2002年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】 1

【详解】先将其转化为普通定积分，求其极限即得广义积分.

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{e}^{b}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{e}^{b}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^b=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln b}+1\right]=1$$

(2)【答案】 -2

【详解】y 是由 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定的 x 的函数，两边对 x 求导，

$$e^y y'+6xy'+6y+2x=0,$$

所以 $y'=-\dfrac{6y+2x}{e^y+6x}$, 两边再对 x 求导，得

$$y''=-\frac{(e^y+6x)(6y'+2)-(6y+2x)(e^y y'+6)}{(e^y+6x)^2},$$

把 $x=0$ 代入，得 $y(0)=0$， $y'(0)=0$，代入 y''，得 $y''(0)=-2$.

(3)【答案】 $y=\sqrt{x+1}$

【详解】**方法 1**：这是属于缺 x 的 $y''=f(y,y')$ 类型. 命 $y'=p, y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$.

原方程 $yy''+y'^2=0$ 化为 $yp\dfrac{dp}{dy}+p^2=0$，得

$$p=0 \text{或} y\frac{dp}{dy}+p=0$$

$p=0$，即 $\dfrac{dy}{dx}=0$，不满足初始条件 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，弃之；所以 $p\neq 0$

所以，$y\dfrac{dp}{dy}+p=0$，分离变量得 $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dp}{p}$，解之得 $p=\dfrac{C_1}{y}$. 即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{C_1}{y}$.

由初始条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，可将 C_1 先定出来：$\dfrac{1}{2}=\dfrac{C_1}{1}, C_1=\dfrac{1}{2}$. 于是得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$$

解之得，$y^2 = x + C_2, y = \pm\sqrt{x + C_2}$.以 $y\big|_{x=0} = 1$ 代入，得 $1 = \pm\sqrt{C_2}$ ，所以应取“+”号且 $C_2 = 1$．于是特解是 $y = \sqrt{x+1}$．

方法 2: 将 $yy'' + y'^2 = 0$ 改写为 $(yy')' = 0$，从而得 $yy' = C_1$．以初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{1}{2}$ 代入，有 $1 \times \dfrac{1}{2} = C_1$，所以得 $yy' = \dfrac{1}{2}$．即 $2yy' = 1$，改写为 $(y^2)' = 1$．解得 $y = x + C_2$, $y = \pm\sqrt{x + C_2}$.再以初值代入，$1 = \pm\sqrt{C_2}$ 所以应取"+"且 $C_2 = 1$．于是特解 $y = \sqrt{x+1}$．

(4)【答案】2

【详解】**方法 1：** 二次型 f 的对应矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$，经正交变换 $x = Py$，可化成标准型 $f = 6y_1^2$，故 P 为正交矩阵，有 $P^T = P^{-1}$，且对实对称矩阵 A，有 $P^TAP = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，故 $P^TAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，即

$$A \sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为矩阵的 n 个特征值之和等于它的主对角元素之和，$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 3a = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$，相似矩阵具有相同的特征值，$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 6 + 0 + 0 = 6$ 故有 $3a = 6$，得 $a = 2$．

方法 2: 二次型 f 的对应矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$，经正交变换 $x = Py$，可化成标准型 $f = 6y_1^2$，

故 P 为正交矩阵，有 $P^T = P^{-1}$，且对实对称矩阵 A，有 $P^TAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，即

$$A \sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相似矩阵具有相同的特征值，知 0 是 A 的特征值，根据特征值的定义，有 $|0E-A|=|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{把第2,3列加到第1列}}} \begin{vmatrix} a+4 & 2 & 2 \\ a+4 & a & 2 \\ a+4 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix}\text{提取第1列}\\ \text{的公因子}\end{matrix}}}(a+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} \underline{\underline{\begin{matrix}2\text{行}-1\text{行}\\ 3\text{行}-1\text{行}\end{matrix}}}(a+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+4)(a-2)^2=0,$$

得 $\quad a=-4$ 或 $a=2$，(1)

又 6 是 A 的特征值，根据特征值的定义，有 $|6E-A|=0$，由

$$6E-A=\begin{bmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6-a & -2 & -2 \\ -2 & 6-a & -2 \\ -2 & -2 & 6-a \end{bmatrix}(\text{对应元素相减})$$

两边取行列式，

$$|6E-A|=\begin{vmatrix} 6-a & -2 & -2 \\ -2 & 6-a & -2 \\ -2 & -2 & 6-a \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{把第2,3列加到第1列}}} \begin{vmatrix} 2-a & -2 & -2 \\ 2-a & 6-a & -2 \\ 2-a & -2 & 6-a \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix}\text{提取第1列}\\ \text{的公因子}\end{matrix}}}(2-a)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 6-a & -2 \\ 1 & -2 & 6-a \end{vmatrix} \underline{\underline{\begin{matrix}2\text{行}-1\text{行}\\ 3\text{行}-1\text{行}\end{matrix}}}(2-a)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 8-a & 0 \\ 0 & 0 & 8-a \end{vmatrix}$$

$$=(2-a)(8-a)^2=0$$

得 $\quad a=2$ 或 $a=8$ (2)

因为(1)，(2)需同时成立，取它们的公共部分，得 $a=2$.

方法 3： f 的对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$，经正交变换 $x=Py$，可化成标准型 $f=6y_1^2$，

故 P 为正交矩阵，有 $P^T=P^{-1}$，且对实对称矩阵 A，有 $P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$，即

$$A\sim\begin{bmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

相似矩阵具有相同的特征值，知 A 的特征值，其中一个单根是 6，一个二重根应是 0，直接求 A 的特征值，即由

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda&&\\&\lambda&\\&&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-a&-2&-2\\-2&\lambda-a&-2\\-2&-2&\lambda-a\end{bmatrix}\text{(对应元素相减)}$$

两边取行列式，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-2&-2\\-2&\lambda-a&-2\\-2&-2&\lambda-a\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第1列}]{\text{把第2,3列}}\begin{vmatrix}\lambda-a-4&-2&-2\\\lambda-a-4&\lambda-a&-2\\\lambda-a-4&-2&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提取第1列的公因子}}(\lambda-a-4)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&\lambda-a&-2\\1&-2&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{3行}-\text{1行}]{\text{2行}-\text{1行}}(\lambda-a-4)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&\lambda-(a-2)&0\\0&0&\lambda-(a-2)\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-(a-4)][\lambda-(a-2)]^2$$

其中单根为 $a+4$，二重根为 $a-2$，故 $a+4=6$，及 $a-2=0$，故知 $a=2$.

方法 4： f 的对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}$，经正交变换 $x=Py$，可化成标准型 $f=6y_1^2$，

故 P 为正交矩阵，有 $P^T=P^{-1}$，且对实对称矩阵 A，有 $P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$，即

$$A=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}\sim\Lambda=\begin{bmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$$

故 $r(A)=r(\Lambda)=1$，

$$A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第3行的顺序}]{\text{交换第1和}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}\times\frac{a}{2}]{2\text{行}-1\text{行}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 2-a & 2-a^2/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & 4-\dfrac{a^2}{2}-a \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{行}\times 2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & -(a^2+2a-8) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & -(a-2)(a+4) \end{bmatrix}$$

因$r(A)=1$，故$a-2=0$，且$(a-2)(a+4)=0$，故应取$a=2$.

(5)【答案】4.

【详解】二次方程无实根，即$y^2+4y+X=0$的判别式$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}=16-4X<0$，也就有$X>4$. 此事发生概率为$\dfrac{1}{2}$，即$P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}$，

对于$X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0), P\{X>\mu\}=\dfrac{1}{2}$，因为正态分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad -\infty<x<+\infty$$

关于$x=\mu$对称；另一方面，由概率的计算公式，$f(x)$与x轴所围成的面积是1，所以$x=\mu$将面积平分为两份 $P\{X>\mu\}=\dfrac{1}{2}$，所以$\mu=4$.

二、选择题

(1)【详解】下述重要因果关系应记住，其中$A\Rightarrow B$表示由A可推出B. 无箭头者无因果关系，箭头的逆向不成立.

$$f_x'(x,y) \text{ 与 } f_y'(x,y) \text{ 连续} \Rightarrow f(x,y) \text{ 可微} \Rightarrow \begin{cases} f_x'(x,y)\text{与}f_y'(x,y)\text{存在} \\ f(x,y)\text{连续} \end{cases}$$

其中均指在同一点处. 记住上述关系，不难回答本选择题，故应选(A).

(2)【详解】首先要分清绝对收敛和条件收敛的定义，通过定义判定级数的敛散性.

考察原级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$的前$n$项部分和

$$S_n=(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2})-(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3})+(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4})-\cdots+(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1>0$知，当$n$充分大时，$u_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$(收敛)，

另一方面，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$为正项级数，用比较判别法的极限形式，由题设条件

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$的启发，考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{u_{n+1}+u_n}{u_nu_{n+1}}}{\frac{2n+1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(u_{n+1}+u_n)n(n+1)}{u_nu_{n+1}(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)[\frac{(n+1)}{n}\frac{u_{n+1}}{(n+1)}+\frac{u_n}{n}]}{u_nu_{n+1}\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)}{n}\frac{u_{n+1}}{(n+1)}+\frac{u_n}{n}}{\frac{u_n}{n}\cdot\frac{u_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n}}=1$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$是发散的，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$也发散，所以选(C).

(3)【详解】**方法 1**：排斥法.

令$f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$有界，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，但$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在，故(A)不成立；

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=1\neq0$，(C)和(D)不成立，故选(B).

方法 2：证明(B)正确. 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在，记$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$，证明$A=0$.

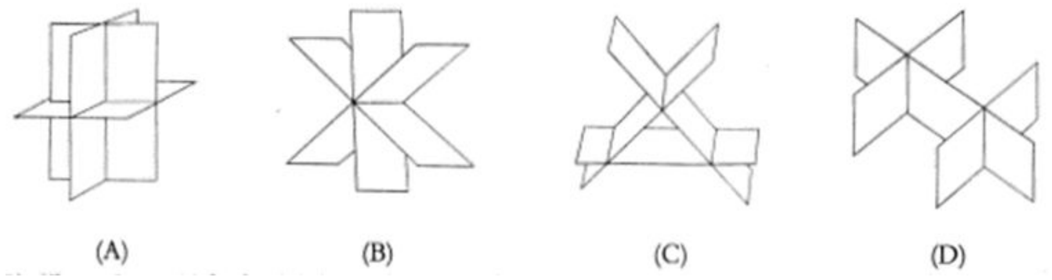
用反证法，若$A>0$，则对于$\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，存在$X>0$，使当$x>X$时，$\left|f'(x)-A\right|<\varepsilon=\frac{A}{2}$，即$\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<f'(x)<A+\frac{A}{2}=\frac{3A}{2}$

由此可知，$f'(x)$有界且大于$\frac{A}{2}$.在区间$[x,X]$上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$$

从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与题设$f(x)$有界矛盾.类似可证当$A<0$时亦有矛盾. 故$A=0$.

(4) 【答案】(B)



【详解】三张不同平面的方程分别为$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3,$ 判断三个平面有无公共点即判断方程组$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$有无公共解，且方程组有多少公共解平面就有多少公共点，由于方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都是$2<3$(未知量的个数)，所以方程组有解且有无穷多解，故三个平面有无穷多个公共点，故应排除(A)三平面唯一交点(即方程组只有唯一解)(C)、(D)三平面没有公共交点(即方程组无解).

故应选(B)，三个平面相交于一条直线，直线上所有的点均是平面的公共点，即有无穷多个公共点.

(5)【答案】D

【分析】函数$f(x)$成为概率密度的充要条件为：(1) $f(x)\geq 0;$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$

函数$F(x)$成为分布函数的充要条件为：(1) $F(x)$单调不减；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1;$ (3) $F(x)$右连续.

我们可以用以上的充要条件去判断各个选项，也可以用随机变量的定义直接推导.

【详解】**方法1：**

(A)选项不可能，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx=1+1=2\neq 1$$

也不能选(B)，因为可取反例，令

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然$f_1(x)$，$f_2(x)$均是均匀分布的概率密度. 而

$f_1(x)f_2(x)=0$，不满足$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dx=1$条件.

(C)当然也不正确，因为

$$\lim_{x\to+\infty}[F(x_1)+F(x_2)]=1+1=2\neq 1$$

根据排除法，答案应选(D).

方法 2： 令 $X=\max(X_1,X_2)$，显然 X 也是一个随机变量. X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\max(X_1,X_2)\le x\}=P\{X_1\le x,X_2\le x\}$$

$$=P\{X_1\le x\}P\{X_2\le x\}=F_1(x)F_2(x)\,.$$

三【详解】

方法 1： 由题设条件知有

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$$

由于 $f(0)\ne 0$，所以 $a+b-1=0$. 又由洛必达法则，

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}(af'(h)+2bf'(2h))=(a+2b)f'(0)$$

由于 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，由高阶无穷小的定义知上式等于 0，又由 $f'(0)\ne 0$, 得 $a+2b=0$.

解 $\begin{cases} a+b-1=0 \\ a+2b=0 \end{cases}$ 联立方程组得， $a=2,b=-1$.

方法 2： 分别将 $f(h),f(2h)$ 按佩亚诺余项泰勒公式展开到 $o(h)$，有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o_1(h)\,,\quad f(2h)=f(0)+2f'(0)h+o_2(h)$$

从而 $\quad af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o_3(h)$

由题设条件知， $a+b-1=0,a+2b=0,$ 所以 $a=2,b=-1$.

方法 3： 由题设条件，有

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$$

由于 $f(0)\ne 0$，所以 $a+b-1=0$. 再将 $a=1-b$ 代入 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[af(h)+bf(2h)-f(0)]$，并凑成导数定义形式，有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1-b)f(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}[\frac{f(h)-f(0)}{h}-b\frac{f(h)-f(0)}{h}+2b\frac{f(2h)-f(0)}{2h}]\\&=f'(0)-bf'(0)+2bf'(0)=(1+b)f'(0)\end{aligned}$$

从而 $\quad a=2,b=-1$.

四【详解】由 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 知 $y(0)=0$，由变上限积分的求导公式得

$$y'=e^{-(\arctan x)^2}\cdot(\arctan x)'=e^{-(\arctan x)^2}\bullet\frac{1}{1+x^2},$$

所以 $$y'(0)=e^{-(\arctan 0)^2}\bullet\frac{1}{1+0^2}=1$$

因此，过点 $(0,0)$ 的切线方程为 $y=x.$ $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处与上述曲线有相同的切线方程，于是 $f(0)=0, f'(0)=1$.

$$\lim_{n\to\infty}nf(\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$$

五【详解】应先将 $e^{\max\{x^2,y^2\}}$ 写成分块表达式. 记

$$D_1=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,0\le y\le x\},D_2=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,x\le y\le 1\}$$

于是 $$e^{\max\{x^2,y^2\}}=\begin{cases}e^{x^2} & (x,y)\in D_1;\\ e^{y^2} & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

从而 $$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}d\sigma=\iint_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}d\sigma+\iint_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}d\sigma=\iint_{D_1} e^{x^2}d\sigma+\iint_{D_2} e^{y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1 dy\int_0^1 e^{y^2}dx=\int_0^1 e^{x^2}xdx+\int_0^1 e^{y^2}ydy$$

$$=2\int_0^1 e^{x^2}xdx=\int_0^1 e^{x^2}dx^2=\int_0^1 de^{x^2}=e^{x^2}\big|_0^1=(e-1)$$

六【详解】(1) 记 $P(x,y)=\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]$，$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1])}{\partial x}=\frac{\partial(\frac{x}{y^2})}{\partial x}\times([y^2f(xy)-1])+\frac{x}{y^2}\times\frac{\partial([y^2f(xy)-1])}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{y^2}\times([y^2f(xy)-1])+\frac{x}{y^2}\times\frac{y^2\partial(f(xy)}{\partial x}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+x\times f'(xy)\frac{\partial(xy)}{\partial x}$$

$$=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)])}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial(\frac{1}{y})}{\partial y}([1+y^2f(xy)])+\frac{1}{y}\frac{\partial([1+y^2f(xy)])}{\partial y}$$

$$=-\frac{1}{y^2}([1+y^2f(xy)])+\frac{1}{y}\frac{\partial(y^2)}{\partial y}f(xy)+\frac{1}{y}\times\frac{\partial(f(xy))}{\partial y}\times y^2$$

$$=-f(xy)-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$$

所以，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}(当y>0)$. 故在上半平面($y>0$)，该曲线积分与路径无关.

(2)**方法 1：**由该曲线积分与路径无关而只与端点有关所以用折线把两个端点连接起来. 先从点(a,b)到点(c,b), 再到点(c,d). 有

$$I=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)]dx+\int_b^d cf(cy)dy+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

经积分变量变换后，$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)dt$. 当$ab=cd$时，推得$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

方法 2:原函数法.

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$$

$$=\int_L\frac{ydx-xdy}{y^2}+\int_L f(xy)(ydx+xdy)=\int_L d(\frac{x}{y})+\int_L f(xy)d(xy)$$

由原函数法计算第二型曲线积分的公式(与定积分的牛顿—莱布尼茨公式类似)，有

$$\int_L d(\frac{x}{y})=\frac{x}{y}\Bigg|_{(a,b)}^{(c,d)}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b};$$

$$\int_L f(xy)d(xy)=F(xy)\Bigg|_{(a,b)}^{(c,d)}=F(cd)-F(ab)=0,$$

其中$F(u)$为$f(u)$的一个原函数，即设$F'(u)=f(u)$.由此有$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

方法 3：由于与路径无关，又由$ab=cd$的启发，取路径$xy=k$，其中$k=ab$. 点(a,b)与点(c,d)都在此路径上. 于是将$x=\frac{k}{y}$代入之后，

$$I=\int_a^d[\frac{1}{y}(1+y^2f(k))(-\frac{k}{y^2})+\frac{k}{y^2}(y^2f(k)-1)]dy$$

$$=\int_b^d(-\frac{2k}{y^3})dy=\frac{k}{y^2}\Big|_b^d=\frac{k}{d^2}-\frac{k}{b^2}=\frac{cd}{d^2}-\frac{ab}{b^2}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

七【解】(1) $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6\,!}+\frac{x^9}{9\,!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$，

由收敛半径的求法知收敛半径为∞，故由幂级数在收敛区间上逐项可导公式得

$$y'(x)=(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!})'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nx^{3n-1}}{(3n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},$$

同理得 $\qquad y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$

从而

$$y''(x)+y'(x)+y(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!})+(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!})+(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!})$$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (由 e^x 的麦克劳林展开式)

$=e^x$

这说明，$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 是微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 的解，并且满足初始条件

$$y(0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{3n}}{(3n)!}=1，\ y'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{3n-1}}{(3n-1)!}=0.$$

(2)微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 对应的齐次线性方程为 $y''+y'+y=0$，其特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$，其特征根为$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以其通解为

$$y=e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x].$$

另外，该非齐次方程的特解形式为 $y=ce^x$，代入原非齐次方程得 $ce^x+ce^x+ce^x=e^x$，所以 $c=\frac{1}{3}$.故微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 的通解为

$$y=e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]+\frac{1}{3}e^x.$$

故 $$y'=-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]+e^{-\frac{x}{2}}[-C_1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos x]+\frac{1}{3}e^x$$

$$=-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{x}{2}}(C_2-2C_1\times\frac{\sqrt{3}}{2})\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{x}{2}}(C_1-2C_2\times\frac{\sqrt{3}}{2})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$$

由初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 得

$$\begin{cases}1=e^{-\frac{0}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\times0+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\times0]+\frac{1}{3}e^0=C_1+\frac{1}{3}\\ 0=-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{0}{2}}(C_2-2C_1\times\frac{\sqrt{3}}{2})\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\times0-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{0}{2}}(C_1-2C_2\times\frac{\sqrt{3}}{2})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\times0+\frac{1}{3}e^0\\ \quad=-\frac{1}{2}C_1+C_2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}C_1+\frac{1}{3}=1\\ -\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}=0\end{cases},$$

于是得到惟一的一组解：$C_1=\frac{2}{3},C_2=0.$ 从而得到满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 及初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的解，只有一个，为

$$y=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$$

另一方面，由(1)已知 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 也是微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 及初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的解，由微分方程解的唯一性，知

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x(-\infty<x<+\infty).$$

八【详解】(1)根据方向导数和梯度的定义，知方向导数的最大值是梯度的模长，

$$gradh(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=\left\{\frac{\partial h}{\partial x}|_{(y_0,x_0)},\frac{\partial h}{\partial y}|_{(y_0,x_0)}\right\}=\{y_0-2x_0,x_0-2y_0\}.$$

$$\max\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{(x_0,y_0)}=\left|gradh(x,y)\right|_{(x_0,y_0)}=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$$
$$=\sqrt{5{x_0}^2+5{y_0}^2-8x_0y_0}\ \underline{\underline{\text{记}}}\ g(x_0,y_0).$$

(2) 命 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，求 f 在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点. 为此，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$$

则

$$F_x'=10x-8y+\lambda(y-2x)\ \underline{\underline{\text{令}}}\ 0,$$
$$F_y'=10y-8x+\lambda(x-2y)\ \underline{\underline{\text{令}}}\ 0,$$
$$F_\lambda'=75-x^2-y^2+xy\ \underline{\underline{\text{令}}}\ 0.$$

由第 1、第 2 两式相加可得 $(x+y)(2-\lambda)=0$. 从而得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$，再分别讨论之.

若 $\lambda=2$，则解得 $(x,y)_1=(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$ 或 $(x,y)_2=(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$

若 $y=-x$，则解得 $(x,y)_3=(5,-5)$ 或 $(x,y)_4=(-5,5)$

于是得到如上 4 个可能极值点. 将 $(x,y)_i$ 记为 $M_i(i=1,2,3,4)$. 由于

$$f(M_1)=f(M_2)=150,f(M_3)=f(M_4)=450$$

故点 $M_3=(5,-5)$，$M_4=(-5,5)$ 可作为攀登起点.

九【详解】方法 1：记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，及 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$，

即 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，及 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，知

$$r[A\vdots\beta]=r[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta]=r[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=r(A)=r[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=3$$

系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等，故 $Ax=\beta$ 有解.

对应齐次方程组 $Ax=0$，其系数矩阵的秩为 3，故其基础解系中含有 4-3(未知量的个数-系数矩阵的秩)个线性无关的解向量，故其通解可以写成 $k\xi$，η^* 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，根据非齐次线性方程组的解的结构定理，知 $Ax=\beta$ 的通解为 $k\xi+\eta^*$，其中 $k\xi$ 是对应齐次方程组 $Ax=0$ 的通解，η^* 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，因

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0\alpha_4, \text{故} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 - 0\alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} = 0,$$

故$\xi = [1,-2,1,0]^T$是$Ax=0$的一个非零解向量，因为$Ax=0$的基础解系中只含有一个解向量，故$\xi = [1,-2,1,0]^T$是$Ax=0$的基础解系.

又

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \text{ 即 } A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \beta$$

故$\eta^* = [1,1,1,1]^T$是$Ax=\beta$的一个特解，根据非齐次线性方程组的解的结构定理，方程组的通解为$k[1,-2,1,0]^T + [1,1,1,1]^T$.(其中$k$是任意常数)

方法 2：令$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$，则线性非齐次方程为

$$Ax = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \beta$$

已知$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$，故

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

将$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$代入上式，得

$$(2\alpha_2 - \alpha_3)x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = (2\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow 2\alpha_2 x_1 - \alpha_3 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3\alpha_2 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow (2x_1 + x_2)\alpha_2 - \alpha_3 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 - 3\alpha_2 - \alpha_4 = 0$$

$$\Rightarrow (2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0$$

由已知$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，根据线性无关的定义，不存在不全为零的常数使得$k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$，上式成立当且仅当

$$\begin{cases}2x_1+x_2=3\\-x_1+x_3=0\\x_4-1=0\end{cases}$$

其系数矩阵为$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，因为3阶子式$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，其秩为3，故其齐次线性方程组的基础解系中存在1个(4-3)线性无关的解向量，取自由未知量$x_3=k$，则方程组有解

$$x_4=1,x_3=k,x_1=x_3=k,x_2=-2k+3$$

故方程组$Ax=\beta$有通解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\-2k+3\\k\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\3\\0\\1\end{bmatrix}.(\text{其中}k\text{是任意常数})$$

十【**详解**】(1) 因$A\sim B$，由定义知，存在可逆阵P，使得$P^{-1}AP=B$，故

$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=|\lambda E-P^{-1}AP|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|\\&=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|\end{aligned}$$

故A,B有相同的特征多项式.

(2) 取$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2,|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2$，则有$|\lambda E-A|=\lambda^2=|\lambda E-B|,A,B$有相同的特征多项式，但$A$不相似于$B$，因为对任何的2阶可逆阵$P$，均有$P^{-1}AP=P^{-1}OP=O\neq B$，故(1)的逆命题不成立.

(3) 即要证如果A,B的特征多项式相等，则A,B相似.

当A,B都是实对称矩阵时，A,B均能相似于对角阵，且该对角阵的对角线元素由A,B的特征值组成. 若A,B有相同的特征多项式，则A,B有相同的特征值(包含重数)，故A,B将相似于同一个对角阵. 设特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, B \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

由相似的传递性，知 $A \sim B$. (1)的逆命题成立.

十一【答案】5.

【详解】如果将观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 这事件理解为试验成功的话，则 Y 表示对 X 独立地重复试验 4 次中成功的次数.即是 $Y \sim B(4,p)$ ，其中 $p = P\left\{X > \pi/3\right\}$

由一维概率计算公式，$P\left\{a \le X \le b\right\} = \int_a^b f_X(x)dx$ ，有

$$p = P\left\{X > \frac{\pi}{3}\right\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2},$$

所以，$Y \sim B(4,\frac{1}{2})$.

由公式 $D(Y) = [E(Y)]^2 - E(Y^2)$ 以及若 $Y \sim B(n,p)$ ，其数学期望和方差分别为

$$E(Y) = np; D(Y) = npq\text{，其中 } q = 1-p.$$

得 $$E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2 = npq + (np)^2 = 4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + (4\times\frac{1}{2})^2 = 5.$$

十二【分析】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩，此题中被估参数只有一个，故只需要用样本一阶原点矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望)

最大似然估计，实质上就是找出使似然函数最大的那个参数，问题的关键在于构造似然函数.

【详解】矩估计：由离散型随机变量期望的定义 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$，有：

$$E(X) = 0\times\theta^2 + 1\times 2\theta(1-\theta) + 2\times\theta^2 + 3\times(1-2\theta) = 3 - 4\theta$$

样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$

用样本均值估计期望有 $EX = \overline{X}$ ，即 $3 - 4\theta = 2$. 解得的矩估计值为 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$.

由离散型随机变量似然函数的定义：设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的一组观测值，则似然函数为：

$$L(\theta)=P(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i;\theta)$$

由于样本值中 0 出现一次，故用 0 的对应概率 θ^2 一次. 样本值中数值 1 出现二次，故用两个 $2\theta(1-\theta)$ 相乘，数值 2 出现一次，故用 2 的对应概率 θ^2 一次，数值 3 出现四次，故用 $(1-2\theta)^4$.

总之，对于给定的样本值的似然函数为：

$$L(\theta)=\theta^2\cdot\left[2\theta(1-\theta)\right]^2\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

$L(\theta)>0$，等式两边同取自然对数得

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$\ln L(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 在 θ 的同一点取得最大值，所以

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，解得 $\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$, 因 $\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$ 与题目中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 矛盾，不合题意，所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.