

1. 이론설명

Wiener Process는 분자의 Brownian motion을 모델링한 Random Walk Stochastic Process의 일종이다. Wiener Process는 다음과 같이 기술될 수 있다.

1.1. Discrete Wiener Process

h 의 time unit으로 M 의 magnitude step size를 갖는 $p = 1/2$ 인 1D random walk를 생각하자.

분자가 $X = 0$ 에서 출발할 때, 시간 t 까지의 random step의 합 $X_h(t)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$X_h(t) = M(D[1] + D[2] + \dots + D[n]) = MS[n], \quad \text{where } n = \lfloor \frac{t}{h} \rfloor$$

이때, 각 time step에서의 discrete RV인 $D[k] = \pm 1$ 와 $D[k]$ 의 sum인 RV $S[n] \in [-n, n]$ 을 가정한다.

정의된 RV $X_h(t)$ 의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[X_h(t)] &= 0 \\ \text{Var}[X_h(t)] &= 0 \end{aligned}$$

또한 정의에 따라 $X_h(t)$ 의 점화식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_h(0) &= 0 \\ X_h(t+1) &= X_h(t) + MD[n] \end{aligned}$$

1.2. Continuous Wiener Process

위의 이산적인 상황으로부터 연속적인 상황으로의 Wiener Process를 유도하기 위해 time unit h 와 magnitude step size M 을 0으로 보내보자.

이때, 아주 짧은 시간 h 에 순간 속도 v 가 무한대가 되도록 하자.

즉, 다음을 가정한다.

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\alpha h} \\ v &= \frac{M}{h} = \sqrt{\frac{\alpha}{h}} \\ n &\approx \frac{t}{h} \end{aligned}$$

그러면 다음의 연속적인 RV $X(t)$ 를 생각할 수 있다.

$$X(t) := \lim_{h \rightarrow 0} X_h(t) = \lim_{h \rightarrow 0} MS[n] = \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\alpha t}{n}} S[n]$$

이때 $X(t)$ 의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E[X(t)] = 0$$

$$Var[X(t)] = M^2 \frac{t}{n} = \sqrt{\alpha h}^2 \frac{t}{h} = \alpha t$$

2. 코드

다음은 시뮬레이션을 위해 작성한 코드이다. 코드의 전문은 개인 github

(https://github.com/jihyuk1023/AI_physics/blob/main/WienerRandomProcess.ipynb)

에서도 확인 가능하다.

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from typing import List

def wiener_process(alpha: float, h: float, time: float) -> np.ndarray:
    N: int = int(time//h)
    X_h = np.zeros(N, dtype="float64")
    for n in range(N-1):
        X_h[n+1] = X_h[n] + (alpha*h)**0.5 * random.randrange(-1, 2, 2)
    # (-1, 1)
    return X_h

def mean(X_2D: np.ndarray, h: float, time: float) -> np.ndarray:
    N: int = int(time//h)
    X_m = np.zeros(N, dtype="float64")
    X_2D = np.transpose(X_2D)

    for t in range(N):
        X_m[t] = np.mean(X_2D[t])
    return X_m

def variance(X_2D: np.ndarray, h: float, time: float) -> np.ndarray:
    N: int = int(time//h)
    X_var = np.zeros(N, dtype="float64")
    X_2D = np.transpose(X_2D)

    for t in range(N):
        X_var[t] = np.var(X_2D[t])
    return X_var

def run_simulation(alpha: int, h: int, total_time: int, sample: int) -> None:
    X_samples = np.empty((0, int(total_time//h)), dtype="float64") # N =
    floor(time/h)
```

```

for _ in range(sample):
    X: np.ndarray = wiener_process(alpha=alpha, h=h,
total_time=total_time) #1D ndarray
    X_samples = np.append(X_samples, [X], axis=0) #2D ndarray

    sample_mean = mean(X_2D=X_samples, h=h, total_time=total_time)
    sample_var = variance(X_2D=X_samples, h=h, total_time=total_time)

    for s in range(sample):
        plt.plot(X_samples[s], linewidth="0.5")
        plt.plot(sample_mean, linewidth="4.0", label="mean")
        plt.plot(np.sqrt(sample_var), linewidth="4.0", label="standard
deviation")
    plt.title("Wiener Random Process, n={}".format(sample))
    plt.xlabel("t, (time/h)")
    plt.ylabel("X(t)")
    plt.legend()
    plt.show()

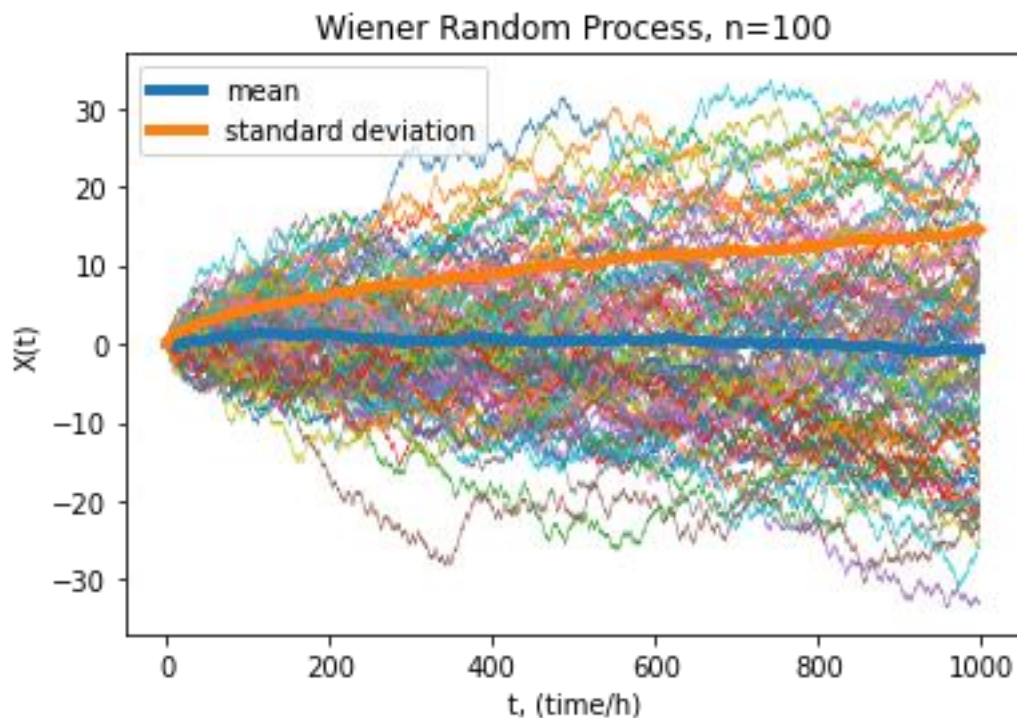
run_simulation(alpha=2, h=0.1, total_time=100, sample=100)
run_simulation(alpha=2, h=0.1, total_time=1000, sample=1000)

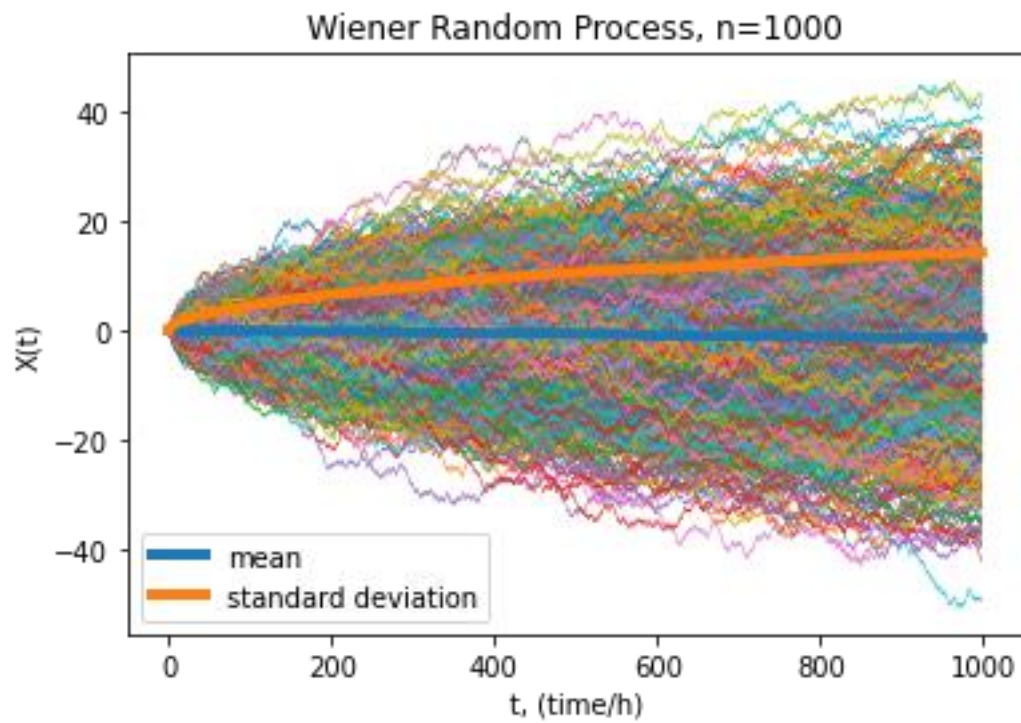
```

3. 결과

위의 코드를 통해 $\alpha = 2$, $h = 0.1$, $T = 100$ 의 constraints로 각각 100개와 1000개의 sample에 대해 simulation을 진행한 결과 다음의 그래프를 얻을 수 있었다.

이때, variance의 square root와 sample mean을 각각 굵은 주황색, 파란색 선으로 표시하였다.





이로 인해 h 가 0에 가까워지고 sample의 개수가 많아질수록 $E[X(t)] = 0$, $\sqrt{\text{Var}[X(t)]} = \sqrt{at}$ 에 수렴함을 확인할 수 있었다.

4. 참고자료

Probability and Random Process 강의자료 slide2, 44~47p

https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process