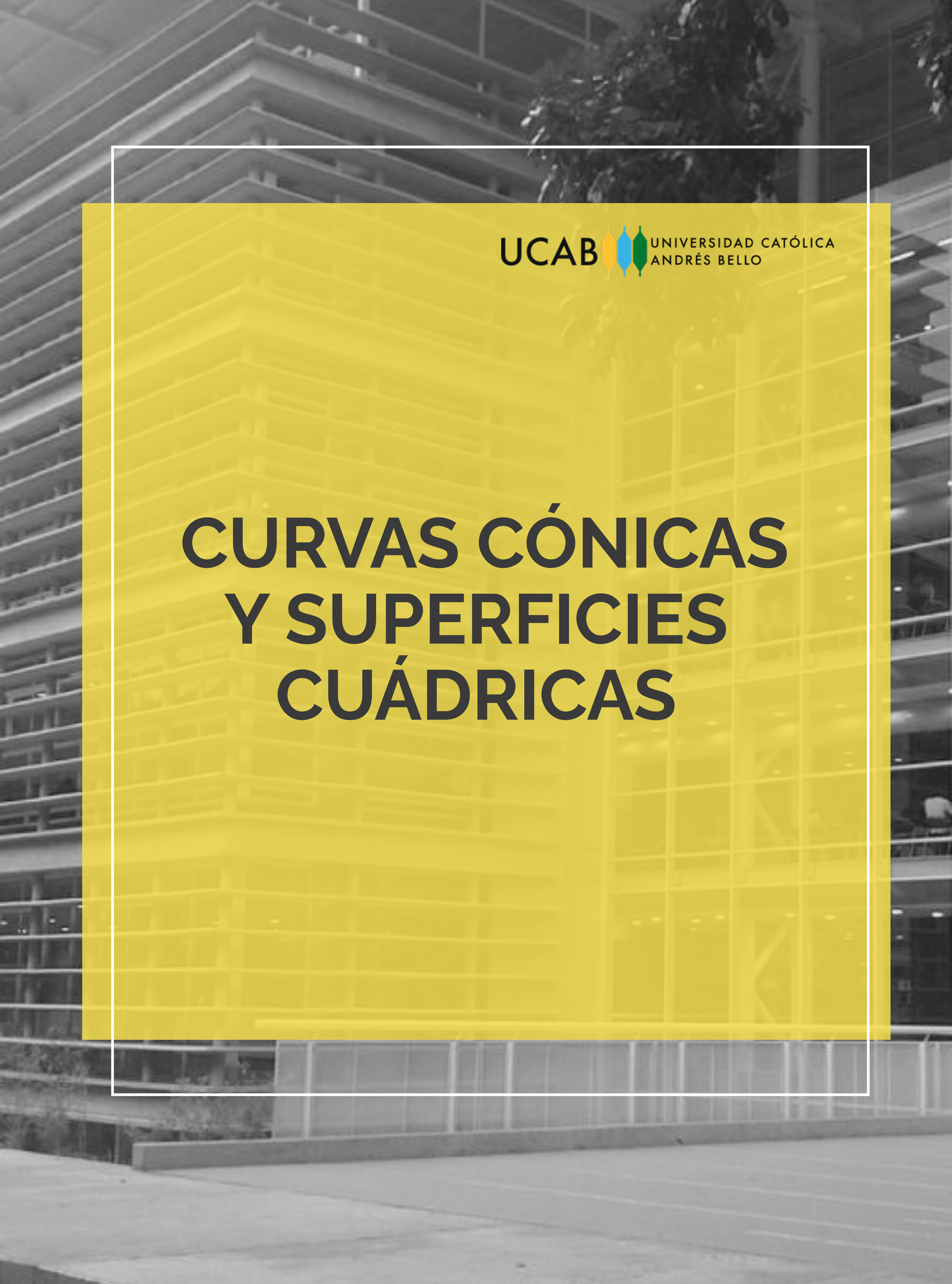


UCAB UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

CURVAS CÓNICAS Y SUPERFICIES CUÁDRICAS

- Identificar las ecuaciones canónicas de las curvas cónicas.

- Identificar las características más relevantes de las gráficas de las curvas cónicas (dominio, rango, crecimiento, concavidad, simetría, puntos críticos).

- Identificar las ecuaciones canónicas de las superficies cuádricas.

- Identificar las características más relevantes de las gráficas de las superficies cuádricas (eje de simetría, centro o vértice, trazas principales).

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En este tema se desarrolla una **aproximación** a las **curvas cónicas** y a las **superficies cuádricas**, pero desde el ámbito de las ecuaciones canónicas asociadas a cada una.

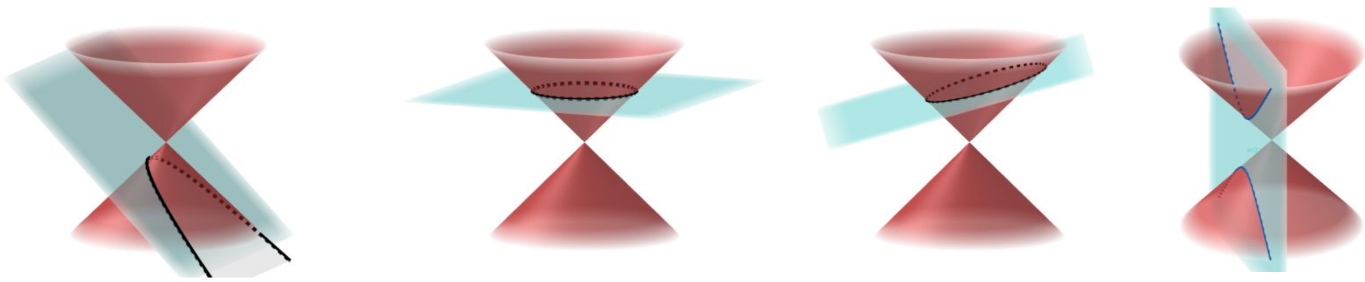
La identificación de las ecuaciones canónicas que corresponden a cada uno de estos lugares **geométricos** (curvas cónicas y superficies cuádricas) nos permitirá **cambiar** sus **características ajustando los parámetros de su ecuación.**

Las curvas cónicas y las superficies cuádricas **son lugares geométricos que tienen ecuaciones canónicas**. Las características de estos lugares geométricos se pueden cambiar mediante la manipulación de los parámetros que tienen sus ecuaciones canónicas.

Las curvas cónicas también conocidas como **secciones cónicas**, son las curvas de intersección que se generan al cortar una superficie cónica de doble hoja por un plano que no contenga al vértice.

Las **curvas cónicas** se clasifican en:

Ilustración: Curvas Cónicas
Fuente: ESCOLAR, Roberto (2021)



Parábola

Circunferencia

Elipse

Hipérbola

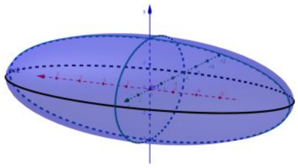
Se representan en forma analítica con una ecuación general de segundo grado en dos variables,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

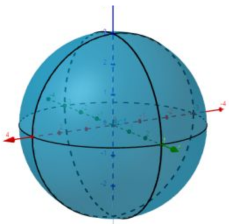
Las **superficies cuádricas** son superficies tridimensionales cuyas trazas son curvas cónicas.

Las superficies cuádricas se clasifican en:

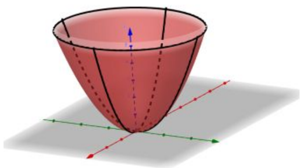
Ilustración: Superficies cuádricas
Fuente: ESCOLAR, Roberto (2021)



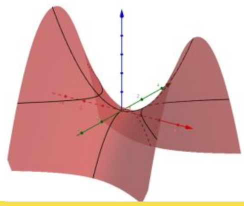
Elipsoide



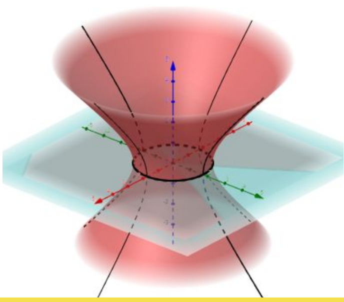
Esfera



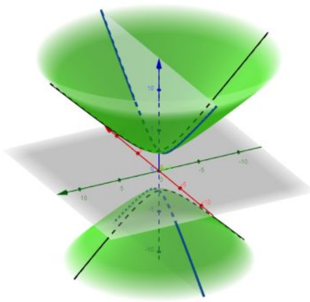
Paraboloide elíptico



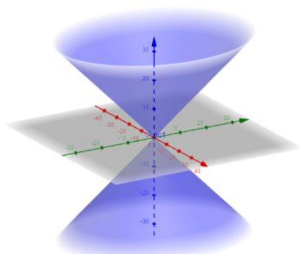
Paraboloide hiperbólico



Hiperboloide de una hoja



Hiperboloide de dos hojas

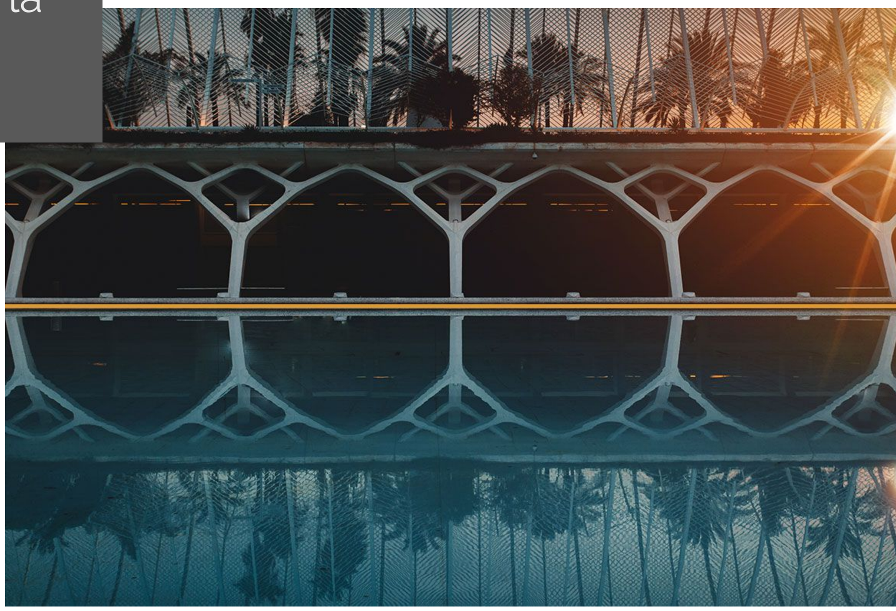


Cono

INTRODUCCIÓN

Cuando sus ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados, se representan en forma analítica con una ecuación general de segundo grado en tres variables de la forma,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

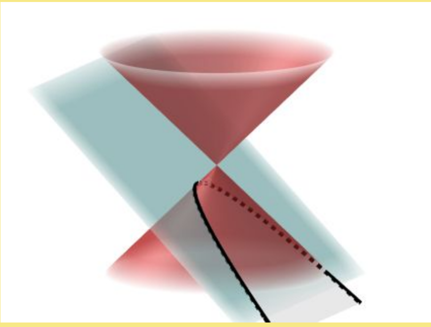


A continuación, vamos a centrarnos en las ecuaciones canónicas de las curvas cónicas y en las ecuaciones canónicas de las superficies cuádricas.

Ahora, anímate para el aprendizaje activo.

01 Ecuaciones canónicas de las curvas cónicas.

Parábola

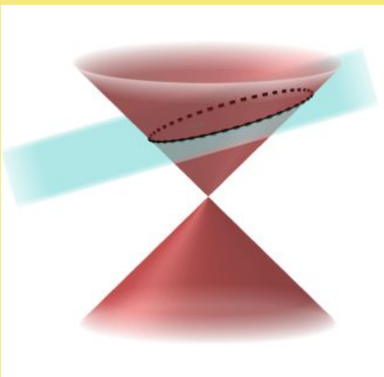


Es la **curva de intersección** de un **cono** con un **plano paralelo a su generatriz**, es una **curva abierta** que tiene **vértice** y **eje de simetría.**

Para hallar las **Ecuaciones Canónicas** de una parábola en el plano XY cuando **el eje de simetría es paralelo a los ejes coordenados,** se debe considerar lo siguiente:

$$(x - x_o)^2 = m(y - y_o) \ ; \ (y - y_o)^2 = m(x - x_o)$$

Elipse



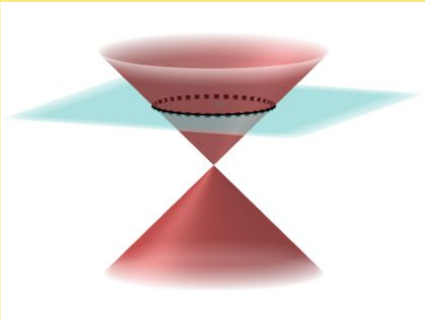
Es la **curva de intersección** de un cono con un plano que **corta a todas las generatrices** y que **no contiene al vértice**, es una **curva cerrada** que tiene **vértices** y **dos ejes de simetría**.

Para hallar la **Ecuación Canónica** de una elipse en el plano XY cuando **el eje de simetría es paralelo a los ejes coordenados,** se aplica:

$$\frac{(x-x_o)^2}{m} + \frac{(y-y_o)^2}{n} = 1$$

01 Ecuaciones canónicas de las curvas cónicas.

Circunferencia

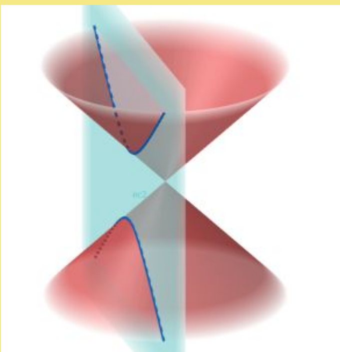


Es la **curva de intersección** de un cono con un **plano perpendicular** al eje de simetría y que **no contiene al vértice**, es una **curva cerrada.**

La **Ecuación Canónica** de una circunferencia en el plano XY se obtiene a través de:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = m$$

Hipérbola



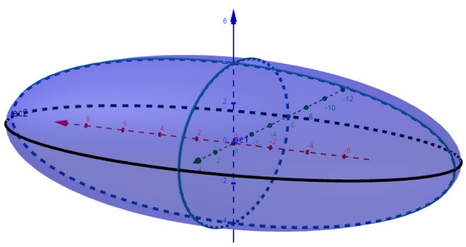
Es la **curva de intersección** de un cono con un **plano paralelo al eje de simetría** y que **no contiene al vértice**, es una **curva formada por dos ramas** que tiene **vértices** y **dos ejes de simetría.**

La **Ecuación Canónica** de una hipérbola en el plano XY cuando **los ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados** se obtiene a partir de uno de los siguientes casos:

$$\frac{(x-x_o)^2}{m} + \frac{(y-y_o)^2}{n} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-y_o)^2}{n} + \frac{(x-x_o)^2}{m} = 1$$

02 Ecuaciones cónicas de las superficies cuádricas

Las ecuaciones cónicas de las superficies cuádricas las estudiaremos a partir de siete (7) definiciones que se expresan a continuación.

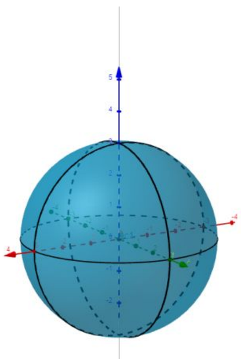


ELIPSOIDE

La ecuación canónica de un ELIPSOIDE de centro $C(x_o, y_o, z_o)$ es:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}+\frac{(z-z_o)^2}{c^2}=1$$

Observación:
Todas las trazas que se forman por planos paralelos a los planos coordenados y que contienen al centro son circunferencias o elipses.



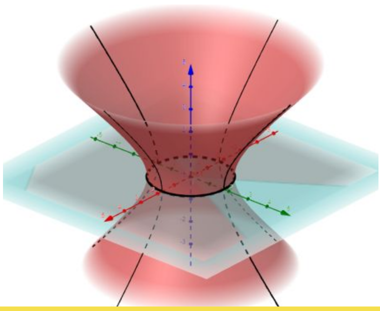
ESFERA

La ecuación canónica de una SUPERFICIE ESFÉRICA de centro y radio $C(x_o, y_o, z_o)$ es:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2$$

Observación:
Todas las trazas que se forman por planos paralelos a los planos coordenados y que contienen al centro son circunferencias (circunferencias máximas); es un caso particular de elipsoide.

La ecuación canónica de un HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA con centro en el punto $C(x_o, y_o, z_o)$ es:
Cuando el eje de simetría es paralelo al eje z:



HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}-\frac{(z-z_o)^2}{c^2}=1$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje x:

$$\frac{(y-y_o)^2}{a^2}+\frac{(z-z_o)^2}{b^2}-\frac{(x-x_o)^2}{c^2}=1$$

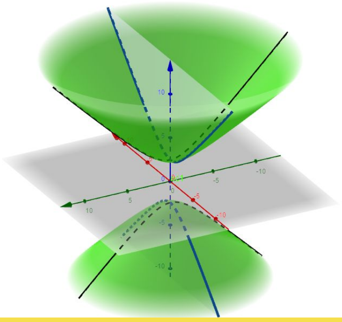
Cuando el eje de simetría es paralelo al eje y:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(z-z_o)^2}{b^2}-\frac{(y-y_o)^2}{c^2}=1$$

Observación:
Todas las trazas que se forman por planos paralelos a los planos coordenados y que contienen al centro son hipérbolas, elipses o circunferencias.

02 Ecuaciones cónicas de las superficies cuádricas

La ecuación canónica de un HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS con centro en el punto $C(x_o, y_o, z_o)$ es:



HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje z:

$$-\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}+\frac{(z-z_o)^2}{c^2}=1$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje x:

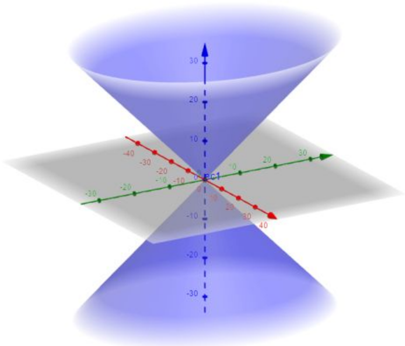
$$-\frac{(y-y_o)^2}{a^2}-\frac{(z-z_o)^2}{b^2}+\frac{(x-x_o)^2}{c^2}=1$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje y:

$$-\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(z-z_o)^2}{b^2}+\frac{(y-y_o)^2}{c^2}=1$$

Observación:
Todas las trazas que se forman por planos paralelos a los planos coordenados y que contienen al centro son hipérbolas.

La ecuación canónica de una SUPERFICIE CÓNICA de vértice $V(x_o, y_o, z_o)$ es:



SUPERFICIE CÓNICA

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje z:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}-\frac{(z-z_o)^2}{c^2}=0$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje x:

$$\frac{(y-y_o)^2}{a^2}+\frac{(z-z_o)^2}{b^2}-\frac{(x-x_o)^2}{c^2}=0$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje y:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(z-z_o)^2}{b^2}-\frac{(y-y_o)^2}{c^2}=0$$

02 Ecuaciones cónicas de las superficies cuádricas

La ecuación canónica de un PARABOLOIDE ELÍPTICO de vértice $V(x_o, y_o, z_o)$ es:

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje z:

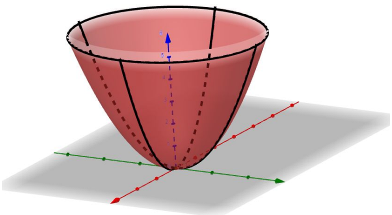
$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=\frac{z-z_o}{c}$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje x:

$$\frac{(y-y_o)^2}{a^2}+\frac{(z-z_o)^2}{b^2}=\frac{x-x_o}{c}$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje y:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(z-z_o)^2}{b^2}=\frac{y-y_o}{c}$$



PARABOLOIDE ELÍPTICO

Observación:
Todas las trazas que se forman por planos paralelos a los planos coordenados y que contienen al vértice son parábolas o un punto (el vértice).

La ecuación canónica de un PARABOLOIDE HIPERBÓLICO con punto de silla $P(x_o, y_o, z_o)$ es:

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje z:

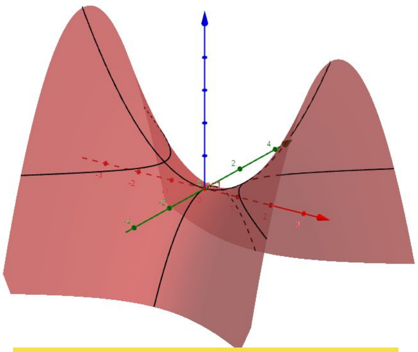
$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=\frac{z-z_o}{c}$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje x:

$$\frac{(y-y_o)^2}{a^2}-\frac{(z-z_o)^2}{b^2}=\frac{x-x_o}{c}$$

Cuando el eje de simetría es paralelo al eje y:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(z-z_o)^2}{b^2}=\frac{y-y_o}{c}$$



PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Observación:
Algunas de las trazas que se forman por planos paralelos a los planos coordenados y que contienen al punto de silla son parábolas.

03 Ejercicios

Ejercicio 1

a. El vértice de la parábola de ecuación $(x-5)^2 = -4(y-1)$ es_________

b. El dominio de la circunferencia de ecuación $(x+7)^2 + (y-3)^2 = 4$ es ____________________________________

c. El rango de la elipse de ecuación $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$ es______________

d. El centro de la hipérbola de ecuación $\frac{(x+6)^2}{3} - \frac{(y-9)^2}{5} = 1$ es_________

e. La circunferencia de ecuación __________________ tiene centro $(3, -7)$

f. El rango de la parábola de ecuación _______________ es $(-\infty, 8]$

g. El dominio de la elipse de ecuación _________________ es $[-4, 4]$

h. El rango de la hipérbola de ecuación ____________es $(-\infty, \infty)$

Ejercicio 2

a. El vértice del cono de ecuación $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{8} - \frac{z^2}{7} = 0$ es ____________

b. La traza de la superficie esférica de ecuación $(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-9)^2 = 10$ que se genera por el plano $x = 1$ es _____________

c. El centro del hiperboloide de ecuación $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+6)^2}{5} - \frac{(z-2)^2}{7} = 1$ es ____________

d. La traza del paraboloide de ecuación $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{8} = \frac{z-5}{2}$

que se genera por el plano $y = -1$ es_____________

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS

Ejercicio 1

a. $V(5,1)$
b. $[-9,-5]$
c. $[-8,-2]$
d. $C(-6,9)$
e. Algunas posibles respuestas son:
$(x-3)^2+(y+7)^2=4$, $(x-3)^2+(y+7)^2=9$, $(x-3)^2+(y+7)^2=1$ etc.
f. Algunas posibles respuestas son:
$(x-1)^2=-4(y-8)$, $(x-3)^2=-(y-8)$, $(x+7)^2=-2(y-8)$ etc.
g. Algunas posibles respuestas son: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$; $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$; $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1.$ etc
h. Algunas posibles respuestas son $\frac{(x-5)^2}{5}-\frac{y^2}{7}=1$; $\frac{x^2}{4}-\frac{(y+4)^2}{2}=1$; $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{8}=1$ etc.

Ejercicio 2

a) $V(5,-3,0)$

b) $(y-5)^2+(z-9)^2=6$

c) $C(1,-6,2)$

d) $(x+3)^2=2(z-5)$

CIERRE

Las **curvas cónicas** y las **superficies cuádricas** son lugares **geométricos** que tienen **ecuaciones canónicas**. Las características de estos lugares geométricos se pueden cambiar mediante la **manipulación** de los **parámetros** que tienen sus **ecuaciones canónicas.**

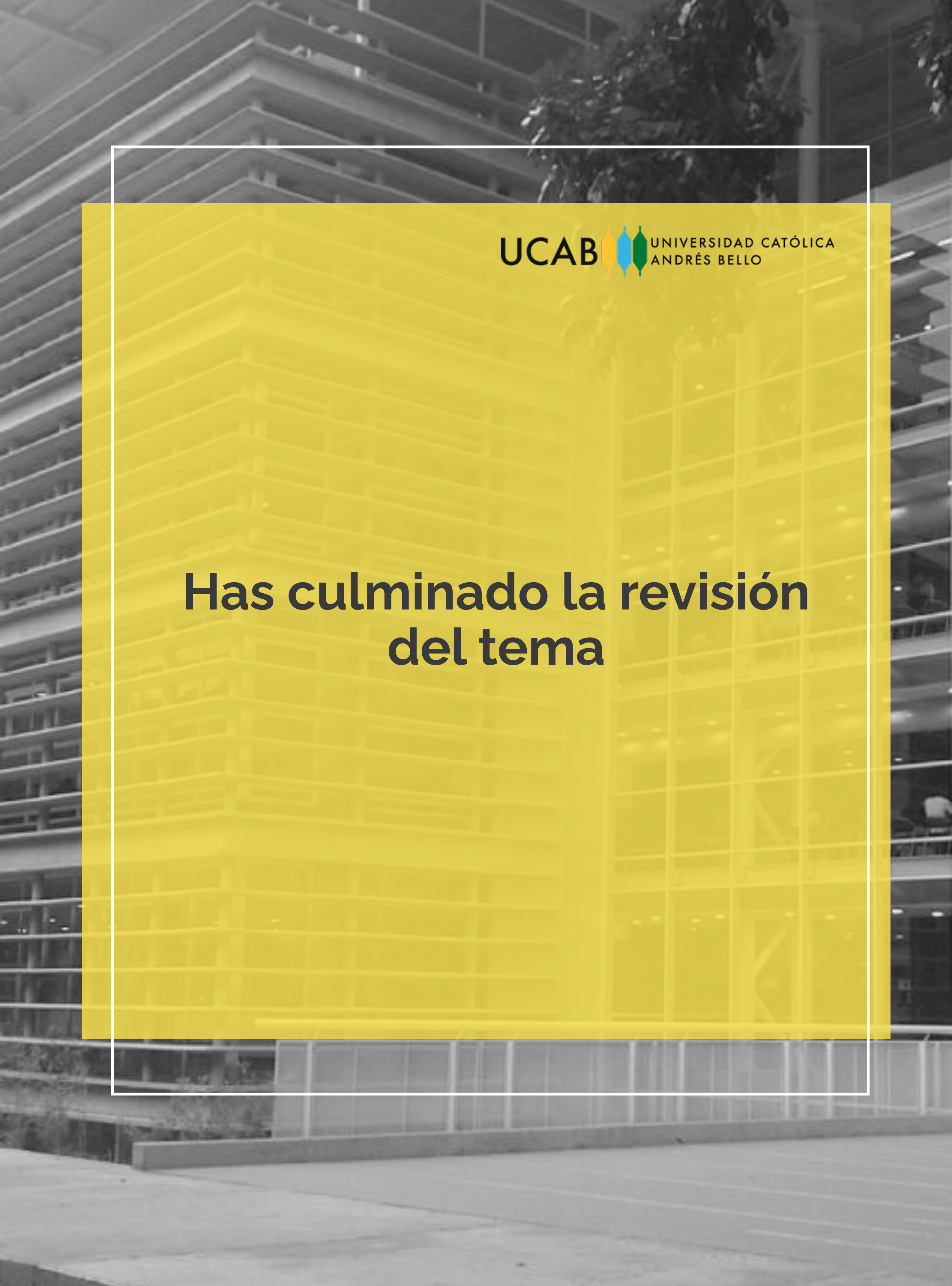
- Purcell, Edwin J. (1993). Cálculo con Geometría Analítica. México: Prentice-Hall.

- Leithold, L (1994). El cálculo con geometría analítica. México: Harla.

- Lehmann, Charles H. (1999). Geometría Analítica. México: Limusa.

- Thomas, George B. ; Finney, Ross L. (2000). Cálculo Varias Variables. México: Addison Wesley.

- Stewart, J. (2013). Cálculo de Varias Variables Trascendentes tempranas. (7ma Edición). México: Cengage Learning.



Has culminado la revisión del tema