1. Sistema de raíces afínes

Sea V un espacio $\mathbb{R}$-vectorial y A es un espacio afín sobre V. Sea Ψ un sistema de raíz afín de A^*. Recordamos la definición de sistema de raíces afín.

Definición 1.1. Un subconjunto Ψ de A^* es un sistema de raíz afín, si

(1) Ψ genera A^* y no contiene funciones constante.
(2) Para todo $\alpha \in \Psi$ hay un $\dot{\alpha}^\vee \in V \subset A^{**}$ tal que $\langle \alpha, \dot{\alpha}^\vee \rangle = 2$ y la reflexión $r_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha \rangle \cdot \dot{\alpha}^\vee$ preserva Ψ.
(3) Para $\alpha, \beta \in \Psi$, $\langle \alpha, \dot{\beta}^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$,
(4) El subgrupo $W(\Psi)$ de $\mathrm{Aut}(A)$ dado por $\{r_\alpha \colon \alpha \in \Psi\}$ actua propiamente, i.e. si $K_1, K_2 \subset A$ son compactos, entonces $\{w \in W(\Psi) \colon wK_1 \cap K_2 \neq\}$ es finito.

Diremos que Ψ es reducido, si $\alpha, \beta \in \Psi$ y $\alpha = r \cdot \beta$ con $r \in \mathbb{Z}$, entonces $r \in \{-1, 1\}$.

2. Ejemplos

Sea Φ un sistema de raíz de V^*. El sistema de raiz afín asociado Ψ_Φ está definido por

$$\{(a, k) \colon a \in \Phi, k \in I_\alpha\},$$

donde I_a es $\mathbb{Z}$ si a no es divisible o es $2\mathbb{Z}+1$, si no. Entonces Ψ_Φ es un sistema de raíz afín reducido en $V^* \oplus k$.

2.1. **Arreglo de hiperplanos: habitaciones y facetas.**

Sea $\psi \in \Psi$ una raíz afín. Un *hiperplano de raíz afín asociado a* ψ de A es el hiperplano afín dado por $H_\psi = \{x \in A : \psi(x) = 0\}$, donde $\psi \in \Psi$. Consideramos el arreglo de hiperplanos dado por $\{H_\psi \colon \psi \in \Psi\}$, lo que da una partición en el espacio afín A.
Las partes que no intersectan ningun hiperplano se llama *habitaciones* que no intersecatan ningun hiperplano. En general las partes se llaman *facetas*.

3. Habitaciones y raices afines simples

Dada una habitación $\mathcal{C}$. Denotamos $\psi \in \Psi$ se llama *positiva con respecto a* $\mathcal{C}$ (respectivamente *negativa con respecto a* $\mathcal{C}$) si $\psi(x) > 0$ (respectivamente $\psi(x) < 0$) para todo $x \in \mathcal{C}$. Denotamos por $\Psi(\mathcal{C})^+$ y $\Psi(\mathcal{C})^-$ el conjunto de raíces afines positivas y negativas, respectivamente. Observamos que tenemos la unión disjunta $\Psi = \Psi(\mathcal{C})^+ \cup \Psi(\mathcal{C})^-$.
Sea $\mathcal{C}$ una cámara. Sea $\Psi(\mathcal{C})^0$ el conjunto que consiste en aquellas $\psi \in \Psi(\mathcal{C})^+$ indivisibles para las cuales H_ψ es una pared de $\mathcal{C}$. El conjunto de estas raices afines se llama una *base* de Ψ, y sus elementos se llaman *raíces afines simples.*
Observe que $\mathcal{C}$ está determinada de manera única por $\Psi(\mathcal{C})^0$, concretamente como la intersección de los semiespacios $A^{\psi>0}$ para $\psi \in \Psi(\mathcal{C})^0$.

4. Proposición

Sea Φ un sistema de raíces reducido irreducible y $\Psi = \Psi_\Phi = \{a_1, \dots, a_\ell\}$ el sistema de raíces afín asociado. Si $a_1, \dots, a_\ell$ es una base para Φ, a_0 es la raíz más larga, y definimos $\psi_1 = a_1, \dots, \psi_\ell = a_\ell$ y $\psi_0 = 1$, entonces $\psi_v, \dots, \psi_\ell$ es una base para Ψ.

4.1. **Puntos especiales.**

5. Edificios de Bruhat-Tits: general

Sea F un cuerpo henseliano de valuacion discreta, k el cuerpo residual (perfecto) y $K = F^u$. Además sea G un grupo reductivo sobre F.
Hay una acción de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/F)$ en $B(G/K)$, y todas las orbitas son finitas.

$$B(G/F) = B(G/K)^{\Gamma}.$$

Es no vacio, cerrado y convexo.

Definición 5.1. Definimos

1. una Γ-faceta de B es una faceta Γ invariante.
2. Una Γ-alcoba es un Γ-faceta maximal.
3. Una Γ-vértice es una Γ-faceta minimal.

Definición 5.2. Una faceta de $B(G/F)$ es Ω^{Γ}, para una Γ-faceta Ω de $B(G/K)$. Es una alcoba o vértice si Ω es una Γ-alcoba o veŕtices, respectivamente.

Hasta ahora no queda claro si de esta manera tenemos propiedades similar como en el caso de cuasi escindido.

Grupos esquemáticos.

Subgrupos parahoricos.

6. Aplicaciones

Referencias

References

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie Chapitres 4, 5 et 6*, Springer 2007
[2] T. Kaletha, G. Prasad, *Bruhat–Tits theory: a new approach* New Mathematical Monographs, 44. Cambridge University Press.
[3] J.S. Milne. *Algebraic Groups: The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field*
[4] B. Conrad. *Algebraic groups I and II*, disponible en https://www.ams.org/open-math-notes/omn-view-listing?listingId=110662 y https://www.ams.org/open-math-notes/omn-view-listing?listingId=110663