Examen Juin 2022 - 2h45

1 Question de cours

1. Représenter les nombres suivants en binaire : -11, 255, 6.33 (précision, trois après la virgule)
2. Parler (en 5 lignes max) des représentions des nombres entiers relatifs en binaire.
3. Parler (en 5 lignes max) des représentions des textes en informatique.

2 Code

On donne ce théorème, au cas où vous en aurez besoin.

Théorème 1 *Théorème de Mc Millan Soit $[l_1, l_2, \ldots, l_m]$ une distribution de longueurs, et A un alphabet contenant q symboles. Il existe un code $C \subset A^*$ contenant un mot pour chacune de ces longueurs si et seulement si*

$$\sum_{k=1}^{m} q^{l_k} \leqslant 1$$

1. Les langages binaires ci-dessous sont-ils des codes ? Si non, existe-t-il un code ayant la même distribution de longueurs de mots ?
   (a) $L_1 = \{0, 01, 101, 110\}$
   (b) $L_2 = \{0, 01, 101, 110, 111\}$
   (c) $L_3 = \{00, 01, 110, 001\}$
2. Pour deux entiers positifs n et m, on définit le langage dans un alphabet A^* ci-dessous:

$$L_{n,m} = \{a^n, a^m\}, a \in A^*$$

   (a) Quels sont les mots de A^* qui ont une factorisation dans $L_{n,m}$?
   (b) Selon la valeur de n et m dites si $L_{n,m}$ est un code ou pas. Justifier votre réponse
3. Soit L un langage contenant le mot vide, est-il un code? Justifier

3 Théorie de l'information et Codage de Huffman

On définit une suite géométrique de raison q, une suite dont le terme général est défini comme suit :

$$U_n = \begin{cases} U_0 & \text{pour n} = 0 \\ qU_{n-1} & \text{pour n} > 0 \end{cases}$$

1. Supposons en premier temps que $U_0 = 1$ et q un entier strictement positif. On considère aussi $S = (A, F)$ une source d'information tel que $A = \{a_0, a_1 \ldots a_n\}$ et la fréquence d'apparition de chaque lettre de A est définie par le terme de U_n. Donc a_0 apparaît U_0 fois, a_n apparaît U_n fois.

   Quelle est le codage de Huffman de cette source selon la valeur de q? (distinguez les cas $q > 2$, $q = 2$ et $q = 1$). Justifier votre réponse par une démonstration rigoureuse.

2. Supposons $U_0 < 1$ et $0 < q < 1$. Soit $S = (A, P)$ une source d'information telle que $A = \{a_0, a_1 \ldots a_n ...\}$ c'est-à-dire que A peut être un alphabet contenant une infinité de lettres; et que $P(S = a_i) = U_i$ c'est-à-dire la probabilité d'apparition de la lettre a_i est donnée par U_i.

   Par exemple $U_0 = \frac{1}{3}$,$q = \frac{1}{3}$, donc $P(S = a_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ ainsi de suite.

   - *Donner un exemple de U_0 et de q pour que S soit une source d'information correcte. (Somme des probabilités d'apparition des lettres vaut 1).
   - ** Existe-t-il un U_0 et un q pour que S soit une source d'information correcte mais finie (le nombre de lettres de A est fini). (Somme des probabilités d'apparition des lettres vaut 1)? Justifier