1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷一）

一．(本题满分 15 分，每小题 5 分)

(1) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛域.

解：因$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}\left|x-3\right|=\frac{1}{3}\left|x-3\right|$, 故$\frac{1}{3}\left|x-3\right|<1$即$0<x<6$时，幂级数收敛. ……3 分

当$x=0$时，原级数成为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，是收敛的. ……4 分

当$x=6$时，原级数成为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，是发散的. ……5 分

所以，所求的收敛域为$\left[0,6\right)$.

(2) 已知 f(x)= e^{x^2},f$\left[\varphi(x)\right]$=1-x,且 φ(x)≥0.求 φ(x)并写出它的定义域.

解：由$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. ……3 分

由$\ln(1-x)\ge 0$，得$1-x\ge 1$即$x\le 0$. ……5 分

所以$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，其定义域为$(-\infty,0)$.

(3)设 S 为曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，计算曲面积分$I=\oiint_S x^3dydz+y^3dxdx+z^3dxdy$.

解：根据高斯公式，并利用球面坐标计算三重积分，有

$I=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$（其中$\Omega$是由$S$所围成的区域） ……2 分

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$ ……4 分

$=\frac{12\pi}{5}$. ……5 分

二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)

(1) 若 f(t)=$\lim_{x\to\infty} t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=\underline{(2t+1)e^{2t}}$

(2) 设 f(x)是周期为 2 的周期函数，它在区间$(-1,1]$上的定 f(x)= $\begin{cases}2,-1<x\le 0\\ x^3,0<x\le 1\end{cases}$,则 f(x)的付立叶级数在 x=1 处收敛于 $\underline{\frac{2}{3}}$.

(3) 设 f(x)是连续函数，且$\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$,则 f(7)= $\underline{\frac{1}{12}}$.

(4) 设 4*4 矩阵 A=$(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，B=$(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中，$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4,|B|=1,$则行列式$|A+B|$=. $\underline{40}$.

三、选择题 (本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 若函数 y=f(x)有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当$\Delta x\to 0$时，该函 x=x_0处的微分 dy 是 (B)

(A) 与Δx等价的无穷小 (B) 与Δx同阶的无穷小

(C) 比Δx低阶的无穷小 (D) 比Δx高阶的无穷小

(2) 设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解，若$f(x)>0$，且$f'(x_0)=0$，则函数$f(x)$在点x_0 (A)

(A) 取得极大值 (B) 取得极小值

(C) 某个邻域内单调增加 (D) 某个邻域内单调减少

(3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0;$ 及$\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0,$ 则 (C)

(A) $\iiint_{\Omega_1} xdv = 4\iiint_{\Omega_2} xdv$ (B) $\iiint_{\Omega_1} ydv = 4\iiint_{\Omega_2} ydv$

(C) $\iiint_{\Omega_1} zdv = 4\iiint_{\Omega_2} zdv$ (D) $\iiint_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint_{\Omega_2} xyzdv$

(4) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在 x=-1 处收敛，则此级数在 x=2 处 (B)

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛

(C) 发散 (D) 收敛性不能确定

(5) n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s (3\le s\le n)$ 线性无关的充分必要条件是 (D)

(A) 有一组不全为 0 的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\ne 0$.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意两个向量都线性无关.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

四．(本题满分 6 分)

设 $u = yf(\frac{x}{y}) + xg(\frac{y}{x})$，其中 f,g 具有二阶连续导数，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解： $\frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right).$ ……2 分

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right).$ ……3 分

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).$ ……5 分

所以 $x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. ……6 分

五、(本题满分 8 分)

设函数 y=y(x)满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且图形在点(0，1)处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$在该点的切线重合，求函数 $y = y(x)$.

解：对应齐次方程的通解为 $Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. ……2 分

设原方程的特解为 $y^* = Axe^x$, ……3 分

得 $A = -2$. ……4 分

故原方程通解为 $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - 2xe^{2x}$. ……5 分

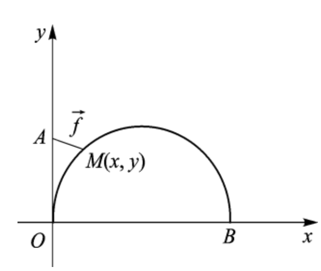
又已知有公共切线得 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -1$， ……7 分

即 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$ 解得 $c_1 = 1, c_2 = 0$. ……8 分

所以 $y = (1 - 2x)e^{2x}$.

六、(本题满分 9 分)

设位于点(0，1)的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ (k>0 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离—)，质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 B(2,0)运动到 O(0，0).求在此运动过程中质点 A 对质 M 点的引力所做的功.



解： $\overrightarrow{MA} = \{0 - x, 1 - y\}$ ……2 分

$r = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2}$.

因引力 $\vec{f}$ 的方向与 $\overrightarrow{MA}$ 一致，

故 $\vec{f} = \frac{k}{r^3}\{-x, 1 - y\}$. ……4 分

从而$W=\int_{\overset{\frown}{BO}}\frac{k}{r^3}[-xdx+(1-y)dy]$ ……6 分

$=k\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{5}})$. ……9 分

七、(本题满分 6 分)

已知$AP=PB$,其中$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$求 A 及$A^5$.

解：先求出$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$. ……2 分

因$AP=PB$，故$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$. ……4 分

从而$A^5=\overbrace{AAAAA}^{5个}=\overbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}^{5个}=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$. ……6 分

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似，

(1) 求 x 与 y； **(2)** 求一个满足$P^{-1}AP=B$的可逆矩阵P.

解：(1) 因 **A** 与 **B** 相似，故$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|$，即 ……1 分

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-y&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix},$$

亦即$(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-1)=(\lambda-2)(\lambda^2+(1-y)\lambda-y)$.

比较两边的系数得 $x=0, y=1$.此时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. ……3 分

(2) 从 B 可以看出 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda=2,1,-1$. ……4 分

对 $\lambda=2$，可求得 $\mathbf{A}$ 的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对 $\lambda=1$，可求得 $\mathbf{A}$ 的特征向量为 $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

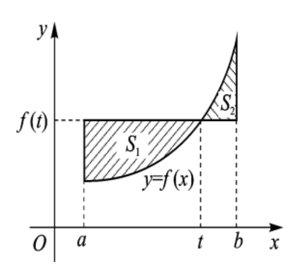
对 $\lambda=-1$，可求得 $\mathbf{A}$ 的特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. ……7 分

因上述 p_1,p_2,p_3 是属于不同特征值的特征向量，故它们线性无关.

令 $\mathbf{P}=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{P}$ 可逆，且有 $P^{-1}AP=B$. ……8 分

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$.证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=(\xi), x=a$ 所围平面图形面积 s_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=(\xi), x=a$ 所围平面图形面积 s_2 的 3 倍.



证：存在性 在 $[a,b]$ 上任取一点 t，令

$$F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx-3\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$$

$$=\left[f(t)(t-a)-\int_a^t f(t)dx\right]-3\left[\int_t^b f(x)dx-f(t)(b-t)\right]$$ …3 分

则 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又因 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调增加的.

于是在 (a,b) 内取定点 c，有

$$F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]dx=-3\int_a^c[f(x)-f(a)]dx-3\int_c^b[f(x)-f(a)]dx$$

$$\le -3\int_c^b[f(x)-f(a)]dx=-3\left[f(\xi_1)-f(a)\right](b-c)<0,\quad c\le\xi_1\le b..$$

$$F(b)=\int_a^b [f(b)-f(x)]dx=\int_a^c [f(b)-f(x)]dx+\int_c^b [f(b)-f(x)]dx$$

$$\geq \int_a^c [f(b)-f(x)]dx=\left[f(b)-f(\xi_2)\right](c-a)>0,\quad a\leq \xi_2\leq c.$$ ……5 分

所以由介值定理知，在(a,b)内存在ξ，使$F(\xi)=0$，即$S_1=3S_2$. ……6 分

唯一性 因$F'(t)=f'(t)[(t-a)+3(b-t)]>0$， ……8 分

故$F(t)$在(a,b)内是单调增加的.因此，在(a,b)内只有一个ξ，使$S_1=3S_2$. ……9 分

十、填空题(共 6 分，每个 2 分)

(1) 设三次独立实验中，事件A出现的概率相等.若已知A至少出现一次的概率等于$\frac{19}{27}$，则事件A在一次试验中出现的概率为 $\underline{\frac{1}{3}}$.

(2) 在区间$(0,1)$中随机地取两个数，则事件“两数之和小于$\frac{6}{5}$”的概率为 $\underline{\frac{17}{25}}$.

(3) 设随机变量X服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布.已知$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$，$\Phi(2.5)=0.9938$，则$X$落在区间(9.95，10.05)内的概率为 $\underline{0.9876}$.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量X的概率密度函数为$f_x(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量$Y=1-\sqrt[3]{X}$的概率密度函数$f_Y(y)$.

解：因Y的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y<y)$$ ……1 分

$$=P\{1-\sqrt[3]{X}<y\}=P\{\sqrt[3]{X}>1-y\}=P\{X>(1-y)^3\}$$ ……2 分

$$=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right].$$ ……4 分

故Y的概率密度函数为$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$. ……6 分