Codage de l'information
Compléments de démonstration et exercices
ITU 2023
Rakotoarimalala Tsinjo

1 Démonstration qu'un langage est un code

Pour démontrer qu'un langage est un code, on utilise souvent la démonstration par l'absurde

Exemple

Dans cet exemple on veut montrer que le langage $L = \{0, 01\}$ est un code.

Par définition un code est un langage dans lequel tous les mots ne possèdent au plus qu'une seule factorisation.

Par l'absurde supposons qu'il n'est pas un code, c'est-à-dire il existe un mot u qui possèdent deux factorisations.

Donc u peut se factoriser de deux façons différentes

$$u = u_1 u_2 \dots u_p \text{ et } u = u_1^{'} u_2^{'} \dots u_t^{'}$$

avec les u_i et les $u_i^{'}$ sont des éléments du langage L.

Remarque

Il existe un x tel que

$$u_i = u_i^{'} \text{ pour tout } i < x$$

et que

$$u_x \neq u_x^{'}$$

Ceci est vrai sinon les deux factorisations seront les mêmes.

On a encore

$$u_x u_{x+1} \dots u_p = u_x^{'} u_{x+1}^{'} \dots u_t^{'}$$

Mais cette fois-ci on est sur que $u_x \neq u_x^{'}$.

Dans ce cas, puisqu'ils ne sont pas égaux et que leurs concaténations donnent le même mot, alors soit u_x est un préfixe de $u_x^{'}$ ou inversement.

Supposons que u_x est un préfixe de $u_x^{'}$. Dans ce cas, puisque $L = \{0, 01\}$, $u_x = 0$ et $u_x^{'} = 01$.

Donc on peut écrire

$$0 u_{x+1} \dots u_p = 01 u_{x+1}^{'} u_{x+2}^{'} \dots u_t^{'}$$

Donc on a encore

$$u_{x+1} \dots u_p = 1 u_{x+1}^{'} u_{x+2}^{'} \dots u_t^{'}$$

Ce qui entraîne que u_{x+1} commence par un 1.

ABSURDE car on a supposé que tous les u_i sont des éléments de L alors qu'aucun des éléments de L commence par 1.

Donc l'hypothèse selon laquelle u a deux factorisations est fausse.

Donc tous les mots possèdent au plus une seule factorisation. Donc L est un code.

Remarque

- L'hypothèse "avoir deux factorisations" suffit car s'il a plus de deux factorisations on peut les séparer deux à deux
- À un certain moment de la démonstration on a supposé que u_x est un préfixe de $u_x^{'}$. On pouvait faire l'inverse c'est-à-dire supposer que $u_x^{'}$ est un préfixe de u_x mais le reste de la démonstration reste équivalente.

À vous de jouer

Montrer que les langages ci-dessous sont-ils des codes?

- $L = \{000, 010, 011, 01001\}$
- $L = \{00, 01, 110, 001\}$
- $L = \emptyset$
- $L = \{\epsilon\}$
- $L = \{0011, 1001, 0110\}$
- $L = \{010101, 0101\}$