Sztochasztikus folyamatok Név:
LGM_MA009_1 Neptun kód:
2015.01.23. Aláírás:

1. Szerencsejátékot játszunk, minden egyes játszmában 0,49 valószínűséggel nyerünk 100 Ft-ot, 0,51 valószínűséggel pedig veszítünk ugyanennyit. Kezdetben nekünk 1000 Ft-unk van, ellenfelünknek pedig 500. A játék addig tart, amíg valaki el nem veszíti az összes pénzét.
   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy nyerünk, illetve veszítünk? (4 pont)
   (b) Ha több pénzzel kezdünk játszani, akkor nyilvánvalóan nagyobb valószínűséggel nyerünk. Legfeljebb mekkora lehet a nyerésünk valószínűsége? (4 pont)

2. Egy Markov–lánc állapottere legyen $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   (a) Irreducibilis-e a Markov–lánc? (3 pont)
   (b) Határozzuk meg az invariáns eloszlást! (5 pont)
   (c) Tegyük fel, hogy az 1-esből indulunk. Átlagosan hány lépéssel érünk vissza? (3 pont)
   ??? (d) Tegyük fel, hogy a 2-esből indulunk. Átlagosan hány lépéssel érünk az 5-ösbe? (5 pont)

3. Két urnában (A és B) összesen két golyó van. Egy szabályos dobókockával dobunk. Ha a dobott szám hatos vagy egyes, akkor egy golyót átteszünk A-ból B-be, ha a dobott szám ötös, akkor minden golyót átrakunk A-ból B-be, a többi esetben egy golyót teszünk át B-ből A-ba. Ha üres urnából ???? kellene golyót áttenni a másikba, akkor nem csinálunk semmit, de azt is egy lépésnek tekintjük. Tekintsük a golyók számát az A urnában!
   (a) Adjuk meg az átmenetvalószínűség mátrixot! (5 pont)
   (b) Adjuk meg az invariáns eloszlást! (5 pont)

4. Egy üzletbe Poisson-folyamat szerint érkeznek a vevők, óránként átlagosan 10.
   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy 5 perc alatt jön vevő? (3 pont)
   (b) Feltéve, hogy 10 percig nem jött senki, mi a valószínűsége, hogy a következő 20 percben legalább ketten jönnek? (3 pont)
   (c) Feltéve, hogy az első félórában 4 vevő jött, mi a valószínűsége, hogy összesen 10 vevő jön az első órában? (4 pont)

5. Egy üzletben egyetlen eladó dolgozik, aki exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki egy vevőt (az átlagos kiszolgálási idő 5 perc). A vevők érkezése között eltelt idő szintén exponenciális eloszlású, továbbá tudjuk azt is, hogy egy óra alatt átlagosan 8 vevő érkezik. Az üzlet befogadóképessége végtelen.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy van vevő a boltban? (4 pont)
   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan annyi vevő van a boltban, amennyi a boltban tartozkodó vevők számának várható értéke? (4 pont)
   (c) Átlagosan mennyi időt tölt el egy vevő a boltban? (4 pont)
   (d) Átlagosan hányan várjak azt, hogy végre sorra kerüljenek? (4 pont)

JÓ MUNKÁT!