1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】$-\dfrac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$

【解析】函数 $y=y(x)$ 是一个隐函数,即它是由一个方程确定,写不出具体的解析式.

方程两边对 x 求导,将 y 看做 x 的函数,得 $e^{x+y}(1+y')+\sin(xy)(xy'+y)=0$. 解出 y', 即

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{e^{x+y}-x\sin(xy)}.$$

【相关知识点】1. 复合函数求导法则:

如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导,而 $y=f(x)$ 在点 $u=g(x)$ 可导,则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x 可导,且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

2. 两函数乘积的求导公式:

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

(2)【答案】$\dfrac{2}{9}\{1,2,-2\}$

【解析】对函数 u 求各个分量的偏导数,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

由函数的梯度(向量)的定义,有

$$gradu=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\{2x,2y,2z\},$$

所以 $$gradu\big|_M=\frac{1}{1^2+2^2+(-2)^2}\{2,4,-4\}=\frac{2}{9}\{1,2,-2\}.$$

【相关知识点】复合函数求导法则:

如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导,而 $y=f(x)$ 在点 $u=g(x)$ 可导,则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x 可导,且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

(3)【答案】$\frac{1}{2}\pi^2$

【解析】$x=\pi$ 是$[-\pi,\pi]$区间的端点, 由收敛性定理—狄利克雷充分条件知, 该傅氏级数在 $x=\pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{1}{2}[-1+1+\pi^2]=\frac{1}{2}\pi^2.$$

【相关知识点】收敛性定理—狄利克雷充分条件:

函数 $f(x)$ 在区间$[-l,l]$上满足:(i) 连续, 或只有有限个第一类间断点;(ii) 只有有限个极值点. 则 $f(x)$ 在$[-l,l]$上的傅里叶级数收敛, 而且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

$$=\begin{cases} f(x), & 若x\in(-l,l)为f(x)的连续点, \\ \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right], & 若x\in(-l,l)为f(x)的第一类间断点, \\ \frac{1}{2}\left[f(-l+0)+f(l-0)\right], & 若x=\pm l. \end{cases}$$

(4)【答案】$y=x\cos x+C\cos x, C$ 为任意常数

【解析】这是标准形式的一阶线性非齐次方程, 由于 $e^{\int\tan xdx}=\frac{1}{|\cos x|}$, 方程两边同乘 $\frac{1}{\cos x}$, 得

$$\left(\frac{1}{\cos x}y\right)'=1\overset{积分}{\Rightarrow}\frac{1}{\cos x}y=x+C.$$

故通解为 $y=x\cos x+C\cos x, C$ 为任意常数.

(5)【答案】1

【解析】因为矩阵 A 中任何两行都成比例(第 i 行与第 j 行的比为 $\frac{a_i}{a_j}$), 所以 A 中的二阶子式全为 0, 又因 $a_i\neq 0, b_i\neq 0$, 知道 $a_1b_1\neq 0$, A 中有一阶子式非零. 故 $r(A)=1$.

【相关知识点】矩阵秩的定义:如果矩阵中存在 r 阶子式不为零, 而所有的 $r+1$ 阶子式全为零时, 则此矩阵的秩为 r.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】(D)

【解析】对于函数在给定点 x_0 的极限是否存在需要判定左极限 $x \to x_0^-$ 和右极限 $x \to x_0^+$ 是否存在且相等,若相等,则函数在点 x_0 的极限是存在的.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty,$$

$0\neq\infty$, 故当 $x\to 1$ 时函数没有极限,也不是 ∞. 故应选(D).

(2)【答案】(C)

【解析】对原级数的通项取绝对值后,再利用等价无穷小 $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}(n\to+\infty)$,

$$\left|(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})\right|=1-\cos\frac{\alpha}{n}\sim\frac{\alpha^2}{2n^2}(n\to+\infty),$$

又因为 p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛; 当 $p\le 1$ 时发散.

所以有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}$ 收敛.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})\right|$ 收敛. 所以原级数绝对收敛. 应选(C).

注: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 确定无穷小 a_n 关于 $\frac{1}{n}$ 的阶(即与 p 级数作比较)是判断它的敛散性的一个常用方法. 该题用的就是这个方法.

(3)【答案】B

【解析】先求出切线的方向向量,再利用方向向量与平面的法向量的数量积为 0 得切点对应的 t 值.

求曲线上的点,使该点处的切向量 τ 与平面 $x+2y+z=4$ 的法向量 $n=\{1,2,1\}$ 垂直,即可以让切线与平面平行.

曲线在任意点处的切向量 $\tau=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}=\{1,-2t,3t^2\}$, $n\perp\tau\Leftrightarrow n\cdot\tau=0$, 即 $1-4t+3t^3=0$, 解得 $t=1,t=\frac{1}{3}$. (对应于曲线上的点均不在给定的平面上)

因此,只有两条这种切线,应选(B).

(4)【答案】(C)

【解析】因$3x^3$处处任意阶可导,只需考查$x^2|x|\triangleq\varphi(x)$,它是分段函数,$x=0$是连接点.所以,写成分段函数的形式,有

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, x<0,\\ x^3,\ \ x\ge 0,\end{cases}$$

对分段函数在对应区间上求微分,

$$\Rightarrow \varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, x<0,\\ 3x^2,\ \ x>0,\end{cases}$$

再考查$\varphi(x)$在连接点$x=0$处的导数是否存在,需要根据左导数和右导数的定义进行讨论.

$$\varphi_+'(0)=(x^3)_+'\big|_{x=0}=0,\ \varphi_-'(0)=(-x^3)_-'\big|_{x=0}=0\Rightarrow\varphi'(0)=0,$$

即 $\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, x\le 0,\\ 3x^2,\ \ x>0.\end{cases}$

同理可得 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, x<0,\\ 6x,\ \ x>0,\end{cases}$ $\varphi''(0)=0$,即 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, x\le 0\\ 6x,\ \ x>0\end{cases}=6|x|$.

对于$y=|x|$有$y_+'(0)=1, y_-'(0)=-1$.

所以$y=|x|$在$x=0$不可导,$\Rightarrow\varphi'''(0)$不存在,应选(C).

(5)【答案】(A)

【解析】ξ_1,ξ_2向量对应的分量不成比例,所以ξ_1,ξ_2是$Ax=0$两个线性无关的解,故$n-r(A)\ge 2$.由$n=3$知$r(A)\le 1$.

再看(A)选项秩为1;(B)和(C)选项秩为2;而(D)选项秩为3.故本题选(A).

【相关知识点】对齐次线性方程组$Ax=0$,有定理如下:

对矩阵A按列分块,有$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$,则$Ax=0$的向量形式为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0.$$

那么, $Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关

$$\Leftrightarrow r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)<n\quad\Leftrightarrow r\left(A\right)<n.$$

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分.)

(1)【解析】由等价无穷小有 $x\to 0$ 时, $1-\sqrt{1-x^2}\sim -\frac{1}{2}(-x^2)=\frac{1}{2}x^2$,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\frac{1}{2}x^2},$$

上式为“$\frac{0}{0}$”型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 所以连续应用两次洛必达法则, 有

$$原式\underset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}\underset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{1}=\frac{1+0}{1}=1.$$

(2)【解析】这是带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数, 重要的是要分清函数是如何复合的.

由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关, 所以本题可以先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 再求 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$.

由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y)+f_2'\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=f_1'\cdot e^x\sin y+f_2'\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'e^x\sin y+f_2'2x)$$

$$=(f_{11}''e^x\cos y+f_{12}''2y)e^x\sin y+f_1'e^x\cos y+(f_{21}''e^x\cos y+f_{22}''2y)2x$$

$$=f_{11}''\cdot e^{2x}\sin y\cos y+2f_{12}''\cdot e^x(y\sin y+x\cos y)+4f_{22}''\cdot xy+f_1'\cdot e^x\cos y.$$

【相关知识点】多元复合函数求导法则：如果函数 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(3)【解析】分段函数的积分应根据积分可加性分段分别求积分. 另外, 被积函数的中间变量非积分变量, 若先作变量代换, 往往会简化计算.

令 $x-2=t$, 则 $dx=dt$. 当 $x=1$ 时, $t=-1$；当 $x=3$ 时, $t=1$, 于是

$$\int_1^3 f(x-2)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt\underset{\text{分段}}{=\!=}\int_{-1}^0(1+t^2)dt+\int_0^1 e^{-t}dt=\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{-1}^0-e^{-t}\Big|_0^1=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}.$$

四、（本题满分 6 分.）

【解析】所给方程为常系数的二阶线性非齐次方程,所对应的齐次方程的特征方程 $r^2+2r-3=(r-1)(r+3)=0$ 有两个根为 $r_1=1,\ r_2=-3$，而非齐次项 $e^{\alpha x},\alpha=-3=r_2$ 为单特征根,因而非齐次方程有如下形式的特解 $Y=x\cdot ae^{-3x}$，代入方程可得 $a=-\dfrac{1}{4}$，故所求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\dfrac{x}{4}e^{-3x}$，其中 C_1,C_2 为常数.

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构：设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解, 则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法：对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$，可用特征方程法求解：即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y''+py'+qy=0$. 其特征方程写为 $r^2+pr+q=0$，在复数域内解出两个特征根 r_1,r_2；分三种情况：

（1）两个不相等的实数根 r_1,r_2，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；

（2）两个相等的实数根 $r_1=r_2$，则通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$；

（3）一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$. 其中 C_1,C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$，可用待定系数法, 有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m=\max\left\{l,n\right\}$，而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征

方程的根、或是特征方程的单根依次取为0或1.

五、(本题满分8分)

【解析】将原式表成 $I=\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$.

以考虑用高斯公式来求解，但曲面 Σ 不是封闭的，要添加辅助面. 如果本题采用投影法计算是比较复杂的，故不采用.

添加辅助面 $S: z=0(x^2+y^2\le a^2)$，法向量朝下，S 与 Σ 围成区域 Ω，S 与 Σ 取 Ω 的外法向量. 在 Ω 上用高斯公式得

$$I+\iint\limits_{S}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV .$$

用球坐标变换求右端的三重积分得

$$3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a\rho^2\cdot\rho^2 d\rho$$

$$=3\times 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a\rho^4 d\rho=3\times 2\pi\times 1\times\frac{1}{5}a^5=\frac{6}{5}\pi a^5 .$$

注意 S 垂直于平面 yOz 与平面 xOz，将积分投影到 xOy 平面上，所以左端 S 上的曲面积分为

$$\iint\limits_{S}Pdydzdx+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=0+0+\iint\limits_{S}R(x,y,0)dxdy=\iint\limits_{S}ay^2dxdy=-a\iint\limits_{D_{xy}}y^2dxdy$$

$$=-a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot\sin^2\theta rdr \quad （极坐标变换）$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr=-a\times\pi\times\frac{a^4}{4}=-\frac{\pi}{4}a^5 .$$

因此 $$I=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{\pi}{4}a^5=\frac{29}{20}\pi a^5 .$$

【相关知识点】1. 高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

或 $$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS,$$

这里Σ是Ω的整个边界曲面的外侧, $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ在点(x,y,z)处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

2. 对于球面坐标与直角坐标的关系为:

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}$$

其中φ为向量与z轴正向的夹角, $0\le\varphi\le\pi$; θ为从正z轴来看自x轴按逆时针方向转到向量在xOy平面上投影线段的角, $0\le\theta\le 2\pi$; r为向量的模长, $0\le r<+\infty$.

球面坐标系中的体积元素为$dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$, 则三重积分的变量从直角坐标变换为球面坐标的公式是:

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

六、(本题满分 7 分)

【解析】**证法一:** 用拉格朗日中值定理来证明.

不妨设$x_2>x_1>0$, 要证的不等式是$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)$.

在$[0,x_1]$上用中值定理, 有$f(x_1)-f(0)=f'(\xi)x_1, 0<\xi<x_1$;

在$[x_2,x_1+x_2]$上用中值定理, 又有$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)x_1, x_2<\eta<x_1+x_2$

由$f''(x)<0$, 所以$f'(x)$单调减, 而$\xi<x_1<x_2<\eta$, 有$f'(\xi)>f'(\eta)$, 所以

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)=f(x_1),$$

即$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证法二: 用函数不等式来证明. 要证$f(x_1+x)<f(x_1)+f(x), x>0$, 构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x_1)+f(x)-f(x_1+x),$$

则$\varphi'(x)=f'(x)-f'(x_1+x)$. 由$f''(x)<0, f'(x)$单调减, $f'(x)>f'(x_1+x), \varphi'(x)>0$.

由此, $\varphi(x)>\varphi(0)=f(x_1)+f(0)-f(x_1)=0(x>0)$. 改$x$为$x_2$即得证.

【相关知识点】拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.

七、(本题满分 8 分)

【解析】(1) 先求出在变力 F 的作用下质点由原点沿直线运动到点 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 时所作的功 W 的表达式. 点 O 到点 M 的线段记为 L, 则

$$W=\int_L F\cdot ds=\int_L yzdx+zxdy+xydz\ .$$

(2) 计算曲线积分: L 的参数方程是 $x=\xi t, y=\eta t, z=\zeta t$, t 从 0 到 1,

$$\Rightarrow W=\int_0^1(\eta\zeta t^2\cdot\xi+\xi\zeta t^2\cdot\eta+\xi\eta t^2\cdot\zeta)dt=3\xi\eta\zeta\int_0^1 t^2dt=\xi\eta\zeta\ .$$

化为最值问题并求解: 问题变成求 $W=\xi\eta\zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1(\xi\ge 0,\eta\ge 0,\zeta\ge 0)$ 下的最大值与最大值点.

用拉格朗日乘子法求解. 拉格朗日函数为 $F(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$, 则有

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial\xi}=\eta\zeta+2\lambda\frac{\xi}{a^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial\eta}=\xi\zeta+2\lambda\frac{\eta}{b^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial\gamma}=\xi\eta+2\lambda\frac{\zeta}{c^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0.\end{cases}$$

解此方程组: 对前三个方程, 分别乘以 ξ,η,ζ 得 $\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}$, ($\lambda\ne 0$ 时)

代入第四个方程得 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}a,\eta=\frac{1}{\sqrt{3}}b,\zeta=\frac{1}{\sqrt{3}}c$.

相应的 $W=\frac{1}{3\sqrt{3}}abc=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$. 当 $\lambda=0$ 时相应的 ξ,η,ζ 得 $W=0$.

因为实际问题存在最大值, 所以当$(\xi,\eta,\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}}a,\frac{1}{\sqrt{3}}b,\frac{1}{\sqrt{3}})$时$W$取最大值$\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

【相关知识点】拉格朗日乘子法:

要找函数$z=f(x,y)$在附加条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点, 可以先作拉格朗日函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中λ为参数. 求其对x与y的一阶偏导数, 并使之为零, 然后与附加条件联立起来:

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

由这方程组解出x,y及λ, 这样得到的(x,y)就是函数$f(x,y)$在附加条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点.

八、(本题满分 7 分)

【解析】(1) α_1能由α_2、α_3线性表出.

因为已知向量组α_2、α_3、α_4线性无关, 所以α_2、α_3线性无关, 又因为α_1、α_2、α_3线性相关, 故α_1能由α_2、α_3线性表出.

(2) α_4不能由α_1、α_2、α_3线性表出,

反证法: 若α_4能由α_1、α_2、α_3线性表出, 设 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$.

由(1)知, α_1能由α_2、α_3线性表出, 可设$\alpha_1=l_1\alpha_2+l_2\alpha_3$, 那么代入上式整理得

$$\alpha_4=(k_1l_1+k_2)\alpha_2+(k_1l_2+k_3)\alpha_3.$$

即α_4能由α_2、α_3线性表出, 从而α_2、α_3、α_4线性相关, 这与已知矛盾.

因此, α_4不能由α_1、α_2、α_3线性表出.

【相关知识点】向量组线性相关和线性无关的定义: 存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$, 则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关; 否则, 称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

九、(本题满分 7 分)

【解析】(1) 设 $\beta = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, 即是求此方程组的解.

对增广矩阵 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\beta)$ 作初等行变换,

第一行乘以 (-1) 分别加到第二行和第三行上, 再第二行乘以 (-3) 加到第三行上, 第三行自乘 $\dfrac{1}{2}$, 有

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

第三行乘以 (-2)、(-1) 分别加到第二行和第一行上, 再第二行乘以 (-1) 加到第一行上, 有

增广矩阵 $\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$.

解出 $x_3=1$, $x_2=-2$, $x_1=2$, 故 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$.

(2) 由 λ 为 A 的特征值可知, 存在非零向量 α 使 $A\alpha=\lambda\alpha$, 两端左乘 A, 得

$A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$, 再一直这样操作下去, 有 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$.

因为 $\alpha\neq 0$, 故 $\lambda\neq 0$. 按特征值定义知 λ^n 是 A^n 的特征值, 且 α 为相应的特征向量.

所以有 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i, A^n\xi_i=\lambda_i{}^n\xi_i (i=1,2,3)$, 据(1)结论 $\beta = 2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$, 有

$$A\beta = A(2\xi_1-2\xi_2+\xi_3) = 2A\xi_1 - 2A\xi_2 + A\xi_3,$$

于是 $\quad A^n\beta = A^n(2\xi_1-2\xi_2+\xi_3) = 2A^n\xi_1 - 2A^n\xi_2 + A^n\xi_3 = 2\lambda_1{}^n\xi_1 - 2\lambda_2{}^n\xi_2 + \lambda_3{}^n\xi_3$

$$=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-2\cdot 2^n\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+3^n\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}.$$

【相关知识点】矩阵特征值与特征向量的定义: 设 A 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX=\lambda X$ 成立, 则称 λ 是矩阵 A 的特征值, 称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 3 分.)

【解析】由条件概率和乘法公式: 从 $P(AB)=0$, 可知 $P(ABC)=P(AB)P(AB\,|\,C)\ =0$,

由加法公式:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0=\frac{5}{8},$$

故 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{8}$.

(2)【解析】依题意, 随机变量 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布, 故 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

根据连续型随机变量函数的数学期望的求法, 得出

$$E(X+e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+e^{-2x})f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}(x+e^{-2x})e^{-x}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-3x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

十一、(本题满分 6 分)

【解析】**方法一**：利用分布函数求密度函数：

首先, 因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 所以 X 的密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$,

因 Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布, 故 Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\frac{1}{\pi-(-\pi)}=\frac{1}{2\pi}$.

因为随机变量 X 与 Y 相互独立, 所以二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. 要求 Z 的密度函数, 先求 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z}f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dxdy.$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}dy\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)dy$$ (由标准正态分布来表示一般正态分布)

求出 Z 的分布函数, 因此, 对分布函数求导得密度函数, Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)dy$$

其中 $\varphi(x)$ 是标准正态分布的概率分布密度. 由于 $\varphi(x)$ 是偶函数, 故有

$$\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)=\varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)$$

于是 $$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)dy=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right)\right].$$

最终用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示出来 $Z=X+Y$ 的概率分布密度.

方法二：用卷积公式直接计算：

直接应用相互独立随机变量之和密度的卷积公式, 求 $f_Z(z)$ 更为简单.

因为随机变量 X 与 Y 相互独立, 由卷积公式

$$\begin{aligned}
f_Z(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{\sigma^2}}dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{\sigma^2}}dy\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y+\mu-z)^2}{\sigma^2}}dy\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)dy\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)dy\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right)\right].
\end{aligned}$$

最终用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示出来 $Z=X+Y$ 的概率分布密度.