

# MODÈLE À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE DE HULL-WHITE

DRONNIER DYLAN, MOUSSEY CHARLIE

RÉSUMÉ. On s'intéresse au pricing des options européennes dans le modèle à volatilité stochastique de Hull-White. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux propriétés mathématiques de la modélisation. Dans un second temps, plusieurs méthodes numériques sont mises en œuvre pour le calcul des prix : Monte-Carlo, formule directe, différences finies. Nous observerons notamment comment se modèle rend compte de l'existence du smile de volatilité implicite.

## INTRODUCTION

L'équation de Black-Scholes utilisée pour modéliser l'évolution du prix d'un actif sous-jacent suppose que la volatilité  $\sigma$  est déterministe et indépendante du prix de l'actif et du temps. Cette hypothèse n'est pas vérifiée en pratique sur les marchés. Pour s'en convaincre, on peut tracer la courbe de la volatilité implicite en fonction du strike  $K$  d'un Call européen à maturité et à sous-jacent fixés. Le modèle de Black-Scholes donne en effet une formule explicite pour le prix de ce produit dérivé. En inversant cette formule, on peut retrouver la volatilité implicite à partir du prix de l'option. Or, il se trouve que pour des Calls sur un même actif sous-jacent et à même date de maturité, la volatilité n'est pas indépendante du strike. La courbe forme au contraire une fonction à peu près convexe décroissante puis croissante. Cette courbe est souvent appelée le Smile de volatilité. On a donc tracé sur la Figure 1 le Smile de volatilité en se basant sur des Calls européens sur indice CAC40 émis par la Société Générale de maturité 16/09/16.

Pour améliorer la modélisation, plusieurs variantes de l'équation de Black-Scholes ont été proposées. Une première solution consiste à supposer que la volatilité est une fonction déterministe du temps  $t$  et du prix du sous-jacent  $S_t$ . Cela correspond au modèle à volatilité locale qui a été développé par Bruno Dupire, Emmanuel Derman et Iraj Kani. Une autre solution consiste à supposer que la volatilité est un processus stochastique. C'est à ce type de modèle que nous nous intéresserons dans la suite et plus précisément à l'équation de Hull-White.

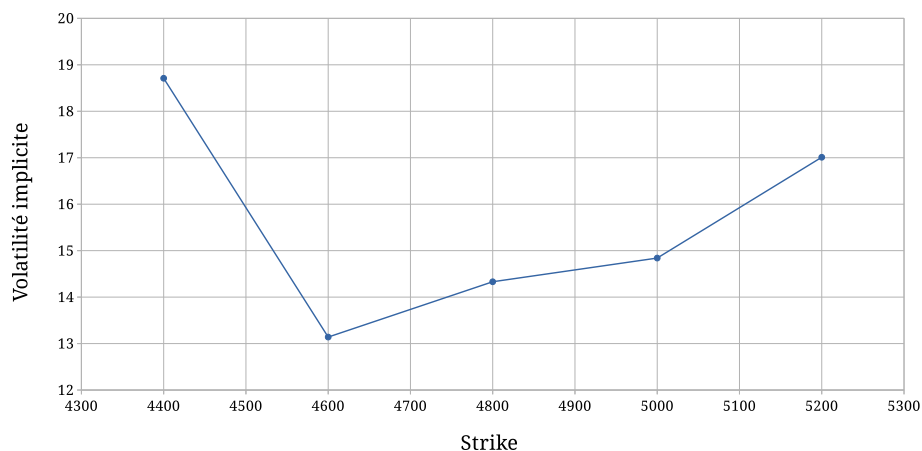


FIGURE 1. Smile de volatilité observé sur des Calls européens sur indice CAC40

## 1. PRÉSENTATION DU MODÈLE ET DE SES PROPRIÉTÉS

**1.1. Mouvements browniens corrélés.** Avant de s'intéresser au modèle de Hull-White, nous devons définir la corrélation entre deux mouvements browniens.

**Définition 1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. On dit que deux mouvements browniens standards  $B$  et  $W$  sont corrélés de coefficient de corrélation  $\rho$  si ce sont des  $\mathcal{F}_t$ -martingales et si  $\langle B, W \rangle_t = \rho t$ .

La proposition suivante nous permettra de simuler des mouvements browniens corrélés et sera utile pour réécrire l'équation générale du modèle de Hull et White :

**Proposition 1.** Si  $W$  et  $B$  sont deux mouvements browniens standards de coefficient de corrélation  $\rho$ , alors :  $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(B - \rho W)$  est un mouvement brownien standard indépendant de  $W$ .

*Démonstration.* On note  $U = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(B - \rho W)$ .  $U$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale continue. Soit  $t \geq 0$ . On a :

$$\langle U, U \rangle_t = t \quad \text{et} \quad \langle U, W \rangle_t = 0$$

D'après la première égalité et la caractérisation de Lévy,  $U$  est un mouvement brownien standard. La deuxième égalité prouve son indépendance par rapport à  $W$ .  $\square$

**1.2. Équation générale.** Le modèle général proposé par Hull et White est le suivant :

$$(HW) \quad \begin{cases} dS_t = \mu(t) S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t \\ d\nu_t = \alpha(t, \nu_t) \nu_t dt + \beta(t, \nu_t) \nu_t dB_t \end{cases}$$

Dans ce modèle, le processus  $S$  représente le prix de l'actif sous-jacent.  $\nu$  représente le carré de la volatilité (appelé la variance instantanée). C'est un processus stochastique qui vérifie une EDS.  $W$  et  $B$  sont deux mouvements browniens sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On note  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration qu'ils engendrent. On suppose qu'ils sont corrélés de coefficient  $\rho \in [-1; 1]$ . On notera  $r$  le taux d'intérêt instantané de l'actif sans risque supposé déterministe. Pour la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

- i Les fonctions  $\mu$  et  $r$  sont lipschitziennes.
- ii  $\alpha$  est continue, minorée par une constante strictement positive et majorée.
- iii  $\beta$  est continue et majorée

Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.** Pour des conditions initiales  $S_0$  et  $\nu_0$  appartenant à  $L^2(\Omega)$ , l'Equation HW admet une unique solution forte  $(S, \nu)$ . De plus, cette solution vérifie pour tout  $T \geq 0$  :

$$\mathbb{E} \left[ \text{ess sup}_{0 \leq s \leq T} S_s^2 \right] < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \text{ess sup}_{0 \leq s \leq T} \nu_s^2 \right] < +\infty$$

*Démonstration.* D'après le théorème d'Itô, il existe bien une unique solution  $\nu$  à l'équation de la volatilité qui vérifie l'inégalité ci-dessus. Cette-dernière assure que le processus suivant est une martingale :

$$Y_t := \int_0^t \sqrt{\nu_s} dW_s$$

On a en fait un résultat analogue au théorème d'Itô dans le cas où le mouvement brownien est remplacé par une martingale de carré intégrable. Ceci prouve l'existence et l'unicité du processus  $S$  quand on se fixe une condition initiale.  $\square$

**1.3. Nature du marché.** On se place dans un marché où les prix des actifs suivent des dynamiques du type Hull-White. Comme on pouvait s'en douter, il ne sera pas possible de simuler des options européennes dans un tel marché :

**Théorème 2.** *Le marché est viable et incomplet.*

*Démonstration.* On cherche à déterminer la famille de probabilités pour lesquelles le prix actualisé de l'actif est une martingale. Pour cela on considère la famille de processus :

$$Z_t^\lambda := \int_0^t \frac{r(s) - \mu(s)}{\sqrt{\nu_s}} dW_s + \int_0^t \lambda_s dU_s \quad \text{où} \quad U = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} (B - \rho W)$$

$Z^\lambda$  est indexé par des processus stochastiques  $\lambda$  qu'on suppose  $\mathcal{F}_t$ -adapté. De plus on suppose que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T \lambda_t^2 dt \right] < \infty$ . Ainsi la deuxième intégrale est une martingale. Pour montrer que le premier terme est également une martingale, on remarque par le lemme d'Itô que :

$$d \left( \frac{1}{\nu_t} \right) = \frac{1}{\nu_t} \left( \left( \beta(t, \nu_t)^2 - \alpha(t, \nu_t) \right) dt - \beta(t, \nu_t) dB_t \right)$$

On montre alors avec le théorème d'Itô que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{dt}{\nu_t} \right] < \infty$ . Ainsi  $Z^\lambda$  est bien d'une martingale. On définit alors une famille de mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^\lambda$  telle que :

$$\frac{d\mathbb{Q}^\lambda_{|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}} = \mathcal{E}(Z^\lambda)_t$$

Où  $\mathcal{E}$  désigne l'exponentielle de Doléans-Dade. On définit le processus :

$$\tilde{Y}_t := \int_0^t \sqrt{\nu_s} dW_s + \int_0^t (\mu(s) - r(s)) ds$$

Or pour tout processus  $\lambda$ , on remarque que :  $\tilde{Y} = Y - \langle Y, Z^\lambda \rangle$ . Ainsi d'après le théorème de Girsanov,  $\tilde{Y}$  est une martingale sous chacune des probabilités  $\mathbb{Q}^\lambda$ . Et comme  $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t d\tilde{Y}_t$ , il y a une infinité de probabilité risque-neutre : le marché est viable et incomplet.  $\square$

Pour pouvoir simuler  $S$  et  $\nu$  sous les probabilités risque-neutre, il faut remarquer que :

$$d\tilde{Y}_t = \sqrt{\nu_t} d\tilde{W}_t \quad \text{où} \quad \tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{\mu(s) - r(s)}{\sqrt{\nu_s}} ds$$

$\tilde{W}$  est un mouvement brownien sous toutes les probabilités risque neutre  $\mathbb{Q}^\lambda$ . De même :

$$d\nu_t = \left( \alpha(t, \nu_t) + \sqrt{1 - \rho^2} \lambda_t \beta(t, \nu_t) \right) \nu_t dt + \rho(r(t) - \mu(t)) \beta(t, \nu_t) \sqrt{\nu_t} dt + \beta(t, \nu_t) \nu_t d\tilde{B}_t^\lambda$$

On a défini :  $\tilde{B}^\lambda = B - \langle B, Z^\lambda \rangle$ . C'est un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}^\lambda$   $\rho$ -corrélé à  $\tilde{W}$ . Ainsi le processus  $\lambda$  agit uniquement sur le drift de la variance instantanée.

**Remarque 1.** *L'incomplétude du marché se traduit par le fait que le pay-off n'est pas mesurable par rapport à la filtration brownienne de  $\tilde{W}$ . On ne peut pas appliquer le théorème de représentation des martingales. Dit autrement, l'option n'est pas simulable car on ne peut pas couvrir le risque lié au caractère aléatoire de la volatilité.*

## 2. PRICING D'UNE OPTION EUROPÉENNE

**2.1. Cas des mouvements décorrélés.** On se place dans le cas où  $\rho = 0$ . On suppose en outre que  $r$  est constant. Hull et White ont trouvé une expression explicite pour le prix de l'option. Pour cela, ils ont démontré le lemme suivant :

**Lemme 1.** *On se place sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}^\lambda$ , où la dynamique du prix de l'actif et de la volatilité peuvent s'écrire :*

$$(HW \text{ neutral-risk}) \quad \begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t d\widetilde{W}_t \\ d\nu_t = (\alpha(t, \nu_t) + \lambda_t \beta(t, \nu_t)) \nu_t dt + \beta(t, \nu_t) \nu_t d\widetilde{B}_t^\lambda \end{cases}$$

Où  $\widetilde{W}$  et  $\widetilde{B}^\lambda$  sont deux mouvements browniens indépendants. Alors :

$$\left\{ \log \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \mid \bar{\nu} \right\} \sim \mathcal{N} \left( rT - \frac{\bar{\nu}T}{2}, \bar{\nu}T \right) \quad \text{où} \quad \bar{\nu} = \frac{1}{T} \int_0^T \nu_t dt$$

*Démonstration.* On a :

$$\log \left( \frac{S_T}{S_0} \right) = \int_0^T \left( r - \frac{\nu_t}{2} \right) dt + \int_0^T \sqrt{\nu_t} d\widetilde{W}_t$$

Or pour  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $v \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbb{Q}^\lambda \left( \log \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \in A \mid \bar{\nu} = v \right) = \int_{\mathbf{W}(\nu_0, v)} \mathbb{Q}^\lambda \left( \log \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \in A \mid \nu = g \right) \frac{\mathbb{Q}_\nu^\lambda(dg)}{\mathbb{Q}_\nu^\lambda(\mathbf{W}(\nu_0, v))}$$

Où  $\mathbf{W}_0^v$  est l'ensemble des fonctions continues de  $[0; T]$  dans  $\mathbb{R}_+$  partant de  $\nu_0$  et de moyenne  $v$ . Cet ensemble est contenu dans l'espace de Wiener classique.  $\mathbb{Q}_\nu^\lambda$  est la loi de  $\nu$  sur l'espace de Wiener. Or :

$$\left\{ \log \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \mid \nu = g \right\} \sim \mathcal{N} \left( rT - \frac{\bar{g}T}{2}, \bar{g}T \right) \quad \text{où} \quad \bar{g} = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$$

Ce résultat est classique et se montre simplement en approchant  $g$  par des fonctions en escalier. Finalement, on en déduit le lemme. □

**Remarque 2.** *Ce lemme n'est valable que si  $\rho = 0$ . La loi de  $\log \left( \frac{S_T}{S_0} \right)$  connaissant le chemin de la volatilité n'est normale que si les mouvements sont décorrélés.*

Maintenant qu'on sait que la loi de l'actif sous-jacent sachant la valeur moyenne du carré de la volatilité est log normale, on peut se ramener à la formule de Black-Scholes :

**Théorème 3.** *Le prix du call européen de maturité  $T$  et de strike  $K$  dans le cas des mouvements browniens décorrélés est donné par la formule suivante :*

$$C_{HW}(x, \sigma, T, K, \lambda) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda} \left[ C_{BS}(x, \sqrt{\bar{\nu}}, T, K) \mid \nu_0 = \sigma^2 \right]$$

Où  $C_{BS}$  est le prix d'un call donné par le modèle de Black-Scholes :  $C_{BS}(x, \sigma, T, K) = xN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$

*Démonstration.* La famille de probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}^\lambda$  donne la famille de prix :

$$C_{HW}(x, \sigma, T, K, \lambda) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ \mid \nu_0 = \sigma^2 \right]$$

On peut réécrire :

$$C_{HW}(x, \sigma, T, K, \lambda) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda} \left[ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ \mid \bar{\nu} \right] \mid \nu_0 = \sigma^2 \right]$$

Le lemme permet d'exprimer l'espérance à l'intérieur à l'aide de la formule de Black-Scholes. Ce qui donne le résultat demandé.  $\square$

On suppose dans la suite que  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  sont des constantes. On note  $\gamma_\lambda := \alpha + \lambda\beta$ . Il n'est pas possible d'obtenir une formule analytique de la distribution de  $\bar{\nu}$ . On peut néanmoins calculer les moments de  $\bar{\nu}$ . On a :

$$\nu_t = \nu_0 \exp \left( \left( \gamma_\lambda - \beta^2 \right) t + \beta \tilde{B}_t^\lambda \right)$$

Si  $\gamma \neq 0$  :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda} [\bar{\nu}] = \nu_0 \frac{e^{\gamma_\lambda} - 1}{\gamma_\lambda}$$

Hull et White utilisent ce résultat pour justifier que  $\lambda$  doit être pris de telle sorte que  $\gamma_\lambda$  soit nul ou du moins petit. En effet si ce n'était pas le cas, des options de différentes maturités donneraient des volatilités implicites très différentes. Or ce n'est pas le cas en pratique sur les marchés financiers. On s'intéresse donc au cas où  $\gamma_\lambda = 0$  :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda} [\bar{\nu}] = \nu_0 \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda} [\bar{\nu}^2] = \frac{e^{\beta^2 T} - \beta^2 T - 1}{\beta^4 T^2} 2\nu_0^2 \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\lambda} [\bar{\nu}^3] = \frac{e^{3\beta^2 T} - 9e^{\beta^2 T} + 6\beta^2 T + 8}{3\beta^6 T^3} \nu_0^3$$

Or on a par la formule de Taylor :

$$\mathbb{E} [f(X)] = f(\mathbb{E}[X]) + \frac{1}{2} f^{(2)}(\mathbb{E}[X]) \text{Var}(X) + \frac{1}{6} f^{(3)}(\mathbb{E}[X]) \text{Skew}(X) + \dots$$

Où Var et Skew sont respectivement le premier et le second moment centré de  $X$ . En appliquant ce développement au prix du call de Hull-White, on obtient la formule de Hull-White :

$$\begin{aligned} C_{HW}(x, \sigma, T, K) &= C_{BS}(x, \sigma, T, K) + \frac{x\sqrt{T}N'(d_1)(d_1 d_2 - 1)}{8\sigma^3} \times \left[ \frac{2\sigma^4 (e^k - k - 1)}{k^2} - \sigma^4 \right] \\ &+ \frac{x\sqrt{T}N'(d_1) ((d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2))}{48\sigma^5} \times \sigma^6 \left[ \frac{e^{3k} - (9 + 18k)e^k + (8 + 28k + 18k^2 + 6k^3)}{3k^3} \right] \end{aligned}$$

Où  $k = \beta^2 T$ . Finalement, on obtient une formule explicite dans ce cas particulier. Cette formule nous montre que le modèle de Black-Scholes surestime le prix des calls à la monnaie (quand le prix du sous-jacent est égal au strike) et sous-estime le prix des calls hors-jeu (le prix du sous-jacent est inférieur au strike). Nous observerons ces résultats dans la section suivante.

**2.2. Cas des mouvements corrélés.** Dans le cas où les mouvements sont corrélés, il n'y a pas *a priori* une probabilité risque neutre plus pertinente qu'une autre. Pour les simulations, nous serons donc obligés de fixer  $\lambda$  arbitrairement et le pricing se fera par méthode de Monte-Carlo en utilisant un schéma d'Euler explicite aléatoire classique.

### 3. SIMULATION NUMÉRIQUE

Le code source de toutes les simulations est disponible à l'adresse suivante :

<http://github.com/dylandronnier/HW>.

**3.1. Indice de volatilité.** Avant d'effectuer les simulations, il est préférable d'avoir une idée de la dynamique de la volatilité. Sur certains marchés il existe des indicateurs de volatilité. Par exemple le VIX est un indicateur de volatilité du marché financier américain. Il est établi quotidiennement par le Chicago Board Options Exchange. Cet indice est calculé en faisant la moyenne des volatilités sur les options d'achat et les options de vente sur l'indice Standard & Poor's 500 (S&P 500). On a représenté son évolution entre décembre 2012 et juin 2015 sur la Figure 2 à partir des données de Yahoo Finance.

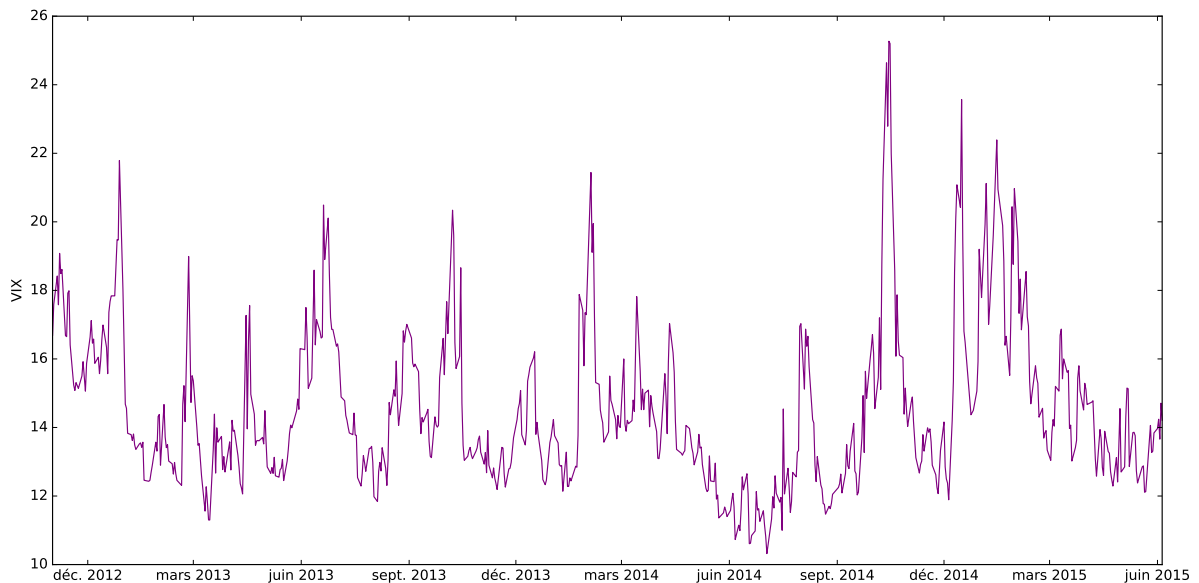


FIGURE 2. Valeurs historiques du VIX

Le VXN est également un indicateur de volatilité. Il est uniquement basé sur la bourse NASDAQ. On a représenté son évolution entre décembre 2012 et juin 2015 sur la Figure 3. On voit que les 2 indices sont fortement corrélés.

**Remarque 3.** *Plus la valeur d'un indicateur de volatilité est forte, plus les marchés ont une nervosité élevée et donc un pessimisme élevé. Une faible valeur, à l'inverse, indique un relatif optimisme sur le marché. Sur les 15 dernières les plus grandes valeurs atteintes par le VIX ont été :*

- de 58 en septembre 2001 après les attentats
- 58 entre juillet et novembre 2002 (scandale Enron)
- 59 en octobre 2008 (crise des subprimes)

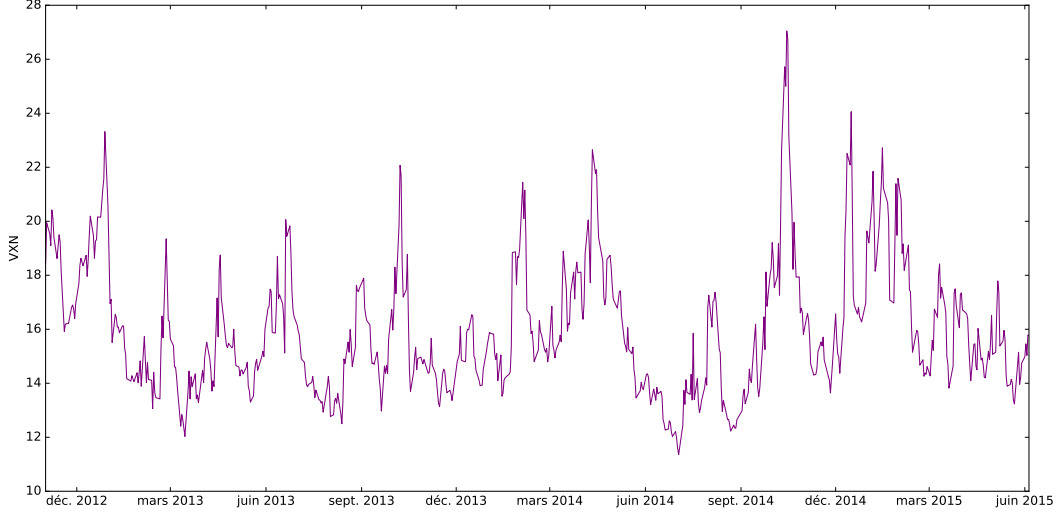


FIGURE 3. Valeurs historiques du VIX

**Remarque 4.** *En fait, il existe des contrats à terme basé sur le VIX. De tels contrats permettent de couvrir le risque lié au caractère aléatoire de la volatilité qui rend le marché incomplet. En fait, on peut rendre le marché complet quand les actifs suivent le modèle de Hull-White en supposant que le carré la volatilité est lui-même un actif. Acheter de la volatilité permet de se couvrir contre une hausse de volatilité.*

**3.2. Simulation sous probabilité historique.** On commence simplement en simulant les chemins de  $S$  et  $\nu$  en utilisant l'équation sous probabilité historique. Pour cela nous avons choisi des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  qui nous semblaient cohérentes :

$$\alpha(t, x) = \max(a(\sigma^* - \sqrt{x}), \delta) \quad \text{et} \quad \beta(t, x) = \text{constante} = \beta$$

On a pris  $\delta$  très petit pour que sur les 3 chemins simulés  $\alpha > \delta$ . 0 est un point d'équilibre de l'EDS vérifiée par  $\nu$ . Ce n'est bien sûr pas une solution concevable. Pour que ce point ne soit pas attractif, il faut que  $a$  soit suffisamment grand par rapport à  $b^2$ . Dans ce cas, le processus  $\nu$  semble avoir une loi stationnaire d'espérance  $(\sigma^*)^2$ .

$\sigma^*$  est donc la volatilité moyenne historique sur le marché. Pour  $a$  et  $\beta$  nous avons choisi des valeurs qui permettent des sauts assez rapides entre 0.10 et 0.20 :

$$\mu = 0.075 \quad \sigma^* = 0.145 \quad a = 800 \quad \beta = 2 \quad \rho = 0.1$$

Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 4.

**3.3. Comparaison du prix des calls : Hull-White vs Black-Scholes.** On se place dans le cas où  $\rho = 0$  sous la probabilité risque-neutre qui annule le drift de la variance instantanée. Dans cette partie, on utilise donc la formule d'Hull-White. Tout d'abord, on peut comparer le prix du call de Hull-White avec le prix que l'on aurait trouvé avec le modèle de Black-Scholes. Les résultats sont présentés sur la figure Figure 5. Comme la différence entre les 2 modèles est très faible on a multiplié par 10 la différence. Comme nous l'avons dit dans la section précédente, on voit que le modèle de Black-Scholes surestime le prix de l'option lorsque celle-ci est dans la monnaie et le sous estime lorsque l'option est hors monnaie. Dans tout le reste du rapport, la maturité des options est fixée à  $T = 180$  jours. Le taux d'intérêt est supposé nul :  $r = 0$ .

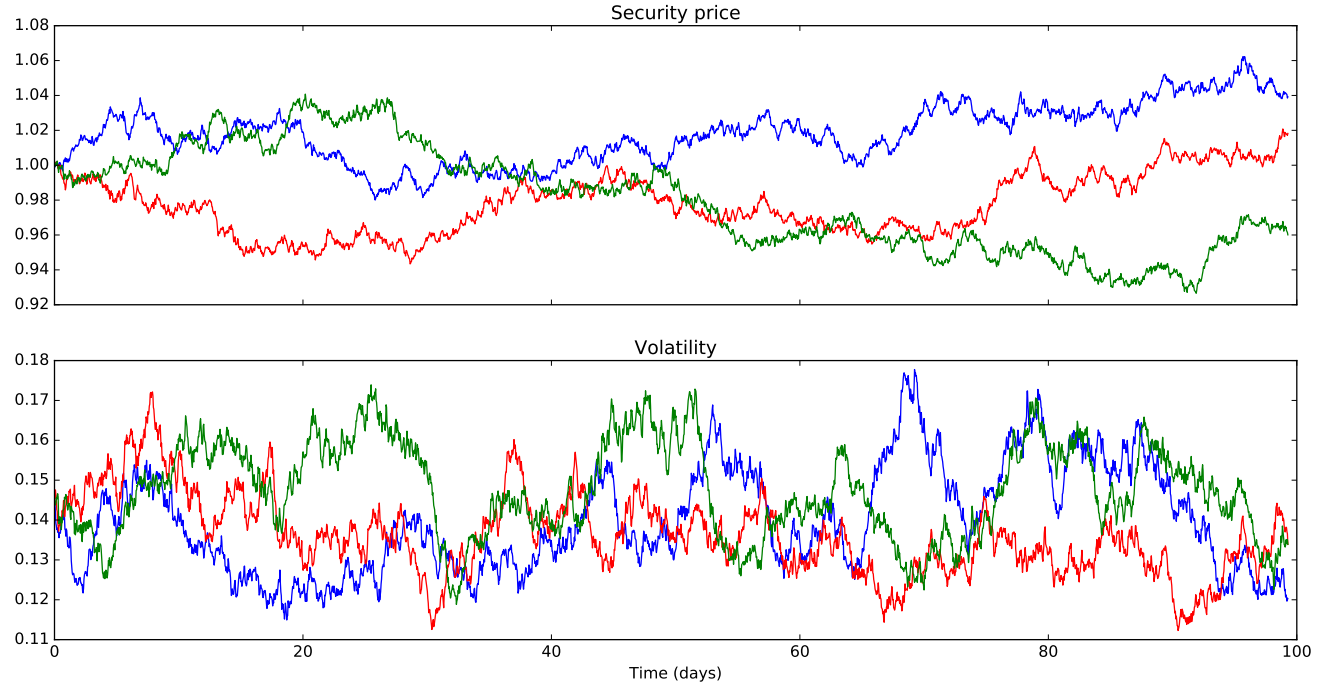
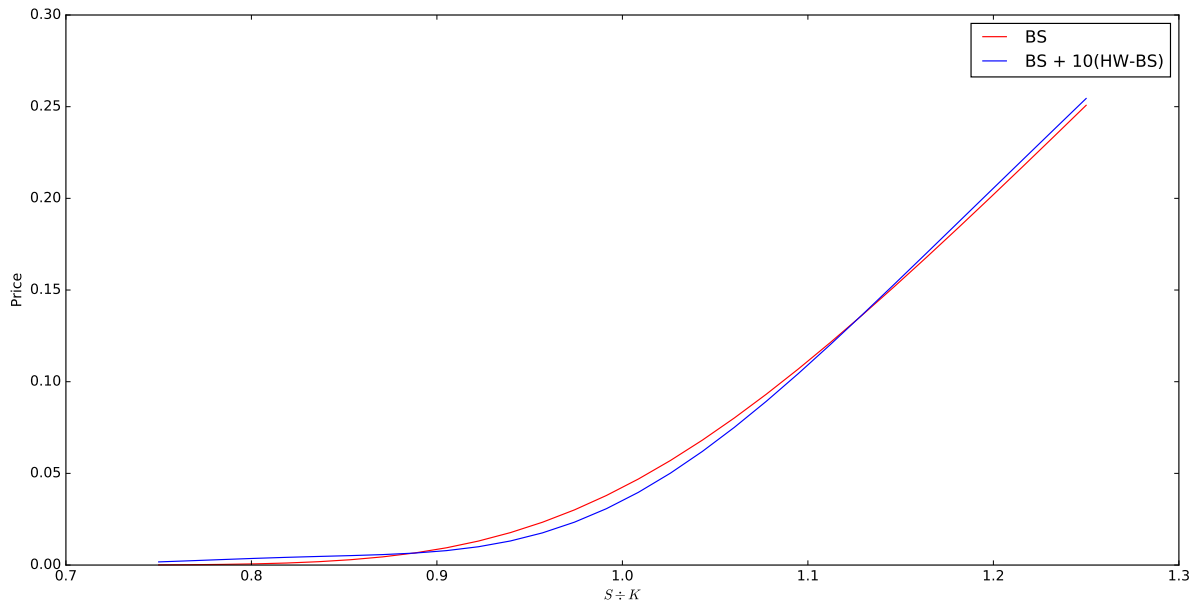


FIGURE 4. 3 trajectoires du modèle sous probabilité historique

FIGURE 5. Prix obtenu par Black-Scholes comparé au prix obtenu par Hull-White ( $\beta = 1.0$ )

Comme on pouvait s'y attendre plus la valeur de  $\beta$  est grande plus le biais entre le modèle de Black-Scholes et le modèle de Hull-White est grand (Figure 6). En effet prendre  $\beta$  nul revient à considérer une volatilité déterministe constante (car le drift est nul) et donc retomber sur le modèle de Black-Scholes.



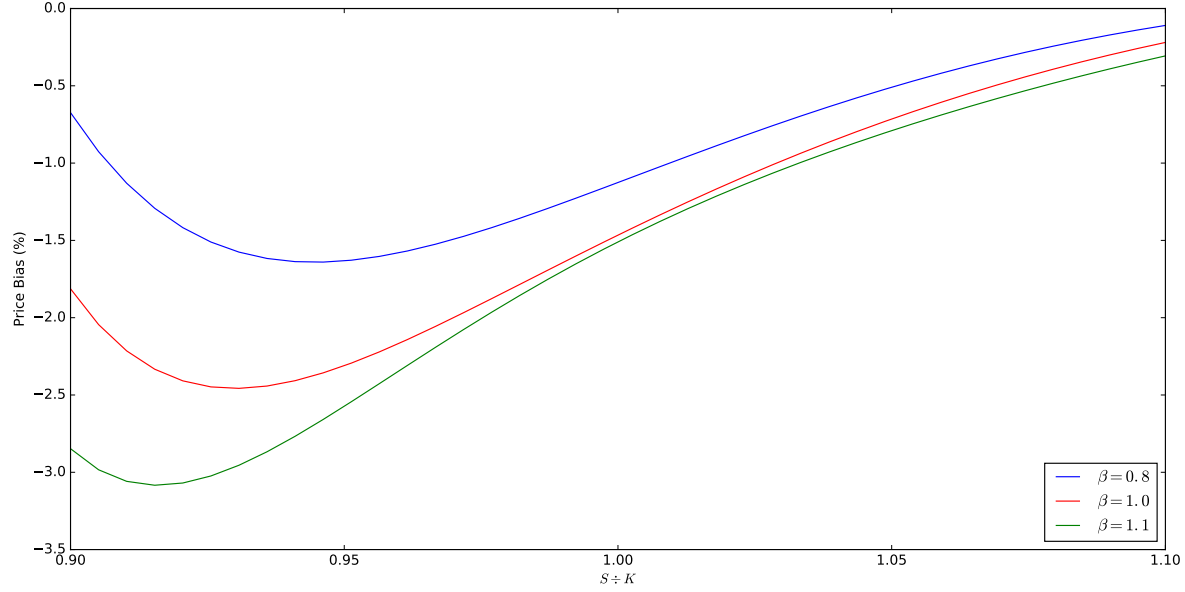
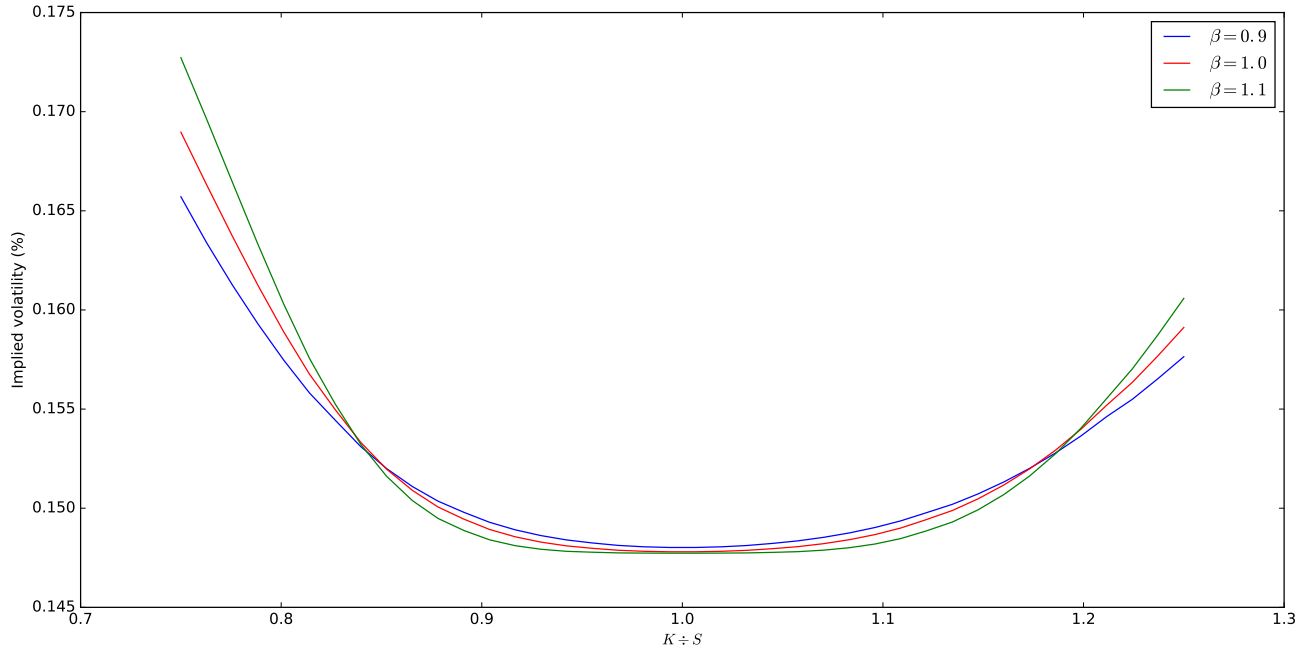


FIGURE 6. Biais entre le prix calculé par la formule de Hull-White et le prix de Black-Scholes

Enfin, on peut tracer le smile de volatilité. Pour inverser la formule de Black-Scholes et en déduire une volatilité implicite, on effectue une recherche de Newton-Raphson du zéro de la fonction  $C_{BS}(\sigma) - C_{HW}$ . Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 7. Le smile prend des valeurs cohérentes. On remarque également que plus  $\beta$  est grand, plus la convexité du smile est accentuée.

FIGURE 7. Smile de volatilité obtenu à partir de la formule de Hull-White ( $\gamma_\lambda = 0$ )

**3.4. Méthode de Monte-Carlo.** Dans cette partie, on relâche dans un premier temps la contrainte  $\gamma_\lambda = 0$ . Comme ce qui est fait dans l'article, prenons :

$$\gamma_\lambda = a(\sigma^* - \sqrt{\nu})$$

On choisit les valeurs suivantes :

$$a = 10 \quad \sigma^* = 0.15 \quad \sigma_0 = \sqrt{\nu_0} = 0.15 \quad \beta = 1.0$$

Même si la formule de Hull-White n'est plus valable, on peut toujours appliquer le résultat du théorème 3. Il suffit alors de simuler  $V$  pour calculer le prix final. On simule en tout 20000 trajectoires. Le smile obtenu obtenu dans ce cas est représenté sur la Figure 8.

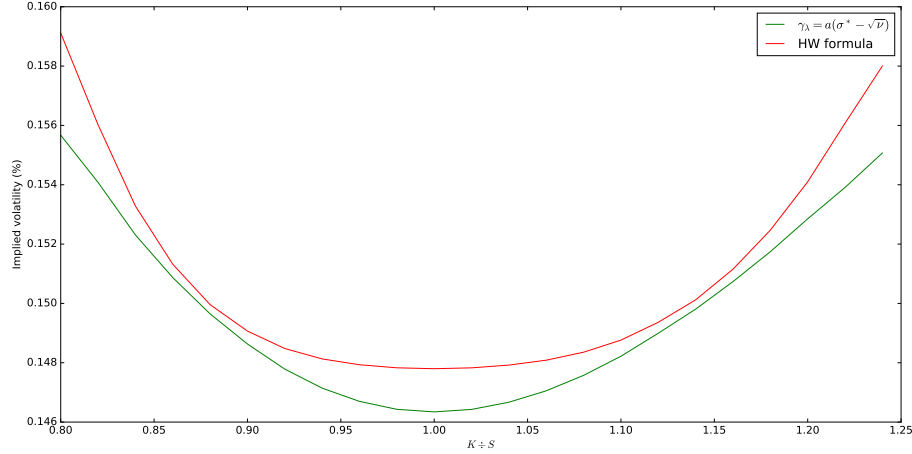


FIGURE 8. Comparaison des smiles sous deux probabilités risque-neutre différentes

On fait ensuite l'hypothèse que  $\rho$  est non nul tout en imposant  $\gamma_\lambda = 0$  pour observer l'effet de la corrélation sur le prix du call de Hull-White. Cette fois, le théorème 3 n'est plus valide. Il faut donc simuler  $S$  également. Pour simuler deux mouvements browniens corrélés, nous en simulons deux corrélés puis utilisons la proposition 1. Les résultats que nous avons obtenus n'étaient pas cohérents dans le cas où  $\rho$  était positif. Cela peut être dû au choix de la probabilité risque-neutre. Les résultats dans le cas où  $\rho$  est négatif sont représentés sur la Figure 9.

**3.5. Méthode des différences finies.** Une dernière possibilité pour simuler le prix de l'option est d'utiliser une méthode des différences finies. Pour cela, on pose :  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$f(t, S, \nu) = f(t, S, \sigma^2) = C_{HW}(S, K, T - t)$$

On sait alors par la formule de que :

$$\partial_t f + \frac{1}{2} \left( x^2 y \partial_{x,x} f + \beta^2 y^2 \partial_{y,y} f \right) - r f = -r x \partial_x f - \gamma_\lambda y \partial_y f$$

Avec la condition au limite :  $f(T, x, y) = (x - K)_+$ . On a utilisé une méthode des différences finies pour résoudre numériquement cette équation. Les valeurs qui ont été prises sont les mêmes qu'à la sous-section 2 :  $\gamma_\lambda = 0$ ,  $\beta = 1.0$  et  $K = 1$ . Les résultats de cette simulation sont représentés sur la Figure 10. L'avantage de la méthode par EDP est qu'elle donne les toutes les valeurs d'un seul coup (en fonction des paramètres  $\sigma$  et  $S$ ). On remarque que plus la volatilité  $\sigma$  à l'instant 0 est importante, plus le call coûte cher ce qui est cohérent.

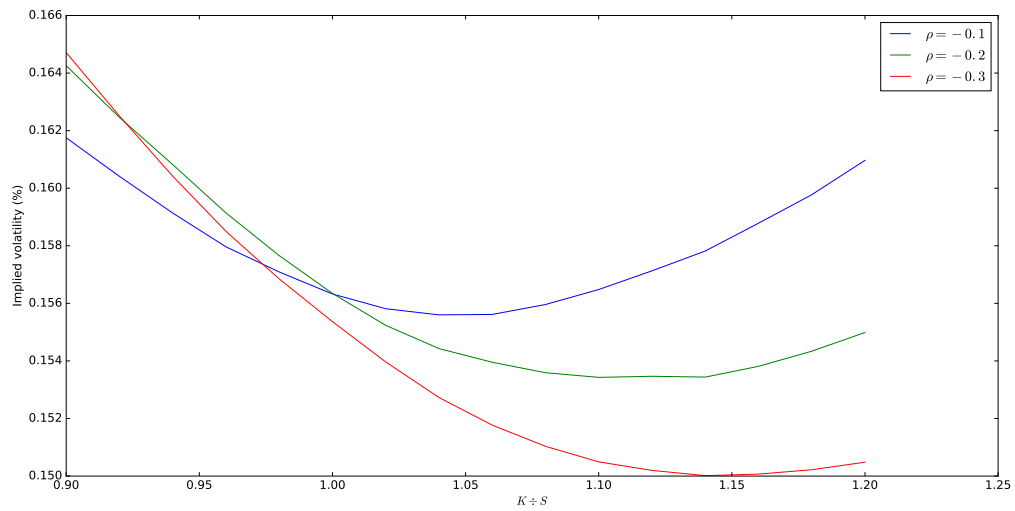
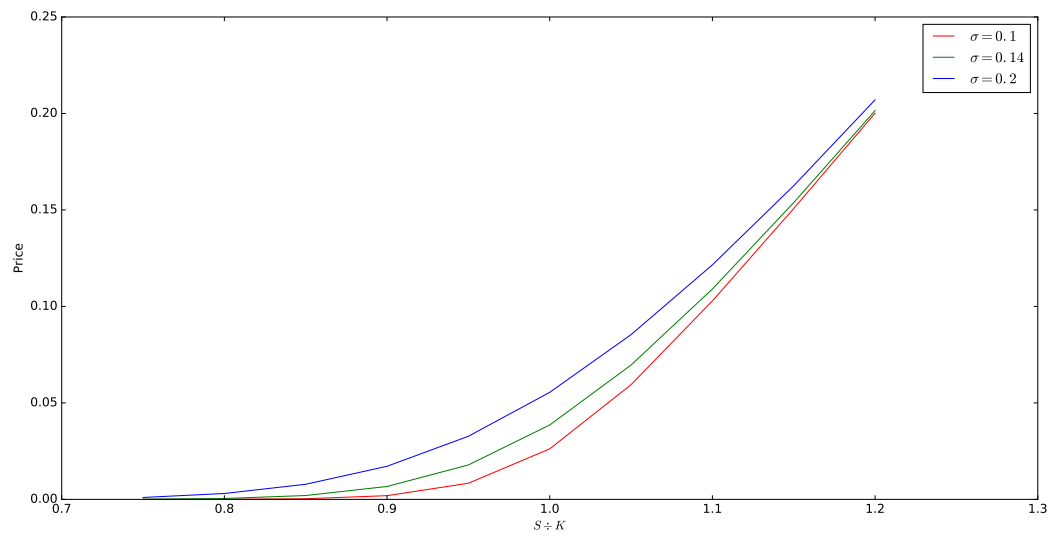

 FIGURE 9. Influence de  $\rho$ 


FIGURE 10. Pricing par EDP

## CONCLUSION

En conclusion, le modèle de Hull-White est bien plus complexe que le modèle de Black-Scholes. Il rend le marché financier incomplet et donc les options n'ont pas *a priori* un prix unique fixé. Néanmoins, on a vu dans le cas décorrélé un candidat naturel pour calculer les prix est la probabilité risque neutre qui annule le drift de la variance instantanée. On peut alors obtenir une formule explicite du prix d'un call par exemple : la formule de Hull-White. Cette formule permet bien de retrouver le smile de volatilité. Elle montre également que le modèle de Black-Scholes surestime la valeur de l'option quand elle est dans la monnaie et la sous-estime lorsqu'elle est hors-jeu. Dans le cas où les mouvements sont corrélés, le prix s'obtient par méthode de Monte-Carlo ou par une résolution numérique d'EDP en fixant une probabilité risque-neutre. Néanmoins, les résultats trouvés ne semblent pas tous très pertinents.

Après l'article de Hull et White, Heston a proposé un autre modèle qui suppose que la variance instantanée vérifie l'équation suivante

$$d\nu_t = \kappa(\nu^* - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dB_t$$

Dans un autre travail, il pourrait être intéressant de comparer le modèle de Hull-White avec celui d'Heston.

## TABLE DES FIGURES

1	Smile de volatilité observé sur des Calls européens sur indice CAC40	1
2	Valeurs historiques du VIX	6
3	Valeurs historiques du VXN	7
4	3 trajectoires du modèle sous probabilité historique	8
5	Prix obtenu par Black-Scholes comparé au prix obtenu par Hull-White ( $\beta = 1.0$ )	8
6	Biais entre le prix calculé par la formule de Hull-White et le prix de Black-Scholes	9
7	Smile de volatilité obtenu à partir de la formule de Hull-White ( $\gamma_\lambda = 0$ )	9
8	Comparaison des smiles sous deux probabilités risque-neutre différentes	10
9	Influence de $\rho$	11
10	Pricing par EDP	11

## ANNEXE A. RAPPEL : INVERSION DE LA FORMULE DE BLACK-SCHOLES

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix d'un call d'échéance  $T$  et de strike  $K$  ne dépend que d'un seul paramètre : la volatilité de l'actif sous-jacent  $\sigma$ . Notons  $f_{T,K}(\sigma)$  le prix du call selon le modèle de Black-Scholes à l'instant initial. On a donc :

$$f_{T,K}(\sigma) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K e^{-rT}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K e^{-rT}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$N$  désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Nous pouvons donner des bornes d'arbitrages pour le prix du call. Tout d'abord, détenir le call donne moins de droit que détenir le sous-jacent et on a donc  $f_{T,K}(\sigma) < S_0$ . De plus, on déduit de la parité call-put que  $f_{T,K}(\sigma) > S_0 - K e^{-rT}$  et puisque le prix du call doit rester positif :  $f_{T,K}(\sigma) > (S_0 - K e^{-rT})_+$

De plus, nous remarquons que lorsque  $\sigma$  tend vers l'infini,  $d_1$  tend vers l'infini et donc  $N(d_1)$  tend vers 1 et  $d_2$  tend vers moins l'infini et donc  $N(d_2)$  tend vers 0. Donc lorsque  $\sigma$  tend vers l'infini, le prix du call tend vers  $S_0$ .

Par un raisonnement similaire et en distinguant les cas suivant le signe de  $\log\left(\frac{S_0}{K e^{-rT}}\right)$ , on montre que lorsque  $\sigma$  tend vers 0 par valeur supérieure, le prix du call tend vers  $(S_0 - K e^{-rT})_+$ .

La fonction  $f$  est dérivable et nous pouvons donc étudier son sens de variation. On obtient en utilisant le fait que  $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$  :

$$(1) \quad f'_{T,K}(\sigma) = K e^{-rT} \frac{e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{T} > 0$$

Ainsi, la fonction donnant le prix du call d'échéance  $T$  et de strike  $K$  est une fonction continue strictement croissante et réalise donc une bijection de  $(0; \infty)$  sur  $((S_0 - K e^{-rT})_+; S_0)$ . Elle admet donc un inverse, continu et strictement croissant de  $((S_0 - K e^{-rT})_+; S_0)$  sur  $(0; \infty)$  que l'on appelle volatilité implicite du call d'échéance  $T$  et de strike  $K$ .

Nous avons ainsi montré que si un modèle donne un prix pour un call entre les deux bornes mentionnées ci-dessus, il est possible d'inverser la formule de Black-Scholes pour obtenir la volatilité implicite associée à ce prix.

## ANNEXE B. COMPLÉTUDE ET ARBITRAGE DANS UN MARCHÉ

On admet les deux théorèmes ci-dessous :

**Théorème 4.** *Si il existe une probabilité risque-neutre sur le marché (c'est-à-dire une probabilité équivalente à la probabilité historique telle que les prix des actifs sous cette probabilité sont des martingales) alors le marché est viable.*

**Théorème 5.** *Si il existe plusieurs probabilités risque-neutre sur le marché alors le marché est incomplet : on ne peut pas simuler parfaitement une option.*