2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y \ =x-1$

【详解】**方法 1**：因为直线 $x \ +y \ =1$ 的斜率 $k_1 \ - =1$，所以与其垂直的直线的斜率 k_2 满足

$k_1k_2=-1$，所以 $-k_2=-1$，即 $k_2=1$，

曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程的斜率为 1，即 $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=1$，得 $x=1$，把 $x=1$ 代入 $y=\ln x$，得切点坐标为 $(1,0)$，根据点斜式公式得所求切线方程为：$y-0=1\cdot(x-1)$，即 $y=x-1$

方法 2：本题也可先设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，曲线 $y=\ln x$ 过此切点的导数为 $y'\Big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}=1$，

得 $x_0=1$，所以切点为 $(x_0,\ln x_0)=\left(1,0\right)$，由此可知所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$，

即 $y=x-1$.

(2)【**答案**】 $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

【详解】 先求出 $f'(x)$ 的表达式，再积分即可.

方法 1：令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，$e^{-x}=\dfrac{1}{t}$，于是有 $f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，即 $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

两边积分得 $\quad f(x)=\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln xd\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$.

利用初始条件 $f(1)=0$，代入上式：$f(1)=\dfrac{1}{2}(\ln 1)^2+C=C=0$，即 $C=0$，故所求函数为 $f(x)=\ \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

方法 2：由 $x=\ln e^x$，所以 $f'(e^x)=xe^{-x}=\ln e^x\cdot e^{-x}=\dfrac{\ln e^x}{e^x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.下同.

(3)【答案】 $\dfrac{3}{2}\pi$

【详解】 利用极坐标将曲线用参数方程表示，相应曲线积分可化为定积分.

L为正向圆周$x^2+y^2=2$在第一象限中的部分，用参数式可表示为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta: 0 \to \frac{\pi}{2}.$$

于是 $$\int_L xdy-2ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{2}\cos\theta d\sqrt{2}\sin\theta-2\sqrt{2}\sin\theta d\sqrt{2}\cos\theta\right]$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\cos^2\theta+4\sin^2\theta]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+2\sin^2\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2+2\sin^2\theta]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta d\theta=2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos2\theta\right)d\theta$$

$$=\pi+\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta d2\theta=\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin0\right)=\frac{3\pi}{2}-0=\frac{3\pi}{2}$$

(4)【答案】 $y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}$

【详解】欧拉方程的求解有固定方法，作变量代换$x=e^t$化为常系数线性齐次微分方程即可.

令$x=e^t$，有$t=\ln x, \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)\xlongequal{d\left(uv\right)=vdu+udv}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

代入原方程：$x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)+4x\cdot\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}+2y=0$，整理得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0,$$

此式为二阶齐次线性微分方程，对应的特征方程为$r^2+3r+2=0$，所以特征根为：

$r_1=-1, r_2=-2$ ，$r_1\neq r_2$，所以$\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$的通解为

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$$

又因为$x=e^t$，所以$e^{-t}=\dfrac{1}{x},e^{-2t}=\dfrac{1}{x^2}$，代入上式得

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}.$$

(5)【答案】$\dfrac{1}{9}$

【详解】

方法 1：已知等式两边同时右乘A，得$ABA^*A=2BA^*A+A$，

由伴随矩阵的运算规律：$A^*A=AA^*=|A|E$，有$AB|A|=2B|A|+A$，而

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-1\times1=3，$$

于是有 $3AB=6B+A$，移项、合并有 $(3A-6E)B=A$，再两边取行列式，由方阵乘积的行列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，有

$$|(3A-6E)B|=|3A-6E||B|=|A|=3，$$

而 $$|3A-6E|=\left|3\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}6&3&0\\3&6&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}(-3)\begin{vmatrix}0&3\\3&0\end{vmatrix}=(-3)\times3\times3=27，$$

故所求行列式为$|B|=\dfrac{|A|}{|3A-6E|}=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

方法 2：由题设条件$ABA^*=2BA^*+E$，得 $ABA^*-2BA^*=(A-2E)BA^*=E$

由方阵乘积行的列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，故两边取行列式，有 $|(A-2E)BA^*|=|A-2E||B||A^*|=|E|=1$

其中$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-1\times1=3；$$

由伴随矩阵行列式的公式：若A是n阶矩阵，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

所以，$\left|A^*\right| = |A|^{3-1} = |A|^2 = 9$ ； 又 $|A-2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

故 $|B| = \dfrac{1}{|A-2E|\left|A^*\right|} = \dfrac{1}{9}$.

(6)【答案】 $\dfrac{1}{e}$

【详解】本题应记住常见指数分布等的期望与方差的数字特征，而不应在考试时再去推算. 指数分布的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 若 x > 0 \\ 0 & 若 x \le 0 \end{cases}，其方差 DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

于是，由一维概率计算公式，$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f_X(x)dx$，有

$$P\{X > \sqrt{DX}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

二、选择题

(7)【答案】 (B)

【详解】

方法 1：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^x \cos t^2 dt} \xlongequal{洛必达} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x\cdot 2x}{\cos x^2} = 0$，则 β 是 α 的高阶无穷小，

根据题设，排在后面的是前一个的高阶无穷小，所以可排除(C),(D)选项，

$$又 \lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\beta} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt} \xlongequal{洛必达} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x\tan x}$$

$$\xlongequal{等价无穷小替换} \frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2} = \infty,$$

可见 γ 是比 β 低阶的无穷小量，故应选(B).

方法 2：用 x^k (当 $x\to 0$ 时)去比较.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha}{x^k} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} \xlongequal{洛} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为0，应取$k=1$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos t^2}{x^0}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+}\cos t^2}{\lim\limits_{x\to 0^+}x^0}=1$，

所以(当$x\to 0^+$时)α与x同阶.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{x^k}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{kx^{k-3}}$$

欲使上式极限存在但不为0，应取$k=3$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\beta}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\tan x}{3x^{3-2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\tan x}{3x}=\dfrac{2}{3}$，

所以(当$x\to 0^+$时)β与x^3同阶.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{x^k}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为0，应取$k=2$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2\cdot 2x^{2-1}}=\dfrac{1}{4}$，

所以(当$x\to 0^+$时)γ与x^2同阶.因此，后面一个是前面一个的高阶小的次序是α,γ,β，选(B).

(8)【答案】 (C)

【详解】函数$f(x)$只在一点的导数大于零，一般不能推导出单调性，因此可排除(A),(B).

由导数的定义，知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$

根据极限的保号性，知存在$\delta>0$，当$x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$时，有$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$.

即当$x\in(-\delta,0)$时，$x<0$，有$f(x)<f(0)$；而当$x\in(0,\delta)$时，$x>0$有$f(x)>f(0)$.

(9)【答案】 (B)

【详解】 对于敛散性的判定问题，若不便直接推证，往往可通过反例排除找到正确选项.

方法1：排除法. 取$a_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}\begin{cases}\text{收敛，当}p>1\\ \text{发散，当}p\le 1\end{cases}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$发散，排除A，D；

又取$a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，因为p级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛，当}p>1\\ \text{发散，当}p\le 1\end{cases}$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$收

敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$，排除(C)，故应选(B).

方法 2：证明(B)正确. $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda \neq 0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$.因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，

由比较判别法的极限形式知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散，故应选(B)..

(10)【答案】(B)

【详解】在应用变限的积分对变量 x 求导时，应注意被积函数中不能含有变量 x:

$$[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt]' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

否则，应先通过恒等变形、变量代换和交换积分次序等将被积函数中的变量 x 换到积分号外或积分线上.

方法 1：交换积分次序,使得只有外面这道积分限中才有 t，其他地方不出现 t

由 $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$ 知：$\begin{cases} y < x < t \\ 1 < y < t \end{cases}$，交换积分次序 $\begin{cases} 1 < x < t \\ 1 < y < x \end{cases}$，得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx = \int_1^t [\int_1^x f(x)dy]dx = \int_1^t f(x)(x-1)dx$$

于是，$F'(t) = f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2) = f(2)$，故应选(B).

方法 2：设 $\Phi'(x) = f(x)$，于是

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx = \int_1^t dy \int_y^t \Phi'(x)dx = \int_1^t dy \int_y^t d\Phi(x)$$

$$= \int_1^t [\Phi(t) - \Phi(y)]dy = \Phi(t)(t-1) - \int_1^t \Phi(y)dy$$

所以 $F'(t) = \Phi'(t)(t-1) + \Phi(t) - \Phi(t) = f(t)(t-1),$

所以 $F'(2) = f(2)$，选(B).

(11)【答案】(D)

【详解】由题设，将 A 的第 1 列与第 2 列交换，即

$$AE_{12} = A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B,$$

将 B 的第 2 列加到第 3 列，即

$$B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=AQ.$$

故$Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，应选(D).

(12)【答案】(A)

【详解】**方法 1：**由矩阵秩的重要公式：若 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，如果 $AB=0$，

则 $r(A)+r(B)\le n$

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，由 $AB=0$ 知，$r(A)+r(B)\le n$，其中 n 是矩阵 A 的列数，也是 B 的行数

因 A 为非零矩阵，故 $r(A)\ge 1$，因 $r(A)+r(B)\le n$，从而 $r(B)\le n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 B 的行向量组线性相关.

因 B 为非零矩阵，故 $r(B)\ge 1$，因 $r(A)+r(B)\le n$，从而 $r(A)\le n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 A 的列向量组线性相关.

故应选(A).

方法 2：设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，将 B 按列分块，由 $AB=0$ 得，

$$AB=A\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right]=0, A\beta_i=0, i=1,2,\cdots,s.$$

因 B 是非零矩阵，故存在 $\beta_i\ne 0$，使得 $A\beta_i=0$. 即齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件 $r(A)<n$，知 $r(A)<n$. 所以 A 的列向量组线性相关.

又 $(AB)^T=B^TA^T=0$，将 A^T 按列分块，得

$$B^TA^T=B^T[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T]=0, B^T\alpha_i^T=0, i=1,2,\cdots,m.$$

因 A 是非零矩阵，故存在 $\alpha_i^T\ne 0$，使得 $B^T\alpha_i^T=0$，即齐次线性方程组 $Bx=0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Bx=0$ 有非零解的充要条件，知 B^T 的列向量组线性相关，

由 B^T 是由 B 行列互换得到的，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

方法 3：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$，将 A 按列分块，记 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_n\end{pmatrix}$

由 $AB=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$

$$=\left(b_{11}A_1+\cdots+b_{n1}A_n, \quad \cdots \quad ,b_{1s}A_1+\cdots+b_{ns}A_n\right)=0 \qquad (1)$$

由于 $B \neq 0$，所以至少有一个 $b_{ij} \neq 0$（$1 \le i \le n, 1 \le j \le s$），又由(1)知，$b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+b_{ij}A_i+\cdots+b_{nj}A_n=0$，所以 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 线性相关. 即 A 的列向量组线性相关.

(向量组线性相关的定义：如果对 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in R^n$，有 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m \in R$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_m\alpha_m=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.)

又将 B 按行分块，记 $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$，同样，

$$AB=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1n}B_n \\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2n}B_n \\ \cdots \\ a_{m1}B_1+a_{m2}B_2+\cdots+a_{mn}B_n \end{pmatrix}=0$$

由于 $A \neq 0$,则至少存在一个 $a_{ij} \neq 0$ ($1 \le i \le m, 1 \le j \le n$), 使

$$a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+a_{ij}B_j+\cdots+a_{in}B_n=0,$$

由向量组线性相关的定义知，$B_1, B_2, \cdots, B_m$ 线性相关, 即 B 的行向量组线性相关，

故应选(A).

方法 4： 用排除法.取满足题设条件的 A, B .

取 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$，有 $AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=0,$

A 的行向量组，列向量组均线性相关，但 B 的列向量组线性无关，故(B)，(D)不成立.

又取 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq 0, B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\neq 0$，有 $AB=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$，

A 的行向量组线性无关，B 的列向量组线性相关，故(C)不成立.

由排除法知应选(A).

(13)【答案】C

【详解】利用正态分布概率密度函数图形的对称性，对任何 $x>0$ 有

$P\left\{X>x\right\}=P\left\{X<-x\right\}=\dfrac{1}{2}P\left\{\left|X\right|>x\right\}$.或直接利用图形求解.

方法 1：由标准正态分布概率密度函数的对称性知，$P\{X<-u_{\alpha}\}=\alpha$，于是

$$1-\alpha=1-P\{|X|<x\}=P\{|X|\geq x\}=P\{X\geq x\}+P\{X\leq -x\}=2P\{X\geq x\}$$

即有　$P\{X\geq x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$，可见根据分位点的定义有 $x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$，故应选(C).

方法 2：

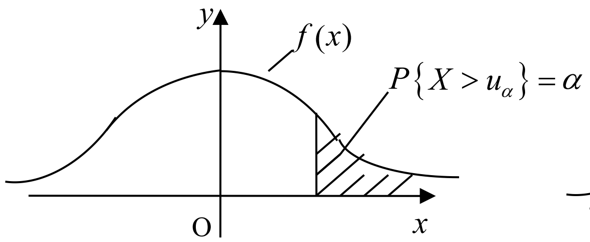

图 1

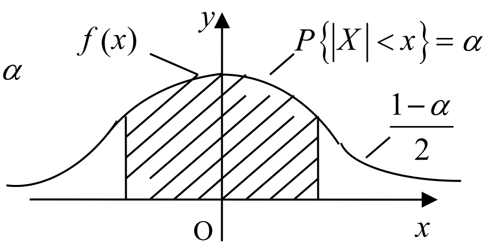

图 2

如图 1 所示题设条件. 图 2 显示中间阴影部分面积 α，$P\{|X|<x\}=\alpha$.两端各余面积

$\dfrac{1-\alpha}{2}$，所以 $P\{X<u_{\frac{1-\alpha}{2}}\}=\alpha$，答案应选(C).

(14)【答案】A.

【详解】由于随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，所以必有：

$$Cov(X_i,X_j)=\begin{cases}\sigma^2, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

又　$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

下面求$Cov(X_1,Y)$和$D(X_1+Y)$.

而$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 故本题的关键是将$Y$中的$X_1$分离出来，再用独立性来计算.

对于选项(A)：

$$Cov(X_1,Y)=Cov(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}Cov(X_1,X_1)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}Cov(X_1,X_i)=\frac{1}{n}DX_1=\frac{1}{n}\sigma^2$$

所以(A)对，(B)不对.为了熟悉这类问题的快速、正确计算. 可以看本题(C),(D)选项.

因为X与Y独立时，有$D(X\pm Y)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)$. 所以，这两个选项的方差也可直接计算得到：

$$D(X_1+Y)=D(\frac{1+n}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n)=\frac{(1+n)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2$$

$$=\frac{n^2+3n}{n^2}\sigma^2=\frac{n+3}{n}\sigma^2,$$

$$D(X_1-Y)=D(\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n)=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2$$

$$=\frac{n^2-2n}{n^2}\sigma^2=\frac{n-2}{n}\sigma^2.$$

所以本题选 (A)

三、解答题

(15)【详解】根据要证不等式的形式，可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明.

方法 1：因为函数$f\left(x\right)=\ln^2 x$在$[a,b]\subset\left(e,e^2\right)$上连续，且在$\left(a,b\right)$内可导，所以满足拉格朗日中值定理的条件，

对函数$f\left(x\right)=\ln^2 x$在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\left(\ln^2\xi\right)'\left(b-a\right)=\frac{2\ln\xi}{\xi}\left(b-a\right),\ e<a<\xi<b<e^2$$

下证：$\frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$.

设$\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$，则$\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，当$t>e$时，$1-\ln t<1-\ln e=0$ ，即$\varphi'(t)<0$,

所以$\varphi(t)$单调减少，又因为$\xi<e^2$，所以$\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}，得 \frac{2\ln\xi}{\xi} > \frac{4}{e^2}$$

故 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

方法 2：利用单调性， 设$\varphi(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$，证$\varphi(x)$在区间$\left(e, e^2\right)$内严格单调增即可.

$$\varphi'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}，(\varphi'(e^2) = 2\frac{\ln e^2}{e^2} - \frac{4}{e^2} = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0，)\varphi''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}，$$

当$x > e$时，$1 - \ln x < 1 - \ln e = 0$，$\varphi''(x) < 0$，故$\varphi'(x)$单调减少，从而当$e < x < e^2$时，

$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = 0$，即当$e < x < e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

因此当$e < x < e^2$时，$\varphi(b) > \varphi(a)$，即$\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a$，

故 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

方法 3：设$\varphi(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x-a)$，则$\varphi'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}$，$\varphi''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}$，

$\Rightarrow x > e$时，$1 - \ln x < 1 - \ln e = 0$，得$\varphi''(x) < 0$，

$\Rightarrow \varphi'(x)$在(e, e^2)上单调减少，从而当$e < x < e^2$时，$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0$，

$\Rightarrow \varphi(x)$在(e, e^2)上单调增加. 从而当$e < a < x \le b < e^2$时，$\varphi(x) > \varphi(a) = 0$.

$\Rightarrow \varphi(b) > 0$，即$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

(16)【详解】 本题是标准的牛顿第二定理的应用，列出关系式后再解微分方程即可.

方法 1：由题设，飞机质量$m = 9000kg$，着陆时的水平速度$v_0 = 700km/h$. 从飞机接触跑道开始计时，设t时刻飞机的滑行距离为$x(t)$，速度为$v(t)$，则 $v(0) = v_0, x(0) = 0$.

根据牛顿第二定律，得$m\frac{dv}{dt} = -kv$. 又$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$.

由以上两式得 $dx = -\frac{m}{k}dv$，积分得 $x(t) = -\frac{m}{k}v + C.$

由于$v(0) = v_0, x(0) = 0$，所以$x(0) = -\frac{m}{k}v_0 + C = 0.$ 故得$C = \frac{m}{k}v_0$，

从而 $x(t) = \frac{m}{k}(v_0 - v(t)).$

当$v(t) \to 0$时， $x(t) \to \frac{mv_0}{k} = \frac{9000\times 700}{6.0\times 10^6} = 1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

方法 2： 根据牛顿第二定律，得 $m\dfrac{dv}{dt}=-kv$，

分离变量：$\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{k}{m}dt$，两端积分得：$\ln v=-\dfrac{k}{m}t+C_1$，

通解：$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件 $v\Big|_{t=0}=v_0$，解得 $C=v_0$，故 $v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$.

飞机在跑道上滑行得距离相当于滑行到 $v\to 0$，对应地 $t\to+\infty$. 于是由 $dx=vdt$，有

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=\int_0^{+\infty}v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(km).$$

或由 $v\left(t\right)=\dfrac{dx}{dt}=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$，知 $x(t)=\int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\dfrac{kv_0}{m}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$，故最长距离为

当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to\dfrac{kv_0}{m}=1.05(km)$.

方法 3： 由 $m\dfrac{dv}{dt}=-kv$，$v=\dfrac{dx}{dt}$，化为 x 对 t 的求导，得 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt}$，变形为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0，\quad v(0)=x'(0)=v_0,x(0)=0$$

其特征方程为 $\lambda^2+\dfrac{k}{m}\lambda=0$，解之得 $\lambda_1=0,\lambda_2=-\dfrac{k}{m}$，故 $x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$.

由 $x\big|_{t=0}=0,v\big|_{t=0}=\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-\dfrac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0}=v_0$，得 $C_1=-C_2=\dfrac{mv_0}{k}$，

于是 $x(t)=\dfrac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$. 当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\dfrac{mv_0}{k}=1.05(km)$.

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05 km .

(17)【详解】这是常规题，加、减曲面片高斯公式法，转换投影法，逐个投影法都可用.

方法 1： 加、减曲面片高斯公式. 取 $\sum_1$ 为 xoy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 $\sum$ 与 $\sum_1$ 围成的空间闭区域，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=I_1-I_2$$

由高斯公式：设空间闭区域Ω是由分段光滑的闭曲面$\sum$所围成，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

这里$P=2x^3,Q=2y^3,R=3(z^2-1)$，$\dfrac{\partial P}{\partial x}=6x^2,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=6y^2,\dfrac{\partial R}{\partial z}=6z^2$，

所以 $I_1=\iiint_{\Omega}6(x^2+y^2+z)dv$

利用柱面坐标：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，$0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,dv=rdrd\theta dz$，有：

$$I_1=\iiint_{\Omega}6(x^2+y^2+z)dxdydz=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)rdz$$

$$=12\pi\int_0^1 r\left(\frac{z^2}{2}+r^2z\right)_0^{1-r^2}dr=12\pi\int_0^1 r\frac{\left(1-r^2\right)^2}{2}+r^3\left(1-r^2\right)dr$$

$$=12\pi\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(1-r^2\right)^3}{3}+\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)_0^1=12\pi\cdot\frac{1}{6}=2\pi$$

记D为$\sum_1$在xoy平面上的投影域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，则$z=0$，$dz=0$，

又$\sum_1$为$z=0(x^2+y^2\le 1)$的下侧，从而：

$$I_2=\iint_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint_D 3(0-1)dxdy=3\iint_D dxdy=3\pi$$

(其中$\iint_D dxdy$为半径为 1 圆的面积，所以$\iint_D dxdy=\pi\cdot 1^1=\pi$)

故 $I=I_1-I_2=2\pi-3\pi=-\pi.$

方法 2：用转换投影法：若$z=z(x,y)$，z对x,y具有一阶连续偏导数，则

$$dzdx=-\frac{\partial z}{\partial x}dxdy,\ dydz=-\frac{\partial z}{\partial y}dxdy.$$

曲面$\sum_1: z=1-x^2-y^2,(x^2+y^2\le 1),\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$，由转换投影公式

$$I=\iint_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$
$$=\iint_{\Sigma}[2x^3(-\frac{\partial z}{\partial x})+2y^3(-\frac{\partial z}{\partial y})+3(z^2-1)]dxdy$$
$$=\iint_{D}[4x^4+4y^4+3(1-x^2-y^2)^2-3]dxdy$$

利用极坐标变换：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, $0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi, dxdy=rdrd\theta$，所以

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[4r^4\cos^4\theta+4r^4\sin^4\theta+3(1-r^2)^2-3]rdr$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[4r^5\cos^4\theta+4r^5\sin^4\theta+3(r^5-2r^3)]dr$$
$$=\int_0^{2\pi}(\frac{4}{6}\cos^4\theta+\frac{4}{6}\sin^4\theta+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{4}{6}\left[\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta\right]d\theta-\int_0^{2\pi}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{4}{6}\left[1-2\cos^2\theta\sin^2\theta\right]d\theta-2\pi$$
$$=\frac{4}{6}\int_0^{2\pi}d\theta-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2 2\theta d\theta-2\pi$$
$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4\theta\right)d\theta-2\pi$$
$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}-2\pi-\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\cos 4\theta d\theta=-\pi-\frac{1}{24}\sin 4\theta\Big|_0^{2\pi}$$
$$=-\pi-0=-\pi$$

或$\int_0^{2\pi}(\frac{4}{6}\cos^4\theta+\frac{4}{6}\sin^4\theta)d\theta$直接利用公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$及

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^4\theta d\theta$$

则 $\int_0^{2\pi}(\frac{4}{6}\cos^4\theta+\frac{4}{6}\sin^4\theta)d\theta=2\cdot 4\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$

所以，原式$=\pi-2\pi=-\pi$

(18)【分析】利用零点定理证明存在性，利用单调性证明惟一性. 而正项级数的敛散性可用比较法判定.

零点定理：设函数$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，且$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$，那么在开区间$\left(a,b\right)$内至少存在一点$\xi$，使$f\left(\xi\right)=0$；单调性：设函数$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，在$\left(a,b\right)$内可导，如果在$\left(a,b\right)$内$f'\left(x\right)>0$，那么函数$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上单调增加；比较审敛

法：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n$，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

【证明】记$f_n(x)=x^n+nx-1$，则$f_n(x)$是连续函数，由$f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n>0$，对照连续函数的零点定理知，方程$x^n+nx-1=0$存在正实数根$x_n \in (0,1)$. 当$x>0$时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，可见$f_n(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，故方程$x^n+nx-1=0$存在惟一正实数根x_n.

由$x^n+nx-1=0$与$x_n>0$知$0<x_n=\dfrac{1-x_n^n}{n}<\dfrac{1}{n}$，故当$\alpha>1$时，函数$y=x^{\alpha}$单调增，所以$0<x_n^{\alpha}<(\dfrac{1}{n})^{\alpha}$. 而正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$收敛，所以当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛.

(19) 【分析】根据极值点存在的充分条件：

设函数$z=f(x,y)$在点$\left(x_0,y_0\right)$的某领域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$，令$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则$z=f(x,y)$在$\left(x_0,y_0\right)$处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$时具有极值，且当$A<0$时有极大值，当$A>0$时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$时，可能有极值，也可能没有极值，需另外讨论.

所以对照极值点存在的充分性定理，先求出一阶偏导，再令其为零确定极值点，接下来求函数二阶偏导，确定是极大值还是极小值，并求出相应的极值.

求二元隐函数的极值与求二元显函数的极值的有关定理是一样，差异仅在于求驻点及极值的充分条件时，用到隐函数求偏导数.

【详解】因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，所以

两边对x求导：$2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，　　①

两边对y求导：$-6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.　　②

根据极值点存在的充分条件，令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x-3y=0\\ -3x+10y-z=0\end{cases}$，故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得 $\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$

对照极值点存在的充分条件，为判别两点是否为极值点，再①分别对 x,y 求偏导数，②分别对 x,y 求偏导数

①式对 x 求导： $2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，

②式对 x 求导：$-6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$

①式对 y 求导： $-6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$

②式对 y 求导： $20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，

将 $\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 代入，于是 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6}$， $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2}$，

$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$，故 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，又 $A=\dfrac{1}{6}>0$，从而点(9,3)是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，将 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 代入，于是 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\dfrac{1}{6}$，

$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-9,-3,-3)}=\dfrac{1}{2}$， $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\dfrac{5}{3}$，可知 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，

又 $A=-\dfrac{1}{6}<0$，从而点(-9, -3)是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

(20)【详解】

方法 1： 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{1\text{行}\times(-i)+i\text{行}}\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=B$$

对 $|B|$ 是否为零进行讨论：

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<n$，由齐次方程组有非零解的判别定理：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$. 故此方程组有非零解，把 $a=0$ 代入原方程组，得其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \qquad (*)$$

此时，$r(A)=1$，故方程组有 $n-r=n-1$ 个自由未知量. 选 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量，将他们的 $n-1$ 组值 $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$ 分别代入 (*) 式，得基础解系

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\ \ \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B\rightarrow\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,3\cdots n)]{i\times(-1)+1\text{行}}\begin{bmatrix}a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

可知 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A)=n-1<n$，由齐次方程组有非零解的判别定理, 知方程组也有非零解，把 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 代入原方程组，其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0,\end{cases}$$

此时，$r(A)=n-1$，故方程组有 $n-r=n-(n-1)=1$ 个自由未知量.选 x_2 为自由未量，取 $x_2=1$，由此得基础解系为 $\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为 $x=k\eta$，

其中 k 为任意常数.

方法 2：计算方程组的系数行列式：

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\xlongequal{\text{矩阵加法}}\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}$$

$$=aE+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\triangleq aE+Q,$$

下面求矩阵 Q 的特征值：

$$|\lambda E-Q|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -2 & \lambda-2 & -2 & \cdots & -2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & -n & -n & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{1\text{行}\times(-i)+i\text{行}}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n\lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{i\text{列}\times(i)+1\text{列}}\begin{vmatrix}\lambda-\dfrac{n(n+1)}{2} & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

则 Q 的特征值 $0,\cdots,0,\dfrac{n(n+1)}{2}$，由性质：若 $Ax=\lambda x$，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^m x=\lambda^m x$，因此对任意多项式 $f(x)$， $f(A)x=f(\lambda)x$，即 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

故，A 的特征值为 $a,a,\cdots,a+\dfrac{n(n+1)}{2}$，由特征值的乘积等于矩阵行列式的值，得 A 行列式 $|A|=(a+\dfrac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$.

由齐次方程组有非零解的判别定理：设 A 是 n 阶矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$. 可知，当 $|A|=0$，即 $a=0$ 或 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{1\text{行}\times(-i)+i\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, .$$

故方程组的同解方程组为

$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$

此时，$r(A)=1$，故方程组有$n-r=n-1$个自由未知量.选$x_2,x_3,\cdots,x_n$为自由未知量，将他们的$n-1$组值$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$分别代入(*)式， 由此得基础解系为

$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T$， $\eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T$,

于是方程组的通解为

$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中$k_1,\cdots,k_{n-1}$为任意常数.

当$a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$时，

$$B\to\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,3\cdots n)]{i\times(-1)+1行}\begin{bmatrix}a+\dfrac{n(n+1)}{2}&0&0&\cdots&0\\-2&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix},$$

即 $\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\-2&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$，其同解方程组为$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\-3x_1+x_3=0,\\\quad\cdots\cdots\cdots\\-nx_1+x_n=0,\end{cases}$

此时，$r(A)=n-1$，故方程组有$n-r=n-(n-1)=1$个自由未知量. 选x_2为自由未量，取$x_2=1$，由此得基础解系为$\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为$x=k\eta$，其中k为任意常数.

(21)【详解】A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}\underline{\underline{2行\times(-1)+1行}}\begin{vmatrix}\lambda-2&-(\lambda-2)&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{提出1行公因数}}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}\underline{\underline{1行\times(-1)+2行}}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda-3&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{1行+2行}}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda-3&3\\0&-a-1&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&3\\-a-1&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-5)+3(a+1)]=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

已知 A 有一个二重特征值，有两种情况，(1) $\lambda=2$ 就是二重特征值，(2)若 $\lambda=2$ 不是二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 是一个完全平方

(1) 若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$, 解得 $a=-2$. 由

$$\left|\lambda E-A\right|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3\times(-2))=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$$

求得 A 的特征值为 2,2,6, 由

$$2E-A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{1行的1倍加到3行}]{\text{1行(-1)倍加到2行,}}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

知秩 $\left(2E-A\right)=1$，故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量的个数为 $n-r=3-1=2$，等于 $\lambda=2$ 的重数. 由矩阵与对角矩阵相似的充要条件：对矩阵的每个特征值，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 从而 A 可相似对角化.

(2) 若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$. 当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，由

$$\left|\lambda E-A\right|==(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3\times(-\frac{2}{3}))=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+16)=(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0$$

知 A 的特征值为 2，4，4，由

$$4E-A=\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{1行}\times\frac{1}{3}+\text{3行}}\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知秩 $\left(4E-A\right)=2$，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量有 $n-r=3-2=1$, 不等于 $\lambda=4$ 的重数，则由矩阵与对角矩阵相似的充要条件：对矩阵的每个特征值，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 知 A 不可相似对角化.

(22)【分析】本题尽管难度不大，但考察的知识点很多，综合性较强. 通过随机事件定义随机变量或通过随机变量定义随机事件，可以比较好地将概率论的知识前后连贯起来，这种命题方式值得注意.

先确定 (X,Y) 的可能取值，再求在每一个可能取值点上的概率，而这可利用随机事件的运算性质得到，即得二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；利用联合概率分布可求出边缘概率分布，进而可计算出相关系数.

【详解】(I) 由于 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{12}$，所以 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{1}{6}$,

利用条件概率公式和事件间简单的运算关系，有

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$$

(或 $P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$)，故 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(II) X,Y 的概率分布分别为

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

所以 X,Y 的概率分布为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

由 $0-1$ 分布的数学期望和方差公式，则

$$EX=\frac{1}{4},EY=\frac{1}{6},\quad DX=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16},\quad DY=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36},$$

$$E(XY)=0\cdot P\left\{XY=0\right\}+1\cdot P\left\{XY=1\right\}=P\left\{X=1,Y=1\right\}=\frac{1}{12},$$

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{24}$，从而

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

(23)【分析】本题是基础题型，难度不大，但计算量比较大，实际做题时应特别注意计算的

准确性.先由分布函数求出概率密度，再根据求矩估计量和最大似然估计量的标准方法进行讨论即可. 似然函数的定义：$L(\theta)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$

【详解】X 的概率密度为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1.\end{cases}$$

(I) 矩估计. 由数学期望的定义：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，

令 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，所以参数 β 的矩估计量为

$$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}. \qquad \text{其中 } \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(II) 最大似然估计. 设 $x_1,x_2,...,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的一组观测值，则似然函数为：

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\beta)>0$，$L(\beta)$ 与 $\ln L(\beta)$ 在相同的 β 点取得最大值；

所以等式两边取自然对数，得 $\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

两边对 β 求导，得 $\dfrac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

令 $\dfrac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=0$，可得 $\beta=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

解得 β 的最大似然估计值为：$\widehat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$