1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上.)

(1)【答案】$\ln 2$

【解析】这是1^{∞}型未定式求极限.

方法一： $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}}$,

令$\dfrac{3a}{x-a}=t$, 则当$x\to\infty$时, $t\to 0$,

则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$,

即 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3ax}{x-a}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3a}{1}}=e^{3a}$.

由题设有$e^{3a}=8$, 得$a=\dfrac{1}{3}\ln 8=\ln 2$.

方法二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{2a}{x}}{1-\dfrac{a}{x}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2a}{x}\right)^{x}}{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x}\right)^{\frac{x}{2a}\cdot 2a}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}\cdot(-a)}}=\dfrac{e^{2a}}{e^{-a}}=e^{3a}$,

由题设有$e^{3a}=8$, 得$a=\dfrac{1}{3}\ln 8=\ln 2$.

(2)【答案】$2x+2y-3z=0$

【解析】**方法一：**所求平面过原点O与$M_0(6,-3,2)$, 其法向量$\vec{n}\perp\overrightarrow{OM_0}=\{6,-3,2\}$;

平面垂直于已知平面$4x-y+2z=8$, 它们的法向量也互相垂直：$\vec{n}\perp\overrightarrow{n_0}=\{4,-1,2\}$;

由此, $\vec{n}\,//\,\overrightarrow{OM_0}\times\overrightarrow{n_0}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$.

取$\vec{n}=2\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, 则所求的平面方程为$2x+2y-3z=0$.

方法二：所求平面即为过原点, 与两个不共线的向量(一个是从原点到点$M_0(6,-3,2)$的向量

$\overrightarrow{OM_0}=\{6,-3,2\}$, 另一是平面$4x-y+2z=8$的法向量$\overrightarrow{n_0}=\{4,-1,2\}$)平行的平面,

即 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 即 $2x+2y-3z=0$.

(3)【答案】$e^x(c_1\cos x + c_2\sin x + 1)$

【解析】微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 所对应的齐次微分方程的特征方程为 $r^2-2r+2=0$, 解之得 $r_{1,2}=1\pm i$. 故对应齐次微分方程的解为 $y=e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

由于非齐次项 $e^{\alpha x}, \alpha=1$ 不是特征根, 设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x)=ae^x$, 代入 $y''-2y'+2y=e^x$ 得 $a=1$ (也不难直接看出 $y^*(x)=e^x$), 故所求通解为

$$y=e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)+e^x=e^x(C_1\cos x + C_2\sin x + 1) .$$

【相关知识点】① 二阶线性非齐次方程解的结构：设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解, 则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

② 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法：对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解：即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y''+py'+qy=0$. 其特征方程写为 $r^2+pr+q=0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2；分三种情况：

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2, 则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；

(2) 两个相等的实数根 $r_1=r_2$, 则通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$；

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, 则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

③ 对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m=\max\{l,n\}$, 而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为 0 或 1.

(4)【答案】$\dfrac{1}{2}$

【分析】先求方向 $\vec{l}$ 的方向余弦和 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$, 然后按方向导数的计算公式

$\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ 求出方向导数.

【解析】因为 $\vec{l}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向, 为求 $\vec{l}$ 的方向余弦, 将 $\overrightarrow{AB}=\{3-1,-2-0,2-1\}=\{2,-2,1\}$

单位化，即得 $\vec{l}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{3}\{2,-2,1\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

将函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 分别对 x,y,z 求偏导数得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{y}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\left.\frac{z}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},$$

所以
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+0\times(-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

(5)【答案】2

【解析】因为 $|B|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=10\neq0$, 所以矩阵 B 可逆, 故 $r(AB)=r(A)=2$.

【相关知识点】$r(AB)\le\min(r(A),r(B))$. 若 A 可逆, 则

$$r(AB) \le r(B) = r(EB) = r[A^{-1}(AB)] \le r(AB) .$$

从而 $r(AB) = r(B)$, 即可逆矩阵与矩阵相乘不改变矩阵的秩.

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)【答案】(D)

【解析】由于存在函数 $u(x,y)$, 使得 $du = \dfrac{(x+ay)dx}{(x+y)^2} + \dfrac{ydy}{(x+y)^2}$,

由可微与可偏导的关系, 知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2},$$

分别对 y, x 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{a(x+y)^2 - (x+ay)\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(a-2)x - ay}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-2y}{(x+y)^3}.$$

由于 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 与 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 连续, 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 即

$$\frac{(a-2)x - ay}{(x+y)^3} = \frac{-2y}{(x+y)^3} \Rightarrow a = 2,$$

故应选(D).

(2)【答案】(B)

【解析】因为 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{|x|} = 1 > 0$, 所以由函数极限的局部保号性

可知, 在 $x=0$ 的空心领域内有 $\dfrac{f''(x)}{|x|} > 0$, 即 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 为单调递增.

又由 $f'(0) = 0$, $f'(x)$ 在 $x=0$ 由负变正, 由极值的第一充分条件, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 即 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 应选(B).

【相关知识点】极限的局部保号性：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0$ (或 $A < 0$) $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当

$0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

(3)【答案】(A)

【解析】若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 也收敛，且当 $n\to+\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to+\infty}(n\tan\frac{\lambda}{n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n}}\cdot\lambda=\lambda .$$

用比较判别法的极限形式，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}}{a_{2n}}=\lambda>0 .$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛，所以 $\lim_{x\to+\infty} n\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}$ 也收敛，所以原级数绝对收敛，应选(A).

【相关知识点】正项级数比较判别法的极限形式：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=A$，则

(1) 当 $0<A<+\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $A=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

(3) 当 $A=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(4)【答案】(C)

【解析】用洛必达法则.

由题可知 $F(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$，

对该积分上限函数求导数，得

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt ,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}} .$$

因为$F'(x)$与x^k是同阶无穷小，且$f'(0)\neq 0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$为常数，即$k=3$时

有
$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=f'(0)\neq 0,$$

故应选(C).

【相关知识点】设在同一个极限过程中，$\alpha(x),\beta(x)$为无穷小且存在极限 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$，

(1) 若$l\neq 0$，称$\alpha(x),\beta(x)$在该极限过程中为同阶无穷小；

(2) 若$l=1$，称$\alpha(x),\beta(x)$在该极限过程中为等价无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(3) 若$l=0$，称在该极限过程中$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小，记为$\alpha(x)=o\left(\beta(x)\right)$.

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$不存在(不为$\infty$)，称$\alpha(x),\beta(x)$不可比较.

(5)【答案】(D)

【解析】可直接展开计算，

$$D=a_1\begin{vmatrix}a_2&b_2&0\\b_3&a_3&0\\0&0&a_4\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}0&a_2&b_2\\0&b_3&a_3\\b_4&0&0\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_4\begin{vmatrix}a_2&b_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix}a_2&b_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4),$$

所以选(D).

三、(本题共2小题，每小题5分，满分10分.)

(1)【解析】由极坐标系下的弧微分公式得

$$ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=a\cdot\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}d\theta$$

$$=a\cdot\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta.$$

由于$r=r(\theta)=a(1+\cos\theta)$以$2\pi$为周期，因而$\theta$的范围是$\theta\in[0,2\pi]$.

又由于$r(\theta)=r(-\theta)$，心形线关于极轴对称. 由对称性，

$$s=2\int_0^{\pi}ds=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8a.$$

(2)【解析】用单调有界准则.

由题设显然有 $x_n > 0$，数列 $\{x_n\}$ 有下界.

证明 x_n 单调减：用归纳法. $x_2 = \sqrt{6+x_1} = \sqrt{6+10} = 4 < x_1$；设 $x_n < x_{n-1}$，则

$$x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} < \sqrt{6+x_{n-1}} = x_n .$$

由此，x_n 单调减. 由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a, (a \geq 0)$，在恒等式 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，即

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{6+x_n} \Rightarrow a = \sqrt{6+a} ,$$

解之得 $a = 3$（$a = -2$ 舍去）.

【相关知识点】1. 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

2. 收敛数列的保号性推论：如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，那么 $a \geq 0$（或 $a \leq 0$）.

四、（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分.）

(1)【分析一】见下图所示，S 在 xOy 平面与 yOz 平面上的投影均易求出，分别为

$D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$；

$D_{yz} : -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq z \leq 1$，或 $0 \leq z \leq 1, -\sqrt{z} \leq y \leq \sqrt{z}$.

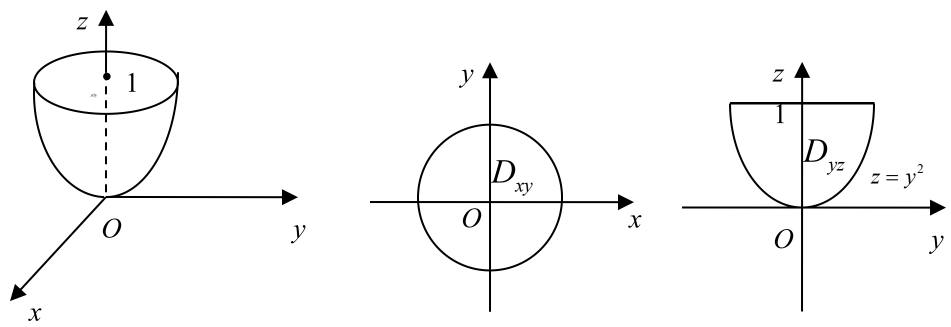

图 1

求 $\iint\limits_S zdxdy$，自然投影到 xOy 平面上. 求 $\iint\limits_S (2x+z)dydz$ 时，若投影到 xOy 平面上，被积函数较简单且可利用对称性.

【分析二】令 $P(x,y,z) = 2x+z, Q(x,y,z) = 0, R(x,y,z) = z$，则 $I = \iint\limits_S Pdydz + Rdxdy$.

这里，$\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 2+1 = 3$，若用高斯公式求曲面积分 I，则较简单. 因 S 不是封闭曲

面, 故要添加辅助曲面.

【解析】**方法一**：均投影到平面 xOy 上, 则

$$I=\iint_S(2x+z)dydz+zdxdy=\iint_{D_{xy}}[(2x+z)(-\frac{\partial z}{\partial x})+(x^2+y^2)]dxdy\ ,$$

其中 $z=x^2+y^2$, $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$.

把 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$ 代入, 得

$$I=\iint_{D_{xy}}-4x^2dxdy-\iint_{D_{xy}}2x(x^2+y^2)dxdy+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\ ,$$

由对称性得

$$\iint_{D_{xy}}2x(x^2+y^2)dxdy=0\ ,\ \iint_{D_{xy}}4x^2dxdy=2\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\ ,$$

所以 $$I=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\ .$$

利用极坐标变换有

$$I=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=-2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=-\frac{\pi}{2}\ .$$

方法二：分别投影到 yOz 平面与 xOy 平面.

投影到 yOz 平面时 S 要分为前半部分 $S_1:x=\sqrt{z-y^2}$ 与后半部分 $S_2:x=-\sqrt{z-y^2}$ (见图 1), 则

$$I=\iint_{S_1}(2x+z)dydz+\iint_{S_2}(2x+z)dydz+\iint_S zdxdy\ .$$

由题设, 对 S_1 法向量与 x 轴成钝角, 而对 S_2 法向量与 x 轴成锐角. 将 I 化成二重积分得

$$\begin{aligned}I&=-\iint_{D_{yz}}(2\sqrt{z-y^2}+z)dydz+\iint_{D_{yz}}(-2\sqrt{z-y^2}+z)dydz+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\\&=-4\iint_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}dydz+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy.\end{aligned}$$

$$\iint_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}dydz=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}\sqrt{z-y^2}dz=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(z-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{z=y^2}^{z=1}dy$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy\overset{y=\sin t}{=\!=\!=}\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

或 $$\iint_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}dydz=\int_0^1 dz\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\sqrt{z-y^2}dy=\int_0^1\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{z}\right)^2dz=\frac{\pi}{4}.$$

（这里$\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\sqrt{z-y^2}dy$是半径为$\sqrt{z}$ 的圆面积的一半.）

$$\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{2}\text{（同方法一）}.$$

因此, $$I=-4\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

方法三：添加辅助面$S_1:z=1(x^2+y^2\le 1)$, 法方向朝下, 则

$$\iint_{S_1}(2x+z)dydz+zdxdy=\iint_{S_1}dxdy=-\iint_{D}1dxdy=-\pi,$$

其中D是S_1在平面xy的投影区域：$x^2+y^2\le 1$.

S与S_1即$z=x^2+y^2$与$z=1$围成区域Ω, S与S_1的法向量指向Ω内部, 所以在Ω上满足高斯公式的条件, 所以

$$\iint_{S\cup S_1}(2x+z)dydz+zdxdy=-3\iiint_{\Omega}dV$$

$$=-3\int_0^1dz\iint_{D(z)}dxdy=-3\int_0^1\pi zdz=-\frac{3\pi}{2},$$

其中, $D(z)$是圆域：$x^2+y^2\le z$, 面积为πz.

因此, $I=-\frac{3}{2}\pi-\iint_{S_1}(2x+z)dydz+zdxdy=-\frac{3}{2}\pi-(-\pi)=-\frac{\pi}{2}$.

(2)【解析】由多元复合函数求导法则, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial v})=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial v})=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u})+a\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial v})$$

$$=-2(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+a(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，并整理得

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0\ .$$

于是，令 $6+a-a^2=0$ 得 $a=3$ 或 $a=-2$.

$a=-2$ 时，$10+5a=0$，故舍去，$a=3$ 时，$10+5a\neq 0$，因此仅当 $a=3$ 时化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

【相关知识点】多元复合函数求导法则：若 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数存在，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

五、(本题满分 7 分)

【解析】先将级数分解，

$$A=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}\cdot n}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}.$$

令 $$A_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}\cdot n},\quad A_2=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n},$$

则 $$A=A_1-A_2.$$

由熟知 $\ln(1+x)$ 幂级数展开式, 即 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n(-1<x\le 1)$, 得

$$A_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}\cdot n}=-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{1}{2})^n=-\frac{1}{4}\ln(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\ln 2,$$

$$A_2=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{1}{2})^n$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{1}{2})^n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2=-\ln(1-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\ln 2-\frac{5}{8},$$

因此, $$A=A_1-A_2=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

六、(本题满分 7 分)

【解析】曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x).$$

令 $X=0$ 得 y 轴上的截距 $Y=f(x)-f'(x)x$. 由题意,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(x)-f'(x)x.$$

为消去积分, 两边乘以 x , 得 $\int_0^x f(t)dt=xf(x)-f'(x)x^2$, (*)

将恒等式两边对 x 求导, 得

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-2xf'(x)-x^2f''(x),$$

即 $$xf''(x)+f'(x)=0.$$

在 $(*)$ 式中令 $x=0$ 得 $0=0$ 自然成立. 故不必再加附加条件. 就是说 $f(x)$ 是微分方程 $xy''+y'=0$ 的通解. 下面求解微分方程 $xy''+y'=0$.

方法一：$xy''+y'=0 \Rightarrow (xy')'=0 \Rightarrow xy'=C_1$,

因为 $x>0$, 所以 $y'=\dfrac{C_1}{x}$,

两边积分得　$y=f(x)=C_1\ln x+C_2$.

方法二：令 $y'=P(x)$, 则 $y''=P'$, 解 $xP'+P=0$ 得 $y'=P=\dfrac{C_1}{x}$.

再积分得 $y=f(x)=C_1\ln x+C_2$.

七、（本题满分 8 分）

【解析】由于问题涉及到 f, f' 与 f'' 的关系, 自然应当利用泰勒公式, 而且应在点 c 展开：

$$f(x)=f(c)+f'(x)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,\ \xi \text{ 在 } c \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

分别取 $x=0,1$ 得

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_0)}{2!}(0-c)^2,\ \xi_0 \text{ 在 } c \text{ 与 } 0 \text{ 之间,}$$
$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(1-c)^2,\ \xi_1 \text{ 在 } c \text{ 与 } 1 \text{ 之间,}$$

两式相减得　$f(1)-f(0)=f'(c)+\dfrac{1}{2!}[f''(\xi_1)(1-c)^2-f''(\xi_0)c^2]$,

于是　$f'(c)=f(1)-f(0)-\dfrac{1}{2!}[f''(\xi_1)(1-c)^2-f''(\xi_0)c^2]$.

由此

$$\begin{aligned}|f'(c)| &\le |f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2!}|f''(\xi_1)|(1-c)^2+\frac{1}{2!}|f''(\xi_0)|c^2\\ &\le 2a+\frac{1}{2}b[(1-c)^2+c^2]<2a+\frac{b}{2}.\end{aligned}$$

八、（本题满分 6 分）

【解析】(1) 因为 $A=E-\xi\xi^T$, $\xi^T\xi$ 为数, $\xi\xi^T$ 为 n 阶矩阵, 所以

$$A^2=(E-\xi\xi^T)(E-\xi\xi^T)=E-2\xi\xi^T+\xi(\xi^T\xi)\xi^T=E-(2-\xi^T\xi)\xi\xi^T,$$

因此,　$A^2=A \Leftrightarrow E-(2-\xi^T\xi)\xi\xi^T=E-\xi\xi^T \Leftrightarrow (\xi^T\xi-1)\xi\xi^T=0$

因为 ξ 是非零列向量, 所以 $\xi\xi^T\neq 0$, 故 $A^2=A \Leftrightarrow \xi\xi^T-1=0$, 即 $\xi\xi^T=1$.

(2) 反证法. 当 $\xi\xi^T=1$ 时, 由 (1) 知 $A^2=A$, 若 A 可逆, 则 $A=A^{-1}A^2=A^{-1}A=E$.

与已知 $A=E-\xi\xi^T\neq E$ 矛盾, 故 A 是不可逆矩阵.

九、(本题满分 8 分)

【解析】(1)此二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}.$$

因为二次型秩 $r(f)=r(A)=2$, 由

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&4&0\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&0&0\\-1&6&-3\\3&-6&c\end{pmatrix}$$

可得 $c=3$. 再由 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

求得二次型矩阵的特征值为 $0,4,9$.

(2)因为二次型经正交变换可化为 $4y_2^2+9y_3^2$, 故

$$f(x_1,x_2,x_3)=1, \text{即} 4{y_2}^2+9{y_3}^2=1.$$

表示椭圆柱面.

【相关知识点】主轴定理：对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx,$$

存在正交变换 $x=Qy$ (Q 为 n 阶正交矩阵), 使得

$$x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是实对称矩阵 A 的 n 个特征值, Q 的 n 个列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 A 对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的标准正交特征向量.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分.)

(1)【答案】$\dfrac{3}{7}$

【解析】设事件 $C=$“抽取的产品是次品”, 事件 $D=$“抽取的产品是工厂 A 生产的”, 则事件 $\overline{D}$ 表示“抽取的产品是工厂 B 生产的”, 依题意有

$$P(D)=0.60,P(\overline{D})=0.40,P(C\,|\,D)=0.01,P(C\,|\,\overline{D})=0.02.$$

应用贝叶斯公式可以求得条件概率 $P(D|C)$：

$$P(D|C)=\frac{P(D)P(C|D)}{P(D)P(C|D)+P(\overline{D})P(C|\overline{D})}=\frac{0.6\times0.01}{0.6\times0.01+0.4\times0.02}=\frac{3}{7}.$$

【相关知识点】贝叶斯公式：设试验 E 的样本空间为 S. A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0,P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},i=1,2,\cdots,n. \qquad (*)$$

$(*)$ 式称为贝叶斯公式.

(2)【答案】$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

【解析】由于 ξ 与 η 相互独立且均服从正态分布 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$，因此它们的线性函数 $U=\xi-\eta$ 服从正态分布，且

$$EU=E(\xi-\eta)=E\xi-E\eta=0,$$

$$DU=D\left(\xi-\eta\right)=D\xi+D\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

所以有 $\quad U\sim N(0,1)$.

代入正态分布的概率密度公式，有

$$f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

应用随机变量函数的期望公式有

$$E(|\xi-\eta|)=E(|U|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=2\int_{0}^{+\infty}u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

由凑微分法，有

$$E(|\xi-\eta|)=-2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}d(-\frac{u^2}{2})=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

【相关知识点】对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立，由数学期望和方差的性质，有

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,$$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y),$$

其中 a,b,c 为常数.

十一、(本题满分 6 分.)

【解析】易见 (X,Y) 的可能取值为(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3). 依题意 $\{X<Y\}=\varnothing$, 故 $P\{X<Y\}=0$, 即

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{\max(\xi,\eta)=1,\min(\xi,\eta)=1\}$$

$$=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{9}.$$

类似地可以计算出所有 p_{ij} 的值列于下表中, 得到随机变量 (X,Y) 的联合分布律:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	0	0
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) 将表中各行元素相加求出 X 的边缘分布

$$X\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{9} & \frac{3}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix},$$

由离散型随机变量数学期望计算公式可得

$$EX=\frac{1}{9}\cdot 1+\frac{3}{9}\cdot 2+\frac{5}{9}\cdot 3=\frac{22}{9}.$$

【相关知识点】1. 离散型随机变量的边缘分布计算公式:

二维离散型随机变量 (X,Y) 关于 X 与 Y 的边缘概率分布或边缘分布律分别定义为:

$$p_{i\cdot} = P\left\{X = x_i\right\} = \sum_j P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\} = \sum_j p_{ij}, i = 1, 2, \cdots$$

$$p_{\cdot j} = P\left\{Y = y_j\right\} = \sum_i P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\} = \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \cdots$$

它们分别为联合分布律表格中第 i 行与第 j 列诸元素之和.

2. 离散型随机变量数学期望计算公式：$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P\left\{X = x_k\right\}$.