

1998年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1) 【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】方法1: 用四则运算将分子化简,再用等价无穷小替换,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 - 4}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1-x^2} - 1)}{4x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

方法2: 采用洛必达法则.

$$\begin{aligned}\text{原式} &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right)}{4} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

方法3: 将分子按佩亚诺余项泰勒公式展开至 x^2 项,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_1(x^2), \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_2(x^2), \\ \text{从而} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_1(x^2) + 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_2(x^2) - 2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o_1(x^2) + o_2(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(2) 【答案】 $yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y)$

【分析】因为 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$, f, φ 具有二阶连续导数, 利用混合偏导数在连续

的条件下与求导次序无关, 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 均可, 但不同的选择可能影响计算的繁简.

方法1: 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y) \right] = -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{y}{x}f'(xy) + y\varphi'(x+y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{y}{x}f'(xy) + y\varphi'(x+y) \right) \\ &= -\frac{1}{x^2}f'(xy)x + \frac{1}{x}f'(xy) + \frac{y}{x}f''(xy)x + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= -\frac{1}{x}f'(xy) + \frac{1}{x}f'(xy) + yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

方法2: 先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y) \right] = \frac{1}{x}f'(xy)x + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y) \\ &= f'(xy) + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [f'(xy) + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y)] \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

方法3: 对两项分别采取不同的顺序更简单些:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x}f(xy) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} (y\varphi(x+y)) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x}f'(xy)x \right] + \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi'(x+y)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [f'(xy)] + \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi'(x+y)] \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

评注: 本题中, f, φ 中的中间变量均为一元, 因此本题实质上是一元复合函数的求导, 只要注意到对 x 求导时, y 视为常数; 对 y 求导时, x 视为常数就可以了.

(3) 【答案】12a

【解析】 L 关于 x 轴 (y 轴) 对称, $2xy$ 关于 y (关于 x) 为奇函数 $\Rightarrow \int_L 2xyds = 0$.

又在 L 上,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \int_L (3x^2 + 4y^2) ds = \int_L 12 ds = 12a.$$

因此, 原式 $= \int_L 2xy ds + \int_L (3x^2 + 4y^2) ds = 12a$.

【相关知识点】 对称性: 平面第一型曲线积分 $\int_L f(x, y) ds$, 设 $f(x, y)$ 在 l 上连续, 如果 l 关

于 y 轴对称, l_1 为 l 上 $x \geq 0$ 的部分, 则有结论:

$$\int_l f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{l_1} f(x, y) ds, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数,} \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

类似地, 如果 l 关于 x 轴对称, l_2 为 l 上 $y \geq 0$ 的部分, 则有结论:

$$\int_l f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{l_2} f(x, y) ds, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数,} \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

(4) **【答案】** $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1$

【解析】方法1: 设 A 的对应于特征值 λ 的特征向量为 ξ , 由特征向量的定义有

$$A\xi = \lambda\xi, \quad (\xi \neq 0).$$

由 $|A| \neq 0$, 知 $\lambda \neq 0$ (如果 0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A| = 0$), 将上式两端左乘 A^* , 得

$$A^*A\xi = |A|\xi = A^*\lambda\xi = \lambda A^*\xi,$$

从而有 $A^*\xi = \frac{|A|}{\lambda}\xi$, (即 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$).

将此式两端左乘 A^* , 得

$$(A^*)^2 \xi = \frac{|A|}{\lambda} A^* \xi = \left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 \xi.$$

又 $E\xi = \xi$, 所以 $\left((A^*)^2 + E\right)\xi = \left(\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1\right)\xi$, 故 $(A^*)^2 + E$ 的特征值为 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1$.

方法2: 由 $|A| \neq 0$, A 的特征值 $\lambda \neq 0$ (如果 0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A| = 0$), 则 A^{-1} 有特征值

$\frac{1}{\lambda}$, A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$; $(A^*)^2 + E$ 的特征值为 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1$.

【相关知识点】 1. 矩阵特征值与特征向量的定义: 设 A 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX = \lambda X$ 成立, 则称 λ 是矩阵 A 的特征值, 称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

由 λ 为 A 的特征值可知, 存在非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda\alpha$, 两端左乘 A^{-1} , 得 $\alpha = \lambda A^{-1}\alpha$.

因为 $\alpha \neq 0$, 故 $\lambda \neq 0$, 于是有 $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$. 按特征值定义知 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

若 $AX = \lambda X$, 则 $(A + kE)X = AX + kX = (\lambda + k)X$. 即若 λ 是 A 的特征值, 则 $A + kE$ 的特征值是 $\lambda + k$.

2. 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

(5) **【答案】** $\frac{1}{4}$

【解析】 首先求 (X, Y) 的联合概率密度 $f(x, y)$.

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq e^2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\},$$

区域 D 的面积为 $S_D = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{e^2} = 2$.

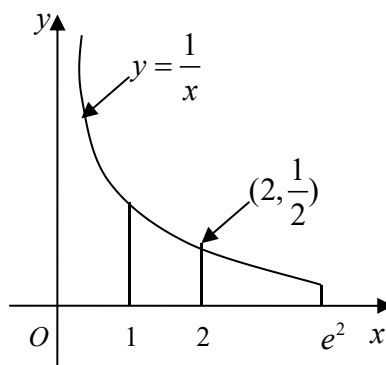
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其次求关于 X 的边缘概率密度.

当 $x < 1$ 或 $x > e^2$ 时, $f_X(x) = 0$;

$$\text{当 } 1 \leq x \leq e^2 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2x}.$$

$$\text{故 } f_X(2) = \frac{1}{4}.$$



二、选择题(本题共5小题, 每小题3分, 共15分.)

(1) **【答案】** (A)

【解析】 为变限所定义的函数求导数, 作积分变量代换 $u = x^2 - t^2$,

$$t: 0 \rightarrow x \Rightarrow u: x^2 \rightarrow 0, \quad du = d(x^2 - t^2) = -2t dt \Rightarrow dt = -\frac{1}{2t} du,$$

$$\begin{aligned}\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt &\stackrel{u = x^2 - t^2}{=} \int_{x^2}^0 t f(u) \left(-\frac{1}{2t}\right) dt \\ &= \int_{x^2}^0 -\frac{1}{2} f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du \\ &= \frac{1}{2} f(x^2) \cdot (x^2)' = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x = x f(x^2),\end{aligned}$$

选(A).

【相关知识点】对积分上限的函数的求导公式: 若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x) dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则 $F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)]$.

(2) **【答案】** (B)

【解析】当函数中出现绝对值号时, 就有可能出现不可导的“尖点”, 因为这时的函数是分段函数. $f(x) = (x^2 - x - 2)|x||x^2 - 1|$, 当 $x \neq 0, \pm 1$ 时 $f(x)$ 可导, 因而只需在 $x = 0, \pm 1$ 处考察 $f(x)$ 是否可导. 在这些点我们分别考察其左、右导数.

$$\begin{aligned}\text{由 } f(x) &= \begin{cases} (x^2 - x - 2)x(1 - x^2), & x < -1, \\ (x^2 - x - 2)x(x^2 - 1), & -1 \leq x < 0, \\ (x^2 - x - 2)x(1 - x^2), & 0 \leq x < 1, \\ (x^2 - x - 2)x(x^2 - 1), & 1 \leq x, \end{cases} \\ \Rightarrow f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x^2 - x - 2)x(1 - x^2) - 0}{x + 1} = 0, \\ f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x^2 - x - 2)x(1 - x^2) - 0}{x + 1} = 0,\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处可导. 又

$$\begin{aligned}f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - x - 2)x(x^2 - 1) - 0}{x} = 2, \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - x - 2)x(1 - x^2) - 0}{x} = -2,\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

类似, 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处亦不可导. 因此 $f(x)$ 只有2个不可导点, 故应选(B).

评注：本题也可利用下列结论进行判断：

设函数 $f(x) = |x - a|\varphi(x)$ ，其中 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的充要

条件是 $\varphi(a) = 0$ 。

(3) 【答案】(D)

【解析】由 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$ ，有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x}$ 。

令 $\Delta x \rightarrow 0$ ，得 α 是 Δx 的高阶无穷小，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$ ，

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y}{1+x^2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = \frac{y}{1+x^2}$$

即
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}.$$

分离变量，得
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2},$$

两边积分，得 $\ln|y| = \arctan x + C$ ，即 $y = C_1 e^{\arctan x}$ 。

代入初始条件 $y(0) = \pi$ ，得 $y(0) = C_1 e^{\arctan 0} = C_1 = \pi$ 。所以， $y = \pi e^{\arctan x}$ 。

故
$$y(1) = \pi e^{\arctan x} \Big|_{x=1} = \pi e^{\arctan 1} = \pi e^{\frac{\pi}{4}}.$$

【相关知识点】无穷小的比较：

设在同一个极限过程中， $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$ ，

(1) 若 $l \neq 0$ ，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小；

(2) 若 $l = 1$ ，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ；

(3) 若 $l = 0$ ，称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$ 。

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在 (不为 ∞)，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较。

(4) 【答案】(A)

【解析】设 $L_1: \frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ ， $L_2: \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ ，题设矩阵

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 则由行列式的性质, 可知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{1\text{行减2行, 2行减3行}}} \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故向量组 $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ 与 $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 线性无关, 否则由线性相关的定义知, 一定存在 k_1, k_2 , 使得 $k_1(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2) + k_2(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3) = 0$, 这样上面行列式经过初等行变换值应为零, 产生矛盾.

$(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ 与 $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 分别为 L_1, L_2 的方向向量, 由方向向量线性相关, 两直线平行, 可知 L_1, L_2 不平行.

又由 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 得

$$\frac{x-a_3}{a_1-a_2} - 1 = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} - 1 = \frac{z-c_3}{c_1-c_2} - 1,$$

即
$$\frac{x-a_3-(a_1-a_2)}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3-(b_1-b_2)}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3-(c_1-c_2)}{c_1-c_2}.$$

同样由 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$, 得

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_3} + 1 = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} + 1 = \frac{z-c_1}{c_2-c_3} + 1,$$

即
$$\frac{x-a_1+(a_2-a_3)}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1+(b_2-b_3)}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1+(c_2-c_3)}{c_2-c_3},$$

可见 L_1, L_2 均过点 $(a_2 - a_1 - a_3, b_2 - b_1 - b_3, c_2 - c_1 - c_3)$, 故两直线相交于一点, 选 (A).

(5) 【答案】C

【分析】由题设条件 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 知 A 发生与 A 不发生条件下 B 发生的条件概率相等, 即 A 发生不发生不影响 B 的发生概率, 故 A, B 相互独立. 而本题选项 (A) 和 (B) 是考虑 $P(A|B)$ 与 $P(\bar{A}|B)$ 是否相等, 选项 (C) 和 (D) 才是事件 A 与 B 是否独立.

【解析】由条件概率公式及条件 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 知

$$\frac{P\{AB\}}{P\{A\}} = \frac{P\{\bar{A}B\}}{P\{\bar{A}\}} = \frac{P\{B\} - P\{AB\}}{1 - P\{A\}},$$

于是有 $P\{AB\}[1 - P\{A\}] = P\{A\} \cdot [P\{B\} - P\{AB\}]$,

可见 $P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}$.

应选(C).

【相关知识点】条件概率公式: $P\{B|A\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}$.

三、(本题满分5分)

【解析】方法1: 求直线 L 在平面 Π 上的投影 L_0 :

方法1: 先求 L 与 Π 的交点 N_1 . 以 $L: \begin{cases} x=1+t, \\ y=t, \\ z=1-t \end{cases}$ 代入平面 Π 的方程, 得

$$(1+t) - t + 2(1-t) - 1 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

从而交点为 $N_1(2, 1, 0)$; 再过直线 L 上点 $M_0(1, 0, 1)$ 作平面 Π 的垂线 $L': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$,

$$\text{即 } \begin{cases} x=1+t, \\ y=-t, \\ z=1+2t. \end{cases}$$

并求 L' 与平面 Π 的交点 N_2 :

$$(1+t) - (-t) + 2(1+2t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3},$$

交点为 $N_2(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$$N_1 \text{ 与 } N_2 \text{ 的连接线即为所求 } L_0: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

方法2: 求 L 在平面 Π 上的投影线的最简方法是过 L 作垂直于平面 Π 的平面 Π_0 , 所求投影

线就是平面 Π 与 Π_0 的交线. 平面 Π_0 过直线 L 上的点 $(1, 0, 1)$ 与不共线的向量 $l = (1, 1, -1)$

(直线 L 的方向向量) 及 $n = (1, -1, 2)$ (平面 Π 的法向量) 平行, 于是 Π_0 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } x-3y-2z+1=0.$$

投影线为 $L_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$

下面求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面 S 的方程. 为此, 将 L_0 写成参数 y 的方程:

$$\begin{cases} x=2y, \\ z=-\frac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

按参数式表示的旋转面方程得 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{(2y)^2 + \left(\frac{1}{2}(1-y)\right)^2} \cos \theta, \\ y = y, \\ z = \sqrt{(2y)^2 + \left(\frac{1}{2}(1-y)\right)^2} \sin \theta. \end{cases}$$

消去 θ 得 S 的方程为 $x^2 + z^2 = (2y)^2 + \left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$, 即 $4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$.

四、(本题满分6分)

【解析】令 $P(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda$, $Q(x, y) = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$, 则 $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$

在单联通区域右半平面 $x > 0$ 上为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度 $\Leftrightarrow Pdx + Qdy$ 在 $x > 0$ 上 \exists 原

函数 $u(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, x > 0$.

其中, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - \lambda x^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 4x^3$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 2\lambda xy(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 2y.$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 即满足

$$-2x(x^4 + y^2)^\lambda - \lambda x^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 4x^3 = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 2\lambda xy(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 2y,$$

$$\Leftrightarrow 4x(x^4 + y^2)^\lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

可见, 当 $\lambda = -1$ 时, 所给向量场为某二元函数的梯度场.

为求 $u(x, y)$, 采用折线法, 在 $x > 0$ 半平面内任取一点, 比如点 $(1, 0)$ 作为积分路径的起点, 则根据积分与路径无关, 有

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} + C \\
 &= \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0} dx + \int_0^y \frac{-x^2}{x^4 + y^2} dy + C \quad (\text{折线法}) \\
 &= \int_0^y \frac{-x^2}{x^4 + y^2} dy + C \\
 &= \int_0^y \frac{-x^2}{x^4(1 + (\frac{y}{x^2})^2)} dy + C \quad (\text{第一类换元法}) \\
 &= -\int_0^y \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4(1 + (\frac{y}{x^2})^2)} d\left(\frac{y}{x^2}\right) + C = -\int_0^y \frac{1}{(1 + (\frac{y}{x^2})^2)} d\left(\frac{y}{x^2}\right) + C \\
 &= -\arctan \frac{y}{x^2} + C \quad (\text{基本积分公式})
 \end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

【相关知识点】 1. 二元可微函数 $u(x, y)$ 的梯度公式: $\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j$.

2. **定理:** 设 D 为平面上的单连通区域, 函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 在 D 内连续且有连续的一阶偏导数, 则下列六个命题等价:

- (1) $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}, (x, y) \in D$;
- (2) $\oint_L Pdx + Qdy = 0, L$ 为 D 内任意一条逐段光滑的封闭曲线;
- (3) $\int_{LAB} Pdx + Qdy$ 仅与点 A, B 有关, 与连接 A, B 什么样的分段光滑曲线无关;
- (4) 存在二元单值可微函数 $u(x, y)$, 使

$$du = Pdx + Qdy$$

(即 $Pdx + Qdy$ 为某二元单值可微函数 $u(x, y)$ 的全微分;

- (5) 微分方程 $Pdx + Qdy = 0$ 为全微分方程;
- (6) 向量场 $Pi + Qj$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度 $\text{gradu} = Pi + Qj$.

换言之, 其中任一组条件成立时, 其它五组条件皆成立. 当条件成立时, 可用试图法或折线法求函数 $u(x, y)$.

五、(本题满分6分)

【解析】先建立坐标系, 取沉放点为原点 O , 铅直向下作为 Oy 轴正向, 探测器在下沉过程中受重力、浮力和阻力的作用, 其中重力大小: mg , 浮力的大小: $F_{\text{浮}} = -\rho B$; 阻力: $-kv$, 则由牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - B\rho g - kv, y|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = 0. \quad (*)$$

由 $\frac{dy}{dt} = v, \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy} = v \frac{dv}{\frac{dy}{dv}}$, 代入(*)得 y 与 v 之间的微分方程

$$mv \left(\frac{dy}{dv} \right)^{-1} = mg - B\rho - kv, \quad v|_{y=0} = 0.$$

分离变量得 $dy = \frac{mv}{mg - B\rho - kv} dv$,

两边积分得 $\int dy = \int \frac{mv}{mg - B\rho - kv} dv$,

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{mv + \frac{Bm\rho}{k} - \frac{m^2 g}{k} - \frac{Bm\rho}{k} + \frac{m^2 g}{k}}{mg - B\rho - kv} dv \\ &= \int \frac{-\frac{m}{k}(mg - B\rho - kv) - \frac{Bm\rho}{k} + \frac{m^2 g}{k}}{mg - B\rho - kv} dv \\ &= \int \left(-\frac{m}{k} + \frac{\frac{m^2 g - Bm\rho}{k}}{mg - B\rho - kv} \right) dv \\ &= \int -\frac{m}{k} dv + \int \frac{m(mg - B\rho)}{k(mg - B\rho - kv)} dv \\ &= -\frac{m}{k} v + \int \frac{m(mg - B\rho) \cdot (-\frac{1}{k})}{k(mg - B\rho - kv)} d(mg - B\rho - kv) \quad (\text{第一类换元法}) \\ &= -\frac{m}{k} v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho - kv) + C. \end{aligned}$$

再根据初始条件 $v|_{y=0}=0$, 即

$$-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)+C=0\Rightarrow C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho).$$

故所求 y 与 v 函数关系为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\left(\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}\right).$$

六、(本题满分7分)

【解析】方法 1: 本题属于求第二类区面积分, 且不属于封闭区面, 则考虑添加一平面使被积区域封闭后用高斯公式进行计算, 但由于被积函数分母中包含 $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, 因此不能立

即加、减辅助面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ z=0 \end{cases}$, 宜先将曲面方程代入被积表达式先化简:

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} axdydz + (z+a)^2 dx dy.$$

添加辅助面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ z=0 \end{cases}$, 其侧向下(由于 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上

侧, 而高斯公式要求是整个边界区面的外侧, 这里我们取辅助面的下侧, 和 Σ 的上侧组成整个边界区面的内侧, 前面取负号即可), 由高斯公式, 有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \oint_{\Sigma+\Sigma_1} axdydz + (z+a)^2 dx dy - \frac{1}{a} \iint_{\Sigma_1} axdydz + (z+a)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{a} \left(- \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial(ax)}{\partial x} + \frac{\partial[(z+a)^2]}{\partial z} \right) dV - \left(- \iint_D a^2 dx dy \right) \right). \end{aligned}$$

第一个积分前面加负号是由于我们取边界区面的内侧, 第二个积分前面加负号是由于 Σ_1 的方向向下; 另外由曲面片 Σ_1 在 $yo z$ 平面投影面积为零, 则 $\iint_{\Sigma_1} axdydz=0$, 而 Σ_1 上 $z=0$,

则 $(z+a)^2=a^2$.

$$I = \frac{1}{a} \left(- \iiint_{\Omega} (a+2(z+a)) dV + \iint_D a^2 dx dy \right),$$

其中 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的有界闭区域, D 为 Σ_1 在 xoy 面上的投影 $D=\{(x,y)|x^2+y^2 \leq a^2\}$.

从而,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a} \left(-3a \iiint_{\Omega} dv - 2 \iiint_{\Omega} z dv + a^2 \iint_D dx dy \right) \\
&= \frac{1}{a} \left(-3a \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z dz + a^2 \cdot \pi a^2 \right).
\end{aligned}$$

第一个积分用球体体积公式；第二个用柱面坐标求三重积分；第三个用圆的面积公式.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a} \left(-2\pi a^4 - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \left(\frac{1}{2} z^2 \Big|_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 \right) dr + \pi a^4 \right) \\
&= \frac{1}{a} \left(-\pi a^4 - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \left(-\frac{1}{2} (a^2 - r^2) \right) dr \right) \\
&= \frac{1}{a} \left(-\pi a^4 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 r - r^3) dr \right) \\
&= \frac{1}{a} \left(-\pi a^4 + 2\pi \cdot \left(\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a \right) = \frac{1}{a} \left(-\pi a^4 + 2\pi \cdot \left(\frac{a^2 a^2}{2} - \frac{a^4}{4} \right) \right) \\
&= \frac{1}{a} \left(-\pi a^4 + 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} a^3
\end{aligned}$$

方法2：逐项计算：

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} ax dy dz + (z+a)^2 dx dy \\
&= \iint_{\Sigma} x dy dz + \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dx dy = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{\Sigma} x dy dz = - \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dz + \iint_{D_{yz}} -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dz \\
&= -2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dz,
\end{aligned}$$

第一个负号是由于在 x 轴的正半空间区域 Σ 的上侧方向与 x 轴反向；第二个负号是由于被积函数在 x 取负数.

D_{yz} 为 Σ 在 $yo z$ 平面上的投影域 $D_{yz} = \{(y, z) | y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq 0\}$, 用极坐标, 得

$$\begin{aligned}
I_1 &= -2 \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\
&= -2\pi \cdot -\frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} d(a^2 - r^2) \\
&= \pi \frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2}{3} \pi (0 - a^3) = -\frac{2}{3} \pi a^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dx dy = \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}} \left(a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)^2 dx dy \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - r^2} - r^2) r dr \\
&= \frac{2\pi}{a} \int_0^a (2a^2 r - 2a r \sqrt{a^2 - r^2} - r^3) dr \\
&= \frac{2\pi}{a} \left[\int_0^a 2a^2 r dr - 2a \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr - \int_0^a r^3 dr \right] \\
&= \frac{2\pi}{a} \left[a^2 r^2 \Big|_0^a - 2a \cdot \left(\frac{1}{3} a^3 \right) - \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a \right] \\
&= \frac{2\pi}{a} \left(a^4 - \frac{2}{3} a^4 - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{\pi}{6} a^3,
\end{aligned}$$

其中 D_{yz} 为 Σ 在 $yo z$ 平面上的投影域 $D_{yz} = \{(y, z) | y^2 + z^2 \leq a^2\}$. 故 $I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2} a^3$.

【相关知识点】 高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数

$P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

或

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧， $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

七、(本题满分6分)

【分析】 这是 n 项和式的极限，和式极限通常的方法就两种：一、把和式放缩，利用夹逼准则求极限；二、把和式转换成定积分的定义形式，利用定积分求极限. 这道题，把两种方法结合起来求极限.

当各项分母均相同是 n 时， n 项和式

$$x_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数 $\sin \pi x$ 在 $[0, 1]$ 区间上的一个积分和. 于是可由定积分 $\int_0^1 \sin \pi x dx$ 求得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解析】 由于 $\frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1} \leq \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n + \frac{1}{i}} \leq \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n}$, $i = 1, 2, \cdots, n$,

于是,
$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n + \frac{1}{i}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n}.$$

由于
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$$

根据夹逼定理知,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n + \frac{1}{i}} = \frac{2}{\pi}.$$

【相关知识点】夹逼准则: 若存在 N , 当 $n > N$ 时, $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$,

则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

八、(本题满分5分)

【解析】方法1: 因正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界0, 知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 记为 a , 则 $a_n \geq a$ 且 $a \geq 0$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 根据莱布尼茨判别法知, 必有 $a > 0$ (否则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛).

又正项级数 $\{a_n\}$ 单调减少, 有 $\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n \leq \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$, 而 $0 < \frac{1}{a+1} < 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$

收敛. 根据正项级数的比较判别法, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 也收敛.

方法2: 同方法1, 可证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$. 令 $b_n = \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n+1} = \frac{1}{a+1} < 1,$$

根据根值判别法, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 也收敛.

【相关知识点】1. 交错级数的莱布尼茨判别法:

设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足:

$$(1) u_n \geq u_{n+1}, n=1, 2, \dots; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和满足 $0 < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n < u_1$, 余项 $|r_n| < u_{n+1}$.

反之, 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 发散, 只是满足条件(1), 则可以反证说明此级数一定不满足

条件(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > 0$. (否则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛)

2. 正项级数的比较判别法:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = A$, 则

(1) 当 $0 < A < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $A = 0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $A = +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

3. 根值判别法:

$$\text{设 } u_n > 0, \text{ 则当 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} < 1 \text{ 时,} & \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛,} \\ > 1 \text{ 时,} & \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散, 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0, \\ = 1 \text{ 时,} & \text{此判别法无效.} \end{cases}$$

九、(本题满分6分)

【解析】(1) 要证 $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使 $x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x) dx$; 令 $\varphi(x) = x f(x) - \int_x^1 f(t) dt$, 要证

$\exists x_0 \in (0, 1)$, 使 $\varphi(x_0) = 0$. 可以对 $\varphi(x)$ 的原函数 $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$ 使用罗尔定理:

$$\Phi(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\Phi(1) &= \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx - \int_0^1 \left(\int_x^1 f(t) dt \right) dx \\ &\stackrel{\text{分部}}{=} \int_0^1 xf(x) dx - \left[x \int_x^1 f(t) dt \right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 xf(x) dx = 0,\end{aligned}$$

又由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导. 根据罗尔定理, $\exists x_0 \in (0,1)$, 使 $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0) = 0$.

(2) 由 $\varphi'(x) = xf'(x) + f(x) + f(x) = xf'(x) + 2f(x) > 0$, 知 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增, 故(1)中的 x_0 是唯一的.

评注: 若直接对 $\varphi(x)$ 使用零点定理, 会遇到麻烦:

$$\varphi(0) = -\int_0^1 f(t) dt \leq 0, \varphi(1) = f(1) \geq 0.$$

当 $f(x) \equiv 0$ 时, 对任何的 $x_0 \in (0,1)$ 结论都成立;

当 $f(x) \not\equiv 0$ 时, $\varphi(0) < 0$, 但 $\varphi(1) \geq 0$, 若 $\varphi(1) = 0$, 则难以说明在 $(0,1)$ 内存在 x_0 . 当直

接对 $\varphi(x)$ 用零点定理遇到麻烦时, 不妨对 $\varphi(x)$ 的原函数使用罗尔定理.

【相关知识点】 1. 罗尔定理: 如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a,b) 内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使得 $f'(\xi) = 0$.

十、(本题满分6分)

【解析】 经正交变换化二次型为标准形, 二次型矩阵与标准形矩阵既合同又相似. 由题设知,

二次曲面方程左端二次型对应矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} B,$$

即 A 与 B 相似.

由相似矩阵有相同的特征值, 知矩阵 A 有特征值 $0, 1, 4$. 从而,

$$\begin{cases} 1+a+1=0+1+4, \\ |A| = -(b-1)^2 = |B| = 0. \end{cases} \Rightarrow a=3, b=1.$$

$$\text{从而, } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时,

$$(0E - A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{行} \times (-1) \text{分别加到} 2, 3 \text{行}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是得方程组 $(0E - A)x = 0$ 的同解方程组为 $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_2 = 0. \end{cases}$

$r(0E - A) = 2$, 可知基础解系的个数为 $n - r(0E - A) = 3 - 2 = 1$, 故有1个自由未知量,

选 x_1 为自由未知量, 取 $x_1 = 1$, 解得基础解系为 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$.

当 $\lambda_2 = 1$ 时,

$$\begin{aligned} (E - A) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3 \times (-1) \text{加到} 2 \text{行}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{1\text{行} \times (-1) \text{加到} 2 \text{行}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2, 3 \text{行互换}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

于是得方程组 $(E - A)x = 0$ 的同解方程组为 $\begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

$r(E - A) = 2$, 可知基础解系的个数为 $n - r(E - A) = 3 - 2 = 1$, 故有1个自由未知量,

选 x_1 为自由未知量, 取 $x_1 = 1$, 解得基础解系为 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = 4$ 时,

$$(4E-A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{1,2\text{行互换}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行的}3, (-1)\text{倍分别加到}2, 3\text{行}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{行加到}3\text{行}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是得方程组 $(4E-A)x=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

$r(4E-A)=2$, 可知基础解系的个数为 $n-r(4E-A)=3-2=1$, 故有1个自由未知量,

选 x_2 为自由未知量, 取 $x_2=2$, 解得基础解系为 $\alpha_3=(1,2,1)^T$.

由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交, 可知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相互正交.

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

$$\eta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,$$

$$\eta_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

因此所求正交矩阵为 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$

评注: 利用相似的必要条件求参数时, $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$ 是比较好用的一个关系式. 亦可用

$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ 比较 λ 同次方的系数来求参数.

【相关知识点】 1. 特征值的性质: $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

2. 相似矩阵的性质: 若矩阵 A 与 B 相似, 则 $|A| = |B|$.

十一、(本题满分4分)

【解析】用线性无关的定义证明.

设有常数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$, 使得

$$\lambda_0 \alpha + \lambda_1 A \alpha + \dots + \lambda_{k-1} A^{k-1} \alpha = 0. \quad (*)$$

两边左乘 A^{k-1} , 则有

$$A^{k-1} (\lambda_0 \alpha + \lambda_1 A \alpha + \dots + \lambda_{k-1} A^{k-1} \alpha) = 0,$$

即
$$\lambda_0 A^{k-1} \alpha + \lambda_1 A^k \alpha + \dots + \lambda_{k-1} A^{2(k-1)} \alpha = 0.$$

上式中因 $A^k \alpha = 0$, 可知 $A^{k+1} \alpha = \dots = A^{2(k-1)} \alpha = 0$, 代入上式可得 $\lambda_0 A^{k-1} \alpha = 0$.

由题设 $A^{k-1} \alpha \neq 0$, 所以 $\lambda_0 = 0$.

将 $\lambda_0 = 0$ 代入 (*), 有 $\lambda_1 A \alpha + \dots + \lambda_{k-1} A^{k-1} \alpha = 0$.

两边左乘 A^{k-2} , 则有 $A^{k-2} (\lambda_1 A \alpha + \dots + \lambda_{k-1} A^{k-1} \alpha) = 0$,

即
$$\lambda_1 A^{k-1} \alpha + \dots + \lambda_{k-1} A^{2k-3} \alpha = 0.$$

同样, 由 $A^k \alpha = 0$, $A^{k+1} \alpha = \dots = A^{2(k-1)} \alpha = 0$, 可得 $\lambda_1 A^{k-1} \alpha = 0$.

由题设 $A^{k-1} \alpha \neq 0$, 所以 $\lambda_1 = 0$.

类似地可证明 $\lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$, 因此向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

【相关知识点】 向量组线性相关和线性无关的定义: 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m 使

$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关; 否则, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

十二、(本题满分5分)

【解析】(II) 的通解为

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_n \xi_n,$$

其中, $\xi_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1,2n})^T$, $\xi_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2,2n})^T, \dots, \xi_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,2n})^T$,

k_1, k_2, \dots, k_n 为任意常数.

理由: 可记方程组 (I) $A_{n \times 2n} X = 0$, (II) $B_{n \times 2n} Y = 0$, (I), (II) 的系数矩阵分别记为 A, B , 由

于 B 的每一行都是 $A_{n \times 2n} X = 0$ 的解, 故 $AB^T = 0$. B^T 的列是 (I) 的基础解系, 故由基础解系

的定义知, B^T 的列向量是线性无关的, 因此 $r(B) = n$. 故基础解系所含向量的个数

$n = 2n - r(A)$, 得 $r(A) = 2n - n = n$. 因此, A 的行向量线性无关.

对 $AB^T = 0$ 两边取转置, 有 $(AB^T)^T = BA^T = 0$, 则有 A^T 的列向量, 即 A 的行向量是 $BY = 0$ 的线性无关的解.

又 $r(B) = n$, 故 $BY = 0$ 基础解系所含向量的个数应为 $2n - r(B) = 2n - n = n$, 恰好等于 A 的行向量个数. 故 A 的行向量组是 $BY = 0$ 的基础解系, 其通解为

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_n \xi_n,$$

其中, $\xi_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1,2n})^T$, $\xi_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2,2n})^T, \cdots, \xi_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,2n})^T$,

k_1, k_2, \cdots, k_n 为任意常数.

十三、(本题满分6分)

【分析】把 $X - Y$ 看成是一个随机变量, 根据独立正态随机变量的线性组合必然为正态分布的性质, 可以知道 $X - Y \sim N(0, 1)$, 这样可以简化整题的计算.

【解析】令 $Z = X - Y$, 由于 X, Y 相互独立, 且都服从正态分布, 因此 Z 也服从正态分布, 且

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 0, \quad D(Z) = D(X) + D(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

于是, $Z = X - Y \sim N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} D|X - Y| &= D(|Z|) = E(|Z|^2) - (E|Z|)^2 \\ &= D(Z) + (E(Z))^2 - (E|Z|)^2 = 1 - (E|Z|)^2. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} E|Z| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(\frac{z^2}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \end{aligned}$$

故 $D|X - Y| = 1 - \frac{2}{\pi}$.

【相关知识点】1. 对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, 则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y),$$

其中 a, b, c 为常数.

2. 方差的定义: $DX = EX^2 - (EX)^2$.

3. 随机变量函数期望的定义: 若 $Y = g(X)$, 则 $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$.

十四、(本题满分4分)

【解析】由题知: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(3.4, 6^2)$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 各样本相互独立, 根据独立

正态随机变量的性质, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. 其中 $\mu = E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)$,

$$\sigma^2 = D\bar{X}_n = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right).$$

根据期望和方差的性质,

$$\mu = E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{3.4n}{n} = 3.4,$$

$$\sigma^2 = D\bar{X}_n = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{6^2 n}{n^2} = \frac{6^2}{n}.$$

所以, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(3.4, \frac{6^2}{n})$. 把 \bar{X}_n 标准化, $U = \frac{\bar{X}_n - 3.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

从而,

$$\begin{aligned} P\{1.4 < \bar{X} < 5.4\} &= P\{1.4 - 3.4 < \bar{X} - 3.4 < 5.4 - 3.4\} \\ &= P\{-2 < \bar{X} - 3.4 < 2\} = P\{|\bar{X} - 3.4| < 2\} \\ &= P\left\{\frac{|\bar{X} - 3.4|}{6} \sqrt{n} < \frac{2\sqrt{n}}{6}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 \geq 0.95, \end{aligned}$$

故 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.975$, 查表得到 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.96$, 即 $n \geq (1.96 \times 3)^2 \approx 34.57$, 所以 n 至少应取35.

【相关知识点】 1. 对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, 则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX+bY+c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y),$$

其中 a, b, c 为常数.

2. 若 $Z \sim N(u, \sigma^2)$, 则 $\frac{Z-u}{\sigma} \sim N(0,1)$

十五、(本题满分4分)

【解析】设该次考试的考生成绩为 X , 则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 设 \bar{X} 为从总体 X 抽取的样本容量为 n 的样本均值, S 为样本标准差, 则在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下建立检验假设:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 70, H_1: \mu \neq 70,$$

由于 σ^2 未知, 故用 t 检验.

选取检验统计量,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - 70}{S} \sqrt{36}$$

在 $\mu = \mu_0 = 70$ 时, $X \sim N(70, \sigma^2), T \sim t(35)$.

选择拒绝域为 $R = \{|T| \geq \lambda\}$, 其中 λ 满足:

$$P\{|T| \geq \lambda\} = 0.05, \text{ 即 } P\{|T| \leq \lambda\} = 0.975, \lambda = t_{0.975}(35) = 2.0301.$$

由 $n = 36, \bar{x} = 66.5, \mu_0 = 70, s = 15$, 可算得统计量 T 的值:

$$|t| = \frac{|66.5 - 70|}{15} \sqrt{36} = 1.4 < 2.0301.$$

所以接受假设 $H_0: \mu = 70$, 即在显著性水平 0.05 下, 可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.