LOGIKA PREDIKAT
(Logika Informatika)

MK : Logika Informatika

LOGIKA PREDIKAT

Semester Ganjil 2023/2024

Ino Suryana, Drs., M.Kom
Prodi S-1 Teknik Informatika
Universitas Padjadjaran

Materi Kuantor Ekstensial (Lanjutan)

Logika Predikatif

Fungsi Preposisi

Kuantor : Universal dan Eksistensial
Kuantor : bersusun

Materi Pelengkap:
https://www.tutorialspoint.com/discrete_mathematics/discrete_mathematics_predicate_logic.htm

Kuantifikasi Eksistensial ∃

- **Kalimat yang di-kuantifikasi secara eksistensial**:
- Ada x di dalam semesta pembicaraan dimana P(x) benar.
- Dengan peng-kuantifikasi eksistensial ∃:
- ∃x P(x) "Ada sebuah x sedemikian hingga P(x)."
- "Ada sedikitnya sebuah x sedemikian
- hingga P(x)."
- (Catatan: ∃x P(x) bisa benar atau salah, jadi merupakan sebuah proposisi, tapi bukan **fungsi proposisi**).

Kuantifikasi Eksistensial ∃

- Contoh :
- P(x): x adalah seorang dosen IT.
- G(x): x adalah seorang yang pandai.
- Apakah arti $\exists x\ (P(x) \wedge G(x))$?
- "Ada x sedemikian hingga x adalah seorang dosen IT dan x adalah seorang yang pandai."
- atau
- "Sedikitnya satu orang dosen IT adalah seorang yang pandai."

Kuantor Eksistensial

Contoh

- Ada bilangan prima yang bernilai genap.
- P(x) = bilangan prima
- G(x) = bernilai genap

- Bentuk logika predikat
- $(\exists x)(P(x) \wedge G(x))$

- Dibaca: ada x, yang (dengan) x adalah bilangan prima dan x bernilai genap.

Kuantifikasi Eksistensial ∃

- Contoh lain :
- Misalkan semesta pembicaraan adalah bilangan real.
- Apakah arti dari $\forall x \exists y$ **(x + y = 320)** ?

  $\forall$**x P(x,y): (x - y = 320)**
- "Untuk setiap **x** ada **y** sehingga **x + y = 320**".

Apakah pernyataan ini benar ? **Ya**

Apakah ini benar untuk bilangan cacah? **Tidak**

Kuantifikasi Eksistensial ∃

- Contoh:

  Misalkan semesta pembicaraan x adalah tempat parkir Dept ILKOM UP.

Misalkan*P(x) adalah predikat "x sudah ditempati."*
Maka *existential quantification untuk P(x), ∃xP(x), adalah proposisi:*

- "Beberapa tempat parkir di Dept ILKOM sudah ditempati"
- "Ada tempat parkir di Dept ILKOM yang sudah ditempati"
- "Setidaknya satu tempat parkir di Dept ILKOM sudah ditempati"

Kuantifikasi Eksistensial ∃

"Ada nilai x dalam domain pembicaraan sehingga P(x) bernilai benar"

$$\exists x\ P(x).$$

Soal 3. Tentukan nilai kebenaran dari $\exists x\ P(x)$ bila P(x) menyatakan "$x^2 > 12$" dan domain pembicaraan meliputi semua bilangan bulat positif tidak lebih dari 4.

Disproof dengan *counterexample*

Counter example dari ∀x P(x) adalah sebuah objek c sehingga P(c) salah.

- Pernyataan seperti ∀x (P(x) → Q(x)) dapat di-*disproof* secara sederhana dengan memberikan *counter example*-nya.

Pernyataan: “Semua burung bisa terbang.”

Disproved dengan *counterexample*: Penguin.

Variabel bebas dan variabel terikat

- Sebuah ekspresi seperti *P*(*x*) dikatakan memiliki variabel bebas *x* (berarti, *x* tidak ditentukan).

- Sebuah *quantifier* (∀ atau ∃) *berlaku* pada sebuah ekspresi yang memiliki satu atau lebih variabel bebas, dan *mengikat* satu atau lebih variabel tersebut, untuk membentuk ekspresi yang memiliki satu atau lebih *variabel terikat*.

Contoh Pengikatan

- $P(x,y)$ memiliki 2 variabel bebas, x dan y.
- $\forall x\, P(x,y)$ memilki 1 variabel bebas, dan 1 variabel terikat. [yang mana?]
- "$P(x)$, dimana x=3" adalah cara lain mengikat x.
- Ekspresi dengan <u>nol</u> variabel bebas adalah sebuah proposisi bonafit (nyata)
- Ekspresi dengan <u>satu atau lebih</u> variabel bebas adalah sebuah predikat: $\forall x\, P(x,y)$

Negasi

Hubungan antara kuantor universal dengan kuantor eksistensial

E1 : $\neg(\forall x)\, p(x) \equiv (\exists x)\, \neg p(x)$

E2 : $\neg(\exists x)\, p(x) \equiv (\forall x)\, \neg p(x)$

E3 : $\neg(\forall x) p(x) \rightarrow q(x) \equiv (\exists x)\, p(x) \wedge \neg q(x)$

E4 : $\neg(\exists x) p(x) \wedge q(x) \equiv (\forall x)\, p(x) \rightarrow \neg q(x)$

Negasi

"Setiap mhs dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus 1"

[$\forall x\ P(x)$]

Apakah negasi dari pernyataan ini….?

"Ada seorang mhs dalam kelas ini yang belum mengambil Kalkulus 1" [$\exists x\ \neg\ P(x)$]

Jadi, $\neg\ \forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$.

Negasi (2)

Soal 1. Carilah negasi dari pernyataan berikut:

"Ada politisi yang jujur"

"Semua orang Indonesia makan pecel lele"

Soal 2. Tentukan negasi dari:

$\forall x (x^2 > x)$

$\exists x (x^2 = 2)$

Soal-soal (Logika Informatika – Suprapto)

3. Perhatikan kalimat-kalimat berikut

a. P(x, a)
b. P(a, x) and P(x, f(x))
c. (for some y) P(y, x)
d. (for some y)[P(y, a) or P(f(y), y)]
e. (for some y)(for all x) P(x, y)

A. Misal I interpretasi atas bilangan bulat non-negatif dengan a←0; x ←1; f ← fungsi *successor (yaitu, f1(d) = d + 1); P ← relasi 'kurang dari' (yaitu p1(d1, d2) adalah d1<d2).*

B. Misal J interpretasi atas bilangan bulat non-negatif dan negatif dengan a←0; x ←-1; f ← fungsi *successor (yaitu, f1(d) = d + 1); P ← relasi 'kurang dari' (yaitu p1(d1, d2) adalah d1<d2).*

Pertanyaan: Tentukan nilai kebenaran kalimat-kalimat di atas terhadap interpretasi I dan J.

4. Diketahui himpunan semesta S = {1, 2, 3, 4} dan predikat-predikat:

$P(x) : x + 2 <= 4$,

$Q(x)$: x genap.

a. Tentukan nilai kebenaran dari $(\exists\ x \varepsilon S)(P(x) \wedge \sim Q(x))$.
b. Tentukan negasi dari $(\exists\ x \varepsilon S)(P(x) \wedge \sim Q(x))$ dengan menggunakan suku pengkuantifikasi umum.

Jawab:

a. Predikat berkuantifikasi di atas bernilai benar karena x = 1 ε S membuat $P(1) : 1 + 2 <= 4$ bernilai benar dan $\sim Q(1)$: 1 ganjil bernilai benar, sehingga $P(1) \wedge \sim Q(1)$ benar. Dengan demikian $(\exists\ x \varepsilon S)(P(x) \wedge \sim Q(x))$ bernilai benar.

b. Negasi: $\sim (\exists\ x \varepsilon S)(P(x) \wedge \sim Q(x)) = (\forall\ x \varepsilon S) \sim (P(x) \wedge Q(x))$

$= (\forall\ x \varepsilon S)(\sim P(x) \vee Q(x)) = (\forall\ x \varepsilon S)(P(x) \rightarrow Q(x))$.

Kuantifier Bersusun (Nested Quantifier)

$\forall x \, \forall y \, (x+y = y+x)$

berarti $x+y = y+x$ berlaku untuk semua bilangan real x dan y.

$\forall x \, \exists y \, (x+y = 0)$

berarti untuk setiap x ada nilai y sehingga $x+y = 0$.

$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x+(y+z) = (x+y)+z)$

berarti untuk setiap x, y dan z berlaku hukum asosiatif $x+(y+z) = (x+y)+z$.

Kuantifier Bersusun (Nested Quantifier)

- **Rumusan penting**
  - $(\forall x)(\forall y)\, p(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\, p(x,y)$
  - $(\forall x)(\forall y)\, p(x,y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)\, p(x,y)$
  - $(\exists y)(\forall x)\, p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)\, p(x,y)$
  - $(\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)\, p(x,y)$
  - $(\exists x)(\exists y)\, p(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\, p(x,y)$

Ekivalen Logis

- $(\forall x)A(x) \equiv A(a1) \wedge A(a2) \wedge A(a3) \wedge \ldots A(an)$
- $(\exists x)A(x) \equiv A(a1) \vee A(a2) \vee A(a3) \vee \ldots A(an)$
- $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)A(x,y)$
- $(\exists x)(\exists y)A(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)A(x,y)$
- $(\forall x)R \equiv (\exists x)R \equiv R$
- $(\forall x)(A \rightarrow B(x)) \equiv A \rightarrow (\forall x)B(x)$
- $(\forall x)(T \rightarrow B(x)) \equiv T \rightarrow (\forall x)B(x)$
- $(\forall x)(F \rightarrow B(x)) \equiv F \rightarrow (\forall x)B(x)$

Soal-soal

Soal 5. Artikan kalimat ini dalam bhs Indonesia:

$$\forall x\,(C(x) \vee \exists y\,(C(y) \wedge F(x,y))),$$

bila C(x) : “x mempunyai komputer”,

F(x,y): “x dan y berteman”,

dan domainnya adalah semua mhs di kampus.

Soal 6. Bagaimana dengan berikut ini:

$$\exists x\,\forall y\,\forall z((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z) \rightarrow \neg F(y,z))$$

Soal 7. Nyatakan negasi dari pernyataan

$$\forall x\,\exists y\,(xy=1).$$

Latihan

- Jika $R(x,y)$="x percaya pada y," maka ekspresi di bawah ini berarti:
- $\forall x(\exists y\ R(x,y))=$ Semua orang memiliki orang yang dipercaya
- $\exists y(\forall x\ R(x,y))$ Ada seseorang yang dipercayai oleh semua orang (termasuk dirinya sendiri)
- $\exists x(\forall y\ R(x,y))$ Ada seseorang yang mempercayai semua orang.
- $\forall y(\exists x\ R(x\ ,y))=$ Semua orang memiliki seseorang yang diperc
- $\forall x(\forall y\ R(x\ ,y))=$ Semua orang mempercayai semua orang, termasuk dirinya sendiri

Konvensi

- Terkadang semesta pembicaraan dibatasi dalam quantification, *contoh*,
  - $\forall x>0\ P(x)$ adalah kependekan dari "untuk semua x lebih besar dari nol, $P(x)$ berlaku."
    $= \forall x\ (x>0 \rightarrow P(x))$
  - $\exists x>0\ P(x)$ adalah kependekan dari "ada x lebih besar dari nol yang membuat $P(x)$ "
    $= \exists x\ (x>0 \land P(x))$

Aturan Ekivalensi Quantifier

- Definisi quantifiers:
  semesta pemb. =a,b,c,…
  $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow P(\text{a}) \wedge P(\text{b}) \wedge P(\text{c}) \wedge \ldots$
  $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow P(\text{a}) \vee P(\text{b}) \vee P(\text{c}) \vee \ldots$
- Kemudian kita bisa membuktikan aturan:
  $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\, \neg P(x)$
  $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg P(x)$

- Aturan ekivalensi *proposisi* mana yang digunakan untuk membuktikannya?

Aturan Ekivalensi Quantifier

- $\forall x \, \forall y \, P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \, \forall x \, P(x,y)$

  $\exists x \, \exists y \, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \, \exists x \, P(x,y)$
- $\forall x \, \mathbf{(}P(x) \land Q(x)\mathbf{)} \Leftrightarrow \mathbf{(}\forall x \, P(x)\mathbf{)} \land \mathbf{(}\forall x \, Q(x)\mathbf{)}$

  $\exists x \, \mathbf{(}P(x) \lor Q(x)\mathbf{)} \Leftrightarrow \mathbf{(}\exists x \, P(x)\mathbf{)} \lor \mathbf{(}\exists x \, Q(x)\mathbf{)}$
- Latihan:

  Bisakah Anda membuktikan sendiri?
  - Ekivalensi proposisi apa yang Anda gunakan?

Membuat Quantifier Baru

Sesuai namanya, quantifier dapat digunakan untuk menyatakan bahwa sebuah predikat berlaku untuk sembarang kuantitas (jumlah) objek.

Definisikan $\exists! x\, P(x)$ sebagai "$P(x)$ berlaku untuk *tepat satu* x di semesta pembicaraan."

$\exists! x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \neg \exists y\, (P(y) \wedge y \neq x))$

"Ada satu x dimana $P(x)$ berlaku, dan tidak ada y dimana $P(y)$ berlaku dan y berbeda dengan x."

Perhatikan

- Semesta pemb. = bilangan cacah 0, 1, 2, …
- "Sebuah bilangan x dikatakan *genap*, G(x), **iff** x sama nilainya dengan bilangan lain dikalikan 2."
  $\forall x\ (G(x) \leftrightarrow (\exists y\ \ x=2y))$
- "Sebuah bilangan x dikatakan *prima*, $P(x)$, **iff** x lebih besar dari 1 dan x bukan merupakan hasil perkalian dari dua bilangan bukan-satu."
  $\forall x\ (P(x) \leftrightarrow (x>1 \land \neg\exists yz\ \ x=yz \land y\neq 1 \land z\neq 1))$

Ubah dalam bentuk logika predikat (Jawab tugas kuliah-1) :

1. Jika Siti mirip Dewi dan Dewi mirip Santi, maka Siti mirip Santi.
2. Badu sangat sibuk, tetapi Dito tidak.
3. Amir kenal Bapak Bowo, tetapi Pak Bowo tidak kenal Amir.
4. Tidak semua orang kaya raya.
5. Semua harimau adalah pemangsa.
6. Ada harimau yang hanya memangsa kijang.

(Jawab ?....)

1. Term: Siti , Dewi, sanTi. Predikat: M=mirip

   Fungsi: $(M(S, D) \wedge M(D, T)) \rightarrow M(S, T)$

Jawab

1. Jika Siti mirip Dewi dan Dewi mirip Santi, maka Siti mirip Santi.

– Term: S=Siti, D=Dewi, N=Santi

– Predikat: M=Mirip

– Fungsi: $(M(S,D) \land M(D,N)) \rightarrow M(S,N)$

2. Badu sangat sibuk, tetapi Dito tidak.

– Term: B=Badu, D=Dito

– Predikat: S=sibuk

– Fungsi: $S(B) \land \sim S(D)$

3. Amir kenal Bapak Bowo, tetapi Pak Bowo tidak kenal Amir.

– Term : A=Amir, B=Bowo

– Predikat : K=kenal

– Fungsi: $K(A,B) \land \sim K(B,A)$

4. Tidak semua orang kaya raya.

– Term : $O(x)$=orang

– Predikat : $K(x)$=kaya

– $\sim\forall\ O(x) \rightarrow K(x)$

5. Semua harimau adalah pemangsa.

– Term: $H(x)$= Harimau

– Predikat: $P(x)$ = Pemangsa

– Fungsi: $\forall\ H(x) \rightarrow P(x)$

6. Ada harimau yang hanya memangsa kijang.

– Term: $H(x)$= Harimau, $K(x)$=kijang

– Predikat: $P(x)$ = Pemangsa

– Fungsi: $\exists\ (x)H(x) \wedge P(x) \rightarrow K(x)$

Kasus pada 4, 5, dan 6: x belum diketahui (didefinisikan).

Tugas Logika Predikat

- Kerjakan soal No. 1, 2 (di slide 14 berjudul negasi (2)), dan soal No. 3.A saja (di slide 15).
- Jawaban diketik buat dalam file (soft copy), minggu depan dikumpulkan di LIVE Unpad (pertemuan ke-10).