2021 年数学(一)真题解析

一、选择题

(1)【答案】 (D).

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$ 得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

再由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$ 得

$f'(0)=\dfrac{1}{2}\neq 0$,应选(D).

(2)【答案】 (C).

【解】 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 两边对 x 求导得

$$f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1),$$

取 $x=0$ 得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$;

$f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两边对 x 求导得

$$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x,$$

取 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$,

解得 $f_1'(1,1)=0,f_2'(1,1)=1$,故 $df(1,1)=dy$,应选(C).

(3)【答案】 (A).

【解】 因为 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 为奇函数,所以 $b=0$;

由 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3),\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^3)$ 得

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3),$$

应选(A).

(4)【答案】 (B).

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k}{2n}\right)\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$,应选(B).

(5)【答案】 (B).

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,

由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda)=0$

得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=3$,应选(B).

(6)**【答案】** (A).

【解】 由施密特正交化得 $l_1=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}=\dfrac{5}{2}$，$l_2=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，应选(A).

方法点评：将线性无关的向量组化为两两正交的规范向量组即施密特正交规范化，实对称矩阵的对角化的正交变换法需要将线性无关的特征向量进行正交化和单位化.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-l_1\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-k_1\boldsymbol{\beta}_1-k_2\boldsymbol{\beta}_2$，且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，

则 $l_1=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}$，$k_1=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}$，$k_2=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}$.

(7)**【答案】** (C).

【解】 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2r(\boldsymbol{A})$；

由 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 得 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$；

由 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 得 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$，应选(C).

(8)**【答案】** (D).

【解】 由 $P(A\mid B)=P(A)$ 得 $P(AB)=P(A)P(B)$，即事件 A,B 独立，

于是 $P(A\mid\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)P(\overline{B})}{P(\overline{B})}=P(A)$；

由 $P(A\mid B)>P(A)$ 得 $P(AB)>P(A)P(B)$，

从而 $$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}$$
$$>\frac{1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)}{1-P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A})；$$

由 $P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})$ 得 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，整理得 $P(AB)>P(A)P(B)$，

则 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$，应选(D).

(9)**【答案】** (C).

【解】 $\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n}\right)$，$\overline{Y}\sim N\left(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{n}\right)$，

则 $E(\hat{\theta})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$；

$$\begin{aligned}D(\hat{\theta})&=D(\overline{X}-\overline{Y})=D(\overline{X})+D(\overline{Y})-2\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{Y})\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n}[\mathrm{Cov}(X_1,\overline{Y})+\mathrm{Cov}(X_2,\overline{Y})+\cdots+\mathrm{Cov}(X_n,\overline{Y})]\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n^2}[\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)+\mathrm{Cov}(X_2,Y_2)+\cdots+\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)]\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n^2}\cdot n\rho\sigma_1\sigma_2=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}\end{aligned}$$
，应选(C).

(10)【答案】 (B).

【解】 由题 $\overline{X} \sim N\left(11.5,\frac{1}{4}\right)$,或$\frac{\overline{X}-11.5}{\frac{1}{2}} \sim N(0,1)$,

犯第二类错误的概率为

$$P\{\overline{X}<11\}=P\left\{\frac{\overline{X}-11.5}{\frac{1}{2}}<-1\right\}=\Phi(-1)=1-\Phi(1),$$

应选(B).

二、填空题

(11)【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【解】 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{1+(x+1)^2}=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

(12)【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{4t\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=2t,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(2t)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{2}{2\mathrm{e}^t+1}$,

则$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=\frac{2}{3}$.

(13)【答案】 x^2.

【解】 令 $x=\mathrm{e}^t,D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,则

$$xy'=Dy,x^2y''=D(D-1)y,$$

代入欧拉方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=0,$$

特征方程为 $\lambda^2-4=0$,特征根为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=2$,

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{2t}$,原方程的通解为

$$y=\frac{C_1}{x^2}+C_2x^2,$$

由 $y(1)=1,y'(1)=2$ 得 $C_1+C_2=1,-2C_1+2C_2=2$,解得 $C_1=0,C_2=1$,

故 $y=x^2$.

方法点评: 形如

$$x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=f(x)$$

的方程称为欧拉方程.

令 $x=\mathrm{e}^t$,则$xy'=Dy=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},x^2y''=D(D-1)y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,

$$x^ny^{(n)}=D(D-1)\cdots(D-n+1)y,$$

代入原方程得高阶常系数线性微分方程,求出其通解,再将$t=\ln x$ 代入即可得原方程的通解.

(14)【答案】 4π.

【解】 设 Σ 所围成的几何体为 Ω,由高斯公式得

$$I=\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(2x+2y+1)\mathrm{d}v,$$

由积分的奇偶性得

$$I=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot\pi\cdot1\cdot2=4\pi.$$

(15)【答案】 $\frac{3}{2}$.

【解】 $|A|=2\begin{vmatrix}1 & a_{12} & a_{13}\\ 1 & a_{22} & a_{23}\\ 1 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=2(A_{11}+A_{21}+A_{31})=3$,则

$$A_{11}+A_{21}+A_{31}=\frac{3}{2}.$$

(16)【答案】 $\frac{1}{5}$.

【解】 (X,Y) 的可能取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$,

$P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$,

$P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$,

$P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$,

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$,

由 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 得 $E(X)=\frac{1}{2},E(X^2)=\frac{1}{2},D(X)=\frac{1}{4}$;

由 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 得 $E(Y)=\frac{1}{2},E(Y^2)=\frac{1}{2},D(Y)=\frac{1}{4}$;

由 $XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$ 得 $E(XY)=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$,则 $\rho_{XY}=\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$.

三、解答题

(17)【解】 方法一

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$$

$$
=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)\sin x-e^x+1}{x^2}
$$

$$
=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x-x}{x^2}+\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt\cdot\sin x-e^x+1+x}{x^2}\right)
$$

$$
=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt\cdot\sin x-e^x+1+x}{x^2}
$$

$$
=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x}-\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}
$$

$$
=\lim_{x\to0}e^{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
$$

方法二

$$
\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}+\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right),
$$

由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}}{e^x}=1$,

$$
\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2}
$$

$$
=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(-\sin x-e^x)=-\frac{1}{2},
$$

得$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

方法三

由泰勒公式得 $e^{t^2}=1+t^2+o(t^2)$,

从而$\int_0^x e^{t^2}\,dt=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$,于是有

$$
\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left[\frac{1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)
$$

$$
=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}+\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)
$$

$$
=1+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}=1+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2}
$$

$$
=1+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^x}{2x}=1+\lim_{x\to0}\frac{-\sin x-e^x}{2}=\frac{1}{2}.
$$

(18)【解】 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,

当$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-(n+1)x}}{e^{-nx}}=e^{-x}<1$ 即 $x>0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 收敛；

再由$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 $R=1$,

当 $x=\pm1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm1)^{n+1}}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛域为$[-1,1]$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为$(0,1]$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=S_1(x)+S_2(x)$,

且$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^x-1}$;

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+x$$
$$=(1-x)\ln(1-x)+x\ (0<x<1),$$

当 $x=1$ 时，由 $S_1(1)=\frac{1}{e-1}$，$S_2(1)=1$ 得 $S(1)=\frac{1}{e-1}+1=\frac{e}{e-1}$,

故
$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{e^x-1}+(1-x)\ln(1-x)+x, & 0<x<1,\\ \frac{e}{e-1}, & x=1.\end{cases}$$

(19)【解】 设 $M(x,y,z)\in C$，点 M 到 xOy 坐标面的距离 $d=|z|$,

令 $F=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$,

由$\begin{cases}F'_x=2\lambda x+4\mu=0,\\ F'_y=4\lambda y+2\mu=0,\\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0,\\ F'_\lambda=x^2+2y^2-z-6=0,\\ F'_\mu=4x+2y+z-30=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=4,\\ y=1,\\ z=12,\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-8,\\ y=-2,\\ z=66,\end{cases}$

故 C 上的点$(-8,-2,66)$到 xOy 面的距离最大为 66.

(20)【解】 (Ⅰ) 显然 $I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dx\,dy$ 取最大值的区域为 $4-x^2-y^2\geqslant0$,

即 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant4\}$，则

$$I(D_1)=\iint\limits_{D_1}(4-x^2-y^2)dx\,dy=2\pi\int_0^2 r(4-r^2)dr$$
$$=2\pi\int_0^2(4r-r^3)dr=2\pi(8-4)=8\pi;$$

(Ⅱ) 令 $L_0: x^2+4y^2=r^2(r>0, L_0$ 在 L 内,取逆时针),设 ∂D_1 与 L_0^- 所围成的区域为 D_0,L_0 围成的区域为 D_2,则

$$\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

$$=\oint_{\partial D_1+L_0^-}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}+$$

$$\int_{L_0}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2},$$

而 $\displaystyle\oint_{\partial D_1+L_0^-}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}=\iint_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0$,

$$\int_{L_0}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\int_{L_0}(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy$$

$$=\frac{1}{r^2}\iint_{D_2}(8xye^{x^2+4y^2}-1-8xye^{x^2+4y^2}-1)dx\,dy$$

$$=\frac{-2}{r^2}\iint_{D_2}dx\,dy=\frac{-2}{r^2}\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}=-\pi.$$

故 $\displaystyle\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}=-\pi$.

(21)**【解】** (Ⅰ)由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a+1 & -(\lambda-a+1) & 0\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a+1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a+1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-a-1 & 1\\ 1 & 2 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)=0,$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=a-1, \lambda_3=a+2$,

由 $(a-1)E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$;

由$(a+2)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$得$\lambda_3=a+2$对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，

令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，

再令$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，

得正交矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，

使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a-1 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a+2\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）由$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}[(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$得

$$(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

令$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，

$$=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ -1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

则$\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$.

(22)【解】（Ⅰ）X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅱ）由 $Y=2-X$ 得 $Z=\dfrac{2-X}{X}$，

$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\dfrac{2}{X}-1\leqslant z\right\}$，

当 $z<1$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\geqslant 1$ 时，$F_Z(z)=P\left\{X\geqslant\dfrac{2}{z+1}\right\}=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1}1\mathrm{d}x=1-\dfrac{2}{z+1}=\dfrac{z-1}{z+1}$，

即

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1,\\ \dfrac{z-1}{z+1}, & z\geqslant 1,\end{cases}$$

故 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{(z+1)^2}, & z>1.\end{cases}$$

（Ⅲ）$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$