

< 자율 이동 로봇의 허접한 동역학 >

찌꼬만 로봇 하나 만들면서 웬 '동역학' 운운 하느냐 하는 생각이 불현듯 듭니다. 어차피 물성치들 정확하게 측정할 환경도 못되고 그렇게 크리티칼한(말버릇이 웬지...) 경우도 아닌데 말이죠.

하지만, 정식적인 설계 과정을 훑내내어 본다는데 그 의의를 두겠습니다.

우선, 이 방법을 통해 어떤 해답을 찾아내야 하는가... 하는 문제가 먼저 주어져야겠죠?

바로 그 '문제'를 우선 규정해 보겠습니다.

1. 문제 규정

모터는 이미 선정되어 있으므로, 어떤 모터를 사용해야 하는가 하는 것은 문제로 삼으면 안되겠군요.

다만 이렇게 주어진 모터의 범위 내에서 어떤 능력을 발휘하는 것이 가능한지에 대해 풀이해 볼 필요가 있겠습니다.

- **모터의 힘** : 모터의 힘이 어느정도 나올까?
- **등판 능력** : 몇 도 까지 타고 올라갈 수 있을까나? 힘이 딸려서 빌빌대지는 않을까?
- **운용 시간** : 배터리 하나로 몇 분이나 가지고 놀 수 있을까? 혹시 2분만에 다 방전되어 버리거나 않을까?

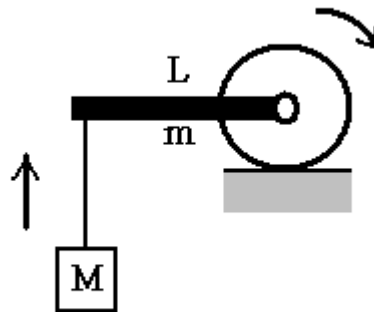
뭐 이런 것들을 알아봐야겠군요. 다른거 궁금한 건 없나? 음..... 일단 이정도만...

2. 모터가 내는 힘은 어느정도일까?

결국 모터가 낼 있는 토크(Torque;힘)를 알아내야겠군요? 보통 모터의 토크는, 제조업체에서 제공하는 스펙에 다 나와 있습니다. 단위는 [kgf.m], [N.m], [oz.] 등으로 표시되어 있겠죠... 일단 감을 잡기 위한 단계이므로, 이 값을 사용해도 무방할 것입니다. 그러나, 불행히도 중고모터를 구입할 경우 스펙을 구하기가 힘들죠. 값싼 DC 모터의 경우는 제조회사에 문의하더라도 '우리는 그런거 측정한 적 없습니당~ 약오르지롱~' 하는 대답이 돌아올 뿐이죠...

사실 '토크측정기'라는 고가의 계측장비가 있긴 합니다. 이걸 쓰면 모터의 각종 전기적/기계적 스펙이 좌라락 뽐아집니다(사용법이 쉬운 건 아니지만서도...). 다만, 영세업체에서 그것을 운용할 만큼 여유롭지 못하기 때문에 국산-중국산의 저가 DC 모터의 경우엔... 직접 측정하는 수밖에 없습니다!

하지만, 토크측정기 없이도 토크를 무식하게 직접 측정해 볼 수도 있습니다. 아래 그림을 보시죠!



Simple Measurement of torque...

우선 모터를 고정하고, 모터축에 길이 L 이고 질량 m 인 막대를 그림처럼 붙입니다. 그리고, 끝단에 줄을 달고 무게 M 을 싣죠.

그담엔? 모터를 돌립니다. 즉 무게를 직접 들어올리는 거죠. 물론 이때 모터는 전압조절 가능한 파워 서플라이에다가 달아놓구요. 전압은 정격으로 줍니다(24V 모터인 경우 24V로).

무게 M을 변화시켜 가면서, 그림과 같이 평형 상태를 이루는 질량을 찾습니다.

자. 이제 계산만 하면 되죠. 막대의 무게 m 이 M에 비해 1/10 이하로 작다면, 과감하게 무시해 버립시다. 하지만, m이 크다면.... 그 질량관성모멘트를 구해야겠죠... 공식이... 어딴더라? 암튼 알아서 하시고...

m이 작다고 했을 때, 토크 T는...

$$T \text{ [kgf.m]} = MgL$$

$$(g \simeq 9.81)$$

이잖아요? 아... 쉽당...

참. 이때 기어박스 달린 DC모터일 경우, 그냥 붙인채로 측정하는게 편하겠죠.

.....

이것 말고, 다른 아이디어가 또 있군요.

모터를 무부하 상태로 일단 파워 서플라이에다 달고 돌립니다. 전압과 전류가 표시되죠? 그거 표시되는 파워 서플라이도 없다구요? 그럼, 가지고 계신 간이 멀티미터(테스터기)를 직렬로 물려놓고 전류를 재든지 어쨌든지...

암튼, 전압과 전류를 이제 알고 있으니.... 무부하 상태로 돌릴 때의 모터의 소비 전력을 알게 되었다 이 소리죠.

$$P \text{ [W]} = V \text{ [V]} * I \text{ [A]}$$

방금 시험한 '무부하' 상태란 것도, 사실은 부하가 약간은 있는 것이죠. 마찰이나 회전자의 질량 따위요.

이 DC 모터란 물건은, 외부에 걸리는 부하(Load)에 비례하여 소비전류가 증가한다는 특징이 있지요.

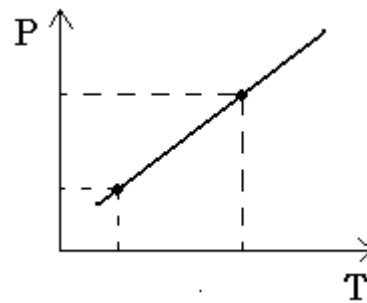
힘을 쓰려면 전기를 많이 먹어야 되는 것은 당연한 소리... 저 전기공학의 비조인 페러데이 아자씨가 일찍이 갈파한 바 있듯이요.

(페러데이 아자씨는 영국의 인쇄소에서 일하던 사환이었고, 지지리도 가난했고, 학교도 제대로 못다닌 사람이라죠? 책 살돈도 없어 인쇄소에서 찍어내는 책들을 몰래 읽어보면서 공부했다는... 결국은 전설이 된 입지전적 인물... 힘냅시다.)

전압은 아마 처음 설정치보다 낮아지진 않았을 것입니다. 모터 자체가 가진 저항값이 매우 낮기 때문이죠.

암튼, 이제 모터에 적당히 부하(물론 알려진 값)를 달고서 또 돌려 봅시다. 당연히 이제는 전류가 좀 뜁니다.

이렇게 달랑 두 번 실험한 값을 가지고 그래프를 그려볼 수 있습니다.



T-P (Torque-Power) Graph

어차피 정확한 측정이 아니니, 이렇게 단순한 선형 보간(1st-Order Interpolation) 만으로 만족하도록 합시다.

.....

쩍. 무슨 초등학교 '슬기로운 생활' 실험하는 것도 아니고...

그나저나, 이런 측정조차도 귀찮다. 어렵다. 하시는 분은, 통뻑으로 알아맞추는 추정치를 사용하시는 수밖에 없겠네요.

저요? 언제 측정하고 있겠습니까... 저도 추정치... 헤헤...

근데 그 기준을 어디다 두지? 뭐 비슷한 크기와 정격을 가진 모터라면 그 성능도 비슷할테니, 거기에 기준을 두면 되지 않을까요?

뭐 제가 구입한 작은 DC 모터라면, 한 2~3W 짜리 정도로 추정됩니다.

암튼, 이렇게 모터의 토크를 알아낸 후에는 그 힘이 온전히 로봇을 움직이는데 전부 다 사용될까 하는 의문도 생깁니다. 그건 아니겠죠? 우선 손실 원인으로는, 힘이 각종 기어와 타이밍 벨트, 바퀴등의 전동(轉動) 장치를 통해 전달되기 때문입니다. 그러한 기계 요소들을 거치면서 손실이 발생하고 당연히 효율은 100%가 되지 못합니다.

대략 한 60~80% 수준일 것입니다.

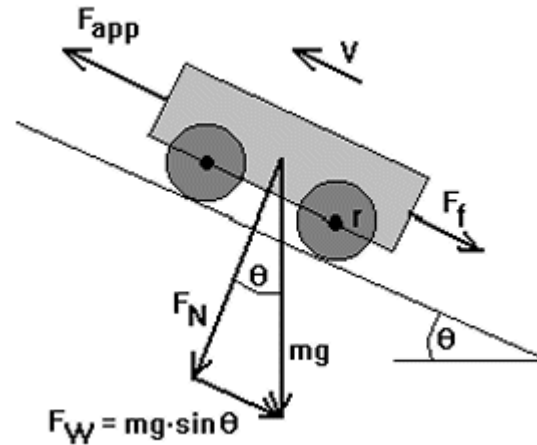
(참고로, 모터에 장착되는 기어헤드의 경우... 기어비에 따라 다르겠지만, 싸구려는 효율 약 50% 까지 떨어지는 경우가 있으며... 고급품의 경우는 90% 이상 나옵니다. 하지만 그것도 수명이 있으므로, 중고의 경우 효율이 더 낮아진다고 보아야겠죠. 평기어(Planetary Gears - 보통 톱니바퀴) 보다 웜기어(Worm Gears - 스크류+톱니바퀴)가 더욱 효율이 낮아지는건 상식적인 이야기고...)

암튼, 그런식으로 생각한다면... Pocket-bot 에 장착된 한쪽 모터가 3W 전력을 소비할 경우, 실제 동력으로 최종 전달되는 것은 2W 미만이라고 생각됩니다. 슬픔니다. 에너지 낭비...

3. 등판 능력 가능해 보기

결국 모터 하나가 내는 힘은 **2W** 라고 추정합시다. 이거 두 개가 달려 있으니, 총 **4W** 힘을 낸다고 보아도 됩니다.

암튼, Pocket-bot 이 어떤 경사면을 등판하는 경우를 가정하여, 자유물체도를 그려 봅시다.



자유물체도(FBD : Free Body Diagram)

동역학 또는 교양물리 교과서에 잘나오는 그림이죠.

이 그림의 의미를 설명 드리자면.... 우선 로봇의 무게가 m 입니다. 경사각도는 θ 이구요. 아까 말씀드린 '모터가 내는 힘', 즉 토크는 바퀴-바닥의 구름 동력 전달로 인해 더 이상 '토크(Torque)'가 아닌, 미는 힘(Force) F_{app} 가 되었습니다. 그럼, 로봇의 꼬리에 귀찮게 달라 붙은 F_f 는 멀까요? 네. 마찰력입니다. 로봇이 전진하는데 바닥과의 마찰이 있다고 보는게 당연하겠죠? (바퀴가 바닥을 차고 나가는 마찰이 아닙니다. 전진을 방해하는 마찰이죠.) 단순하게 생각하다 보니 이런 식으로 되고 있군요....

그담에, 경사면이니 만큼 중력에 의해 끌어 내려질려는 힘도 역시 전진을 방해하고 있네요. 당연히 각도가 있으므로, 전진방향과 평행한 쪽만으로 분해해서 힘 F_W 로 구해냈습니다.

자, 그럼 요 시스템에 작용하는 힘 F_{total} 은...

$$F_{total} = F_{app} - (F_f + F_W)$$

가 되네요. 이 상황에서, 토탈 힘은 적어도 양수가 되어야겠죠. 0이라면, 중간에 오도가도 못하고 매달려 있는 형국이고... 음수라면 힘

이 딸려 질질 끌려 내려 가겠네요.

우선 각 힘의 실체를 까발려 봅시다.

일단 마찰력 F_f 는....

$$F_f = \mu F_N = \mu \times mg \cos \theta$$

이쥬. 마찰력은, 바닥에 누리는 힘에 비례한다... 마찰계수 만큼... 이라는게 뉴턴식 사고방식이고.... 이 공식은 쿨롱 이라는 불란서 물리학자가 옛적에 만든 것이며.... 지금도 유용한 공식이네요. 상당히 매크로한 공식이긴 하지만(경험식에 가까우니), 생각을 단순하게 하기엔 좋습니다. $\mu = 0.3$ 정도로 줍시다. 보통 나무판자에 고무바퀴면 이정도 나온다고 합니다.

그리고.... 중력에 의한 방해하는 힘 F_W 는 그림에 이미 적혀 있네요?

$$F_W = mg \sin \theta$$

그럼, 이 식들을 대입해서... 약간이라도 전진하기 위한 최소한의 힘을 구해 봅시다.

$$F_{opp} > F_f + F_W$$

그러므로, 이는 곧

$$F_{opp} > mg(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

입니다. 이제 로봇의 무게 m 과, 모터가 줄 수 있는 힘 F_{opp} 만 구하면 등판능력 θ 를 알 수 있겠네요. 미지수가 그것밖에 없으니....

그나저나, 힘 F_{opp} 와 모터가 주는 에너지인 P_m 간에 단위변환이 필요하겠군요.

$$F_{opp} = \frac{P_m}{v}$$

입니다. 이걸 뭐 설명하고 자시고 할 것도 없고... 여기서 또 로봇의 전진속도 v 를 구해야 할텐데....

$$v = 2\pi r \times \frac{RPM}{60}$$

이군요.

이제 필요한 식은 다 구했으니, 그 식들을 싸그리 다 곱어모아 하나로 적어 보겠습니다.

$$P_m > mg(\sin \theta + \mu \cos \theta) \frac{2\pi r \times RPM}{60}$$

이네요..... 여기에 대입할 물성치 및 파라미터들을 대략 추정해서 적어 봅니다.

$$P_m = 4 \text{ [W]}$$

$$m = 0.5 \text{ [kg]}$$

$$r = 0.02 \text{ [m]}$$

$$RPM = 50 \text{ [RPM]}$$

$$\mu = 0.3 \text{ [무차원 수죠..]}$$

$$g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$\pi = 3.14$$

미지수는 θ 하나만 남긴 하는데... 헤헤.... 이 방정식은 해석적인 방법으로 풀기 힘들죠? 비선형 방정식이니.

엄밀하게 풀려고 하지 말고, 각도를 올려 가면서 결과를 봅시다(수치해석적 방법-노가다?)...

허걱.... 그런데 가만히 보니 모든 경우에 있어서 '참'이로군요. 심지어 $\theta = 90$ 도인 경우에서조차 필요한 전력값이 1 [W] 에 불과하니....

암튼 괴상한 결과가 나왔군요... 결론은 어쨌든, '힘은 충분하구만'입니다. 추정치가 아마 잘못되었겠죠? 로봇의 무게가 더 늘어날 수도 있고, 모터가 저만큼 힘이 안될 수도 있고, RPM은 또 너무 높게 잡았고, 마찰계수는 도무지 못밋겠고... 등판능력이 90도인 자동차라

니... 로켓인가? 헐헐... 당황스럽군요. _-;;

남는 힘은 충분한 안전율(Safety factor)을 준 것으로 생각해야 겠군요.

암튼, 허접한 이론상으로는 상당한 파워를 자랑하는 로봇이 나올 것으로 추정됩니다. 모터가 너무강해~~

4. 운용 시간 추정하기

금방 엄청난(?) 결과가 나오는 바람에 저도 놀랐습니다만(사실 쪽팔립니다)... 암튼 계속해 보도록 하겠습니다.

사용할 배터리는 F-22 사이즈의 9V 짜리입니다.

보통 배터리의 용량은 [mAh] 단위이죠? 300 [mAh] 라면, 300 밀리암페어 뿜어주면서 한시간 동안 가지고 놀 수 있을 거라는 소리....

F-22 9V 배터리는 150 mAh 정도이죠. 뜯어보면, 납작한 배터리 셀들이 적층되어 6층으로 되어 있네요...

자, 그럼 로봇이 갈취할 소비전력은 얼마나 될까요? 몇 와트짜리 로봇일까요?

전력 사용처는 크게 두 군데이죠. 메인보드와 모터.

메인 보드의 경우, 파워 레귤레이터에서 꽤 큰 손실이 발생할 거고(7805 1A 짜리의 경우 50% 이하... 열이 많이 나니 할 수 없죠.), 센서 나 LED 에서도 좀 사용할 거고(개당 수십mA 정도), 뭐 이래저래 전기를 빨아먹겠네요... 그래도 전부 합쳐 100 [mA]를 넘기기는 힘들겠 죠?

모터의 경우, 그 드라이버로 스위칭 소자를 사용할 경우 효율 90%를 넘기지만... 리니어 소자를 사용한 모터 드라이버의 경우는 좀 낮겠 죠. Pocket-bot 은 H-Bridge를 쓰니까 효율을 줄은편일꺼고... 단지 바퀴로 전달되는 부하에 따라 전력소비가 들쭉날쭉하겠죠. 경험적 으로 볼 때, 약 5~10 [W] 정도를 소모할 것으로 추정됩니다.

그렇게 단순히 계산해 보면...

$$t = \frac{60 \times C \times V}{1000(P_m + P_{board})} = \frac{60 \times 150 \times 9}{1000(10 + (0.1 \times 9))} \simeq 7.43 \text{ [min]}$$

글쎄요... 7분.... 전력 소비를 좀 여유있게 잡았습니다만, 좀 짧죠? 충전지로 바꾸든지 해야지 원.

< 결 론 >

편하게 편하게를 외치다 보니, 좀 좌충우돌식의 계산이 되고 말았습니다만.... 만들어질 Pocket-bot의 아웃라인은 그런대로 그려집니다.

힘 좋은 대신 빨리 시들고 마는....

표현이 좀 그런가? 암튼 그런 시스템이 되겠습니다.

등판능력은 좋지만, 뭐 딱히 등판시킬 일도 없고... 다만 7~10분이면 배터리가 달랑달랑하게 되는....

.....

역시 좀 더 신중하게 생각하고 설계에 들어갔어야 하는 걸까요?

< 참고 자료 >

없슴다.