# 3　第 3 讲: 函数不等式

应用不等式解题的过程也称为**放缩**. 请注意, 放缩是一种做题时采用的手段, 而不是一种“放之四海而皆准”的思想. 我们花上一些时间介绍不等式, 一方面是因为,“放缩”可以大大简化问题, 常被大家称为“奇技淫巧”; 另外一方面是因为, 笔者发现高考题大多离不开指数与对数有关的不等式.

有些老师会认为, 高考题会和所谓的“泰勒展开式”有关. 事实上, 这种说法不完全对. 所谓的泰勒展开式, 给出的是某个函数的级数表现形式, 例如

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

而这并没有给出与高考题有关的不等式 (例如 $\mathrm{e}^x \geq x + 1$). 相比之下, 函数不等式比介绍泰勒展开式来得更有力. 后面也将指出所谓的展开式和不等式有什么联系.

## 3.1　常见函数不等式

### 3.1.1　基本的函数不等式

首先, 我们来谈最基本的函数不等式, 也即上面常常提到的不等式 $\mathrm{e}^x \geq x+1$ 和 $x-1 \geq \ln x$. 笔者将它们称为基本不等式, 是因为基于这两个不等式, 可以变形得到后面所有的不等式. 这两个不等式的证明是简单的, 直接构造函数求导即可.

**定理 3.1** (基本不等式, 指数形式)**.** 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 有 $\mathrm{e}^x \geq x+1$, 取等时当且仅当 $x = 0$.

**证明.** 令 $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, $f'(0) = 0$, 又当 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 从而

$$f(x) \geq f(0) = 0,$$

由此便得到了 $\mathrm{e}^x \geq x + 1 (x \in \mathbb{R})$. □

我们知道, 指数和对数互为相反数, 从而指数的不等式也可以轻松地转化为对数的不等式. 接下来要介绍的, 是与对数有关的不等式 $x - 1 \geq \ln x$.

**定理 3.2** (基本不等式, 对数形式)**.** 当 $x > 0$ 时, 有 $x - 1 \geq \ln x$, 取等时当且仅当 $x = 1$.

**证明.** 该不等式也可以采用构造函数的方式证明, 在这里给出一种更快的方法: 在不等式 $\boxed{\mathrm{e}^x \geq x+1}$ 中, 用 $\ln x$ 代替 $x$ 得

$$\mathrm{e}^{\ln x} = x \geq \ln x + 1,$$

从而得到了 $x-1\geq \ln x$. □

上面这两个不等式可以通过画图理解. 事实上, 直线 $y=x+1$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线, 而直线 $y=x-1$ 是曲线 $y=\ln x$ 在 $(1,0)$ 处的切线, 结合图象中两个函数的凹凸性, 也可以看出不等式成立. 更一般地, 对许多函数, 都可以考虑通过切线放缩.

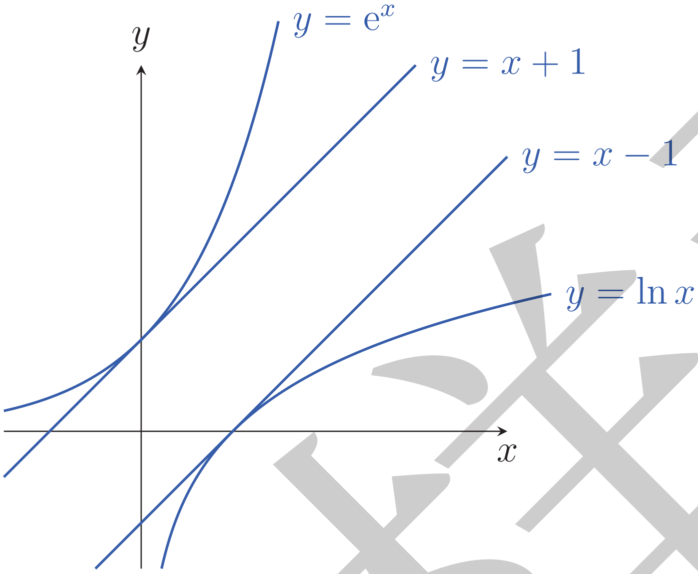


**图 8:** 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\ln x$ 的切线

**题目 1.** (2017 年 II 卷理数) 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geq 0$. 求 $a$.

根据 $x>0$ 知 $f(x)\geq 0$ 等价于 $a(x-1)-\ln x\geq 0$, 从而根据不等式 $x-1\geq \ln x$ 知当 $a=1$ 时不等式成立. 一旦知道答案是 $a=1$, 我们做题时心里就有底了. 在这里还需要借助所谓"矛盾区间法"讨论, 进一步说明当 $0<a<1$ 或是 $a>1$ 时, 都存在区间使得不等式不成立. 在这里写出规范的过程.

**解答.** 原不等式等价于 $a(x-1)-\ln x\geq 0$, 令 $\varphi(x)=a(x-1)-\ln x$, 注意到 $\varphi(1)=0$. 并且计算得 $\varphi'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$, 令 $\varphi'(x)=0$, 解得 $x=\dfrac{1}{a}$.

(1) 若 $a\leq 0$, 则 $\varphi'(x)<0$, $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减, 对任意的 $x\in(1,+\infty)$, 都有

$$\varphi(x)<\varphi(1)=0,$$

矛盾;

(2) 若 $0<a<1$, 则 $\varphi(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$ 单调递减, 对任意的 $x\in\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$, 都有

$$\varphi(x)<\varphi(1)=0,$$

矛盾;

(3) 若 $a=1$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 单调递增,

$$\varphi(x) \geq \varphi(1)=0,$$

满足条件;

(4) 若 $a>1$, 则 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 单调递增, 对任意的 $x \in \left(\frac{1}{a},1\right)$, 都有

$$\varphi(x) < \varphi(1)=0,$$

矛盾.

综上, $a=1$.

本题的题源便是不等式 $\boxed{x-1 \geq \ln x}$. 接下来有很多高考真题, 题源都是这些最基本的函数不等式. 如果知道这些不等式的形式, 虽然不一定能“秒杀”题目, 但是做题时心里就已经有了底气, 做起题目十拿九稳.

### 3.1.2 指数函数不等式

从不等式 $\boxed{\mathrm{e}^x \geq x+1}$ 出发, 我们来创造新的不等式, 主要是一些与指数函数有关的不等式. 这些不等式都可以通过构造函数并求导来证明. 在这里给出的是更方便的做法.

**定理 3.3.** 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 有 $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}x$, 取等时当且仅当 $x=1$.

**证明.** 在不等式 $\boxed{\mathrm{e}^x \geq x+1}$ 中, 用 $x-1$ 代替 $x$ 得

$$\mathrm{e}^{x-1} \geq x-1+1=x,$$

从而得到了 $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}x$. □

**推论.** 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 有 $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{x_0}x+(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}$, 取等时当且仅当 $x=x_0$.

**证明.** 在不等式 $\boxed{\mathrm{e}^x \geq x+1}$ 中, 用 $x-x_0$ 代替 $x$ 得

$$\mathrm{e}^{x-x_0} \geq x-x_0+1,$$

从而得到了 $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{x_0}x+(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}$. □

值得一提的是, 直线 $y=\mathrm{e}^{x_0}x+(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(x_0,\mathrm{e}^{x_0})$ 处的切线. 后面有不少的题目, 还需要用到这个切线的表达式. 通过在不等式 $\mathrm{e}^x \geq x+1$ 中, 用 $x-x_0$ 做替换, 可以更快地得到切线的表达式. 另外, 上面讨论的都是指数函数与直线的关系, 接下来我们给出指数函数与幂函数之间的关系.

**定理 3.4.** 当 $x>0$ 时, 有 $\mathrm{e}^x \geq \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}x^n$, 取等时当且仅当 $x=n$.

**证明.** 在不等式 $\boxed{\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}x}$ 中, 用 $\frac{x}{n}$ 代替 $x$ 得

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \geq \frac{x}{n},$$

两边作 $n$ 次方得 $\mathrm{e}^x \geq \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}x^n$. □

上面的不等式可以说明, 指数函数的增长速度是远大于任何的幂函数的. 事实上, 当 $x \to +\infty$ 时, 有 $\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \to +\infty$. 相比之下, 对数函数的增长速度极慢, 远小于任何的幂函数. 通常, 这被记作 $\mathrm{e}^x \gg x^\alpha \gg \ln x$. 作为以上不等式的例子, 我们下面考虑一个高考题.

> **题目 2.** (2018 年 II 卷理数) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$. 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点, 求 $a$.

如果知道不等式 $\mathrm{e}^x \geq \frac{\mathrm{e}^2}{4}x^2(x>0)$ 的话, 注意到该不等式取等时当且仅当 $x=2$, 因此可以得到 $a=\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. 另外, 本题用分离参数的方法也容易得到答案.

**解答.** 由 $f(x)=0$ 分离变量得

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}=a.$$

令 $\varphi(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$, 其在 $(0,2)$ 单调递减, 在 $(2,+\infty)$ 单调递增, 从而 $a=\varphi(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{4}$.

另外, 根据以上不等式, 还可以得到自然常数 e 有关的一个不等式.

**定理 3.5.** 当 $n \in \mathbb{N}$ 时, 有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$.

**证明.** 在不等式 $\boxed{\mathrm{e}^x \geq x+1}$ 中, 用 $\frac{1}{n}$ 代替 $x$ 得

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}>1+\frac{1}{n},$$

两边作 $n$ 次方得 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$. □

事实上, 著名的自然常数 e 的一种定义方式就是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

上面的不等式说明了, 左边的式子是始终小于 e 的. 如果要让不等式取等的话, 需要另 $\frac{1}{n} \to 0$, 从而 $n \to \infty$. 要估计 e 的值的话, 可以将 $n$ 取得较大. 利用该结论, 可以命制模拟题.

**例 3.1.** 证明: $\left(\frac{2023}{2022}\right)^{2022}<\mathrm{e}$.

**解答.** 在不等式 $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}}$ 中, 取 $n = 2022$ 即可.

利用计算器, 可以计算得到 $\left(\frac{2023}{2022}\right)^{2022} \approx 2.7176$, 非常接近 $\mathrm{e} \approx 2.718$. 我们上面讨论的都是指数函数的下界, 考虑到指数函数增长极快, 似乎很难给出其的一个上界. 然而, 我们仍然能做到这一点, 但是只能在 $x < 1$ 的时候成立. 见下面的不等式:

**定理 3.6.** 当 $x < 1$ 时, 有 $\mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$, 取等时当且仅当 $x = 0$.

**证明.** 在不等式 $\boxed{\mathrm{e}^x \geq x+1}$ 中, 用 $-x$ 代替 $x$ 得

$$\mathrm{e}^{-x} > 1 - x,$$

当 $x < 1$ 时, 两边取倒数得 $\mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$. $\square$

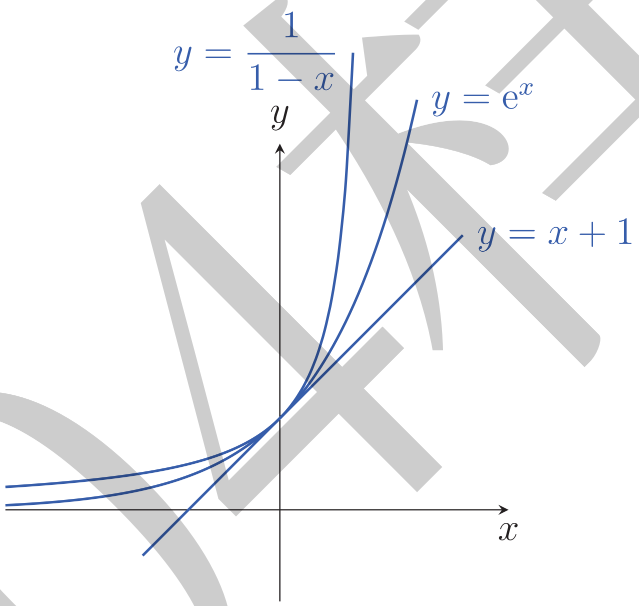


**图 9:** 曲线 $y = \frac{1}{1-x}$, 曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 和直线 $y = x + 1$ 的图象

方便起见, 对 $x \in \mathbb{R}$, 也可以将上面的不等式写作 $(1-x)\mathrm{e}^x \leq 1$. 当 $x < 1$, 移项之后就能得到该不等式. 而当 $x \geq 1$ 时, $(1-x)\mathrm{e}^x \leq 0 < 1$.

> **题目 3.** (2017 年 II 卷文数) 设函数 $f(x) = (1-x^2)\mathrm{e}^x$. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq ax + 1$, 求 $a$ 的取值范围.

观察得到, 当 $a = 1$ 时, 该不等式等价于 $(1-x)\mathrm{e}^x \leq 1$, 这是我们上面所证明的结论, 从而分类讨论的分界点是 $a = 1$. 要怎么做这个题目呢? 仍然需要进行分类讨论.

**解答.** 令 $\varphi(x) = (1-x^2)\mathrm{e}^x - ax - 1$, 其中 $x \geq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) = (1-2x-x^2)\mathrm{e}^x - a$, $\varphi'(0) = 1 - a$, 因此讨论的分界点是 $a = 1$. 进一步计算得 $\varphi''(x) = -(1+4x+x^2)\mathrm{e}^x < 0$, 因

此 $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

(1) 若 $a\geq 1$, 则 $\varphi'(x)\leq\varphi'(0)=1-a\leq 0$, 从而 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减, $\varphi(x)\leq\varphi(0)=0$, 从而原不等式成立;

(2) 若 $a<1$, 则 $\varphi'(0)=1-a>0$, 又当 $x\to+\infty$ 时, $\varphi'(x)\to-\infty$, 因此存在 $x_0\in(0,+\infty)$, 使得 $\varphi'(x_0)=0$. $\varphi(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增, 在 $(x_0,+\infty)$ 单调递减, 对任意的 $x\in(0,x_0)$, 都有 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$, 矛盾.

综上, $a$ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

### 3.1.3 对数函数不等式

类似上面的过程, 从不等式 $\boxed{x-1\geq\ln x}$ 出发, 可以得到许多对数相关的不等式. 这些不等式也常常作为高考题的背景. 需要注意的是, 指数函数相关的加减的替换, 对应的是对数函数中的乘除的替换.

**定理 3.7.** 当 $x>0$ 时, 有 $\ln x\leq\frac{1}{\mathrm{e}}x$, 取等时当且仅当 $x=\mathrm{e}$.

**证明.** 在不等式 $\boxed{x-1\geq\ln x}$ 中, 用 $\frac{x}{\mathrm{e}}$ 代替 $x$ 得

$$\frac{x}{\mathrm{e}}-1\geq\ln\frac{x}{\mathrm{e}}=\ln x-1,$$

从而得到了 $\ln x\leq\frac{1}{\mathrm{e}}x$. □

上面的直线 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$ 其实是曲线 $y=\ln x$ 在 $(\mathrm{e},1)$ 处的切线. 我们也可以得到曲线 $y=\ln x$ 在 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线是 $y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$. 类似地, 在这里也有切线放缩.

**推论.** 当 $x>0$ 时, 有 $\ln x\leq\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$, 取等时当且仅当 $x=x_0$.

**证明.** 在不等式 $\boxed{x-1\geq\ln x}$ 中, 用 $\frac{x}{x_0}$ 代替 $x$ 得

$$\frac{x}{x_0}-1\geq\ln\frac{x}{x_0}=\ln x-\ln x_0,$$

从而得到了 $\ln x\leq\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$. □

上面讨论的都是对数函数的上界, 事实上, 我们也容易得到对数函数的下界.

**定理 3.8.** 当 $x>0$ 时, 有 $\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$, 取等时当且仅当 $x=1$.

**证明.** 在不等式 $\boxed{x-1\geq \ln x}$ 中, 用 $\frac{1}{x}$ 代替 $x$ 得

$$\frac{1}{x}-1\geq \ln\frac{1}{x}=-\ln x,$$

从而得到了 $\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$. □

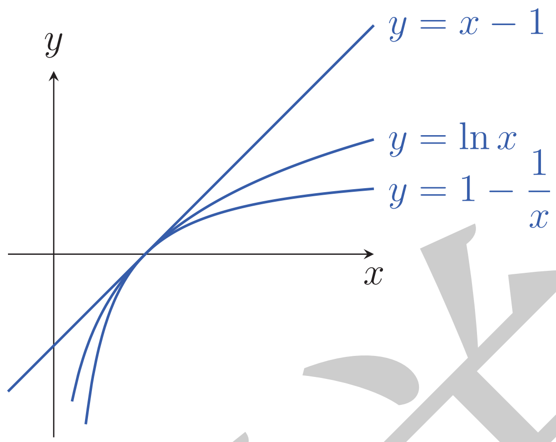


**图 10:** 直线 $y=x-1$, 曲线 $y=\ln x$ 和曲线 $y=1-\frac{1}{x}$ 的图象

在高考题中, 也经常考察对数相关的不等式, 见下面的题目.

**题目 4.** (2016 年 III 卷文数) 设函数 $f(x)=\ln x-x+1$. 证明当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$.

**解答.** 左边等价于 $\ln x<x-1$, 而右边等价于 $\ln x>1-\frac{1}{x}$, 这都是已经证明的不等式.

我们上面所讨论的对数函数, 都是 $\ln x$, 但事实上也可能会出现 $\ln(1+x)$. 注意到我们这时候有 $x-1\geq\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$, 如果用 $x+1$ 代替 $x$, 即可得到

$$x\geq\ln(1+x)\geq 1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}.$$

在见到这种形式的不等式时, 读者也应该反应过来这就是最基本的对数不等式.

**题目 5.** (2021 年乙卷理数) 设函数 $f(x)=\ln(1-x)$, $g(x)=\frac{x+f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x)<1$.

**解答.** 注意到 $xf(x)<0$, 只需证明 $x+f(x)>xf(x)$. 令 $t=1-x>0$, 且 $t\neq 1$, 只需证明 $\ln t>1-\frac{1}{t}$, 这是已经证明的不等式.