1994年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分.)

(1)【答案】$\frac{1}{6}$

【解析】原式变形后为“$\frac{0}{0}$”型的极限未定式,又分子分母在点0处导数都存在,所以连续应用两次洛必达法则,有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.\qquad(由重要极限\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1)$$

(2)【答案】$2x+y-4=0$

【解析】所求平面的法向量n为平行于所给曲面在点$(1,2,0)$处法线方向的方向向量l,取$n=l$,又平面过已知点$M(1,2,0)$.

已知平面的法向量(A,B,C)和过已知点(x_0,y_0,z_0)可唯一确定这个平面:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

因点$(1,2,0)$在曲面$F(x,y,z)=0$上.曲面方程$F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$.

曲面在该点的法向量

$$n=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}\bigg|_{(1,2,0)}=\left\{2y,2x,1-e^z\right\}\big|_{(1,2,0)}=\left\{4,2,0\right\}=2\left\{2,1,0\right\},$$

故切平面方程为 $2(x-1)+(y-2)=0$, 即 $2x+y-4=0$.

(3)【答案】$\frac{\pi^2}{e^2}$

【解析】由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关,为了简化运算,所以本题可以先求$\frac{\partial u}{\partial y}$,再求$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{-x}\cos\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\bigg|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\bigg|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=\frac{1}{\pi}}\right)\bigg|_{x=2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\pi^2 xe^{-x}\cos\pi x\right)\Big|_{x=2}$$

$$=(-\pi^2 e^{-x}(1-x)\cos\pi x)\Big|_{x=2}+0=\frac{\pi^2}{e^2}.$$

（可边代值边计算，这样可以简化运算量.）

【相关知识点】多元复合函数求导法则：如果函数 $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(4)【答案】$\frac{\pi}{4}R^4(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$

【解析】很显然，根据此题的特征用极坐标变换来计算：

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)rdr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta\cdot\int_0^R r^3dr\ .$$

注意： $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\pi$,

则 $\text{原式}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\pi\cdot\frac{1}{4}R^4=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$

(5)【答案】$3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$

【解析】由矩阵乘法有结合律，注意 $\beta\alpha^T=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3$ 是一个数，

而 $A=\alpha^T\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$，(是一个三阶矩阵)

于是,

$$A^n=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)=\alpha^T\left(\beta\alpha^T\right)\left(\beta\alpha^T\right)\cdots\left(\beta\alpha^T\right)\beta$$

$$=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}.$$

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1)【答案】(D)

【解析】对于关于原点对称的区间上的积分, 应该关注被积函数的奇偶性.

由对称区间上奇偶函数积分的性质, 被积函数是奇函数, 积分区间关于原点对称, 则积分为 0, 故 $M=0$, 且

由定积分的性质, 如果在区间 $\left[a,b\right]$ 上, 被积函数 $f(x)\geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx\geq 0\ \ (a<b)$.

所以 $\qquad N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx>0$, $\quad P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx=-N<0$.

因而 $P<M<N$, 应选(D).

(2)【答案】(D)

【解析】$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续不能保证 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$. 反之, $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在这两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$ 也不能保证 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续, 因此应选(D).

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数存在和在点 (x_0,y_0) 处连续并没有相关性.

(3)【答案】(C)

【解析】考查取绝对值后的级数. 因

$$\left|\frac{(-1)^n\,|\,a_n\,|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|\leq\frac{1}{2}{a_n}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2+\lambda}<\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{2n^2},$$

(第一个不等式是由 $a\geq 0,b\geq 0,ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 得到的.)

又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛, (此为 p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛; 当 $p\leq 1$ 时发散.)

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}{a_n}^2+\frac{1}{2n^2}$收敛，由比较判别法，得$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|$收敛.

故原级数绝对收敛，因此选(C).

(4)【答案】(D)

【解析】因为 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2=o(x),1-e^{-x^2}\sim x^2=o(x)$，

故 $a\tan x+b(1-\cos x)\sim ax \quad (a\neq 0)$，

$c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})\sim -2cx \quad (c\neq 0)$，

因此，原式左边$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{-2cx}=\frac{a}{-2c}=2=$原式右边，$\Rightarrow a=-4c$.

当$a=0,c\neq 0$时，极限为0；

当$a\neq 0,c=0$时，极限为∞，均与题设矛盾，应选(D).

【相关知识点】1.无穷小的比较：

设在同一个极限过程中，$\alpha(x),\beta(x)$为无穷小且存在极限 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l.$

（1） 若$l\neq 0,$称$\alpha(x),\beta(x)$在该极限过程中为同阶无穷小；

（2） 若$l=1,$称$\alpha(x),\beta(x)$在该极限过程中为等价无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

（3） 若$l=0,$称在该极限过程中$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小，记为

$\alpha(x)=o\left(\beta(x)\right)$.

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$不存在(不为$\infty$)，称$\alpha(x),\beta(x)$不可比较.

2. 无穷小量的性质：当$x\to x_0$时，$\alpha(x),\beta(x)$为无穷小，则

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x)).$$

(5)【答案】(C)

【解析】这一类题目应当用观察法.若不易用观察法时可转为计算行列式.

(A)：由于$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$，所以(A)线性相关.

(B)：由于$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$，所以(B)线性相关.

对于(C)，实验几组数据不能得到0时，应立即计算由α的系数构成的行列式，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

由行列式不为 0, 知道(C)线性无关. 故应选(C).

当然, 在处理(C)有困难时, 也可来看(D), 由

$$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0,$$

知(D)线性相关, 于是用排除法可确定选(C).

【相关知识点】$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是存在某 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可以由 $\alpha_1,\cdots\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是任意一个 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均不能由 $\alpha_1,\cdots\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

三、(**本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分.**)

(1)【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\cos t^2-2t^2\sin t^2-\dfrac{1}{2t}\cos t^2\cdot 2t}{-2t\sin t^2}=t(t>0),$

同理 $$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{1}{-2t\sin t^2},$$

代入参数值 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$,

则 $$y'_x\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad y''_{xx}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

【相关知识点】1. 复合函数求导法则: 如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y=f(x)$ 在点 $u=g(x)$ 可导, 则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

2. 对积分上限的函数的求导公式: 若 $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t)=\beta'(t)\cdot f\left[\beta(t)\right]-\alpha'(t)\cdot f\left[\alpha(t)\right].$$

（2）【解析】 $f(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x$.

先求 $f'(x)$ 的展开式. 将 $f(x)$ 微分后, 可得简单的展开式, 再积分即得原函数的幂级数展开. 所以由

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ (-1<x<1)$$

该级数在端点 $x=\pm1$ 处的收敛性, 视 α 而定. 特别地, 当 $\alpha=-1$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\qquad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\qquad (-1<x<1)$$

得 $$f'(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}(|x|<1),$$

积分, 由牛顿-莱布尼茨公式得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{4n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\quad(|x|<1).$$

（3）【解析】**方法 1**：利用三角函数的二倍角公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, 并利用换元积分, 结合拆项法求积分, 得

$$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}$$

$$=\int\frac{\sin x dx}{2\sin^2 x(\cos x+1)}\xlongequal{\cos x=u}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-u)(1+u)^2}du$$

（$\because\quad \sin^2 x=1-\cos^2 x$ ）

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{(1+u)+(1-u)}{(1-u)(1+u)^2}du=-\frac{1}{8}\int(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2})du$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{(1+u)}\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln\left(1-\cos x\right)-\ln\left(1+\cos x\right)+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C,$$

其中 C 为任意常数.

方法 2：换元 $\cos x=u$ 后, 有

$$\text{原式}=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\frac{\sin x dx}{2\sin^2 x(\cos x+1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-u)(1+u)^2}.$$

用待定系数法将被积函数分解:

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}+\frac{D}{(1+u)^2}$$

$$=\frac{(A-B)u^2+(2A-D)u+(A+B+D)}{(1-u)(1+u)^2},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A-B=0\\2A-D=0\\A+B+D=1\end{cases}\Rightarrow A=B=\frac{1}{4},D=\frac{1}{2}.$$

于是, 原式$=-\frac{1}{8}\int(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2})du=\frac{1}{8}\left[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{1+u}\right]+C$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C.$$

四、(本题满分 6 分)

【解析】求第二类曲面积分的基本方法:套公式将第二类曲面积分化为第一类曲面积分,再化为二重积分,或用高斯公式转化为求相应的三重积分或简单的曲面积分.

这里曲面块的个数不多,积分项也不多,某些积分取零值,如若Σ垂直yOz平面,则$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz=0$.化为二重积分时要选择投影平面,注意利用对称性与奇偶性.

先把积分化简后利用高斯公式也很方便的.

方法 1: 注意 $\iint\limits_{S}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$,(因为$S$关于$xy$平面对称,被积函数关于$z$轴对称)

所以 $I=\iint\limits_{S}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$.

S由上下底圆及圆柱面组成.分别记为S_1,S_2,S_3. S_1,S_2与平面yOz垂直$\Rightarrow$

$$\iint\limits_{S_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

在S_3上将$x^2+y^2=R^2$代入被积表达式$\Rightarrow I=\iint\limits_{S_3}\frac{xdydz}{R^2+z^2}$.

S_3在yz平面上投影区域为$D_{yz}:-R\le y\le R,-R\le z\le R$,在$S_3$上,$x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$,$S_3$关

于 yz 平面对称, 被积函数对 x 为奇函数, 可以推出

$$I=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}dydz=2\times2\times2\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}dy\int_0^R\frac{dz}{R^2+z^2}$$

$$=8\cdot\frac{\pi}{4}R^2\cdot\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^R=\frac{1}{2}\pi^2R.$$

方法 2： S 是封闭曲面, 它围成的区域记为 Ω, 记 $I=\iint\limits_S\frac{xdydz}{R^2+z^2}$.

再用高斯公式得 $I=\iiint\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{R^2+z^2}\right)dV=\iiint\limits_\Omega\frac{1}{R^2+z^2}dV=\int_{-R}^R dz\iint\limits_{D(z)}\frac{dxdy}{R^2+z^2}$

$$=2\pi R^2\int_0^R\frac{1}{R^2+z^2}dz=\frac{1}{2}\pi^2R \qquad \text{（先一后二的求三重积分方法）}$$

其中 $D(z)$ 是圆域：$x^2+y^2\le R^2$.

【相关知识点】高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

或 $$\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_\Sigma\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

五、（本题满分 9 分）

【解析】由全微分方程的条件, 有

$$\frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y)-f(x)y]=\frac{\partial}{\partial x}[f'(x)+x^2y],$$

即 $\quad x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$, 亦即 $f''(x)+f(x)=x^2$.

因而是初值问题 $\begin{cases}y''+y=x^2,\\ y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1,\end{cases}$ 的解, 此方程为常系数二阶线性非齐次方程, 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$ 的根为 $r_{1,2}=\pm i$, 原方程右端 $x^2=e^{0x}\cdot x^2$ 中的 $\lambda=0$, 不同

于两个特征根, 所以方程有特解形如 $Y = Ax^2 + Bx + C$.

代入方程可求得 $A = 1, B = 0, C = 2$, 则特解为 $x^2 - 2$.

由题给 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 解得 $f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2$.

$f(x)$ 的解析式代入原方程, 则有

$$[xy^2 + 2y - (2\cos x + \sin x)y]dx + [x^2 y + 2x - 2\sin x + \cos x]dy = 0 .$$

先用凑微分法求左端微分式的原函数:

$$(\frac{1}{2}y^2 dx^2 + \frac{1}{2}x^2 dy^2) + 2(ydx + xdy) - yd(2\sin x - \cos x) - (2\sin x - \cos x)dy = 0 ,$$

$$d(\frac{1}{2}x^2 y^2 + 2xy + y(\cos x - 2\sin x)) = 0 .$$

其通解为 $\frac{1}{2}x^2 y^2 + 2xy + y(\cos x - 2\sin x) = C$ 其中 C 为任意常数.

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构: 设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法: 对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解: 即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y'' + py' + qy = 0$. 其特征方程写为 $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2;

分三种情况:

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2, 则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

(2) 两个相等的实数根 $r_1 = r_2$, 则通解为 $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{r_1 x}$;

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为 $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下:

如果 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$ 的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m=\max\{l,n\}$，而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为 0 或 1.

六、(本题满分 8 分)

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 表明 $x\to0$ 时 $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小, 若能进一步确定 $f(x)$ 是 x 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小, $p>1$, 从而 $\left|f(\dfrac{1}{n})\right|$ 也是 $\dfrac{1}{n}$ 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小, 这就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

方法一：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 及 $f(x)$ 的连续性得知 $f(0)=0, f'(0)=0$，再由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一领域内具有二阶连续导数以及洛必达法则, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 为“$\dfrac{0}{0}$”型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 连续运用两次洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|.$$

由函数极限与数列极限的关系 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}\left|f''(0)\right|.$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f(\dfrac{1}{n})\right|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

方法二：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 得知 $f(0)=0, f'(0)=0$，可用泰勒公式来实现估计. $f(x)$ 在点 $x=0$ 有泰勒公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\theta x)x^2=\frac{1}{2}f''(\theta x)x^2(0<\theta<1,x\in[-\delta,\delta])$$

因 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一领域内具有二阶连续导数,

$\Rightarrow \exists \delta > 0, f''(x)$ 在 $x \in [-\delta, \delta]$ 有界，即 $\exists M > 0$，有 $|f''(x)| \le M, x \in [-\delta, \delta]$

$\Rightarrow |f(x)| = \frac{1}{2}|f''(\theta x)|x^2 \le \frac{1}{2}Mx^2, x \in [-\delta, \delta]$.

对此 $\delta > 0$，$\exists N, n > N$ 时，$0 < \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow \left|f(\frac{1}{n})\right| \le \frac{1}{2}M\frac{1}{n^2}$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n})\right|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

【相关知识点】正项级数的比较判别法：

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n} = A$，则

(1) 当 $0 < A < +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $A = 0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

(3) 当 $A = +\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

七、(本题满分 6 分)

【解析】**方法 1**：用定积分.

设高度为 z 处的截面 D_z 的面积为 $S(z)$，则所求体积 $V = \int_0^1 S(z)dz$.

A, B 所在的直线的方向向量为 $(0-1, 1-0, 1-0) = (-1, 1, 1)$，且过 A 点，

所以 A, B 所在的直线方程为 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ 或 $\begin{cases} x = 1-z \\ y = z \end{cases}$.

截面 D_z 是个圆形，其半径的平方 $R^2 = x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2$，则面积

$$S(z) = \pi R^2 = \pi[(1-z)^2 + z^2],$$

由此 $V = \int_0^1 \pi[(1-z)^2 + z^2]dz = \pi\int_0^1\left(1 - 2z + 2z^2\right)dz = \pi\left(z - z^2 + \frac{2}{3}z^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$.

方法 2：用三重积分.

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{(1-z)^2+z^2}} rdr = \frac{2\pi}{3},$$

或者
$$V=\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}d\sigma=\int_0^1\pi[(1-z)^2+z^2]dz$$

$$=\pi\int_0^1\left(1-2z+2z^2\right)dz$$

$$=\pi\left(z-z^2+\frac{2}{3}z^3\right)\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}.$$

八、(本题满分 8 分)

【解析】(1) 由已知, (I) 的系数矩阵, $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$.

由于 $n-r(A)=2,$ 所以解空间的维数是 2.

取 x_3,x_4 为自由变量, 分别令 $\left(x_3,x_4\right)=\left(1,0\right),\left(0,1\right)$, 求出 $Ax=0$ 的解.

故 (I) 的基础解系可取为 $(0,0,1,0),(-1,1,0,1)$.

(2) 方程组 (I) 和 (II) 有非零公共解.

将 (II) 的通解 $x_1=-k_2,x_2=k_1+2k_2,x_3=k_1+2k_2,x_4=k_2$ 代入方程组 (I), 则有

$$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\k_1+2k_2-k_2=0\end{cases}\Rightarrow k_1=-k_2.$$

那么当 $k_1=-k_2\neq 0$ 时, 向量 $k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)=k_1(1,-1,-1,-1)$ 是 (I) 与 (II) 的非零公共解.

九、(本题满分 6 分)

【解析】**证法一:** 由于 $A^*=A^T$, 根据 A^* 的定义有

$A_{ij}=a_{ij}(\forall i,j=1,2,\cdots,n)$, 其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式.

由于 $A\neq 0$, 不妨设 $a_{ij}\neq 0$, 那么

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2\geq a_{ij}^2>0,$$

故 $|A|\neq 0$.

证法二: (反证法) 若 $|A|=0$, 则 $AA^*=AA^T=|A|E=0$.

设 A 的行向量为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\alpha_i\alpha_i^T=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

于是 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$.

进而有 $A=0$，这与 A 是非零矩阵相矛盾. 故 $|A|\neq 0$.

十、填空题(本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分.)

(1)【解析】利用随机事件的概率运算性质进行化简. 由概率的基本公式(广义加法公式)，有

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

因题目已知 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，故有

$$P(A)+P(B)=1,\ P(B)=1-P(A)=1-p.$$

(2)【解析】由于 X、Y 相互独立且同分布，只能取 0、1 两个数值，易见随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 只取 0 与 1 两个可能的值，且

$$P\{Z=0\}=P\{\max\{X,Y\}=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4}.$$

所以随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为：

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

十一、(本题满分 6 分)

【解析】此题的第一小问是求数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$，是个常规问题；(2)求相关系数 ρ_{XZ}，关键是计算 X 与 Z 的协方差；(3)考查相关系数为零与相互独立是否等价.

(1) 由 $X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$，知

$$E(X)=1,D(X)=9,E(Y)=0,D(Y)=16.$$

由数学期望和方差的性质：

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,$$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\operatorname{Cov}(X,Y),$$

其中 a,b,c 为常数.

得 $$EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}DZ&=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\\&=5+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=3.\end{aligned}$$

(2) 因为 $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=\mathrm{Cov}(X,\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y)\\&=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{3}\cdot 3^2+\frac{1}{2}(-6)=0\end{aligned}$$

所以 $$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0.$$

(3) 由于 (X,Y) 服从二维正态分布, 则其线性组合构成的随机变量也服从二维正态分布, 而 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$, $X=X+0Y$, 故 X 和 Z 都是其线性组合, 则 (X,Z) 服从二维正态分布, 根据 $\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0$, 所以 X 与 Z 是相互独立的.