuk a mátrix állapotokat is a mátrix széleire.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Az irreducibilis azt jelenti hogy nem felbontható, tehát mindegyik állapot kapcsolódó. Megint másképpen megfogalmazva: bármely állapotból kiindulva elérhető bármely másik állapot. Ezt nagyon jól lehet látni, amennyiben felrajzoljuk az állapotátmeneti gráfot. Azon egyértelműen látható, hogy egy rekurrens osztály van: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b)

Itt a mátrix oszlopait tekintve lehet felírni az alábbi egyenleteket:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= 0,5\pi_1 + \pi_5 \\
\pi_2 &= 0,5\pi_1 + 0,5\pi_2 \\
\pi_3 &= 0,5\pi_2 + 0,5\pi_3 \\
\pi_4 &= 0,5\pi_3 + 0,5\pi_4 \\
\pi_5 &= 0,5\pi_4
\end{aligned}
$$

Ezt meg tudjuk a tanulmányainkból:

$$\sum_i \pi_i = 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5$$

Ezt az egyenletrendszert végig kell oldani, és akkor megkapjuk a megoldást erre kérdésre:

$$\pi_1 = \frac{2}{9}, \pi_2 = \frac{2}{9}, \pi_3 = \frac{2}{9}, \pi_4 = \frac{2}{9}, \pi_5 = \frac{1}{9}$$

c)

Ez nagyon egyszerű, ha már meghatároztuk az invariáns eloszlást:

$$E(T_{1\to 1}) = \frac{1}{\pi_1} = \frac{9}{2} = 4,5$$

d)

A feltételt úgy valósíthatjuk meg, hogy létrehozunk egy új h állapotot, amely a kiindulási állapot lesz és ahonnan a kettes állapotba fogunk átlépni. Az ötös állapotból pedig a h állapotba lépünk. Az új $\mathbf{P}$ mátrix:

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ h \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & h \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Viszont ez a mátrix már nem irreducibilis, hiszen nem csak rekurrens osztályokból áll, hanem tranziens állapot (tranziens állapot = ha elhagytuk az állapotot, akkor már nem térünk bele vissza) is található benne. Ez szintén jól látható az állapotátmeneti gráfon.

Tehát az 1 tranziens osztályt eltávolítva a $\mathbf{P}$ mátrixból megkapjuk az egyetlen $2, 3, 4, 5, h$ rekurrens osztályból álló $\mathbf{P}'$ mátrixot.

$$\mathbf{P}' = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ h \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ennek is fel kell írni és ki kell számolni az invariáns eloszlását:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= 0,5\pi_1 + \pi_h \\ \pi_3 &= 0,5\pi_2 + 0,5\pi_3 \\ \pi_4 &= 0,5\pi_3 + 0,5\pi_4 \\ \pi_5 &= 0,5\pi_4 \\ \pi_h &= \pi_5 \\ 1 &= \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_h \end{aligned}$$

Ezekből kiszámolva:

$$\pi_h = \frac{1}{8}$$

A többi nem érdekes, hiszen ebből kiszámolható a 2-ből 5-be jutás várható értéke. Azért kell levonni 2-t, mert jelenleg a h-ból h-ba megyünk, és nem az a kérdés, a két lépést ami a h-ból indulást és a h-ba érkezést jelenti le kell vonni.

$$E(T_{2\to5}) = E(T_{h\to h}) - 2 = \frac{1}{\pi_h} - 2 = 8 - 2 = 6$$

3. feladat

Két urnában (A és B) összesen két golyó van. Egy szabályos dobókockával dobunk. Ha a dobott szám hatos vagy egyes, akkor egy golyót átrakunk A-ból B-be, a többi esetben egy golyót teszünk át B-ből A-ba. Ha üres urnából kellene golyót áttenni a másikba, akkor nem csinálunk semmit, de azt is egy lépésnek tekintjük. Tekintsük állapotnak a golyók számát az A urnában!

(a) Adjuk meg az átmeneti valószínűségi mátrixot! (5 pont)

(b) Adjuk meg az invariáns eloszlást! (5 pont)

a)

A golyók száma az A urnában adja meg az állapotokat. Összesen két golyó van. Így az A urnában $\{0, 1, 2\}$ golyó lehet. A dobásokat le kell fordítani valószínűségekre:

- 1-es vagy 6-os dobás esetén kettővel csökken az A-ban lévő golyók száma. Ennek $2/6 = 1/3$ valószínűsége van.
- 5-ös szám dobása esetén a golyók száma A-ban 0 lesz. Ennek $1/6$ valószínűsége van.
- A többi szám dobása esetén eggyel csökken az A-ban lévő golyók száma. Ennek $3/6 = 1/2$ valószínűsége van.

Az átmeneti valószínűségi mátrixban a sorok jelzik azokat az állapotokat, amelyikben vagyunk és az oszlopok pedig azokat, amelyikbe megyünk. Így az A-ban lévő golyók számának átmeneti valószínűségi mátrixa:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix} \end{array}$$

Egy kis magyarázat a mátrix elemeihez: A $\mathbf{P}(1, 1)$ elem esetén az üres A-ból próbálunk golyót átrakni: ezt nem tudjuk megtenni: így az első két eset valószínűsége összeadódik, és a kettő összege adja a 3/6-ot. $\mathbf{P}(2, 1)$ esetén is hasonlóan adódik a valószínűség.

b)

Az invariáns eloszlást ebből az egyenletrendszerből kell kiszámolni:

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{3}{6}\pi_0 + \frac{3}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 \\
\pi_1 &= \frac{3}{6}\pi_0 + \frac{2}{6}\pi_2 \\
\pi_2 &= \frac{3}{6}\pi_1 + \frac{3}{6}\pi_2 \\
\sum_i \pi_i &= 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2
\end{aligned}
$$

Kis magyarázat: az első egyenletet úgy kapjuk meg, hogy az átmeneti valószínűségi mátrix első oszlopának megnézzük az állapotát, ami 0. Ebből lesz π_0, az egyenlet bal oldala. Aztán összeszorozzuk az alatta lévő valószínűséget a valószínűség sorának megfelelő állapotú π-jével és összeadjuk: $\frac{3}{6}\pi_0$ az első sor első eleme, $\frac{3}{6}\pi_1$ a második sor első eleme és $\frac{1}{6}\pi_2$ a harmadik sor első eleme. Ezek adják az egyenlet jobb oldalát. Ezt minden oszlopra el kell végezni és így kapjuk a fenti egyenletrendszert. Az utolsó egyenletet pedig abból kapjuk, hogy az invariáns eloszlások összege mindig egyet ad.

Az egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy:

$$\pi_0 = \frac{4}{10}, \pi_1 = \frac{3}{10}, \pi_2 = \frac{3}{10},$$

4. feladat

Egy üzletbe Poisson-folyamat szerint érkeznek a vevők, óránként átlagosan 10.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy 5 perc alatt jön vevő? (3 pont)

(b) Feltéve, hogy 10 percig nem jött senki, mi a valószínűsége, hogy a következő 20 percben legalább ketten jönnek? (3 pont)

(c) Feltéve, hogy az első félórában 4 vevő jött, mi a valószínűsége, hogy összesen 10 vevő jön az első órában? (4 pont)

Bevezető

Ilyen jellegű feladatok a `sztocha_06.pdf`-ben találhatóak.

A Poisson–eloszlás általános képlete λt paraméterrel, ahol a X_t azt jelenti, hogy t idő alatt k számú vevő jön a boltba:

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

a)

Ebben a feladatban a $\lambda = 10$ fő/óra.

Az, hogy öt perc alatt jön vevő, az megegyezik azzal, hogy $1-$ (az első öt percben nem jött vevő):

$$P(\text{keresett}) = 1 - P(X_{\text{első öt perc}} = 0)$$

A paraméter az megváltozik, mert $t = 5$ perc, $\lambda = 10$ marad: $\lambda t = 10 \cdot 5/60 = 5/6$ lesz (10 volt kezdetben, és az 1 órára adott ennyit, most 5 percre kell). Így a képlet:

$$P(\text{keresett}) = 1 - P(X_{\frac{5}{60}} = 0) = 1 - \frac{\frac{5}{6}^0}{0!} e^{-\frac{5}{6}} \approx 0,5654$$

b)

Hasonlóan itt is a paraméter megváltozik ($t = 20$ perc): $\lambda t = 10 \cdot 20/60 = 10/3$.

$$P(X_{1/3} \geq 2) = P(X_{1/2} - X_{1/6} \mid X_{1/6} = 0)$$

Valóban diszjunktak az időtartamok, tehát a feltétel lényegtelen.

$$\begin{aligned} P(X_{20/60} \geq 2) &= 1 - \Big(P(X_{20/60} = 0) + P(X_{20/60} = 1)\Big) = \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^0}{0!} e^{-\frac{10}{3}} \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^1}{1!} e^{-\frac{10}{3}} \approx 0,8454 \end{aligned}$$

c)

Itt ugye az a nehézség, hogy nem diszjunktak az időpillanatok így nem hagyhatóak el a feltételek.

$$\begin{aligned} P(X_{60/60} = 10 \mid X_{30/60} = 4) &= \frac{P(X_1 = 10 \cap X_{1/2} = 4)}{P(X_{1/2} = 4)} \\ &= \frac{P(X_1 - X_{1/2} = 6 \cap X_{1/2} = 4)}{P(X_{1/2} = 4)} \end{aligned}$$

A paraméter alakulása $t = 30$ percre: $\lambda t = 10 \cdot 30/60 = 5$.

$$\frac{P(X_{1/2} = 6 \cap X_{1/2} = 4)}{P(X_{1/2} = 4)} = \frac{\frac{5^6}{6!} e^{-5} \cdot \frac{5^4}{4!} e^{-5}}{\frac{5^4}{4!} e^{-5}}$$

Ez azt jelenti, hogy az első fél órában 4 fő érkezik és a következő fél órában még további 6. Egyszerűsítve:

$$\frac{P(X_{1/2} = 6 \cap X_{1/2} = 4)}{P(X_{1/2} = 4)} = P(X_{1/2} = 6) = \frac{5^4}{4!} e^{-5} \approx 0,1462$$

Ha az elején gondolkoztunk volna, akkor ugyanígy megkaphattuk volna ezt az eredményt: ha egy óra alatt 10 fő érkezik, és az első félórában ebből már megérkezik 4, akkor a következő fél órában 6-nak kell érkeznie, ez már egy független esemény: $P(X_{1/2} = 6)$. Legalább láthatjuk, hogy egy kis gondolkodás és a *brute force* matematika is ugyanarra az eredményre vezet.

5. feladat

Egy üzletben egyetlen eladó dolgozik, aki exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt (az átlagos kiszolgálási idő 5 perc). A vevők érkezése között eltelt idő szintén exponenciális eloszlású, továbbá tudjuk azt is, hogy egy óra alatt átlagosan 8 vevő érkezik. Az üzlet befogadóképessége végtelen.

(a) Mi a valószínűsége, hogy van vevő a boltban? (4 pont)

(b) Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan annyi vevő van a boltban, amennyi a boltban tartózkodó vevők számának várható értéke? (4 pont)

(c) Átlagosan mennyi időt tölt el egy vevő a boltban? (4 pont)

(d) Átlagosan hányan várják azt, hogy végre sorra kerüljenek? (4 pont)

Bevezető

Ez egy $M/M/1$ jellegű feladat. Ezekről a feladattípusokról a `sztocha_08.pdf`-ben lehet többet olvasni. Más feladattípusra nem feltétlenül érvényesek az itt ismertetett képletek, de ezek a képletek pont olyanok, amelyeket érdemes kiírni a használható egy darab A/4-es kézzel írt papírra.

A valószínűségi eloszlás $M/M/1$ általános képlete, ahol π_k megadja a k-adik valószínűséget (itt pl. azt, hogy k vevő van a boltban, és ennek a valószínűségét):

$$\pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

a)

A μ jelöli a kiszolgálás átlagos gyakoriságát, jelenleg $\mu = \frac{60\text{perc}}{5\text{perc/fő}} = 12$ fő/óra.

A λ jelöli a beérkező igények átlagos gyakoriságát, jelenleg $\lambda = 8$ fő/óra.

$$\begin{aligned} P(\text{van vevő}) = 1 - P(\text{nincs vevő}) &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{8}{12}\right)\left(\frac{8}{12}\right)^0 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b)

A boltban tartózkodó vevők várható értéke:

$$E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{8}{4} = 2$$

Annak a valószínűsége, hogy ketten vannak a boltban:

$$P(\text{ketten vannak}) = \pi_2 = \left(1 - \frac{8}{12}\right)\left(\frac{8}{12}\right)^2 \approx 0,1481$$

c)

Átlagosan ennyi időt tölt el egy vevő a boltban:

$$E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4}$$

Átlagosan tehát 1/4 órát, azaz 15 percet tölt egy vevő a boltban.

d)

Az átlagos várakozók száma (w: wait):

$$E(N_w) = \frac{\lambda^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{8^2}{12} \cdot \frac{1}{12 - 8} = \frac{4}{3}$$

Átlagosan tehát 4/3 fő várakozik. Természetesen itt lehet tört számot kapni, ez nem probléma.