2021 研究生入学考试考研数学试卷（数学一）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

1． $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

（A）连续且取得极大值　　（B）连续且取得极小值

（C）可导且导数为零　　（D）可导且导数不为零

2． 设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$， $f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

（A） $dx+dy$　　（B） $dx-dy$　　（C） dy　　（D） $-dy$

3． 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

（A） $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　（B） $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

（C） $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　（D） $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

4． 设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

（A） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　（B） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

（C） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$　　（D） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

5． 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数依次为

（A） 2,0　　（B）1,1　　（C）2,1　　（D）1,2

6． 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，若

β_1,β_2,β_3两两正交，则l_1,l_2依次为

（A）$\frac{5}{2},\frac{1}{2}$　（B）$-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$　（C）$\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$　（D）$-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

7．设A,B为n阶实矩阵，下列不成立的是

（A）$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^TA \end{pmatrix}=2r(A)$　（B）$r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$

（C）$r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^TA \end{pmatrix}=2r(A)$　（D）$r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$

8．设A,B为随机事件，且$0<P(B)<1$，下列为假命题的是

（A）若$P\left(A\mid B\right)=P\left(A\right)$,则$P\left(A\mid \overline{B}\right)=P\left(A\right)$

（B）若$P\left(A\mid B\right)>P\left(A\right)$,则$P\left(\overline{A}\mid \overline{B}\right)>P\left(A\right)$

（C）若$P\left(A\mid B\right)>P\left(A\mid \overline{B}\right)$,则$P\left(A\mid B\right)>P\left(A\right)$

（D）若$P\left(A\mid A\cup B\right)>P\left(\overline{A}\mid A\cup B\right)$,则$P\left(A\right)>P\left(B\right)$

9．设$\left(X_1,Y_1\right),\left(X_2,Y_2\right),\ldots\left(X_n,Y_n\right)$为来自总体$N\left(\mu_1,\mu_1;\sigma_1{}^2,\sigma_2^2;\rho\right)$的简单随机样本，令

$\theta=u_1-u_2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$,则

（A）$\hat{\theta}$是θ的无偏差估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（B）$\hat{\theta}$不是θ的无偏差估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（C）$\hat{\theta}$是θ的无偏差估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（D）$\hat{\theta}$不是θ的无偏差估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10．设$X_1,X_2,...,X_{16}$是来自总体$N(\mu,4)$简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\le 10,H_1:\mu>10,\Phi(x)$表示标准正太分布函数，若该检验问题的拒绝域为$W=\left\{\overline{X}\ge 11\right\}$,其中$\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则$\mu=11.5$，该检验犯第二类错误的概率为

（A）$1-\Phi(0.5)$　（B）$1-\Phi(1)$　（C）$1-\Phi(1.5)$　（D）$1-\Phi(2)$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

11．$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$____________

12．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^t+t+1 \\ y=4(t-1)e^t+t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$____________

13．欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1, y'(1)=2$ 的解为 $y=$____________

14．设 Σ 为空间区域 $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2\le 4, 0\le z\le 2\right\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$____________

15．设 $A=a_{(ij)}$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且 $|A|=3$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$____________

16．甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球，选取甲盒中任意一球，观察颜色后放入乙盒，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数，则 X 与 Y 的相关系数为____________

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

17．（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$

18．（本题满分 12 分）

设 $\mu(x)=e^{-nx}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,...)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数．

19．（本题满分 12 分）

已知曲线 C: $\begin{cases} x^2+2y^2-z=6 \\ 4x+2y+z=30 \end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值．

20．（本题满分 12 分）

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通区域，$I(D)=\iint\limits_D\left(4-x^2-y^2\right)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1

(1) 求 $I(D_1)$ 的值.

(2) 计算 $\int_{\partial_{D_1}} \frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)dx+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)dy}{x^2+4y^2}$ ，其中 ∂_{D_1} 是 D_1 的正向边界

21．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(1) 求正交矩阵 P，使 P^TAP 为对角矩阵

(2) 求正定矩阵 C，使 $C^2=(a+3)E-A$，E 为 3 阶单位矩阵.

22．在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y. 令 $Z=\frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度；(2)求 Z 的概率密度；(3)求 $E(\frac{X}{Y})$.