MATA KULIAH: LOGIKA INFORMATIKA

Logika Proposisi

kuliah-4 Bi-implikasi dan Validitas

dosen: **Ino Suryana, M.Kom**

S-1 Teknik Informatika Unpad

Bi-implikasi (Bikondisional)

- Bentuk proposisi: “p jika dan hanya jika q”
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

- Dengan kata lain, pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" dapat dibaca "Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*".

Ekivalen

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
  (a) *p* jika dan hanya jika *q*.
  (b) *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*.
  (c) Jika *p* maka *q*, dan sebaliknya.
  (d) *p iff q*

Contoh 23. Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.

(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.

(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.

(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Contoh 24. Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk “*p* jika dan hanya jika *q*”:

(a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
(b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.
(d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.
(e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

Penyelesaian:

(a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.
(b) Anda memenangkan pertandingan jika dan hanya jika anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika dan hanya jika anda punya koneksi.
(d) Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton televisi.
(e) Kereta api datang terlambat jika dan hanya jika saya membutuhkan kereta hari itu.

Contoh 25:

Diberikan pernyataan "Perlu memiliki *password* yang sah agar anda bisa *log on* ke *server*"

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "jika *p*, maka *q*".

(b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tsb.

Penyelesaian:

Misalkan

p : Anda bisa *log on* ke *server*

q : Memiliki *password* yang sah

maka

(a) Jika anda bisa *log on* ke *server* maka anda memiliki *password* yang sah

(b) Ingkaran: "Anda bisa *log on* ke *server* dan anda tidak memiliki *password* yang sah"

Konvers: "Jika anda memiliki *password* yang sah maka anda bisa *log on* ke *server*"

Invers: "Jika anda tidak bisa *log on* ke *server* maka anda tidak memiliki *password* yang sah"

Kontraposisi: "Jika anda tidak memiliki *password* yang sah maka anda tidak bisa *log on* ke *server*"

- Bila dua proposisi majemuk yang **ekivalen bikondisional**, maka hasilnya adalah tautologi.

Kalimat di atas di-Teorema-kan:

- Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekivalen secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Latihan 1

Sebagian besar orang percaya bahwa harimau Jawa sudah lama punah. Tetapi, pada suatu hari Amir membuat pernyataan-pernyataan kontroversial sebagai berikut:

(a) Saya melihat harimau di hutan.

(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan kita diberitahu bahwa Amir kadang-kadang suka berbohong dan kadang-kadang jujur (bohong: semua pernyataanya salah, jujur: semua pernyataannya benar). Gunakan tabel kebenaran untuk memeriksa apakah Amir benar-benar melihat harimau di hutan?

Penyelesaian latihan 1

(a) Saya melihat harimau di hutan.

(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan

p : Amir melihat harimau di hutan

q : Amir melihat srigala

Pernyataan untuk (a): p

Pernyataan untuk (b): $p \to q$

Tabel kebenaran p dan $p \to q$

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Kasus 1: Amir dianggap berbohong, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya salah (p salah, $p \to q$ salah)
Kasus 2: Amir dianggap jujur, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya benar (p benar, $p \to q$ benar).

Tabel menunjukkan bahwa mungkin bagi p dan $p \to q$ benar, tetapi tidak mungkin keduanya salah. Ini berarti Amir mengatakan yang sejujurnya, dan kita menyimpulkan bahwa Amir memang benar melihat harimau di hutan.

Argumen

Valid/sahih – invalid/palsu

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$
\begin{array}{l}
\quad p_1 \\
\quad p_2 \\
\quad \vdots \\
\quad p_n \\
\hline
\therefore\ q
\end{array}
$$

yang dalam hal ini, p_1, p_2, …, p_n disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

Definisi. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Contoh 1

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.

adalah sahih.

Penyelesaian:

Misalkan:

p : Air laut surut setelah gempa di laut

q : Tsunami datang:

Argumen:

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

Cara 1: Bentuklah tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	
T	**T**	**T**	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \rightarrow q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa tabel, p dan $p \rightarrow q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen di atas **sahih**.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \to q)\,] \to q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \to q)\,] \to q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

Tabel 1.16 $[\, p \wedge (p \to q)\,] \to q$ adalah tautologi

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[\, p \wedge (p \to q)\,] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih. ■

Cara Kontradiksi (Validitas) - catatan

- $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ valid?

Andaikan $([p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q)$ SALAH.

Maka (1). q = Salah, dan

(2). $[p \wedge (p \rightarrow q)]$ = Benar.

p	q	$p \rightarrow q$
T	F	F
F	F	T

$p \rightarrow q$ (untuk q = F) = p'

Karena q = Salah, maka bagian dari 2): $(p \rightarrow q)=(p \rightarrow S)=p'$.

Akibatnya $[p \wedge (p \rightarrow q)]=[p \wedge p'] =$ Salah.

Jadi: $[p \wedge (p \rightarrow q)] = S$ (pada pengandaian BENAR) - kontradiksi

Dari pernyataan: (2) → (1) == S → S (BENAR)

Benar → kontradiksi dengan di awal - SALAH

Kesimpulan: pernyataan VALID (sahih).

Soal (cek validitas menggunakan kontradiksi)

1. (if p then q) or (if q then p)
2. (not q) or [not ({if p then ((not q)} and p))]
3. (if p then (not q)) if and only if not(p and q)
4. [if p then (if q then r)] if and only if [if (p and q) then r].

Ubah dulu ke bentuk simbolik proposisi!

Contohnya: ~((p → ~q) and p); ~(p → (~q and p))

Validitas cara kontradiksi

- $\sim((p \rightarrow \sim q) \text{ and } p)$ kontradiksi == SALAH, maka $((p \rightarrow \sim q) \text{ and } p)$ BENAR.

Didapat: 1. p=benar, dan 2. $(p \rightarrow \sim q)$ benar.

Akan ditunjukan nilai kebenaran: $(p \rightarrow \sim q)$

p	~q	(p→~q)
B	B	B
B	S	S

$(p \rightarrow \sim q) == \sim q$ ini tidak disimpulkan. Jadi tidak terjadi kontradiksi, shg pernyataan tidak valid.

Contoh 2:

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

"Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut"

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

<u>Penyelesaian</u>:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

p	q	$p \to q$	
T	**T**	**T**	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	**T**	**T**	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Dari tabel tampak bahwa hipotesis q dan $p \to q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi p salah. Jadi, argumen tersebut tidak sahih atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

Contoh 3:
Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

$\therefore$ 5 adalah bilangan prima

Penyelesaian:
Misalkan p : 5 lebih kecil dari 4
q: 5 adalah bilangan prima.

Argumen:

$$\begin{array}{ll} & p \to \sim q \\ & \sim p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

p	q	$\sim q$	$p \to \sim q$	$\sim p$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	**T**	F	**T**	**T**
F	F	T	**T**	**T**

Tabel memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 dan ke-4 pada tabel tersebut adalah baris di mana $p \to \sim q$ dan $\sim p$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-4 konklusi q salah (meskipun pada baris ke-3 konklusi q benar). Ini berarti argumen tersebut palsu.

- Perhatikanlah bahwa meskipun konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang benar (“5 adalah bilangan prima” adalah benar),

- tetapi konklusi dari argumen ini tidak sesuai dengan bukti bahwa argumen tersebut palsu.

■

Beberapa argumen yang sudah terbukti sahih

1. Modus ponen

$$p \to q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

2. Modus tollen

$$p \to q$$

$$\sim q$$

$$\therefore \sim p$$

3. Silogisme disjungtif

$p \vee q$

$\sim p$

$\therefore q$

4. Simplifikasi

$$p \wedge q$$

$$\overline{}$$

$$\therefore\ p$$

5. Penjumlahan

p

$\therefore\ p \vee q$

6. Konjungsi

p

q

$\therefore\ p \wedge q$

Latihan

1. Diberikan sebuah proposisi:

   Mahasiswa dapat mengambil mata kuliah Strategi Algoritma jika ia telah mengambil mata kuliah Struktur Diskrit.

   Tentukan:

   (a) invers proposisi tersebut,

   (b) pernyataan yang ekivalen dengan proposisi tersebut

(jawaban ada di balik ini)

Jawaban:

- ***p*** **:** mahasiswa telah mengambil mata kuliah Struktur Diskrit
- ***q*** **:** mahasiswa dapat mengambil mata kuliah Strategi Algoritma

(a) **q** jika **p** adalah ekspresi lain dari jika **p** maka **q (p → q)**

invers (~p → ~q)

Jika mahasiswa belum mengambil mata kuliah Struktur Diskrit, maka ia belum dapat mengambil mata kuliah Strategi algoritma.

(b) pernyataan **(p → q)** dapat dinotasikan dengan : **~p** $\vee$ **q**

Mahasiswa tidak mengambil mata kuliah Strukur Diskrit atau mengambil mata kuliah Strategi Algoritma

Kerjakan Soal Nomor 2 – 4.

2. Diberikan dua buah premis berikut:

   (i) Logika sulit atau tidak banyak mahasiswa yang menyukai logika.

   (ii) Jika matematika mudah, maka logika tidak sulit.

- Tunjukkan dengan pembuktian argumen (atau cara lain) apakah masing-masing konklusi berikut sah (valid) atau tidak berdasarkan dua premis di atas:

   a) Bahwa matematika tidak mudah atau logika sulit.

   b) Bahwa matematika tidak mudah, jika banyak mahasiswa menyukai logika.

3. Tentukan validitas argumen berikut:

Mahasiswa diperbolehkan mengambil mata kuliah Matematika Diskrit jika telah melewati tahun pertama dan berada pada semester ganjil. Mahasiswa jurusan Farmasi tidak diperbolehkan mengambil mata kuliah Matematika Diskrit. Dengan demikian mahasiswa jurusan Farmasi belum melewati tahun pertama atau sedang berada pada semester genap.

4. Dari keempat argumen berikut, argumen manakah yang sahih?
   - Jika hari panas, maka Amir mimisan, tetapi hari ini tidak panas, oleh karena itu Amir tidak mimisan.
   - Jika hari panas, maka Amir mimisan, tetapi Amir tidak mimisan, oleh karena itu hari ini tidak panas.
   - Jika Amir mimisan maka hari panas, tetapi hari ini tidak panas, oleh karena itu Amir tidak mimisan.
   - Jika Amir tidak mimisan, maka hari tidak panas, tetapi Amir mimisan, oleh karena itu hari ini tidak panas.

5. Indra, Ical, Parry adalah sekelompok pembunuh. Mereka tertangkap dan sedang diinterogasi oleh polisi dengan *poligraph*:

Indra berkata : Ical bersalah dan Parry tidak bersalah

Ical berkata : Jika Indra bersalah maka Parry bersalah

Parry berkata : Saya tidak bersalah, tetapi Ical atau Indra bersalah.

Tuliskan pernyataan dari tiap tersangka ke dalam proposisi logika.

Buat tabel kebenaran dari pernyataan 3 tersangka tersebut.

Tentukan siapa sajakah yang bersalah (berdasarkan tabel kebenaran yang telah dibuat), bila tes *poligraph* menunjukkan bahwa Ical telah berbohong, sementara kedua temannya mengatakan kebenaran!

(jawaban di balik ini)

Pernyataan (Jawab No. 5):

p: Indra tidak bersalah

q: Ical tidak bersalah

r: Parry tidak bersalah

Proposisi logika:

Indra : $(\sim q) \wedge r$

Ical: $(\sim p) \rightarrow (\sim r)$

Parry : $r \wedge ((\sim p) \vee (\sim q))$

Tabel Kebenaran:

p	***q***	***r***	**Indra**	**Ical**	**Pari**
T	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**

Dari tabel kebenaran pernyataan Ical bernilai salah di mana yang lainnya bernilai benar ada pada baris ke 7. Sehingga dapat disimpulkan bahwa yang bersalah adalah Indra dan Ical.

Indra: $(\sim q) \wedge r$; Ical: $(\sim p) \rightarrow (\sim r)$; Parry: $r \wedge ((\sim p) \vee (\sim q))$

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real x dan y, berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).

(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar.

Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*.

- **Lemma**: teorema sederhana yang digunakan untuk pembuktian teorema lain

- **Corollary**: teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan.

- atau, *corollary* adalah teorema yang mengikuti teorema lain.

Contoh-contoh teorema:

a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
b. Untuk semua bilangan real x, y, dan z, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.
Corollary ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.

Contoh lainnya (dalam kalkulus)

- **Teorema**: $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, dengan $a > 0$
- **Corollary**: $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$, dengan $a > 0$

KULIAH -4

SELESAI

TERIMA KASIH

Assalamu ‘alaikum wr. wb.

Selamat Pagi