11.　述語論理

1.　命題論理の限界

命題論理では，命題の内容に立ち入らずに命題の真偽のみに着目し，命題間の真偽の関係を考察する。そのため，命題論理で扱う最小の単位は「要素命題」である。要素命題とは，真偽を問うことができる最小の文であった。しかし，そのことが命題論理の限界を引き起こす。

例えば，

すべての男性は花子が好きである

という命題は，要素命題である。実際，この文を「すべての男性」「花子が好きである」などに分割すると，それらの語句の真偽を問うことはできない。

そこで，次の推論を考えてみる。

（推論）　（前提）すべての男性は花子が好きである。
　　　　　（前提）太郎は男性である。
　　　∴　（結論）太郎は花子が好きである。

この推論は，明らかに正しいだろう。ところが，この推論の妥当性を命題論理で証明することができない。2 つの前提と 1 つの結論は，いずれも要素命題であるから，それぞれ 1 つの命題記号で表現するしかない。よって，この推論式 は

$$A,\ B\quad \therefore\ C$$

の形になるが，A と B をともに 1 と仮定しても，C が 1 になる保証がどこからも得られない。それどころか，要素命題をそのまま記号化したために，C は A と B と無関係な記号になってしまい，C に 0 を割り当てることが可能になる。

従って，推論式は恒真とはいえず，この推論は命題論理では妥当でない，と判定されてしまうのである。

2.　述語論理とは

上記の命題論理の限界を乗り越えたのが，ドイツの数学者・論理学者・哲学者であるフレーゲ（Frege，1848–1925）であった。フレーゲは，述語論理の基本概念を構築し，アリストテレス以来の伝統的論理学を一挙に塗り替えた。

述語（じゅつご）論理は，命題の内部に立ち入って推論の正しさを研究する学問である。その名の通り，述語の論理であるが，これは命題論理学を土台にして構築される。従って，述語論理は命題論理の拡張である。

3.　「名詞（体言）」の復習

まず，中学校で学習する名詞の意味を簡単に復習しておく。

１．名詞とは

(1)　名詞とは　－ ものごとの名称を表す単語

①　名詞とは，ものごとの名称を表す単語であり，体言（たいげん）ともいう。

(2)　名詞の性質 － 自立語で活用がない

①　名詞は，単独で一つの文節となることができるから，自立語である。

②　名詞は，助詞「が」や「は」をともなって主語になる。

２．名詞の種類　－　名詞は４種類

(1)　普通名詞

①　普通名詞は，一般的なものごとの名称を表す単語。

②　例：犬　さくら　山　机　時計　家　心　運動　時間　知識

(2)　固有名詞

①　固有名詞は，人名・地名・書名など，ただ１つしかないものの名称を表す単語。

②　例：聖徳太子　シュバイツァー　東京　太平洋　富士山　論語（ろんご）　法隆寺（ほうりゅうじ）

(3)　数詞

①　数詞（すうし）は，ものの数・量・順序を表す単語。

②　例：一つ　三人　五羽　六倍　第九　いくつ　何度

(4)　代名詞

①　人やものごとの名称をいわないで，直接にその人やものごとを指し示す単語。

②　例：私　あなた　これ　それ　あれ　どこ　あちら

4.　述語論理における用語

述語論理では，要素命題を「個体」と「述語」に分割する。個体や述語とは何か。以下，述語論理における基本的な用語や概念をまとめておく。

(1) 述語論理は命題論理の拡張

述語論理は，命題論理の拡張である。従って，述語論理では，命題論理における「命題」「真理値」「論理結合子」「推論」などの概念がそのまま使用される。

(2) 個体（こたい）

１つのものを「個体」と呼ぶ。「太郎は天才である」という命題は，「太郎」という一人の人物に関する主張であるので，「太郎」は個体である。「犬は足が速い」という命題では，一匹の犬に関する主張ではないので，「犬」は個体ではない。一般に，固有名詞は個体になるが，普通名詞は個体にならない。

(3) 固有名（こゆうめい）

個体を表す名前を「固有名」という。「太郎は天才である」では，「太郎」が固有名である。「東京」は固有名だが，「山」は固有名ではない。

(4) 個体定項（こたいていこう）

命題において，固有名で表現された個体を，「個体定項」または「定項」と呼ぶ。これは，固有名詞に相当する。「太郎は花子が好きだ」という命題では，「太郎」と「花子」が，個体定項である。「犬は動物である」では，「犬」も「動物」も，個体定項にならない。命題を記号化する場合，個体定項は，小文字ａ，ｂ，ｃ…などで表す。

(5) 述語（じゅつご）

個体の性質や関係を表す表現を「述語」と呼ぶ。これは，文法上の述語とは異なる。「太郎は天才である」という命題では，「…は天才である」が述語である。「太郎は花子が好きだ」という命題では，「太郎」と「花子」が個体であり，「…は…が好きだ」が述語である。「犬は足が速い」では，「…は足が速い」が述語になるが，普通名詞の「犬」も述語と考える（後述）。

述語は，大文字のＦ，Ｇ，Ｈ…で表す。「太郎は天才である」では，個体定項の「太郎」をａ，述語の「…は天才である」をＦとすると，この命題の記号化は，

Ｆａ

になる。

(6) 個体変項（こたいへんこう）

不特定の個体を，「個体変項」または「変項」と呼ぶ。個体変項は，小文字ｘ，ｙ，ｚ…などで表す。

(7) 命題関数（めいだいかんすう）

命題において，個体定項を個体変項に置き換えた文を，「命題関数」と呼ぶ。要素命題に対する命題関数は，個体変項と述語のみからなる文である。例えば，「ｘは天才である」は，命題関数である。ここで，述語「…は天才である」をＦとすると，この命題関数は

Ｆｘ

で記号化できる。

(8) 全称記号（ぜんしょうきごう）（∀）と存在記号（そんざいきごう）（∃）

全称記号「∀」は「すべて」，存在記号「∃」は「ある」を意味する。この「ある」は，「ある学生は天才だ」における「ある」の意味である。「ある学生は天才だ」は，「少なくとも一人の学生は天才だ」「天才の学生がいる」と同じ意味である。

(9) 全称量化子（ぜんしょうりょうかし）と存在量化子（そんざいりょうかし）

個体変項ｘの前に全称記号を付けた「∀ｘ」を「全称量化子」，存在記号を付けた「∃ｘ」を「存在量化子」と呼ぶ。また，これらを総称して「量化子」と呼ぶ。これらは，命題関数において，次を意味する。

○　全称量化子 ∀ｘ　…「すべてのｘについて」

○　存在量化子 ∃ｘ　…「あるｘについて」「少なくとも１つのｘについて」

(10)　量化（りょうか）

命題関数において，個体変項に「すべて」や「ある」といった量を与えることを，個体変項を「量化する（quantify）」という。

○　ｘを量化する：「ｘは犬である」 → 「すべてのｘは犬である」

○　ｘを量化する：「ｘは犬である」 → 「あるｘは犬である」

5.　述語論理における命題の記号化

述語論理における命題の基本的な記号化を説明するが，ポイントは次の２つである。

①　複合命題は，命題論理の場合と同様に，要素命題に分割する。

②　要素命題が主張する内容を，「個体」と「述語」で表現する。

（文法上の主語が「個体」とは限らない。また，文法上の述語が「述語」とは限らない。）

(1)　要素命題：太郎は天才である。

「太郎」は個体定項であり，その個体の性質を表現している「…は天才である」が述語である。そこで，「太郎」をａ，「…は天才である」をＦとして，命題を次のように記号化する。

Ｆａ

これは，「ａは天才である」という意味だが，「ａは Ｆ である」と表現してもよい。このように，述語を先に書き，そのあとに個体を書く。

(2)　要素命題：太郎は花子が好きである。

「太郎」と「花子」が個体定項であり，これらの関係を示す「…は…が好きである」が述語である。「太郎」をａ，「花子」をｂ，「… は … が好きである」をＦとして，次のように記号化する。

Ｆａｂ

これは，「ａはｂが好きである」という意味だが，「ａとｂはＦである」「ａとｂにはＦという関係がある」と表現してもよい。なお，Ｆａｂ と Ｆｂａは，意味が異なる。

(3)　命題関数：ｘはｙが好きである。

ｘとｙは，個体変項である。「…は…が好きである」をＦとして，次のように記号化する。

Ｆｘｙ

ｘとｙはどちらも個体ではあるが，不特定の個体であるため，命題関数の真偽は確定しない。ｘとｙに固有名を代入すると，真偽が確定する。例えば，「太郎」をａ，「花子」をｂとし，ｘにａ，ｙにｂを代入すると，Ｆａｂは命題になり真偽が確定する。

(4)　要素命題：太郎は天才ではない。

これは,「太郎は天才である」の否定命題である。「太郎」をａ,「…は天才である」をＦとすると，次のように記号化される。

～Ｆａ

これは,「ａは天才ではない」という意味だが,「ａはＦではない」と表現してよい。

(5)　複合命題：花子または太郎が出席する。

これは要素命題ではないので,「(花子が出席する）または（太郎が出席する)」に分割する。「花子」をａ,「太郎」をｂ,「…が出席する」をＦとすると，次のように記号化される。

Ｆａ∨Ｆｂ

これは,「ａは出席する，または，ｂは出席する」という意味だが,「ａはＦである，または，ｂはＦである」と表現してよい。

6.　普通名詞は述語になる

次の命題を考えてみる。

命題Ａ：犬は動物である。

これは，特定の一匹の犬を指して，この犬が動物であると主張しているわけではない。従って,「犬」をａ,「…は動物である」をＦとして，Ｆａと記号化するのは大きな誤りである。「犬」は普通名詞であるので述語になるが，これは，集合で考えると理解しやすい。

いま，すべての犬からなる集合を（犬)，すべての動物から集合を（動物）で表せば，命題Ａは，次の「集合の包含関係」の成立を主張している。

命題Ｂ：(犬）⊆（動物)

この包含関係は，集合の要素で表現すれば，次の意味である。

○　すべてのｘについて，ｘ∈（犬）ならば　ｘ∈（動物）である
○　すべてのｘについて，ｘ が 犬 ならば ｘ は動物である

従って,「…は犬である」をＦ,「…は動物である」をＧとすると，命題Ａは次のように記号化される。

命題Ａの記号化：∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）

これは，すべてのｘについて「Ｆｘ→Ｇｘ」である，つまり，次の意味である。

○　すべてのｘについて，ｘがＦならばｘはＧである

もともと，命題Ａは次を主張していることに注意しよう。

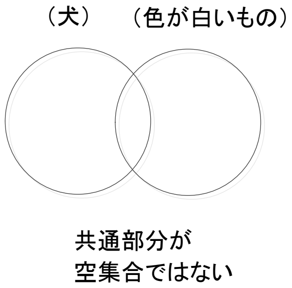
命題：すべての犬は動物である。

では，次の命題を考えてみよう。

命題Ｃ：ある犬は色が白い。

これも集合で考えてみる。この命題は，「犬であって，色が白いもの」が存在するということを主張しているが，これは２つの集合（犬），（色が白いもの）の共通部分が空集合φではないことと同じ意味である。つまり，命題Ｃは，次の命題Ｄと同じである。

命題Ｄ：（犬）∩（色が白いもの）≠ φ



命題Ｄは，これらの２つの集合の共通部分に要素が存在するという意味であるから，「…は犬である」をＦ，「…は色が白い」をＧとすると，命題Ｃは次のように記号化できる。

$\exists x\ (Fx \wedge Gx)$

これは，以下のように表現すればよい。みな同じ意味である。

○　ＦとＧをみたすｘが存在する。
○　ＦとＧをみたすｘが少なくとも一つ存在する。
○　あるｘについては，ＦかつＧである。
○　少なくとも一つのｘについて，ＦかつＧである。

● 練習問題

次の命題を記号化せよ。

(1)　アインシュタインは天才である。
(2)　太郎も次郎も背が高いが花子はそうではない。
(3)　花子は太郎が好きだが，次郎は太郎が好きではない。
(4)　花子は太郎または次郎が好きである。
(5)　すべての天才は独身である。
(6)　ある学生はクリスチャンである。
(7)　優しい青年はみな好かれる。
(8)　ケインズを尊敬しない学者がいる。
(9)　日本人はアメリカ人でない。
(10) 日本人もアメリカ人もいる。

7.　１項述語と多項述語

述語は，次のように分類できる。

- ○　１項述語　…　１個の個体の性質を表す述語（例：Ｆａ）
- ○　２項述語　…　２個の個体の関係を表す述語（例：Ｆａｂ）
- ○　３項述語　…　３個の個体の関係を表す述語（例：Ｆａｂｃ）
- ○　ｎ項述語　…　ｎ個の個体の関係を表す述語（例：$Fa_1a_2\cdots a_n$）
- ○　多項述語　…　２項以上の述語

また，例えば，2 項述語の命題Ｆａｂに対する命題関数はＦｘｙの形になり，個体変項はｘとｙの２つである。

Ｆａｂにおける F は，ａとｂの関係を表す述語であるが，これを個体からなる組（ａ，ｂ）に関する述語と考えることもある。この意味では，$Fa_1a_2\cdots a_n$におけるｎ項述語Ｆは，

ｎ個の個体からなる組（a_1，a_2，…，a_n）に対する述語

である。

8.　全称記号（∀）と存在記号（∃）

全称記号「∀」は「すべて」，存在記号「∃」は「ある」を意味する。命題論理では，～（否定），∧（連言），∨（選言），→（条件文），↔（双条件文）の 5 つの論理記号が登場したが，述語論理では，さらに「∀」と「∃」が論理記号として使用される。

従って，

∀ｘＦｘ，∃ｘＦｘ

のような記号化された表現も，論理式と呼ぶ。この２つは，本来

∀ｘ（Ｆｘ），∃ｘ（Ｆｘ）

の意味であり，カッコがつく。これらの読み方は，次のようにいろいろあるが，いずれも同じ意味である。

● ∀ｘ（Ｆｘ）の読み方
- ・すべてのｘについて，ｘはＦである
- ・すべてのｘについて，Ｆである
- ・すべてのｘは，Ｆである
- ・どのｘについても，ｘはＦである
- ・どのｘもＦである
- ・任意のｘはＦである

● ∃ｘ（Ｆｘ）の読み方
- ・あるｘについて，ｘはＦである
- ・あるｘについて，Ｆである

・あるｘは，Ｆである
・Ｆであるｘが存在する
・Ｆであるようなｘが存在する
・Ｆであるｘが少なくとも１つ存在する

なお，日本語の「任意（にんい）」には「何でもよい」という意味があるが，これは数学では「すべて」と同義語である。「任意のｘ」と「すべてのｘ」は，ニュアンスは多少異なるが，意味は同じである。例えば，「任意の整数ｘについて，～が成立する」とは，「すべての整数ｘについて，～が成立する」ことを意味する。

英語表現では次のようになるが，日常的には(2)のような表現はあまりしない。

(1)　All apples are red.　　（すべてのリンゴは赤い。all ＝ すべて）
(2)　Arbitrary apples are red.　（任意のリンゴは赤い。arbitrary ＝ 任意）
(3)　Every apple is red.　　（どのリンゴも赤い。every ＝ どの）

9.　個体変項の量化と作用域

個体変項ｘに全称記号を付けた「∀ｘ」を「全称量化子」，存在記号を付けた「∃ｘ」を「存在量化子」と呼ぶ。また，これらを総称して「量化子」と呼ぶ。

命題関数において，個体変項ｘに「すべて」や「ある」といった量を与えることを，「ｘを量化する」という。（以下，「個体変項」は変項，「個体定項」は定項と呼ぶことにする。）

例えば，命題関数には，次のようにいろいろな形がある。

$$Fx,\ Fx \land Gx,\ Fx \lor Gx,\ Fx \to Gx,\ Fxy,\ Fx \lor Gy$$

命題関数の中の変項を量化する場合は，

量化子（命題関数）

の形で記述する。このとき，「(命題関数)」の部分を，<u>量化子の作用域</u>と呼ぶ。この作用域は，直前の量化子によって適用される量化の範囲を示す。

例えば，次の下線部は，∀ｘの作用域である。

$$\forall x\underline{(Fx)},\ \forall x\underline{(Fx \lor Gx)},\ \forall x\underline{(Fx)} \lor \exists x(Gx)$$

また，次の下線部は，∃ｘの作用域である。

$$\exists x\underline{(Fx)},\ \exists x\underline{(Fx \lor Gx)},\ \forall x(Fx) \lor \exists x\underline{(Gx)}$$

さらに，次も理解できるだろう。

$\forall x\underline{(\exists y(Fxy))}$　…　∀ｘの作用域は下線部
$\forall x(\exists y\underline{(Fxy)})$　…　∃ｙの作用域は下線部

量化される命題関数の変項については，次の重要なルールがある。

量化子によって量化される変項は，その量化子の作用域の中の量化されていない同じ文字の変項である。

これを以下の例で説明しよう。

(1)　∀ｘ（Ｆｘ∨Ｇｘ）

・これは，「すべてのｘについて，ｘはＦであり，または，ｘはＧである」という意味である。

・∀ｘによって，「Ｆｘのｘ」と「Ｇｘのｘ」が量化されている。

・また，「∀ｘ」「Ｆｘ」「Ｇｘ」のｘは，みな同じ個体を表す。

(2)　∀ｘ（Ｆｘ）∨∃ｘ（Ｇｘ）

・これは，「すべてのｘについて，ｘはＦであるか，または，あるｘはＧである」という意味である。

・∀ｘによって「Ｆｘのｘ」が量化され，∃ｘによって「Ｇｘのｘ」が量化されている。しかし，∀ｘによって「Ｇｘのｘ」が量化されているわけではない。

・つまり，「∀ｘのｘ」と「Ｇｘのｘ」は，同一の個体ではない。従って，上記の論理式は次の論理式と全く同じである。

∀ｘ（Ｆｘ）∨∃ｙ（Ｇｙ）

(3)　∃ｘ（Ｆｘ∨ ∀ｘ（Ｇｘ））

・∃ｘは，その作用域（Ｆｘ ∨ ∀ｘ（Ｇｘ））の中のどのｘを量化するだろうか。

・Ｇｘのｘは，∀ｘによってすでに量化されている。従って，∃ｘは，作用域の中の量化されていない「Ｆｘのｘ」のみを量化することになり，「Ｇｘのｘ」は量化しない。

・つまり，「∃ｘのｘ」と「Ｇｘのｘ」は，全く無関係な記号である。この場合も，上記の論理式は次の論理式と同じである。

∃ｘ（Ｆｘ ∨ ∀y（Gy））

● 練習問題

次の論理式において，量化子の作用域を求めよ。

(1)　∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）→∃ｘ（Ｆｘ）

(2)　∀ｘ（Ｆｘ→∃ｙ（Ｇｙ））

(3)　∀ｘ（∃ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ））

10.　束縛変項と自由変項

論理式の中の変項は，束縛（そくばく）変項と自由変項の２種類に分類される。

○　束縛変項　…　量化されている変項

○　自由変項　…　量化されていない変項（不定の対象を表す変項）

例えば，

∀ｘ（Ｆｘ∨Ｇｘ）

において，「Ｆｘのｘ」と「Ｇｘのｘ」は，ともに∀ｘによって量化されているので，どちらも束縛変項である。同様に，

∀ｘ（Ｆｘ∨∃ｙ（Ｇｙ））

では，「Ｆｘのｘ」と「Ｇｙのｙ」のどちらも束縛変項である。

しかし，

∀ｘ（Ｆｘ）→ Ｇｘ

では，「Ｆｘのｘ」は束縛変項だが，「Ｇｘのｘ」は自由変項である。

● 練習問題

次の論理式において，束縛変更と自由変更を求めよ。

(1)　∀ｘ（Ｆｘ）∧ Ｇｙ

(2)　∀ｘ（Ｆｘ∧Ｇｘ∧Ｈｙ）

(3)　∀ｘ（Ｆｘ∧Ｇｘ∧∃ｙ（Ｈｙ））

(4)　∀ｘ（Ｆｘ）→ ∃ｙ（Ｇｘ∧Ｈｙ）

(5)　∀ｘ（∃ｙ（Ｆｙ∧Ｇｘ））

(6)　∀ｘ（Ｆｘ）→（∀ｘ（Ｇｘ）∨ Ｈｘ）

(7)　∀ｘ（∀ｙ（Ｆｘｙ）→ Ｇｘｙ）

(8)　∀ｘ（∃ｙ（Ｆｘｙ））

12　命題の分類

1.　括弧の省略

Ｆａの否定命題を

～（Ｆａ）

で表すが，通常はカッコを省略して，

～Ｆａ

で表す。命題関数についても同様であり，Ｆｘの否定は

～Ｆｘ

で表す。

全称記号∀や存在記号∃の入った命題を「量化命題」と呼ぶ。量化命題

∀ｘＦｘ

の否定命題は，

～∀ｘＦｘ

で表す。これは，カッコを省略せずに正確に書けば

～（∀ｘ（Ｆｘ））

となる。また，

∀ｘ～Ｆｘ

は，次の意味になる。

∀ｘ（～（Ｆｘ））

量化命題を表す論理式では，カッコを省略した省略形を用いても良い。

	省略形	カッコを省略しない形
①	～∀ｘＦｘ	～（∀ｘ（Ｆｘ））
②	∀ｘ～Ｆｘ	∀ｘ（～（Ｆｘ））
③	～∃ｘＦｘ	～（∃ｘ（Ｆｘ））
④	∃ｘ～Ｆｘ	∃ｘ（～（Ｆｘ））
⑤	～∀ｘ～Ｆｘ	～（∀ｘ（～（Ｆｘ）））
⑥	～∃ｘ～Ｆｘ	～（∃（～（Ｆｘ）））
⑦	∀ｘ∀ｙＦｘｙ	∀ｘ（∀ｙ（Ｆｘｙ））
⑧	∀ｘ∃ｙＦｘｙ	∀ｘ（∃ｙ（Ｆｘｙ））
⑨	∀ｘＦｘ∧∃ｘＧｘ	∀ｘ（Ｆｘ）∧∃ｘ（Ｇｘ）

2.　個体領域（議論領域）

命題における個体の存在する範囲（集合）を，「個体領域」または「議論領域」と呼ぶ。次のような量化命題の記号化には，個体領域を定める場合と，定めない場合の 2 通りの方法がある。

すべての学生は英語ができる

(1) 個体領域Ｄを設定しない場合

個体領域を定めない場合は，上記の命題は

すべての個体ｘについて，ｘが学生ならばｘは英語ができる

という意味になる。

従って，「…は学生である」をＦ，「…は英語ができる」をＧとすると，上記の命題は次のように記号化される。

$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$

(2) 個体領域Ｄを設定した場合

個体領域Ｄを設定した場合は，もう少し簡潔に記号化できる。Ｄとしては，「すべての学生からなる集合」，「山陽学園大学の学生全体の集合」など，自由に設定してよい。ただし，Ｄをどのような集合にするかで，命題の真偽も異なってくる。

例えば，「すべての学生からなる集合」をＤとし，「…は英語ができる」をＦとする。この場合

すべての個体ｘについて，ｘが学生ならばｘは英語ができる

では，最初の「すべての個体ｘ」とはＤに属する個体，すなわち，学生のことであるから，この命題は

すべての個体ｘ（学生）は英語ができる

となる。従って，次のように記号化してよい。

個体領域 Ｄ：すべての学生からなる集合
$\forall x Fx$

3.　命題の分類

命題は，単称命題と量化命題の 2 つに大別される。

○ 単称命題　…　全称記号∀や存在記号∃が入らない命題（特定の個体に関する命題）
○ 量化命題　…　全称記号∀や存在記号∃が入った命題

従って，1 項述語からなる要素命題は，以下のように分類される。伝統的論理学では，(3)～(6)は「定言的命題」と呼ばれた。

(1) 単称肯定命題

命題：ａはＦである　(a is F)

記号化：Ｆａ

(2) 単称否定命題

命題型：ａはＦでない　(a is not F)

記号化：～Ｆａ

(3) 全称肯定命題

命題型：すべてのｘはＦである　(All x is F)

記号化：∀ｘＦｘ

(4) 全称否定命題

命題型：すべてのｘはＦでない　（どのｘもＦでない）　(No x is F)

記号化：∀ｘ～Ｆｘ

(5) 特殊肯定命題（存在肯定命題）

命題型：あるｘはＦである　（Ｆであるｘが存在する）　(Some x is F)

記号化：∃ｘＦｘ

(6) 特殊否定命題（存在否定命題）

命題型：あるｘはＦでない　（Ｆでないｘが存在する）　(Some x is not F)

記号化：∃ｘ～Ｆｘ

特殊肯定命題の「あるｘはＦである」は，「Ｆであるようなｘが存在する」という，存在を主張した命題でもあるから，「存在肯定命題」とも呼ぶ。存在否定命題についても，同様である。

● 練習問題

以下の命題を，個体領域 D（すべての学生からなる集合）を設定した場合と，個体領域を設定しない場合のそれぞれにおいて，記号化せよ。

(1) すべての学生は英語ができる。

(2) すべての学生は英語ができない。

(3) ある学生は英語ができる。

(4) ある学生は英語ができない。

(5) すべての学生は，英語とドイツ語ができる。

(6) ある学生は，英語またはドイツ語ができる。

4.　量化命題の否定命題

量化命題の否定命題は次のようになるので，よく理解しよう。以下，個体領域Ｄを「カラスの集合」，述語Ｆｘは「ｘは黒い」とする。

① $\sim\forall x Fx = \exists x \sim Fx$

・（全称肯定命題）の否定　＝　特殊否定命題

・「すべてのｘはＦである」の否定　＝　あるｘはＦでない

・すべてのカラスは黒い，というわけではない　＝　あるカラスは黒くない

② $\sim\forall x \sim Fx = \exists x Fx$

・（全称否定命題）の否定　＝　特殊肯定命題

・「すべてのｘはＦでない」の否定　＝　あるｘはＦである

・すべてのカラスは黒くない，というわけではない　＝　あるカラスは黒い

③ $\sim\exists x Fx = \forall x \sim Fx$

・（特殊肯定命題）の否定　＝　全称否定命題

・「あるｘはＦである」の否定　＝　すべてのｘはＦでない

・あるカラスは黒い，というわけではない　＝　すべてのカラスは黒くない

④ $\sim\exists x \sim Fx = \forall x Fx$

・（特殊否定命題）の否定　＝　全称肯定命題

・「あるｘはＦでない」の否定　＝　すべてのｘはＦである

・あるカラスは黒くない，というわけではない　＝　すべてのカラスは黒い

Ａ：すべてのカラスは黒い
（全称肯定命題）

1	1
1	1

Ｅ：どのカラスも黒くない
（全称否定命題）

0	0
0	0

Ｉ：あるカラスは黒い
（特殊肯定命題，存在肯定命題）

1	…
…	…

Ｏ：あるカラスは黒くない
（特殊否定命題，存在否定命題）

0	…
…	…

● 練習問題１

次の命題の否定命題を求めよ。

(1)　$\forall x\ (Fx \land Gx)$

(2)　$\forall x\ (Fx \lor Gx)$

(3)　$\exists x\ (Fx \land Gx)$

(4)　∃ｘ（Ｆｘ∨Ｇｘ）

(5)　∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）

(6)　∀ｘ∃ｙＦｘｙ

● 練習問題２

次の命題の否定命題を求めよ。

(1)　女性は美しい。

(2)　流行品はどれも高い。

(3)　マンガはくだらない。

(4)　背が高くない日本人がいる。

(5)　結婚すれば幸せになる。

5.　２項述語の場合の量化命題

２項述語とは，次のように，２つの固定定項や個体変項をとる述語である。

Ｆａｂ，Ｆｘｙ，Ｆｘａ，Ｆａｙ

以下に，２項述語の記号化の例を示す。ただし，次のように定める。

・個体領域Ｄ：人間の集合（個体変項ｘが存在する範囲の集合）

・個体定項：「太郎」をａ，「花子」をｂとする

・述語Ｆｘｙ：ｘはｙを愛している

(1)　太郎は，花子を愛している。　⇒　Ｆａｂ

(2)　花子は，太郎を愛している。　⇒　Ｆｂａ

(3)　花子は，太郎を愛していない。　⇒　～Ｆａｂ

(4)　すべての人は，太郎を愛している。　⇒　∀ｘ（Ｆｘａ）

(5)　ある人は，太郎を愛している。　⇒　∃ｘ（Ｆｘａ）

(6)　どの人も太郎を愛していない。　⇒　∀ｘ（～Ｆｘａ）

(7)　ある人は，太郎を愛していない。　⇒　∃ｘ（～Ｆｘａ）

(8)　太郎は，すべての人を愛している。　⇒　∀ｘ（Ｆａｘ）

(9)　太郎は，ある人を愛している。　⇒　∃ｘ（Ｆａｘ）

(10)　太郎は，どの人も愛していない。　⇒　∀ｘ（～Ｆａｘ）

(11)　太郎は，ある人を愛していない。　⇒　∃ｘ（～Ｆａｘ）

(12)　すべての人は，太郎と花子を愛している。　⇒　∀ｘ（Ｆｘａ∧Ｆｘｂ）

(13)　ある人は，太郎と花子を愛している。　⇒　∃ｘ（Ｆｘａ∧Ｆｘｂ）

(14)　すべての人は，太郎か花子を愛している。　⇒　∀ｘ（Ｆｘａ∨Ｆｘｂ）

● 練習問題

　次の命題を記号化し，その命題の否定を日本語らしい文章で表わせ。ただし，個体領域Ｄは人間の集合とする。

(1)　すべての人は，すべての人から愛されている。

(2)　すべての人は，ある人から愛されている。

(3)　ある人は，すべての人から愛されている。

(4)　ある人は，ある人から愛されている。

＜解答＞

(1)　ある人は，ある人から愛されていない。

　　ある人から愛されていない人がいる。

(2)　ある人は，すべての人から愛されていない。

　　どの人からも愛されていない人がいる。

(3)　すべての人は，ある人から愛されていない。

　　どの人にも自分を愛していない人がいる

(4)　すべての人は，すべての人から愛されていない。

　　どの人もすべての人から愛されていない。

13　論理式の妥当性

1.　論理式に解釈を与える

いきなり，論理式

Ｆａ

は真か偽か，と聞かれても答えようがない。述語Ｆや個体ａの説明がないからである。

同様に，∀ｘＦｘもそうであり，しかも個体領域の取り方により，真にも偽にもなる。

・個体領域が犬の集合，Ｆｘは「ｘは動物である　」　⇒　∀ｘＦｘ は真

・個体領域が生物の集合，Ｆｘは「ｘは動物である」　⇒　∀ｘＦｘ は偽

述語論理の場合，論理式の真偽を確定するためには，論理式を構成する各記号に具体的な意味を与える必要がある。「各記号に具体的な意味を割り当てる」ことを，「論理式に解釈を与える」という。

論理式に解釈を与えるとは，次の(1)～(3)を確定することである。確定された(1)～(3)を論理式の解釈（interpretation）といい，通常Ｉで表す。

● 論理式の解釈（I）

(1)　述語記号（述語を表す記号）に，具体的な意味を割り当てる。

(2)　個体定項に，特定の個体を割り当てる。

(3)　個体領域Ｄを具体的に設定する。

論理式に解釈が与えられたとき，∀ｘＦｘ，∃ｘＦｘの真偽は次の意味になる。

● 個体領域Ｄが設定された場合

(1)　∀ｘＦｘが真　⇔　Ｄに属する任意の定項ｕに対してＦｕが真

(2)　∃ｘＦｘが真　⇔　Ｄに属するある定項ａに対してＦａが真

⇔　Ｆａが真となるような，Ｄに属する定項ａが存在

● 問題１

次の論理式（条件文）の真偽を，以下の解釈Ｉのもとで決定せよ。

(1)　∃ｘＦｘ → ∀ｘＦｘ

(2)　∀ｘＦｘ → ∃ｘＦｘ

解釈Ｉ：個体領域Ｄ＝動物全体，Ｆｘ＝「ｘは肉食である」

● 問題２

次の論理式（条件文）の真偽を，以下の解釈Ｉのもとで決定せよ。

(1)　∀ｘ（Ｆｘ∨Ｇｘ）→（∀ｘＦｘ∨ ∀ｘＧｘ）

(2)　∃ｘ（Ｆｘ∨Ｇｘ） →（∃ｘＦｘ∨ ∃ｘＧｘ）

解釈Ｉ：個体領域Ｄ＝自然数全体，Ｆｘ＝「ｘは偶数である」，Ｇｘ＝「ｘは奇数である」

2.　妥当式

様々な形の論理式があるが，それを簡単にＡで表す。論理式の真偽はその解釈によって定まることから，次の(1)～(3)の３種類に分類される。

● 論理式Ａの分類

(1)　いかなる解釈のもとでも，Ａは真である。（このとき，Ａは妥当である，Ａは妥当式であるという。）

(2)　いかなる解釈のもとでも，Ａは偽である。（このとき，Ａは矛盾である，Ａは矛盾式であるという。）

(3)　Ａは，(1)でも(2)でもない論理式である。（ある解釈のもとではＡは真になり，別の解釈のもとではＡは偽になる。）

妥当式は，命題論理の恒真命題（トートロジー）に相当する。そのため，妥当であることを「恒真である」と表現しているテキストもある。

述語論理では，妥当式は「論理的な真理」を意味する。論理的な真理とは，論理記号（～，∧，∨，→，↔，∀，∃）のみによって真となる真理性のことであり，定項，述語，個体領域の解釈をどのように与えても，その真理性は影響を受けない。定項がどの個体を指すのか，述語がいかなる性質や関係を表すのか，あるいは，議論されている個体領域がどのようなものか，このような現実世界の要因には関わりなく，真となる論理式が妥当式である。

論理式が妥当でないことを示す１つの方法は，その論理式が偽になるような解釈を１つ与えればよい。

● 例題

以下の論理式が妥当でないことを示す解釈を１つ示せ。

(1)　∀ｘＦｘ∨∀ｘ～Ｆｘ

(2)　（∃ｘＦｘ∧∃ｘＧｘ）→∃ｘ（Ｆｘ∧Ｇｘ）

（解答）以下の解釈では，明らかに論理式は偽になる。

(1)　解釈Ｉ：個体領域Ｄ＝人間の集合，Ｆｘ＝「ｘは男である」

(2)　解釈Ｉ：個体領域Ｄ＝人間の集合，Ｆｘ＝「ｘは男である」，Ｇｘ＝「ｘは女である」

3.　述語論理と決定手続き

命題論理の場合には，ある論理式が恒真であるかどうかは，その真理表を作成するという機械的な手続きで有限回の内に必ず決定できる。n 個の命題記号 A_1，A_2，$\cdots$，A_n から作られた，いかに複雑な論理式であっても，論理式の真理表の行数は有限であるため，真理表を作成することは理論的に可能である。そして，真理表の真理値によって恒真性が判定できる。このように，あ

る論理式が恒真かどうかを有限回の機械的手続きで決定する方法を「決定手続き」という。

しかし，述語論理では，「決定手続き」は存在しないことが証明されている。もちろん，与えられた論理式によっては，真理値の考察により，命題論理の場合と同様に証明できる場合もあるが，一般的な機械的方法は述語論理には存在しない。

4.　推論の妥当性

述語論理における「推論の正しさ」「推論の妥当性」の意味は，命題論理の場合と同じである。

少し復習すると，一般に，A_1，A_2，⋯，A_n を n 個の前提，C を結論とすれば，推論は次の形で表現できる。

（推論）　A_1，A_2，⋯，A_n　ゆえに C

これは，「A_1，A_2，⋯，A_n がすべて成立すれば，必ず C も成立する」ことを主張する。

また，推論は，次の条件文の形で表現できる。

(a)　$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to C$

これを簡単に次のようにも書く。

(b)　$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n \ \to\ C$

(a)や(b)を，「推論式」と呼ぶ。

推論式が妥当式になるとき，推論は「正しい」「妥当である」という。言い換えれば，推論が正しいとは，いかなる解釈のもとでも論理式 (a) は恒真になる，ということである。

5.　自然演繹法での推論規則

一般に，述語論理では，以下の 4 つの規則を導入し，自然演繹法によって推論を行う。すなわち，以下の論理式（条件文）は妥当式であると認めて推論を行う。個体のａやｕは，あくまでも，考えている個体領域に属する個体である。

(1)　全称消去（∀_ ）（全称例化）

①　∀ｘＦｘ　→　Ｆｕ　（ｕは任意の個体）

②　∀ｘＦｘ　→　Ｆａ　（ａは特定の個体）

意味：すべての個体ｘについてｘがＦならば，任意の個体ｕあるいは特定の個体ａにつてもＦである。

(2)　全称導入（$\forall_+$ ）（全称汎化）

①　Ｆｕ　→　∀ｘＦｘ（ｕは任意の個体）

意味：任意の個体ｕがＦならば，すべての個体ｘについてｘはＦである。

(3)　存在消去（∃_ ）（存在例化）

①　∃ｘＦｘ　→　Ｆａ　（ａは特定の個体）

意味：あるｘについてｘがＦならば，特定の個体ａはＦである。

(4)　存在導入（$\exists_{+}$）（存在汎化）

①　Ｆｕ　→　∃ｘＦｘ　（ｕは任意の個体）

②　Ｆａ　→　∃ｘＦｘ　（ａは特定の個体）

意味：任意の個体ｕがＦ，あるいは，特定の個体ａがＦならば，あるｘについてＦである。

● 例題１

次の推論は妥当であることを示せ。

すべての人間は動物である。

太郎は人間だ。

∴　太郎は動物だ。

（解法）

Ｆｘ＝「ｘは人間である」，Ｇｘ＝「ｘは動物である」，ａ＝「太郎」とする。

推論式：∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ），Ｆａ　∴　Ｇａ

(1)	∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）	前提
(2)	Ｆａ	前提
(3)	Ｆａ→Ｇａ	(1)∀_
(4)	Ｇａ	(2)(3)

よって，推論は妥当である。

● 例題２

次の推論は妥当であることを示せ。

すべての物体は消滅する。

すべてのものは物体である。

∴　すべてのものは消滅する。

（解法）

Ｆｘ＝「ｘは物体である」，Ｇｘ＝「ｘは消滅する」とする。

推論式：∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ），∀ｘＦｘ　∴　∀ｘＧｘ

(1)	∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）	前提
(2)	∀ｘＦｘ	前提
(3)	Ｆｕ→Ｇｕ	(1)∀_
(4)	Ｆｕ	(2)∀_

(5)	Ｇｕ	(3)(4)
(6)	∀ｘＧｘ	(5)$\forall_+$

よって，推論は妥当である。

● 例題３

次の推論は妥当であることを示せ。

すべての輸入車は高い。

∴　高くないものはすべて輸入車ではない。

（解法）

Ｆｘ＝「ｘは輸入車である」，Ｇｘ＝「ｘは高い」とする。

推論式：∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ），　∴　∀ｘ（～Ｇｘ→～Ｆｘ）

(1)	∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）	前提
(2)	Ｆｕ→Ｇｕ	(1)$\forall_-$
(3)	～Ｇｕ→～Ｆｕ	(2)対偶
(4)	∀ｘ（～Ｇｘ→～Ｆｘ）	(3)$\forall_+$

よって，推論は妥当である。

● 例題４

次の推論は妥当であることを示せ。

すべてのものは形をもつ。

∴　形をもつものがある。

（解法）

Ｆｘ＝「ｘは形をもつ」とする。

推論式：∀ｘＦｘ　∴　∃ｘＦｘ

(1)	∀ｘＦｘ	前提
(2)	Ｆａ	(1)$\forall_-$
(3)	∃ｘＦｘ	(2)$\exists_+$

よって，推論は妥当である。

● 例題５

次の推論は妥当であることを示せ。

すべてのクルマは国産品である。

高級なクルマがある。

∴　高級な国産品がある。

（解法）

Ｆｘ＝「ｘはクルマである」，Ｇｘ＝「ｘは国産品である」，Ｈｘ＝「ｘは高級である」とする。

推論式：∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ），∃ｘ（Ｆｘ∧Ｈｘ）　∴　∃ｘ（Ｈｘ∧Ｇｘ）

(1)	∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）	前提
(2)	∃ｘ（Ｆｘ∧Ｈｘ）	前提
(3)	Ｆａ∧Ｈａ	(2)$\exists_{-}$
(4)	Ｆａ→Ｇａ	(1)$\forall_{-}$
(5)	Ｆａ	(3)
(6)	Ｇａ	(4)(5)
(7)	Ｈａ	(3)
(8)	Ｈａ∧Ｇａ	(6)(7)
(9)	∃ｘ（Ｈｘ∧Ｇｘ）	(8)$\exists_{+}$

よって，推論は妥当である。

6.　分析タブロー

前述したように，述語論理では，推論の妥当性の判定問題は一般には解けない。タブローを使っても解けない。ただし，タブローは，推論が妥当であることを示す別の証明法としては，便利である。

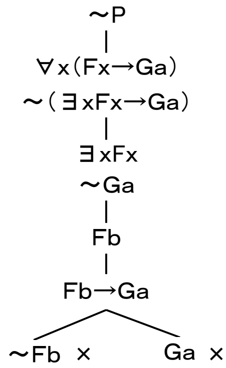
真のみの論理式を描いた真理木を，タブローと呼んだ。前述した 4 つの規則をタブローで書けば，次のようになる。

(1)　全称消去（全称例化） ∀ｘＦｘ　　　　∀ｘＦｘ │　　　　　　│ Ｆｕ　　　　　Ｆａ （ｕは任意の個体）（ａは特定の個体）	(2)　全称導入（全称汎化） Ｆｕ │ ∀ｘＦｘ （ｕは任意の個体）
(3)　存在消去（存在例化） ∃ｘＦｘ │ Ｆａ （ａは特定の個体）	(4)　存在導入（存在汎化） Ｆｕ　　　　　Ｆａ │　　　　　　│ ∃ｘＦｘ　　　　∃ｘＦｘ （ｕは任意の個体）（ａは特定の個体）

●例題１

次の推論が妥当であることを示せ。

∀ｘ（Ｆｘ→Ｇａ）　∴　∃ｘＦｘ→Ｇａ



（解法）

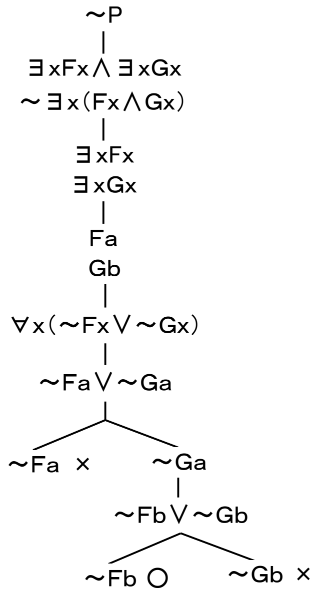
推論式を P とする。P が 0 と仮定すると，タブローでは矛盾が発生するので，P は常に 1 である。よって，推論は妥当である。

（どのような個体領域でも P は 1 であることに注意）

●例題２

次の推論の妥当性を判定せよ。

∃ｘＦｘ∧∃ｘＧｘ　∴　∃ｘ（Ｆｘ∧Ｇｘ）



（解法）

p.84 の例題から，この推論は妥当ではないが，タブローで考えてみる。

推論式を P とする。P が 0 と仮定すると，枝先の ～Ｆｂ では矛盾が発生しない。

さて，この時点で，「～P が 1 になる場合があるので，推論は妥当ではない」と判断してもよいだろうか。

つまり，

- Ｆａ，Ｇｂがともに１
- Ｆｂ，Ｇａがともに０

であるような解釈が存在すれば，確かに～P は 1 になるが，そのような解釈が存在するのだろうか。

結論を言えば，そのような解釈は必ず存在する（次の節を参照）。

従って，分析タブローで，矛盾が発生せず最後まで枝が延びた場合には，～P が 1 になる場合がある，従って，推論は妥当でないと判断してよい。

●問題

次の推論の妥当性を，タブローで判定せよ。

(1)　∃ｘ（Ｆａ→Ｇｘ）　∴　Ｆａ→∃ｘＧｘ

(2)　∃ｘ（Ｆｘ∧Ｇｘ）　∴　∀ｘＦｘ∧∃ｘＧｘ

7.　妥当式でないことを具体的に示す方法

論理式が妥当でないことを示す 1 つの方法は，それが偽になるような解釈を 1 つ与えることであった。その場合，個体領域Ｄ＝「人間の集合」，Ｆｘ＝「ｘは男である」というような，現実的な解釈を考えてもよいが，真理値に着目した形式的な解釈を作ることもできる。

以下，命題関数Ｆｘを

$$F(x)$$

で表す。さらに，個体定項 a に対して，$F(a)$ の真偽を

$$F(a) = 1,\ F(a) = 0$$

で表す。1 と 0 は，もちろん真理値のことである。

このような表現では，「x の関数」という数学的な意味合いが強まるが，基本的にＦｘと $F(x)$ の表現に差異はない。

個体領域 D が有限集合の場合，D は次のように表現できる。

$$D = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$$

ここで，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が個体定項であり，全部で n 個である。

このとき，$\forall x F(x)$ や $\exists x F(x)$ が 1（真）であるとは，以下の意味になる。

① $\forall x F(x)$ が 1 ⇔ D に属する任意の個体 u に対して $F(u)$ が 1
⇔ $F(a_1)$，$F(a_2)$，⋯，$F(a_n)$ がすべて 1
⇔ $F(a_1) \wedge F(a_1) \wedge \cdots \wedge F(a_n)$ が 1

② $\exists x F(x)$ が 1 ⇔ D に属するある個体 a に対して $F(a)$ が 1
⇔ $F(a_1)$，$F(a_2)$，⋯，$F(a_n)$ のいずれかが 1
⇔ $F(a_1) \vee F(a_1) \vee \cdots \vee F(a_n)$ が 1

従って，個体領域 D のもとでは，$\forall x F(x)$ と $F(a_1) \wedge F(a_1) \wedge \cdots \wedge F(a_n)$ の真理値は必ず一致するので，両者の論理式は等しい。$\exists x F(x)$ も同様である。

● 個体領域が有限集合 $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ の場合

(1)　$\forall x F(x) = F(a_1) \wedge F(a_1) \wedge \cdots \wedge F(a_n)$

(2)　$\exists x F(x) = F(a_1) \vee F(a_1) \vee \cdots \vee F(a_n)$

従って，個体領域が有限集合の場合は量化子の記号が不要になり，述語論理の話は，命題論理と同じになる。特に，$D = \{a,\ b\}$（個体の個数が 2 個）の場合は，次のようになる。

$$\forall x F(x) = F(a) \wedge F(b),\ \exists x F(x) = F(a) \vee F(b)$$

この場合，次の 2 つの論理式は，全く同じ意味になる。

○　$\exists x F(x) \to \forall x F(x)$

○　$F(a) \vee F(b) \to F(a) \wedge F(b)$

従って，前者の論理式が妥当でないことを示すのは，全く容易な話になるわけである。

● 例題１

次の論理式が妥当でないことを示せ。

$$\exists x F(x) \rightarrow \forall x F(x)$$

（解法）

個体領域を $D = \{a,\ b\}$ とし，命題関数 $F(x)$ を次のように定める。

$$F(a) = 1,\quad F(b) = 0$$

このとき，$\exists x F(x)$ は 1 で，$\forall x F(x)$ は 0 になるので，与えられた論理式は 0 になる。よって，それは妥当ではない。

（注意）解法としては上記で十分である。なぜなら，論理式が妥当であるとは，いかなる個体領域であっても，あるいは，上記のように形式的に定義されたいかなる命題関数であっても，論理式が常に 1 になることを意味するからである。上記では，与えられた論理式が偽になる例を示しているので，論理式は妥当ではない。

日常表現による解釈を無理に考える必要はないが，例えば，次の解釈 I を考えれば，その解釈のもとでは，例題の論理式は偽になる。

解釈 I : 個体領域 D＝｛太郎，メアリー｝　（太郎は日本人，メアリーはアメリカ人とする）

$F(x)$＝「x は日本人である」

● 例題２

次の推論が妥当でないことを示せ。

$$\forall x\,(F(x) \vee G(x)) \quad \therefore \quad \forall x F(x) \vee \forall x G(x)$$

（解法）

個体領域を $D = \{a,\ b\}$ とすれば，与えられた次の推論と同じになる。

$$(F(a) \vee G(a)) \wedge (F(b) \vee G(b)) \quad \therefore \quad (F(a) \wedge F(b)) \vee (G(a) \wedge G(b))$$

従って，命題関数 $F(x)$，$G(x)$ を

$$F(a) = 1,\quad F(b) = 0$$
$$G(a) = 0,\quad G(b) = 1$$

と定めれば，$\forall x\,(F(x) \vee G(x))$ は 1，$\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ は 0 になるので，推論は妥当でない。

● 例題３

次の推論が妥当でないことを示せ。

$$\exists x\,(F(x) \to G(x)),\ \exists x F(x) \quad \therefore \quad \exists x G(x)$$

（解法）

$F(x) \to G(x) = \sim F(x) \vee G(x)$ であるから，個体領域を $D = \{a,\ b\}$ とすれば，与えられた推論は次の推論と同じになる。

$$(\sim F(a) \vee G(a)) \vee (\sim F(b) \vee G(b)),\ F(a) \vee F(b) \quad \therefore \quad G(a) \vee G(b)$$

従って，命題関数 $F(x)$，$G(x)$ を

$$F(a) = 1,\ F(b) = 0$$
$$G(a) = 0,\ G(b) = 0$$

と定めれば，$\exists x\,(F(x) \to G(x))$ は 1，$\exists x F(x)$ は 1，$\exists x G(x)$ は 0 になるので，推論は妥当でない。

● 問題

次の推論が妥当でないことを示せ。

$$\exists x\,(F(x) \wedge G(x)) \quad \therefore \quad \forall x F(x) \wedge \exists x G(x)$$

（解法）

14　２項述語

1.　注意

まず，2 項述語に関する注意をいくつか書いておく。

(1)　2 項述語での話のほとんどは，多項述語（2 項以上の述語）でも通用する。

(2)　以下では，2 項述語を $F(x, y)$ の形で表すが，Ｆｘｙと書いてもかまわない。$F(x, y)$ は，変項 x と変項 y の関係を表す述語である。

(3)　2 項述語 $F(x, y)$ を，「x と y の命題関数」「2 変数の命題関数」などという。

(4)　$F(x, y)$ に対して，単に「議論領域 D」といえば，x と y の動く範囲がともに D であることを意味する。すなわち，x や y に代入する個体の存在範囲が D という意味である。

(5)　一方，$F(x, y)$ に対して，x の動く範囲と y の動く範囲が異なる場合がある。その場合には，次の意味で，「x の個体領域」「y の個体領域」という言い方をする。

x の個体領域 D_1　…　x に代入する個体の存在範囲
y の個体領域 D_2　…　y に代入する個体の存在範囲

(6)　$\forall x \exists y\, F(x, y)$ は，次の意味である。

$$\forall x\,(\exists y\,(F(x, y)))$$

すなわち，$F(x, y)$ を最初に $\exists y$ で量化して $\exists y\,(F(x, y))$ をつくり，そのあとにこれを $\forall x$ で量化したものである。括弧を省略すれば，次の順番で作られたものである。

①　$F(x, y)$　…　x と y の命題関数（x と y が自由変項）
②　$\exists y\, F(x, y)$　…　x の命題関数（x は自由変項，y は束縛変項）
③　$\forall x \exists y\, F(x, y)$　…　量化命題

以上の話は，$\exists x \forall y\, F(x, y)$ なども同様である。

2.　個体定項を含む 2 項述語

2 項述語 $F(x, y)$ を含む命題を記号化する場合，日本語の文章にとらわれずに，x と y の関係に注意しよう。いま

個体領域を人間の集合，太郎を a，　$F(x, y) =$「x は y を愛している」

とすると，以下のように記号化される。

(1)　すべての人は太郎を愛している　⇒　$\forall x$（x は太郎を愛している）
⇒　$\forall x\, F(x, a)$

(2)　太郎はすべての人を愛している　⇒　$\forall y$（太郎は y を愛している）
⇒　$\forall y\, F(a, y)$

(3)　太郎はある人を愛している　　⇒　$\exists y$ （太郎は y を愛している）
　　　　　　　　　　　　　　　　⇒　$\exists y\, F(a, y)$
(4)　ある人は太郎を愛している　　⇒　$\exists x$ （x は太郎を愛している）
　　　　　　　　　　　　　　　　⇒　$\exists x\, F(x, a)$

もちろん，(2)では，y を x にかえて，$\forall x\, F(a, x)$ と表してもよい。(3)も同様である。

● 例題

次の命題を記号化せよ。

(1)　命題：ヒマラヤより高い山は，どの山よりも高い。

(2)　命題：若い女性がみんな心を奪われている俳優がいる。

(3)　命題：どんな数学者にも解けない数学の問題がある。

（解）

(1)　ヒマラヤより高い山は，どの山よりも高い。

＝ すべてのヒマラヤより高い山は，すべての山よりも高い。

＝ ∀ｘ（ｘはヒマラヤより高い山なら，ｘはすべての山より高い）

a =「ヒマラヤ」，$F(x)$ =「x は山である」，$G(x, y)$ =「x は y より高い」

記号化：$\forall x\,(F(x) \wedge G(x, a) \rightarrow \forall y\,(F(y) \rightarrow G(x, y)))$

(2)　若い女性がみんな心を奪われている俳優がいる。

＝ すべての若い女性は，ある俳優に心を奪われている。

＝ ∀ｘ（ｘは若い女性なら，ある俳優がいて心を奪われている）

$F(x)$ =「x は若い」，$G(x)$ =「x は女性である」，$H(x)$ =「x は俳優である」

$I(x, y)$ =「x は y に心を奪われている」

記号化：$\forall x\,(F(x) \wedge G(x) \rightarrow \exists y\,(H(y) \wedge I(x, y))$

(3)　どんな数学者にも解けない数学の問題がある。

＝ ある数学の問題があって，すべての数学者はその問題を解けない。

＝ ∃ｘ（ｘは数学の問題 ∧ ∀ｙ（ｙは数学者 → ｙはｘを解けない））

$F(x)$ =「x は数学の問題である」，$G(y)$ =「y は数学者である」

$I(y, x)$ =「y は x を解ける」

記号化：$\exists x\,(F(x) \wedge \forall y\,(G(y) \rightarrow \sim H(y, x)))$

● 問題 1

次の命題を記号化せよ。

(1)　ある歌手は，すべての大学生から好かれている。

(2)　すべての音楽は，ある若者に好かれている。

(3)　太郎と親しい人女性はみんな，次郎と親しくない。

(4)　太郎には公務員の恋人がいる。

● 問題２

ｘ，ｙの変域がともに整数であるとき、以下の命題の意味とその真偽を答えよ。

(A) ∃ｘ∀ｙ（ｘ＋ｙ＝ｙ）

(B) ∀ｘ∃ｙ（ｘ＋ｙ＝ｙ）

(C) ∃ｘ∀ｙ（ｘ＋ｙ＝ｙ）

(D) ∀ｘ∃ｙ（ｘ＋ｙ＝ｙ）

● 問題３

２つの実数a, bについての条件

A：どんな実数xに対しても，適当な実数yをとれば，$ax \neq by$となる

が成り立たないために，次の(1)〜(4)が，それぞれ必要条件であるか十分条件であるかをいえ。

(1)　どんな実数xをとっても，任意の実数yに対して，$ax = by$となる。

(2)　どんな実数xに対しても，適当な実数yをとれば，$ax = by$となる。

(3)　適当な実数xをとれば，どんな実数yに対しても，$ax = by$となる。

(4)　適当な実数xをとれば，適当な実数yに対して，$ax = by$となる。