实分析习题选解

Notes and Exercises

被电信诈骗的小董

2023 年 5 月 4 日

前言

这是笔记的前言部分.

小董

2023 年 5 月 4 日

目录

1 集合与运算

1.1 集合及其运算

命题 1.1.1: 习题 5

设 A_n 是一集合列, 令

$$B_1 = A_1, B_i = A_i \Big\backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad (i > 1)$$

证明：B_n 互不相交, 且对任意的 n，有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

证明 $1°$ 先证明 B_i 互不相交，

$\forall i \neq j$，不妨设 $i > j$，$\forall x \in A_i$ 且 $x \notin A_k (k \leq i-1)$，有 $x \notin B_k (k \leq i-1)$，即 $x \notin B_j$，从而 $B_i \bigcap B_j = \emptyset$.

$2°$ 再证明两个集合相等.

$\forall n, \forall x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i, \exists k, x \in B_k$, 则 $x \in A_k \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

$\forall n, \forall x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \exists k, x \in A_k$,

若 $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$, 则 $x \in B_k \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

若 $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$, 则 $\exists k_1, k_2, \cdots \text{s.t.} x \in A_{k_i}$.

取 $m = min\{k_1, k_2, \cdots\}$, 知 $x \in A_m, x \notin A_{m-1}, A_{m-2}, \cdots, A_1$. 故 $x \in B_m \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

综合即有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. 证毕. □

命题 1.1.2: 习题 7

设 $f_n(x)$ 是区间 (a, b) 上的单调递增实函数列. 证明：

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \left\{x \Big| \lim_{n\to\infty} f_n(x) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a\}$$

证明 一方面，由数列递增性质以及极限的保序性，若 $f_n(x) > a$, 则有：$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \geq f_1(x) > a$.

另一方面，记 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = a'$, 则 $\forall m \in \mathbf{N}, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时，有 $\mid f_n(x) - a' \mid < \frac{1}{m}$.

则 $f_n(x) > a' - \frac{1}{m}$. 取 $m = \left[\frac{1}{a'-a}\right] + 1$，则 $f_n(x) > a' - \frac{1}{m} \geq a$.

即两侧集合互相包含. 证毕. □

命题 1.1.3: 习题 10

设 $f_n(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数列, 集合 $E \subset \mathbf{R}$, 已知:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathbf{X_E}$$

记 $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq \frac{1}{2}\}$, 求集合 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

证明 当 $n\to\infty$ 时，E_n 中元素都是函数值不小于 $\frac{1}{2}$ 的点. 猜测 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$.

下证这两个集合相等.

$\forall x \in E, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, 则 $\exists N_1$, 当 $n \geq N_1$ 时，有:

$$\mid f_n(x) - 1 \mid < \frac{1}{2} \Rightarrow f_n(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in E_n, n \geq N_1 \Rightarrow x \in \lim_{n\to\infty} E_n$$

$\forall x \in \lim\limits_{n\to\infty} E_n$, 则 $\exists N_2$, 当 $n \geq N_2$ 时，有:

$$x \in E_n \Rightarrow f_n(x) \geq \frac{1}{2}, \forall n \geq N_2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \Rightarrow x \in E$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$. □

命题 1.1.4: 习题 11

设 $A_n = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}\}, n = 1, 2, ...,$ 证明:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Z}; \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Q}.$$

证明 1° 一方面，$\forall x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n, x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k.\exists t, x \in \bigcap\limits_{k=t}^{\infty} A_k$. 即 $x \in A_t, A_{t+1}, ...$

设 $x = \frac{a_1}{t} = \frac{a_2}{t+1}(a_1, a_2 \in \mathbf{Z})$, 变形得 $(a_2 - a_1)t = a_1$, 易见 $a_1 \equiv 0(mod \quad 0)$. 则 $x \in \mathbf{Z}$.

另一方面，$\forall x \in \mathbf{Z}$, 易见 x 位于 A_k 中的第 kx 位，故 $x \in A_k, \forall k \in \mathbf{N}$. 则 $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

于是我们证明了 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Z}$.

2° 一方面，$\forall x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n, x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k.\exists t, x \in \bigcup\limits_{k=t}^{\infty} A_k$. 则 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. 而 $A_k \subset \mathbf{Q}$, 故 $x \in \mathbf{Q}$.

另一方面，$\forall x \in \mathbf{Q}$, 记 $x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$. 由 $x = \frac{p}{q} = \frac{np}{nq}$ 知 $x \in A_{nq}$, 令 $n \to \infty$, 有 $x \in \lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 即 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

于是我们证明了 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Q}$. 证毕. □

命题 1.1.5: 习题 12

设 $0 < a_n < 1 < b_n . n = 1, 2, ...,$ 已知 a_n, b_n 单调下降, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}[a_n, b_n] = (0, 1].$$

证明 往证: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[a_n, b_n] \subset (0, 1] \subset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}[a_n, b_n]$. 即证: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}[a_k, b_k] \subset (0, 1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}[a_k, b_k]$.

一方面，若 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}[a_k, b_k]$, 则 $x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty}[a_k, b_k], \forall n \in \mathbf{N}$.

1° 若 $x \le 0$, 则 $x < a_n, x \notin \bigcup\limits_{k=n}^{\infty}[a_k, b_k]$, 矛盾!

2° 若 $x > 1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ 知，$\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时，$| b_n - 1 |< \varepsilon$. 取 $\varepsilon = x - 1$, 则有 $b_n < x$, 故 $x \notin \bigcup\limits_{k=n}^{\infty}[a_k, b_k]$, 矛盾! 则 $x \in (0, 1]$. 左式得证.

另一方面，若 $x \in (0, 1]. \forall \varepsilon > 0, \exists n$, 当 $k \ge n$ 时，$| a_k - 0 |< \varepsilon$, 即 $a_n < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = x$, 则 $a_k < x \le 1 \le b_k \Rightarrow x \in [a_k, b_k](k \le n)$. 故 $x \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty}[a_k, b_k] \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}[a_k, b_k]$. 右式得证. 证毕. □

1.2 映射

命题 1.2.1: 习题 13

证明 $\mathbf{R^2}$ 中至少有一个圆周不含有理点.

证明 用反证法。假设每个圆周都含有有理点，则 $\forall r > 0, \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\} \bigcap \mathbf{Q} \neq \emptyset$.

故可以找到 $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{Q^2}, r \mapsto (x, y)$ 的一个单射. 则 $c \le N_0 \times N_0 = N_0$. 这与 $c > N_0$ 矛盾. 证毕. □

命题 1.2.2: 习题 15

给出 $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{R}$ 之间的一一对应.

解 在大多数情况下，关于不可数 $\to$ 不可数 $+$ 可数的构造，都是绝大部分个元素映射到自身，剩下可列个元素错位映射.

现给出如下构造：$f_1(x) : \mathbf{Q} + \sqrt{2} \to \mathbf{Q} \bigcup \mathbf{Q} + \sqrt{2}$（两个集合均可列）

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q} \bigcup \mathbf{Q} + \sqrt{\mathbf{2}} \\ f_1(x) & x \in \mathbf{Q} + \sqrt{2} \end{cases}$$

下面是一个 $(0,1]\to(0,1)$ 的构造.

$$f(x)=\begin{cases}x & other\\ \frac{1}{2}x & \exists n\in\mathbf{N},\frac{1}{x}=2^n\end{cases}$$

□

命题 1.2.3: 习题 17

有理系数多项式的实零点称为代数数，不是代数数的实数称为超越数. 证明：全体代数数的集合的势为 N_0, 而超越数的势为 c.

证明 1° 先证明：全体代数数的集合的势为 N_0. 记全体 n 次有理系数多项式的全体为 $A_n, n=1,2,....$

则全体有理系数多项式的全体 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 注意到:

$$A_n=\{f\mid f=a_0x^0+a_1x^1+...+a_nx^n,a_i\in\mathbf{Z},a_n\in\mathbf{N}\}.$$

易见 A_n 与 $(a_1,a_2,...,a_n)$ 对等，故 A_n 的势为 $N_0^n=N_0\Rightarrow A_n$ 可列 $\Rightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 可列.

而 $\forall f\in A_n,f$ 至多有 n 个实零点，即 A_n 对应至多 n 个代数数，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\times\{1,2,...,n\}\to$ 代数数 $\mathbf{M}$.

故 $\mid\mathbf{M}\mid=N_0$.

2° 证明全体超越数构成的集合 $\mathbf{G}$ 的势为 c 是类似第 15 题的，这是因为 $\mathbf{G}=\mathbf{R}\backslash\mathbf{M}\sim\mathbf{R}$. 证明从略. □

命题 1.2.4: 习题 18

$\mathbf{R}$ 上全体开集记为 $\mathcal{T}$，证明 $\mid\mathcal{T}\mid=c$.

证明 一方面，$(-1,1)\in\mathcal{T}\Rightarrow\mid\mathcal{T}\mid\geq\mid(-1,1)\mid=c$.

另一方面，$\forall\mathbf{A}\in\mathcal{T},f:\mathbf{A}\mapsto\mathbf{A}\bigcap\mathbf{Q},\mathcal{T}\to2^{\mathbf{Q}}$ 是单射，故 $\mid\mathcal{T}\mid\leq c$.

证毕.

$Tips:$ 本题还有一般解法，需要如下两个漂亮的结论. 读者可用该结论自行证明本题.

$$\mid A_i\mid=c\Rightarrow\mid\prod_{i=1}^{\infty}A_i\mid=c.$$

一方面，由 $x\mapsto(f_1x,f_2(x),...,f_n(x),...),\mathbf{R}\to\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为单射知 $\mid\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i\mid\geq c$.

另一方面，设 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i=(a^{(1)},a^{(2)},...)$, 其中 $a^{(i)}=0.a_1^{(i)}a_2^{(i)}a_3^{(i)}......$,

显然 $A_i=(0,1]$, 满足 $\mid A_i\mid=c$. 从 $a^{(i)}=0.a_1^{(i)}a_2^{(i)}a_3^{(i)}$...... 中

我们选择 $a^{(i)}$ 的小数点后第 i 位作为数 a 的小数点后第 i 位，则有 $(a^{(1)},a^{(2)},...)\mapsto a,\prod_{i=1}^{\infty}A_i\to\mathbf{R}$ 为单射，故 $\mid\prod_{i=1}^{\infty}A_i\mid\le c$. 证毕.

此结论也即 22 题.

$$\mid A_i\mid=c\Rightarrow\mid\bigcup_{i=1}^{n}A_i\mid=c.$$

显然. 将各个集合映射成数轴上互不相交但相连的区间即可，这里不做证明. □

命题 1.2.5: 习题 20

设 $\mathbf{X}$ 是无限集合，给定：$f:\mathbf{X}\to\mathbf{X},f$ 不是恒同映射. 证明：$\exists\mathbf{E},\mathbf{E}$ 是 $\mathbf{X}$ 的非空真子集且 $f(\mathbf{E})\subset\mathbf{E}$.

证明 由于 $f:\mathbf{X}\to\mathbf{X},f$ 不是恒同映射，故 $\exists a\in\mathbf{X},f(a)\neq a$ 但 $f(a)\in\mathbf{X}$.

令 $\mathbf{E}=\{f(a),f^2(a),...\}$, 则 $f(\mathbf{E})\subset\mathbf{E}$.

由归纳原理可知,$\forall n,f^n(x)\in\mathbf{X}$，即 $\mathbf{E}\subset\mathbf{X}$.

下面只需证明：$\mathbf{E}\neq\mathbf{X}$.

考虑反证法. 假设 $\mathbf{E}=\mathbf{X}$，则 $a\in\mathbf{E}$. 即 $\exists n,f^n(a)=a$,

则 $f^{n+1}(a)=f(a),f^{n+2}(a)=f^2(a),...\Rightarrow\mid\mathbf{E}\mid=n$. 这与 $\mathbf{X}$ 是无限集合矛盾！证毕. □

命题 1.2.6: 习题 25

记区间 $[0,1]$ 上的连续函数全体为 $C[0,1]$，试证明:$\mid C[0,1]\mid=c$.

证明 一方面，取常值函数集合 $A=\{f\mid f(x)=a,a\in[1,2]\}$, 则 $A\subset C[0,1]$, 故 $\mid C[0,1]\mid\ge\mid A\mid=c$.

另一方面，$\forall f\in C[0,1]$, 记 $A_f=\{f(x)\mid x\in[0,1]\bigcap\mathbf{Q}\}$.

易见 A_f 中元素个数为 N_0, 是可列的. 这样的 A_f 的个数为 c.

则 $C[0,1]\to\bigcup_{f\in C[0,1]}A_f=\bigcup_{f\in C[0,1]}\{f(x_1),f(x_2),...\}$ 为单射.

由第 18 题结论可知 $\mid C[0,1]\mid\le\mid\bigcup_{f\in C[0,1]}A_f\mid\le c$. 证毕. □

命题 1.2.7: 习题 26

记 $\mathbf{R}$ 上一切实值函数的全体为 ψ, 试证明：$\mid\psi\mid=2^c$.

证明 构造 $f:2^{\mathbf{R}}\to\psi,A\mapsto\mathbf{X_A}$. 则 f 为单射，可得 $\mid\psi\mid\le 2^c$.

构造 $g:\psi\to 2^{\mathbf{R}^2},f\mapsto\{x,f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}$. 则 g 为单射，可得 $\mid\psi\mid\ge 2^c$.

综上，$|\psi|=2^c$. 证毕.

Tips :25 题是一条条平面内的曲线，26 题是一条条空间内的曲线.25 题取常值函数作为突破口，26 题取特征函数作为突破口.25 题用 $f(x)$ 表征 x，26 题用 $(x,f(x))$ 表征 f. 常值函数与特征函数在今后测度的学习中也常常作为问题的特殊情形，并能通过特征函数找到简单函数，解决可测函数的问题. □

1.3 n 维欧氏空间

命题 1.3.1: 习题 2

证明：$\mathbf{A}\subset\mathbf{R^n}$ 是开集 $\Leftrightarrow \forall\mathbf{B}\subset\mathbf{R^n},\mathbf{A}\bigcap\overline{\mathbf{B}}\subset\overline{\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B}}$

证明 注意到 $\mathbf{A}\bigcap\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{A}\bigcap(\mathbf{B}\bigcup\mathbf{B}')=(\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B})\bigcup(\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B}')$

$\overline{\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B}}=(\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B})\bigcup(\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B})'=(\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B})\bigcup(\mathbf{A}'\bigcap\mathbf{B}')$

故只需证明：$\mathbf{A}\subset\mathbf{R^n}$ 是开集 $\Leftrightarrow\forall\mathbf{B},\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B}'\subset(\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B})\bigcup(\mathbf{A}'\bigcap\mathbf{B}')$.

充分性：当 $\mathbf{A}$ 为开集时，$\mathbf{A}\subset\mathbf{A}'$, 显然成立.

必要性：取 $\mathbf{B}=\mathbf{A^c}$，则 $\mathbf{A}\bigcap\overline{\mathbf{A^c}}\subset\overline{\mathbf{A}\bigcap\mathbf{A^c}}=\emptyset$, 故 $\overline{\mathbf{A^c}}\subset\mathbf{A^c}$，又 $\mathbf{A^c}\subset\overline{\mathbf{A^c}}$，则 $\overline{\mathbf{A^c}}=\mathbf{A^c}$.

所以 $\mathbf{A^c}$ 为闭集，$\mathbf{A}$ 为开集.

可由此题引申出一些有意思的结论：

若 $\mathbf{G_1},\mathbf{G_2}$ 是 $\mathbf{R^n}$ 中互不相交的开集，则 $\mathbf{G_1}\bigcup\overline{\mathbf{G_2}}=\emptyset$.

若 $\mathbf{F_1},\mathbf{F_2}$ 是 $\mathbf{R^n}$ 中互不相交的闭集,则 $\exists\mathbf{G_1},\mathbf{G_2}$ 是 $\mathbf{R^n}$ 中互不相交的开集满足 $\mathbf{F_1}\subset\mathbf{G_1},\mathbf{F_2}\subset\mathbf{G_2}$.

□

命题 1.3.2: 习题 4

若集合 $\mathbf{A}\subset\mathbf{R^n}$ 只有孤立点，证明：$\mathbf{A}$ 是至多可数集.

证明 $\mathbf{A}\subset\mathbf{R^n}$ 只有孤立点 $\Rightarrow\forall x\in\mathbf{A},\exists r>0,B_r(x)\bigcap\mathbf{A}=x$.

注意到 $\mathbf{Q^n}$ 在 $\mathbf{R^n}$ 中稠密. 可取 $y\in B_r(x)\bigcap\mathbf{Q^n}$，则 $x\mapsto y,\mathbf{A}\to B_r(x)\bigcap\mathbf{Q^n}$ 为单射.

故 $|\mathbf{A}|\le|\mathbf{Q^n}|=N_0$. 证毕.

□

命题 1.3.3: 习题 6

$\mathbf{A}\subset\mathbf{R^n}$ 可列，证明：$\exists x\in\mathbf{R^n},s.t.\mathbf{A}\bigcap(\mathbf{A}+x)=\emptyset$. 其中 $\mathbf{A}+x=\{x+y\mid y\in\mathbf{A}\}$.

证明 记 $\mathbf{A}=\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

若 $y\in\mathbf{A}\bigcap(\mathbf{A}+x)$, 则 $\exists m,n,s.t.r_m=r_n+x$. 故 $x=r_m-r_n$.

全体 x 构成集合 $\{r_m-r_n\}$. 显然该集合为可数集. 故 $\exists x\in\mathbf{R^n},x\notin\{r_m-r_n\}$. 证毕.

□

命题 1.3.4: 习题 7，19

设集合 $\mathbf{A}\subset\mathbf{R^n}$. 证明：从 $\mathbf{A}$ 的任意一个开覆盖中可以取出可列个子覆盖.

推论：设集合 $\mathbf{A}\subset\mathbf{R^n}$. 若 $\forall x\in\mathbf{R^n},\exists r,s.t.\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B_r(x)}$ 为可列集，则 $\mathbf{A}$ 是可列集.

证明 有限覆盖定理告诉我们，有界闭集的开覆盖中可以取出有限个子覆盖. 而命题 1.3.4 则是将此结论推广为“任意集合的开覆盖中可以取出可列个子覆盖”.$\{B(x,\sigma_x)\mid x\in\mathbf{A}\}$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个开覆盖. 从每个 $\{B(x,\sigma_x)\}$ 中取出一个有理数点代表这个球邻域, 可知任意集合的开覆盖中可以取出可列个子覆盖. 证毕.

利用习题 19 的结论，习题 7 是显然的. 这里不再赘述. □

命题 1.3.5: 习题 8

设集合 $\mathbf{A},\mathbf{B}\subset\mathbf{R}$. 证明：

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})'=(\overline{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}')\bigcup(\mathbf{A}'\times\overline{\mathbf{B}}).$$

证明 $(a,b)\in(\mathbf{A}\times\mathbf{B})'$

$\Leftrightarrow (a,b)\in\overline{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\backslash\{(a,b)\}}$

$\Leftrightarrow (a,b)\in\overline{(\mathbf{A}\backslash\{a\})\times(\mathbf{B}\backslash\{b\})}$

$\Leftrightarrow (a,b)\in\overline{(\mathbf{A}\backslash\{a\})\times\mathbf{B}}\bigcup\overline{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\backslash\{b\})}$

$\Leftrightarrow \exists\{(a_n,b_n)\}\subset(\mathbf{A}\backslash\{a\})\times\mathbf{B},s.t.(a_n,b_n)\to(a,b)$ 或 $\exists\{(a_n,b_n)\}\subset\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\backslash\{b\}),s.t.(a_n,b_n)\to(a,b)$

$\Leftrightarrow \exists\{a_n\}\subset\mathbf{A}\backslash\{a\},\{b_n\}\subset\mathbf{B},s.t.\{a_n\}\to a,\{b_n\}\to b$ 或 $\exists\{a_n\}\subset\mathbf{A},\{b_n\}\subset\mathbf{B}\backslash\{b\},s.t.\{a_n\}\to a,\{b_n\}\to b.$

$\Leftrightarrow a\in\mathbf{A}',b\in\overline{\mathbf{B}}$ 或 $a\in\overline{\mathbf{A}},b\in\mathbf{B}'$

$\Leftrightarrow (a,b)\in(\overline{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}')\bigcup(\mathbf{A}'\times\overline{\mathbf{B}})$. 证毕.

□

命题 1.3.6: 习题 10

设 $f\in C^1[a,b]$, 令

$$\mathbf{E}=\{x\in[a,b]\mid f(x)=0\}\bigcup\{x\in[a,b]\mid f'(x)>0\}.$$

证明:$\mathbf{E}$ 中每一点皆是 $\mathbf{E}$ 中的孤立点.

证明 考虑反证法. 假设 $x\in\mathbf{E}$ 不是 $\mathbf{E}$ 的孤立点，则 $x\in\mathbf{E}'$.

则 $\exists\{x_n\}\subset\mathbf{E}\backslash x,s.t.x_n\to x$.

此时 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=0$, 与 $x\in\mathbf{E}$ 矛盾.

故而 $\mathbf{E}$ 中每一点皆是 $\mathbf{E}$ 中的孤立点. □

命题 1.3.7: 习题 13

证明：$\mathbf{R}$ 上任何实函数 f 的连续点之集是 G_δ 集.

证明 先证明几个引理.

引理 *1*：设 $f(x)$ 是 R 上的实函数，则对于 $\forall\varepsilon>0,\{x\mid w(x)<\varepsilon\}$ 为开集. 其中 $w(x)=\lim\limits_{\delta\to0^+}sup\{\mid f(x_1)-f(x_2)\mid\mid x_1,x_2\in O(x,\delta)\}$.

引理 1 的证明：记 $E=\{x\in\mathbf{R}\mid w(x)<\varepsilon\}$. 任取 $x_0\in\mathbf{E}$, 则 $w(x_0)<\varepsilon$. 由极限的保号性知，$\exists\delta_0>0,s.t.sup\{\mid f(x_1)-f(x_2)\mid x_1,x_2\in O(x_0,\delta_0)\}$.

易见 $O(x_0,\frac{1}{2}\delta_0)\subset\mathbf{E}$. 故 x_0 是 $\mathbf{E}$ 的内点, 即 $\mathbf{E}$ 是开集.

引理 *2*：设 $f(x)$ 是 R 上的实函数，$f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件为 $w(x_0)=0$.

引理 2 的证明：

必要性：$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Rightarrow,\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0$, 当 $x\in O(x_0,\delta_0)$ 时，$\mid f(x)-f(x_0)\mid<\frac{\varepsilon}{4}$.

故当 $x_1,x_2\in O(x,\delta),\mid f(x_1)-f(x_2)\mid\leq\mid f(x_1)-f(x_0)\mid+\mid f(x_2)-f(x_0)\mid<\frac{\varepsilon}{2}$. 所以当 $0<\delta\leq\delta_0$ 时，$sup\{\mid f(x_1)-f(x_2)\mid x_1,x_2\in O(x_0,\delta)\}\leq\varepsilon$.

故 $w(x)=\lim\limits_{\delta\to0^+}sup\{\mid f(x_1)-f(x_2)\mid\mid x_1,x_2\in O(x,\delta)\}=0$.

充分性：$w(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon,\exists\delta_0>0,s.t.$ 当 $0<\delta\leq\delta_0$ 时，$sup\{\mid f(x_1)-f(x_2)\mid x_1,x_2\in O(x_0,\delta)\}<\varepsilon$. 取 $x_1=x,x_2=x_0$, 得 $\mid f(x)-f(x_0)\mid<\varepsilon\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续.

再证明此题.

由引理 1，引理 2 可知：$\mathbf{E}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbf{R}\mid w(x)<\frac{1}{n}\}$, 故 $\mathbf{E}$ 是 G_δ 集.

□

命题 1.3.8: 习题 15

设 $\{\mathbf{G_k}\}$ 是 $\mathbf{R^n}$ 中开集的升列，有界闭集 $\mathbf{F}$ 是 $\bigcup\limits_k\mathbf{G_k}$ 的子集，证明：$\mathbf{F}$ 含于某个 $\mathbf{G_k}$ 中.

证明 容易认为 $\mathbf{F}$ 包含于一个比较大的 $\mathbf{G_k}$ 中. 有多大？如何刻画多大？

$\bigcup\limits_k\mathbf{G_k}$ 是 $\mathbf{F}$ 的开覆盖，由有限覆盖定理，可以从中取出 $\{\mathbf{G_{K_1}},\mathbf{G_{k_2}},...,\mathbf{G_{k_n}}\}$ 使得 $\mathbf{F}\subset\bigcup\limits_{t=1}^{n}\mathbf{G_{kt}}$.

由 $\mathbf{G_{K_1}}\subset\mathbf{G_{k_2}}\subset...\subset\mathbf{G_{k_t}}$ 知 $\mathbf{F}\subset\bigcup\limits_{t=1}^{n}\mathbf{G_{kt}}=\mathbf{G_{kn}}$. 证毕.

□

命题 1.3.9: 习题 16

设 $\mathbf{F_k}$ 是 $\mathbf{R^n}$ 中有界闭集的下降列. 若 $\mathbf{G}$ 是一个开集满足 $\bigcap\limits_k \mathbf{F_k} \subset \mathbf{G}$, 证明：$\mathbf{G}$ 包含某个 $\mathbf{F_k}$.

证明 类比上一题，发现此题证明需要条件 $\mathbf{G^c}$ 为有界闭集. 如何找到这样一个和 $\mathbf{G^c}$ 性质相似的有界闭集？

考虑取辅助集——有界闭集 $\mathbf{E}, s.t.\mathbf{G} \subset \mathbf{F_1} \subset \mathbf{E}$. 可以看出 $\mathbf{E} \bigcap \mathbf{G^c}$ 为有界闭集. 利用补集性质转化已有条件，可知：$\mathbf{E^c} \bigcup \mathbf{G}$ 包含某个 $\mathbf{F_k}$.

结合待证，我们希望证明更强的：$\mathbf{E^c}$ 不包含 $\mathbf{F_k}$. 这由我们的构造是显然的.

易见 $\{\mathbf{F_k}\}$ 为开集升列，$\mathbf{E} \bigcap \mathbf{G^c}$ 为有界闭集，$\bigcap\limits_k \mathbf{F_k} \subset \mathbf{G} \subset \mathbf{G} \bigcup \mathbf{E^c}$. $\Rightarrow \mathbf{E} \bigcap \mathbf{G^c} \subset \bigcup\limits_k \mathbf{F_k^c}$, 由上题结论，不难有 $\mathbf{F_{k_n}} \subset \mathbf{E^c} \bigcup \mathbf{G}$. 而 $\mathbf{E^c}$ 不包含 $\mathbf{F_k}$，故 $\mathbf{F_{k_n}} \subset \mathbf{G}$. 证毕. □

命题 1.3.10: 习题 18

设 $\mathbf{F_\alpha}$ 是 $\mathbf{R^n}$ 中一族有界闭集，若任取其中有限个 $\mathbf{F_{\alpha_1}}$、$\mathbf{F_{\alpha_2}}$、……、$\mathbf{F_{\alpha_n}}$, 都有 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathbf{F_{\alpha_i}} \neq \emptyset$. 证明：$\bigcap \mathbf{F_\alpha} \neq \emptyset$.

证明 由题中关键词“有界闭集”、“有限”容易联想到有限覆盖定理.

反证法. 假设 $\bigcap \mathbf{F_\alpha} = \emptyset$. 则 $\bigcup \mathbf{F_\alpha} = \mathbf{R^n}$. 故对于某个 $\mathbf{F_{\alpha_0}}, \bigcup F_\alpha$ 是其开覆盖.

由有限覆盖定理，知 $\exists \mathbf{F^c_{\alpha_i}}, \mathbf{F_{\alpha_0}} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} F^c_{\alpha_i}$, 即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathbf{F_{\alpha_i}} \subset \mathbf{F^c_{\alpha_0}}$. 故 $\mathbf{F_{\alpha_0}} \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathbf{F_{\alpha_i}} = \emptyset$. 这与题设矛盾！

证毕！ □

命题 1.3.11: 习题 26

$\mathbf{E}$ 是 $\mathbf{F}$ 的任一无限子集，证明：$\mathbf{F} \subset \mathbf{R_n}$ 是有界闭集当且仅当 $\mathbf{E'} \bigcap \mathbf{F} \neq \emptyset$.

证明 1° 必要性

反证. 假设 $\mathbf{E'} \bigcap \mathbf{F} = \emptyset$. 由 $\mathbf{F}$ 为闭集且 $\mathbf{E}$ 为 $\mathbf{F}$ 的子集可知 $\mathbf{E'} \subset \mathbf{F'} \subset \mathbf{F}$, 故 $\mathbf{E'} \bigcap \mathbf{F} = \mathbf{E'}$. 即 $\mathbf{E'} = \emptyset$.

由 $Bolzano \quad Weierstrass$ 极限点定理可知，有界无限集合必有聚点，即 $\mathbf{E'} \neq 0$. 矛盾！故 $\mathbf{E'} \bigcap \mathbf{F} \neq \emptyset$.

2° 充分性

反证. 若 $\mathbf{F}$ 无界（直观上感觉可以取出足够分散的子集 $\mathbf{E}$, 使得 $\mathbf{E'} = \emptyset$）.

取 $\mathbf{E} = \{x_k \mid k \geq 1\} \subset \mathbf{F_1}$, 使得 $d(x_k, 0) > k$ 且 $d(x_k, x_p) > 1, \forall p \neq k$.

易见此时 $\mathbf{E'} = \emptyset$，则 $\mathbf{E'} \bigcap \mathbf{F} = \emptyset$, 矛盾！故 $\mathbf{F}$ 有界.

若 $\mathbf{F}$ 中存在某收敛点列 $\{x_k\}, x_k \to x$, 取 $\mathbf{E} = \{x_k\}$, 则 $\mathbf{E}' = \{x\}$.

又 $\mathbf{E}' \bigcap \mathbf{F} \neq \emptyset$, 故 $x \in \mathbf{F}$. 这表明 $\mathbf{F}$ 中所有收敛点列所收敛到的聚点都在 $\mathbf{F}$ 中,$\mathbf{F}$ 为闭集.

证毕! $\square$