# 2020 考研数学真题(数学一)

## 一、选择题(1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) $x \to 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶是

(A) $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$. (B) $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$. (D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}dt$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

(3) 设函数 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,$f(0,0)=0$,$\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{(0,0)}$ 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,则

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在. (B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在. (D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{a}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

(4) 设 $R$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径,$r$ 是实数,则

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时,$|r|\geqslant R$. (B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时,$|r|\leqslant R$.

(C) 当 $|r|\geqslant R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散. (D) 当 $|r|\leqslant R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛.

(5) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$,则

(A) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$. (B) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$.

(C) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$. (D) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

(6) 已知直线 $L_1$:$\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2$:$\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点,法向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{bmatrix}$,$i=1,2,3$. 则

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. (B) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示. (D) $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(7) 设 $A,B,C$ 为三个随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$,则 $A,B,C$ 中恰有一个事件发生的概率为

(A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{12}$.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本,其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$,$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数,则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}$ 的近似值为

(A) $1-\Phi(1)$. (B) $\Phi(1)$. (C) $1-\Phi(0.2)$. (D) $\Phi(0.2)$.

## 二、填空题(9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=$ ________.

(10) $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1})\end{cases}$,$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ________.

(11) 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0\ (a>0)$,$f(0)=m$,$f'(0)=n$,则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=$ ________.

(12) 设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$,则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$ ________.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=$ ________.

(14) 设 $X$ 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布,$Y=\sin X$,则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$ ________.

## 三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(16)(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$,其中 $L$ 为 $x^2+y^2=2$ 方向为逆时针方向.

(17)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$.

证明:当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛,并求其和函数.

(18)(本题满分 10 分)

设 $\Sigma$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 下侧，$f(x)$ 为连续函数. 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间$[0,2]$上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) 若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\leqslant M$，则 $M=0$.

(20)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 $a,b$ 值.

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 $X_1,X_2,X_3$ 相互独立，其中 $X_1$ 与 $X_2$ 均服从标准正态分布，$X_3$ 的概率分布为

$$P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2},Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2.$$

(1) 求二维随机变量$(X_1,Y)$的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

(2) 证明随机变量 $Y$ 服从标准正态分布.

(23)(本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 $T$ 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\theta,m$ 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0,t>0$.

(2) 任取 $n$ 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，若 $m$ 已知，求 $\theta$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.