UCAB UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

# PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS TRIÁNGULOS

# Tabla de contenido

# Objetivo

**Identificar** los elementos más importantes de un triángulo, su clasificación, propiedades básicas y definición.

# Introducción

## ¡Hablemos sobre los triángulos!

Las figuras geométricas llamadas polígonos, tienen elementos que se relacionan entre sí lo que hace que, condiciones particulares en un elemento genere cambios en otro, dándole a la figura características particulares o propiedades que las distinguen unas de otras.

Los triángulos, después de las rectas, son las figuras más simples de la geometría. Para profundizar en la comprensión de los teoremas geométricos, es muy importante tener claridad sobre la noción de triángulo, identificar sus elementos y propiedades.

A continuación, se presentan tópicos fundamentales sobre los triángulos. No se pretende agotar el tema, simplemente refrescar conocimientos previos y precisar algunos elementos básicos que servirán de base para el estudio de la geometría.

# Definición y elementos de los triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados. (ver fig.1)

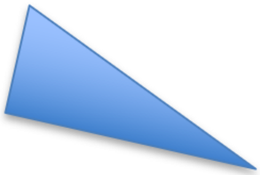


fig.1

Esta figura, se puede nombrar con tres letras mayúsculas. Por ejemplo, el triángulo ABC (ver fig.2)

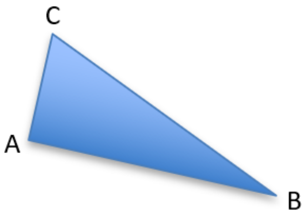



fig.2

Los puntos A, B y C se denominan vértices del triángulo y allí se unen dos lados del triángulo. De esta unión surgen ángulos internos (color verde de la fig. 3) y los ángulos externos (color rojo de la fig. 3)

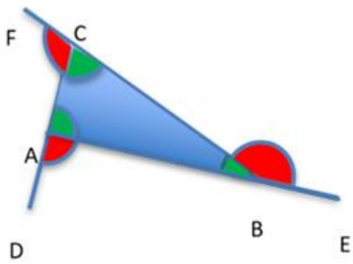



fig.3

De todo lo anterior podemos hacer el siguiente resumen:

Un triángulo es una figura geométrica plana que forma un polígono de:

- Tres lados.
- Tres vértices.
- Tres ángulos internos.
- Tres ángulos externos.

## Clasificación de los triángulos

Los triángulos pueden clasificarse de diversas maneras. Las clasificaciones más frecuentes son las siguientes:

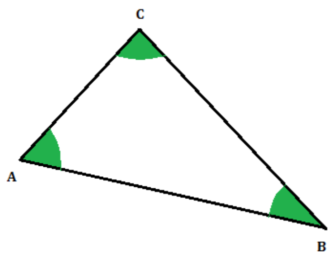
- Con respecto a los lados.
- Con respecto a sus ángulos internos.

| Clasificación más frecuente de los triángulos | |
|---|---|
| Respecto a sus **lados** pueden ser: | Respecto a sus **ángulos internos** pueden ser: |
| - **Equilátero**: tiene tres lados iguales.<br>- **Isósceles**: tiene dos lados iguales.<br>- **Escaleno:** tiene sus lados desiguales. | - **Acutángulo**: tiene sus ángulos internos agudos.<br>- **Rectángulo**: tiene un ángulo recto.<br>- **Obtusángulo**: tiene un ángulo obtuso. |

# Propiedades básicas de los triángulos

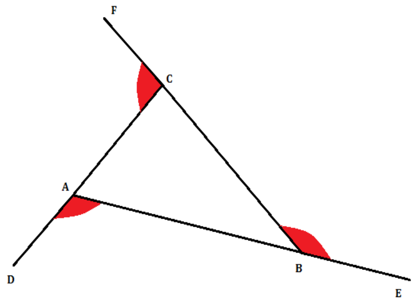
1. En un triángulo, la suma de los ángulos internos es igual a dos ángulos rectos.

En el triángulo ABC, si los ángulos internos son $\measuredangle CAB, \measuredangle ABC \; y \; \measuredangle BCA$ se cumple que, $\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA = 180°$



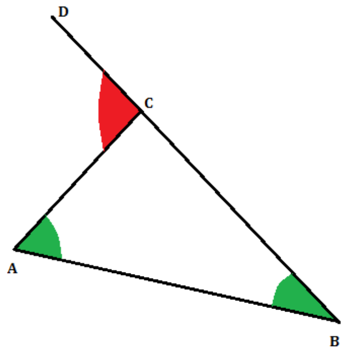

2. En un triángulo, la suma de los ángulos externos es igual a cuatro ángulos rectos.

En el triángulo ABC, si los ángulos externos son $\measuredangle DAB, \measuredangle EBC \; y \; \measuredangle FCA$ se cumple que, $\measuredangle DAB + \measuredangle EBC + \measuredangle FCA = 360°$



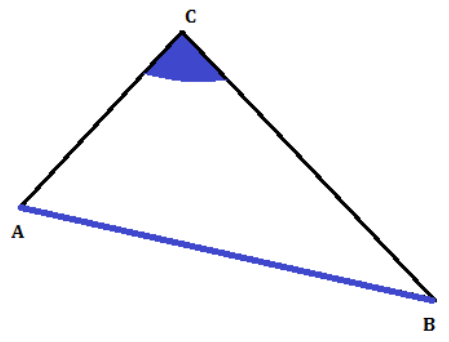

3. En un triángulo, un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él.

En el triángulo ABC, si $\measuredangle DCA$ es un ángulo externo, $\measuredangle CAB \; y \; \measuredangle ABC$ los ángulos internos no adyacentes a él se cumple que, $\measuredangle DCA = \measuredangle CAB + \measuredangle ABC$

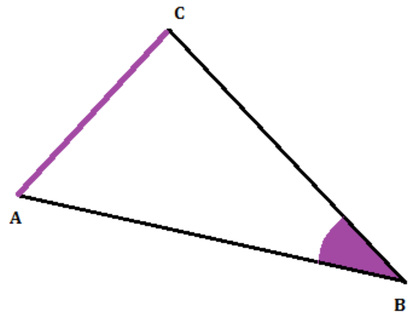


4. En un triángulo, a mayor ángulo se le opone mayor lado y a menor ángulo se le opone menor lado.

En el triángulo ABC, si $\measuredangle ACB$ es el ángulo mayor en amplitud se cumple que, $\underline{AB}$ es el lado mayor en longitud.



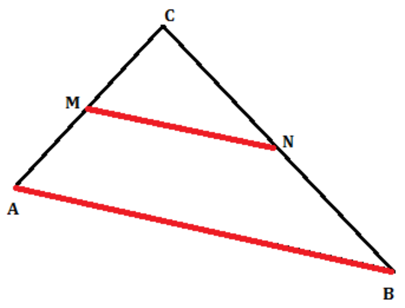

En el triángulo ABC, si $\measuredangle ABC$ es el ángulo menor en amplitud se cumple que, $\underline{AC}$ es el lado menor en longitud.




5. En un triángulo, el segmento que une a los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado e igual en longitud, a su mitad.

En el triángulo ABC, si M y N son los puntos medios de los lados $\underline{CA}$ $y$ $\underline{CB}$ se cumple que,

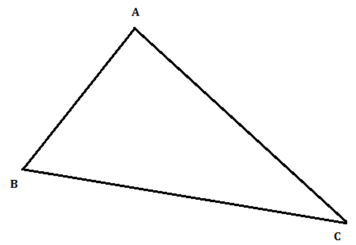
$$MN = \frac{1}{2}AB \quad y \quad \underline{MN}\ es\ paralelo\ a\ \underline{AB}$$



6. En un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

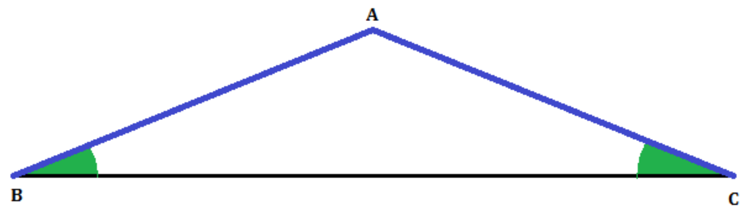
En el triángulo ABC, de lados $\underline{AB}, \underline{BC}\ y\ \underline{CA}$ se cumple que,

$$\underline{AB} > \underline{BC} - \underline{CA} \;\; ; \;\; \underline{BC} > \underline{CA} - \underline{AB} \;\; ; \;\; \underline{CA} > \underline{BC} - \underline{BA}$$
$$\underline{AB} < \underline{BC} + \underline{CA} \;\; ; \;\; \underline{BC} < \underline{CA} + \underline{AB} \;\; ; \;\; \underline{CA} < \underline{BC} + \underline{BA}$$




7. En un triángulo isósceles, los ángulos internos opuestos a los lados iguales, son iguales.

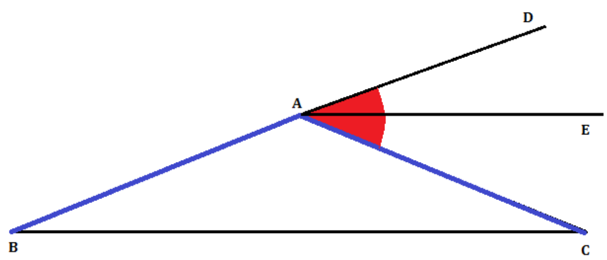
En el triángulo isósceles ABC, si $\underline{AB} = \underline{AC}$ se cumple que, $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$




8. En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo externo cuyo vértice une a los lados iguales, es paralela al tercer lado.

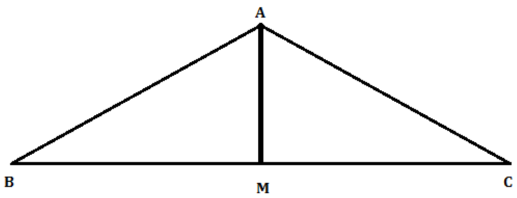
En el triángulo isósceles ABC, si $\underline{AB} = \underline{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$ es bisectriz de $\measuredangle CAD$ se cumple que,

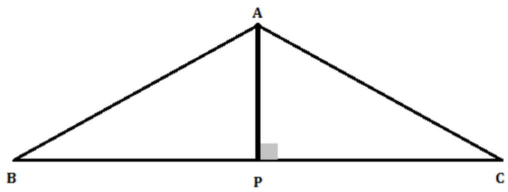
$\overrightarrow{AE}$ *es paralela al lado* $\underline{BC}$

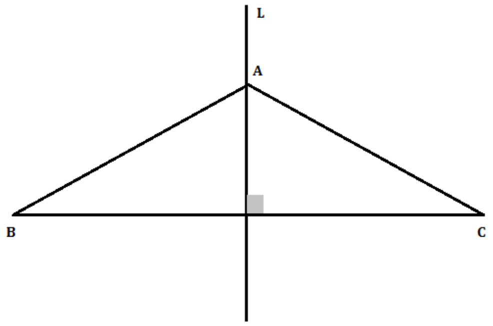


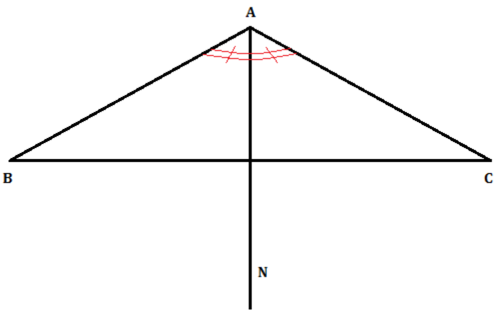
9. En un triángulo isósceles, las líneas notables correspondientes al vértice que une a los lados iguales coinciden.

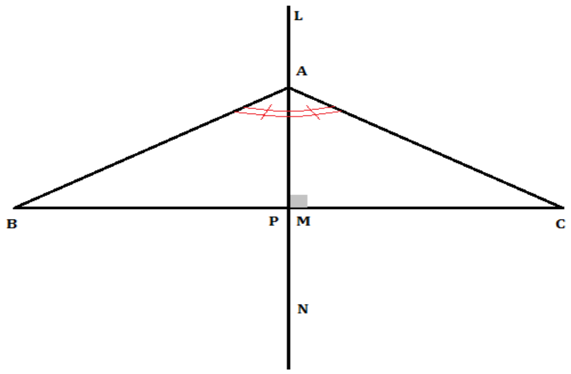
   En el triángulo isósceles ABC, si $\underline{AB} = \underline{AC}$ se cumple que, la mediana $\underline{AM}$ , la altura $\underline{AP}$, la mediatriz $L$ y la bisectriz $\overrightarrow{AN}$ coinciden.



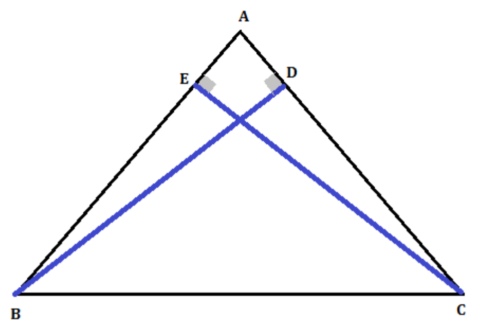



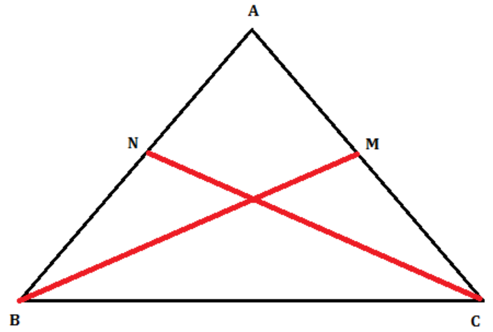
10. En un triángulo isósceles, hay dos alturas iguales.

En el triángulo isósceles ABC, si $\underline{AB} = \underline{AC}$ con $\underline{BD}\ y\ \underline{CE}$ alturas se cumple que, $BD = CE$



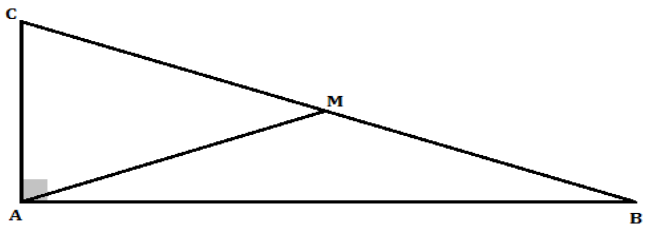

11. En un triángulo isósceles, hay dos medianas iguales.

En el triángulo isósceles ABC, si $\underline{AB} = \underline{AC}$ con $\underline{BM}\ y\ \underline{CN}$ medianas se cumple que, $BM = CN$



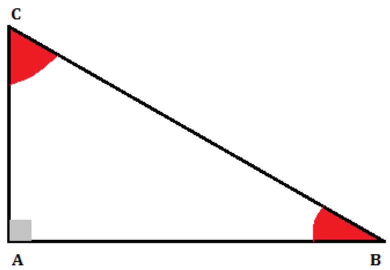

12. En un triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

En el triángulo rectángulo ABC, si $\measuredangle CAB = 90°$ y $M$ es el punto medio de la hipotenusa $\underline{BC}$ se cumple que, $MA = MB = MC$



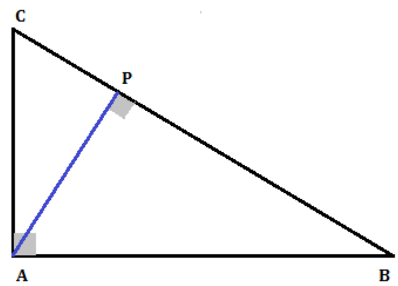
13. En un triángulo rectángulo, si un ángulo agudo es igual a la mitad del otro, el cateto menor es igual a la mitad de la hipotenusa.

En el triángulo rectángulo ABC, si $\measuredangle CAB = 90°$ y $\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\measuredangle BCA$ se cumple que, $AC = \frac{1}{2}B$



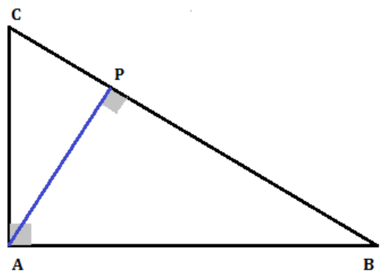

14. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura correspondiente al ángulo recto es igual al producto de los segmentos que ésta determina sobre la hipotenusa.

En el triángulo rectángulo ABC, si $\measuredangle CAB = 90°$ y $\underline{AP}$ es altura se cumple que, $AP^2 = BP.PC$



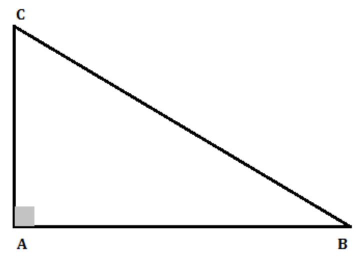

15. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa con la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

En el triángulo rectángulo ABC, si $\measuredangle CAB = 90°$ se cumple que, $AB^2 = BC.BP \;\; y \;\; AC^2 = BC.PC$



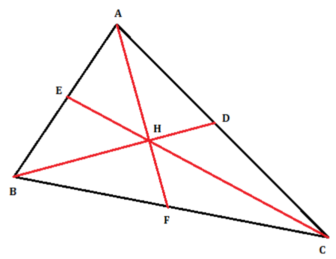
16. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

En el triángulo rectángulo ABC, si $\measuredangle CAB = 90°$ se cumple que, $BC^2 = AB^2 + AC^2$



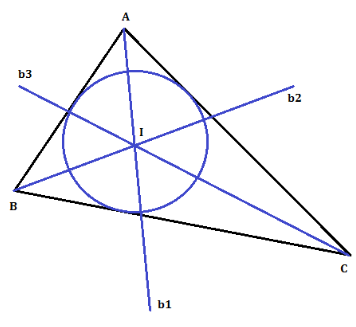

17. En un triángulo, el baricentro divide a cada mediana en dos partes tales que, la longitud del segmento que une al baricentro con el vértice tiene el doble de longitud que el segmento que une al baricento con el punto medio del lado.

En el triángulo ABC, si $H$ es el baricentro se cumple que, $AH = 2HF$ , $BH = 2HD$ $y$ $CH = 2HE$



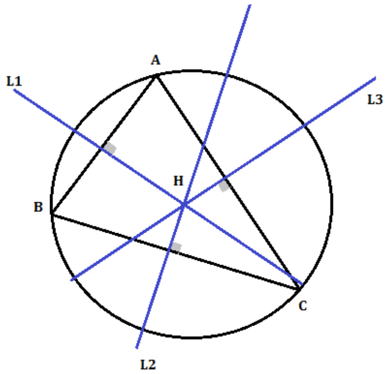

18. En un triángulo, el incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

En el triángulo ABC, si b1,b2 y b2 son bisectrices de los ángulos internos se cumple que, el incentro I es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo es decir, tangente a los lados del triángulo.



19. En un triángulo, el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

En el triángulo ABC, si L1, L2 y L3 son las mediatrices de los lados se cumple que, el circuncentro H es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo es decir, que contiene a los vértices del triángulo.



# Ejercicios

A continuación, se proponen tres ejercicios que te permiten practicar los conocimientos aprendidos.

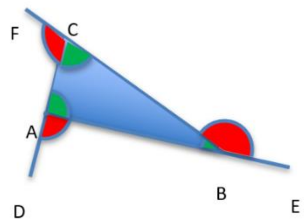
Ejercicio 1
En una hoja de papel, grafica el triángulo ABC (ver fig.2) y luego, señala y nombra los vértices, lados, ángulos internos y ángulos externos.

Ejercicio 2
Determinar el valor de verdad de los siguientes planteamientos:

- Algunos triángulos acutángulos son equiláteros
- Todos los triángulos rectángulos son escalenos
- Algunos triángulos rectángulos son isósceles
- Todos los triángulos equiláteros son acutángulos
- Algunos triángulos rectángulos son obtusángulos
- Todos los triángulos equiláteros son isósceles

Ejercicio 3

Demostrar la propiedad 2
Ejemplificar la propiedad 8
Realizar una representación gráfica de la propiedad 10
Parafrasear la propiedad 19




## Respuesta a los ejercicios

### Ejercicio 1

Vértices: A, B y C

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}\ y\ \overline{CD}$

Ángulos internos: $\measuredangle \boldsymbol{CAB}$, $\measuredangle \boldsymbol{ABC}$ y $\measuredangle \boldsymbol{BCA}$

Ángulos externos: $\measuredangle \boldsymbol{DAB}, \measuredangle \boldsymbol{EBC}\ \boldsymbol{y}\ \measuredangle \boldsymbol{FCA}$

## Ejercicio 2

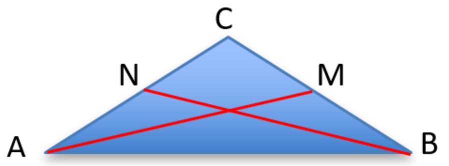
1. Verdadero
2. Falso
3. Verdadero
4. Verdadero
5. Falso
6. Verdadero

## Ejercicio 3

a) En un triángulo, la suma de los ángulos internos más los ángulos externos es igual a 3 ángulos llanos ya que, hay 3 parejas de ángulos adyacentes uno interno y otro externo (idea 1); los ángulos internos suman un ángulo llano por propiedad 1 (idea 2); en consecuencia, los ángulos externos suman 2 ángulos llanos es decir, cuatro ángulos rectos.

b) Triángulo ABC de lados AB=10, BC=5 y CA= 7. En este caso: AB+BC=15; BC+CA=12; CA+AB=17; AB-BC=5; CA-BC=2; AB-CA=3

c) Medianas: AM y BN; AM=BN




d) En un triángulo, el punto de corte de las mediatrices equidista de los vértices.

# Cierre

En el desarrollo del tema, se identificaron las propiedades más conocidas de los triángulos. Entre ellas, se encuentran la suma de los ángulos internos y el Teorema de Pitágoras que quizás sean las más utilizadas, pero como se presentó, existen otras propiedades que pueden identificarse.

Algo interesante a destacar es que las propiedades de los triángulos isósceles y de los triángulos rectángulos se aplican en la resolución de muchos problemas de cálculo; en ellos, se visualiza la importancia de estas propiedades.

# Referencias bibliográficas


- Casanova, M.G. (1957). Geometría Plana y del Espacio. Barcelona: Bosch.
- Pérez-Beato, M., Sánchez-Mármol, L. (1961). Geometría Métrica, Proyectiva y Sistemas de Representación, Tomo I. Madrid: S.A.E.T.A.
- Baldor, J.A. (1967). Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría. Cultural Venezolana, S.A.
- Moise, E. E., Downs, F. L. (1970). Geometría Moderna. EEUU: Fondo Educativo Interamericano.
- Bruño, G.M. (1971). Geometría. Curso Superior. Madrid: Editorial Bruño.
- Shively, L.S. (1975). Introducción a la Geometría Moderna. México: C.E.C.S.A.
- Dubnov, YA.S. (1973). Errores de las demostraciones geométricas. México: Editorial LIMUSA-WILEY, S.A.
- Clemens, S-R.,O´Daffer, P.G.,Cooney, T.J. (1998). Geometría con aplicaciones y solución de problemas. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Cirigliano, Z. (1999). Enseñanza de la Matemática en la Educación Básica. Fundamentos Epistemológicos y Psicológicos. Caracas: CERPE.
- Andonegui, M. (2006). Desarrollo del pensamiento matemático. Cuaderno N°12 Geometría: conceptos y construcciones elementales. Caracas, Venezuela: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Samper, C., Molina, Ó. (2013). Geometría Plana: un espacio de aprendizaje. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.