1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分.)

(1)【答案】$\dfrac{\sin t - t\cos t}{4t^3}$

【解析】这是个函数的参数方程,满足参数方程所确定函数的微分法,即

如果 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases}$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}$.

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{2t}$,

再对 x 求导,由复合函数求导法则得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(\frac{-\sin t}{2t})\cdot\frac{1}{2t}$$
$$=\frac{-2t\cos t+2\sin t}{4t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

(2)【答案】$dx-\sqrt{2}dy$

【解析】这是求隐函数在某点的全微分,这里点 $(1,0,-1)$ 的含义是 $z=z(1,0)=-1$.

将方程两边求全微分,由一阶全微分形式不变性得

$$d(xyz)+\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0\ ,$$

再由全微分四则运算法则得

$$(xy)dz+(ydx+xdy)z=-\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,$$

令 $x=1,y=0,z=-1$, 得 $dy=\dfrac{dx-dz}{\sqrt{2}}$, 即 $dz=dx-\sqrt{2}dy$.

(3)【答案】$x-3y+z+2=0$

【解析】所求平面 Π 过直线 L_1, 因而过 L_1 上的点 $(1,2,3)$;

因为 Π 过 L_1 平行于 L_2, 于是 Π 平行于 L_1 和 L_2 的方向向量,即 Π 平行于向量 $\vec{l}_1=(1,0,-1)$

和向量 $\vec{l}_2=(2,1,1)$, 且两向量不共线,于是平面 Π 的方程

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $x-3y+z+2=0$.

(4)【答案】$-\dfrac{3}{2}$

【解析】因为当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$,

当 $x \to 0$ 时 $ax^2 \to 0$, 所以有

$$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}ax^2, \cos x - 1 = -\frac{1}{2}\sin^2 x \sim -\frac{1}{2}x^2,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a.$$

因为当 $x \to 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 所以 $-\dfrac{2}{3}a = 1$, 故 $a = -\dfrac{3}{2}$.

(5)【答案】$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

【解析】为求矩阵的逆可有多种办法, 可用伴随, 可用初等行变换, 也可用分块求逆. 根据本题的特点, 若知道分块求逆法, 则可以简单解答.

注意: $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 2 阶矩阵的伴随矩阵有规律: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则求 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

如果 $|A| \neq 0$, 这样

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{1}{|ad-bc|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

再利用分块矩阵求逆的法则：$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$，易见

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】(D)

【解析】由于函数的定义域为 $x\neq 0$，所以函数的间断点为 $x=0$，

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}=\infty$$，所以 $x=0$ 为铅直渐近线,

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}==\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}=1$$，所以 $y=1$ 为水平渐近线.

所以选(D).

【相关知识点】铅直渐近线：如函数 $y=f(x)$ 在其间断点 $x=x_0$ 处有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是函数的一条铅直渐近线；

水平渐近线：当 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a,(a\text{为常数})$，则 $y=a$ 为函数的水平渐近线.

(2)【答案】(B)

【解析】令 $u=\frac{t}{2}$，则 $t=2u,dt=2du$，所以

$$f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2=\int_0^{x} 2f(u)du+\ln 2,$$

两边对 x 求导，得 $f'(x)=2f(x)$，这是一个变量可分离的微分方程，即 $\frac{d[f(x)]}{f(x)}=2dx$. 解之得 $f(x)=Ce^{2x}$，其中 C 是常数.

又因为 $f(0)=\int_0^{0} 2f(u)du+\ln 2=\ln 2$，代入 $f(x)=Ce^{2x}$，得 $f(0)=Ce^{0}=\ln 2$，得

$C=\ln 2$，即 $f(x)=e^{2x}\cdot\ln 2$.

(3)【答案】(C)

【解析】因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}+\cdots$$

$$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$$ (收敛级数的结合律与线性性质)，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=5-2=3$.

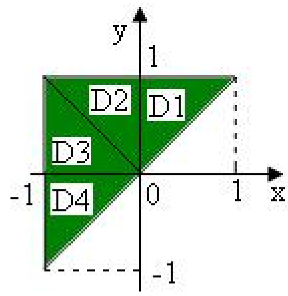
而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5+3=8,$$

故应选(C).

(4)【答案】(A)

【解析】如图，将区域 D 分为 D_1,D_2,D_3,D_4 四个子区域.



显然，D_1,D_2 关于 y 轴对称，D_3,D_4 关于 x 轴对称.

令 $\begin{cases} I_1=\iint\limits_D xydxdy \\ I_2=\iint\limits_D \cos x\sin ydxdy \end{cases}$，

由于 xy 对 x 及对 y 都是奇函数，所以

$$\iint\limits_{D_1+D_2}xydxdy=0,\quad \iint\limits_{D_3+D_4}xydxdy=0.$$

而 $\cos x\sin y$ 对 x 是偶函数，对 y 是奇函数，故有

$$\iint\limits_{D_3+D_4}\cos x\sin ydxdy=0,\quad \iint\limits_{D_1+D_2}\cos x\sin ydxdy=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy,$$

所以 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=I_1+I_2=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$，

故选(A).

(5)【答案】(D)

【解析】矩阵的乘法公式没有交换律,只有一些特殊情况可以交换.

由于 A 、 B 、 C 均为 n 阶矩阵,且 $ABC = E$,对等式两边取行列式,据行列式乘法公式 $|A||B||C| = 1$,得到 $|A| \neq 0$ 、$|B| \neq 0$ 、$|C| \neq 0$,知 A 、 B 、 C 均可逆,那么,对于 $ABC = E$,

先左乘 A^{-1} 再右乘 A 有 $ABC = E \to BC = A^{-1} \to BCA = E$,故应选(D).

其实,对于 $ABC = E$ 先右乘 C^{-1} 再左乘 C ,有 $ABC = E \to AB = C^{-1} \to CAB = E$.

三、(本题满分 15 分,每小题 5 分.)

(1)【解析】这是 1^{∞} 型未定式求极限.

$$\lim_{x \to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \to 0^+} (1 + (\cos\sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}$$

令 $\cos\sqrt{x} - 1 = t$,则 $x \to 0^+$ 时 $t \to 0^-$,所以

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + (\cos\sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}} = \lim_{t \to 0^-} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e ,$$

所以 $$\lim_{x \to 0^+} (1 + (\cos\sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}} .$$

因为当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$,所以

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\pi(\cos\sqrt{x} - 1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\pi \sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\pi \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{x} = -\frac{\pi}{2} ,$$

故 $$\lim_{x \to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}} = e^{-\frac{\pi}{2}} .$$

(2)【解析】先求方向 $\vec{n}$ 的方向余弦,再求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$,最后按方向导数的计算公式

$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ 求出方向导数.

曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的法向量为

$$\pm\{4x, 6y, 2z\}\big|_P = \{4x, 6y, 2z\}\big|_{(1,1,1)} = \pm 2\,\{2,3,1\} ,$$

在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧,取正号,并单位化得

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+1}}\{2,3,1\}=\frac{1}{\sqrt{14}}\{2,3,1\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

又
$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\left.\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\dfrac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\left.\dfrac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\left.\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_{(1,1,1)}=-\sqrt{14}\end{cases},$$

所以方向导数

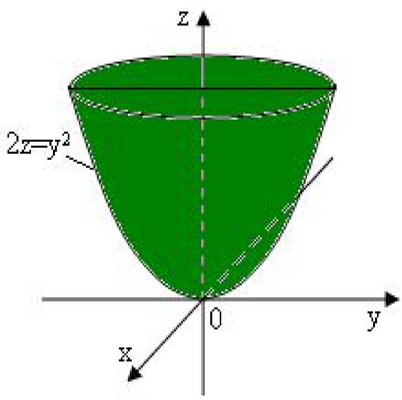
$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}.$$

(3)【解析】由曲线$\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转一周而围成的旋转面方程是 $x^2+y^2=2z$.

于是, Ω 是由旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=4$ 所围成. 曲面与平面的交线是

$x^2+y^2=8,z=4$.



选用柱坐标变换, 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$, 于是

$$\Omega:0\le\theta\le2\pi,0\le z\le4,0\le r\le\sqrt{2z},$$

因此 $$I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z)dV$$

$$=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)rdr$$

$$=2\pi\int_0^4\left[\left.\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2z}{2}\right)\right|_{r=0}^{r=\sqrt{2z}}\right]dz$$

$$=4\pi\int_0^4 z^2dz=\frac{256}{3}\pi.$$

四、(本题满分 6 分)

【解析】曲线 $y=a\sin x,\ (x\in[0,\pi])$，则 $dy=a\cos xdx$，所以

$$I=\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$$

$$=\int_0^\pi[1+(a\sin x)^3+(2x+a\sin x)\cdot a\cos x]dx$$

$$=\int_0^\pi\left(1+a^3\sin^3x+2ax\cos x+\frac{a^2}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$=\pi+a^3\int_0^\pi\sin^3xdx+2a\int_0^\pi x\cos xdx+\frac{a^2}{2}\int_0^\pi\sin 2xdx$$

$$=\pi+a^3\int_0^\pi(\cos^2x-1)d\cos x+2a\int_0^\pi xd\sin x+\frac{a^2}{4}\int_0^\pi\sin 2xd2x$$

$$=\pi+a^3\left[\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x\right]_0^\pi+2a\left[x\sin x+\cos x\right]_0^\pi+\frac{a^2}{4}\left[-\cos 2x\right]_0^\pi$$

$$=\pi+\frac{4}{3}a^3-4a.$$

对关于 a 的函数 $I=\pi+\frac{4}{3}a^3-4a$ 两边对 a 求导数，其中 $a>0$，并令 $I'=0$，得

$$I'=4a^2-4=0.$$

所以 $a=1$， 且 $\begin{cases}I'<0,0<a<1\\I'>0,1<a<+\infty\end{cases}$.

故 $a=1$ 为函数 $I=\pi+\frac{4}{3}a^3-4a,(a>0)$ 的极小值点，也是最小值点. 故所求的曲线为

$y=\sin x,\ (x\in[0,\pi])$.

五、(本题满分 8 分.)

【解析】按傅式级数公式，先求 $f(x)$ 的傅式系数 a_n 与 b_n. 因 $f(x)$ 为偶函数，所以

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^lf(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi xdx=4\int_0^1\cos n\pi xdx+\frac{2}{n\pi}\int_0^1xd\sin n\pi x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi xdx=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5.$$

因为 $f(x)=2+|x|$ 在区间 $(-1\le x\le 1)$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件, 所以

$$f(x)=2+|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x \quad (-1\le x\le 1).$$

令 $x=0$, 有 $f(0)=2+0=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos 0$, 所以, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

又 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

所以, $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

六、(本题满分 7 分.)

【解析】由定积分中值定理可知, 对于 $\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx$, 在区间 $(\frac{2}{3},1)$ 上存在一点 ξ 使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(\xi)(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{3}f(\xi),$$

即 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(\xi)=f(0)$.

由罗尔定理可知, 在区间 $(0,1)$ 内存在一点 $c(0<c<\xi<1)$, 使得 $f'(c)=0$.

七、(本题满分 8 分)

【解析】设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$, 按分量写出, 则有

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-x_3\alpha_3+2x_4=1\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}.$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换:

第一行分别乘以有(-2)、(-3)加到第三行和第四行上, 再第二行乘以(-1)、(-2)加到第三行和第四行上, 有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\2&3&a+2&4&\vdots&b+3\\3&5&1&a+8&\vdots&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\0&1&a&2&\vdots&b+1\\0&2&-2&a+5&\vdots&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\0&0&a+1&0&\vdots&b\\0&0&0&a+1&\vdots&0\end{pmatrix},$$

所以, 当$a=-1,b\neq 0$时, $r(A)+1=r(\overline{A})$, 方程组无解. 即是不存在x_1,x_2,x_3,x_4使得

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$成立, β不能表示成α_1、α_2、α_3、α_4的线性组合;

当$a\neq -1$时, $r(A)=r(\overline{A})=4$. 方程组有唯一解$\left(-\dfrac{2b}{a+1},\dfrac{a+b+1}{a+1},\dfrac{b}{a+1},0\right)^T$,

故β有唯一表达式, 且$\beta=-\dfrac{2b}{a+1}\alpha_1+\dfrac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\dfrac{b}{a+1}\alpha_3+0\cdot\alpha_4$.

【相关知识点】非齐次线性方程组有解的判定定理:

设A是$m\times n$矩阵, 线性方程组$Ax=b$有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵$\overline{A}=\left(A\vdots b\right)$的秩, 即是$r(A)=r(\overline{A})$(或者说, b可由A的列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线表出, 亦等同于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$是等价向量组).

设A是$m\times n$矩阵, 线性方程组$Ax=b$, 则

(1) 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})=n.$

(2) 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})<n.$

(3) 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A)+1=r(\overline{A}).$

$\Leftrightarrow$ b不能由A的列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线表出.

八、(本题满分 6 分)

【解析】**方法 1:** 因为A为n阶正定阵, 故存在正交矩阵Q, 使

$$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i > 0(i=1,2,\cdots n)$，$\lambda_i$ 是 A 的特征值.

因此 $Q^T(A+E)Q = Q^T AQ + Q^T Q = \Lambda + E$

两端取行列式得 $|A+E| = |Q^T||A+E||Q| = |Q^T(A+E)Q| = |\Lambda+E| = \prod(\lambda_i+1)$，

从而 $|A+E|>1$.

方法 2：设 A 的 n 个特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 由于 A 为 n 阶正定阵, 故特征值全大于 0.

由 λ 为 A 的特征值可知, 存在非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda\alpha$，两端同时加上 α，得 $(A+E)\alpha = (\lambda+1)\alpha$. 按特征值定义知 $\lambda+1$ 是 $A+E$ 的特征值. 因为 $A+E$ 的特征值是 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$. 它们全大于 1, 根据 $|A| = \prod\lambda_i$，知 $|A+E| = \prod(\lambda_i+1) > 1$.

【相关知识点】阵特征值与特征向量的定义：设 A 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX=\lambda X$ 成立, 则称 λ 是矩阵 A 的特征值, 称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

九、（本题满分 8 分）

【解析】曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X-x) \quad (\text{当 } y' \neq 0 \text{ 时}),$$

它与 x 轴的交点是 $Q(x+yy',0)$，从而

$$|PQ| = \sqrt{(yy')^2+y^2} = y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

当 $y'=0$ 时, 有 $Q(x,0),|PQ|=y$, 上式仍然成立.

因此, 根据题意得微分方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

即 $yy''=1+y'^2$. 这是可降阶的高阶微分方程, 且当 $x=1$ 时，$y=1,y'=0$.

令 $y' = P(y)$, 则 $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$, 二阶方程降为一阶方程 $yP\dfrac{dP}{dy} = 1 + P^2$, 即 $\dfrac{PdP}{1+P^2} = \dfrac{dy}{y}$.

即 $y = C\sqrt{1+P^2}$, C 为常数.

因为当 $x=1$ 时, $y=1, P=y'=0$, 所以 $C=1$, 即 $y=\sqrt{1+P^2}=\sqrt{1+y'^2}$,

所以 $y' = \pm\sqrt{y^2-1}$. 分离变量得 $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \pm dx$.

令 $y = \sec t$, 并积分, 则上式左端变为

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec t \tan t dt}{\tan t} = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C$$

$$= \ln\left|\sec t + \sqrt{\sec^2 t - 1}\right| + C = \ln\left|y + \sqrt{y^2-1}\right| + C .$$

因曲线在上半平面, 所以 $y + \sqrt{y^2-1} > 0$, 即 $\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) = C \pm x$.

故 $\quad y + \sqrt{y^2-1} = Ce^{\pm x}$.

当 $x=1$ 时, $y=1$,

当 x 前取+时, $C = e^{-1}$, $y+\sqrt{y^2-1} = e^{x-1}$,

$$y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y-\sqrt{y^2-1}}{(y+\sqrt{y^2-1})(y-\sqrt{y^2-1})} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{e^{x-1}} = e^{1-x} ;$$

当 x 前取 $-$ 时, $C = e$, $y+\sqrt{y^2-1} = e^{-x+1}$,

$$y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y-\sqrt{y^2-1}}{(y+\sqrt{y^2-1})(y-\sqrt{y^2-1})} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{e^{1-x}} = e^{x-1} ;$$

所以 $\quad y = \dfrac{1}{2}(e^{(x-1)} + e^{-(x-1)})$.

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 3 分.)

(1)【解析】一般说来, 若计算正态分布随机变量在某一范围内取值的概率, 应该已知分布的两个参数 μ 和 σ^2, 否则应先根据题设条件求出 μ , σ^2, 再计算有关事件的概率, 本题可从 $\Phi(\dfrac{2}{\sigma}) = 0.8$, 通过查 $\Phi(x)$ 表求出 σ , 但是注意到所求概率 $P(x<0)$ 即是 $\Phi(\dfrac{-2}{\sigma})$ 与 $\Phi(\dfrac{2}{\sigma})$ 之间的关系, 可以直接由 $\Phi(\dfrac{2}{\sigma})$ 的值计算出 $\Phi(\dfrac{-2}{\sigma})$.

因为 $X \sim N(2,\sigma^2)$，所以可标准化得 $\dfrac{X-2}{\sigma} \sim N(0,1)$，

由标准正态分布函数概率的计算公式，有

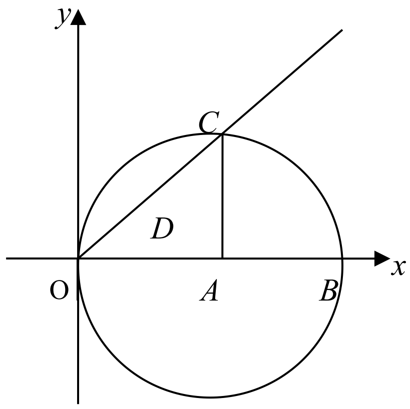
$$P(2<x<4)=\Phi(\frac{4-2}{\sigma})-\Phi(\frac{2-2}{\sigma}),$$

$$\Phi(\frac{2}{\sigma})=P(2<x<4)+\Phi(0)=0.8.$$

由正态分布函数的对称性可得到 $P(x<0)=\Phi(\dfrac{0-2}{\sigma})=\Phi(-\dfrac{2}{\sigma})=1-\Phi(\dfrac{2}{\sigma})=0.2$.

(2)【解析】设事件 A =“掷的点和原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$”，

这是一个几何型概率的计算问题. 由几何概率公式



$$P(A)=\frac{S_D}{S_{半圆}},\ 而\ S_{半圆}=\frac{1}{2}\pi a^2,$$

$$S_D=S_{\triangle OAC}+S_{\frac{1}{4}圆}=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2,$$

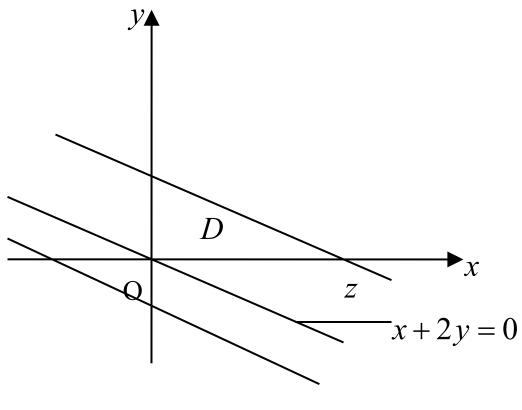
故 $$P(A)=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

十一、（本题满分 6 分）

【解析】二维连续型随机变量的概率等于对应区域的二重积分，所以有

$$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy.$$

当 $z\le 0$ 时，$F(z)=0$.



因为 $x+2y=z$ 在直线 $x+2y=0$ 的下方

与 $x>0, y>0$（即第一象限）没有公共区域，

所以 $F(z)=0$.

当 $z>0$ 时，$x+2y=z$ 在直线 $x+2y=0$

的上方与第一象限相交成一个三角形区域 D，此即为积分区间.

$$F(z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}dy=\int_0^z(e^{-x}-e^{-z})dx=1-e^{-z}-ze^{-z}.$$

所以 $Z=X+2Y$ 的分布函数 $F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z\ge 0.\end{cases}$