# 2006年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

**一、填空题**

(1)【答案】2.

【详解】由等价无穷小替换，$x \to 0$ 时，$\ln(1+x) \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

(2)【答案】$Cxe^{-x}$.

【详解】分离变量，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{(1-x)}{x}dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = (\frac{1}{x}-1)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{1}{x}dx - \int dx$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x - x + c \Rightarrow e^{\ln y} = e^{\ln x - x + c} \Rightarrow y = Cxe^{-x}$$

(3)【答案】$2\pi$

【详解】补一个曲面 $\Sigma_1 : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z=1 \end{cases}$,取上侧，则 $\Sigma_1+\Sigma$ 组成的封闭立体 $\Omega$ 满足高斯公式，

$$\iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv = \oiint_{\Sigma_1+\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = I$$

设 $P = x, Q = 2y, R = 3(z-1)$，则 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 1+2+3 = 6$

$\therefore I = \iiint_\Omega 6dxdydz$ ($\Omega$ 为锥面 $\Sigma$ 和平面 $\Sigma_1$ 所围区域) $= 6V$ ($V$ 为上述圆锥体体积)

**注**：以下几种解法针对于不同的方法求圆锥体体积 $V$

**方法 1**：$I = 6\times\frac{\pi}{3} = 2\pi$ (高中方法，圆锥的体积公式，这种方法最简便)

而 $\iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 0$ ($\because$ 在 $\Sigma_1$ 上：$z=1, dz=0$)

**方法 2**：先二重积分，后定积分.

因为 $V = \int_0^1 Sdz$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$r^2 = x^2+y^2$，$r^2 = z^2$，$S = \pi r^2 = \pi z^2$，

所以 $V = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{1}{3}\pi z^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\pi$ .从而 $I = 6V = 6\times\frac{\pi}{3} = 2\pi$

**方法 3**：利用球面坐标．$z=1$在球坐标下为：$\rho=\dfrac{1}{\cos\theta}$，

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}6\rho^2\sin\varphi d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\varphi}{\cos^3\varphi}d\varphi$$

$$=(-2)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos\varphi}{\cos^3\varphi}=(-2)\int_0^{2\pi}d\theta(-\frac{1}{2})\cos^{-2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

**方法 4**：利用柱面坐标 ．

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_r^1 6rdz=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r)rdr$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3)\Big|_0^1=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

(4)【答案】$\sqrt{2}$

【详解】代入点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|6+4+0|}{\sqrt{9+16+25}}=\sqrt{2}$$

(5)【答案】 2

【详解】由已知条件 $BA=B+2E$ 变形得，$BA-2E=B\Rightarrow B(A-E)=2E$，两边取行列式, 得

$$|B(A-E)|=|2E|=4|E|=4$$

其中，$|A-E|=\left|\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，$|2E|=2^2|\mathrm{E}|=4$

因此，$|B|=\dfrac{|2E|}{|A-E|}=\dfrac{4}{2}=2$.

(6)【答案】1/9

【详解】根据独立性原理：若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 独立，则

$$P\{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\}=P\{A_1\}P\{A_2\}\cdots P\{A_n\}$$

事件$\{\max\{X,Y\}\le 1\}=\{X\le 1,Y\le 1\}=\{X\le 1\}\bigcap\{Y\le 1\}$，而随机变量$X$与$Y$均服从区间$[0,3]$上的均匀分布，有$P\{X\le 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}$和$P\{Y\le 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}dy=\frac{1}{3}$. 又随机变量$X$与$Y$相互独立，所以，

$$P\{\max(x,y)\le 1\}=P\{x\le 1,Y\le 1\}=P\{x\le 1\}\cdot P\{Y\le 1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

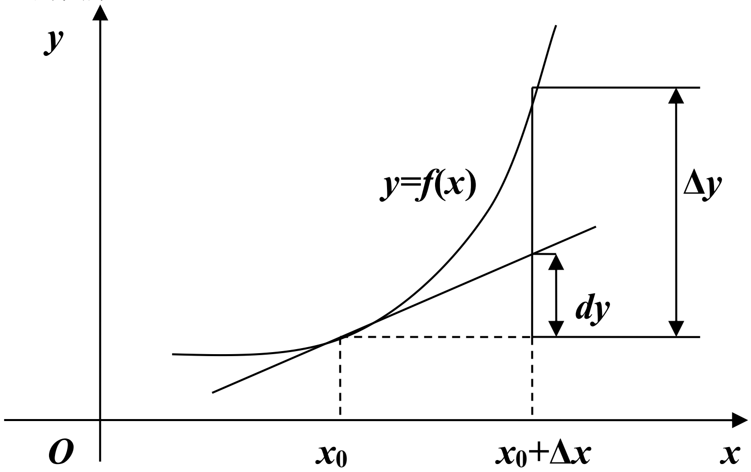
**二、选择题.**

(7)【答案】$A$

【详解】

**方法1**： 图示法.

因为$f'(x)>0,$ 则$f(x)$严格单调增加；因为$f''(x)>0,$ 则$f(x)$是凹函数，又$\Delta x>0$，画$f(x)=x^2$的图形




结合图形分析，就可以明显得出结论：$0<dy<\Delta y$.

**方法2**：用两次拉格朗日中值定理

$$\Delta y-dy=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x \text{ (前两项用拉氏定理)}$$

$$=f'(\xi)\Delta x-f'(x_0)\Delta x \qquad \text{(再用一次拉氏定理)}$$

$$=f''(\eta)(\xi-x_0)\Delta x,\qquad \text{其中 } x_0<\xi<x_0+\Delta x, x_0<\eta<\xi$$

由于$f''(x)>0$，从而$\Delta y-dy>0$. 又由于$dy=f'(x_0)\Delta x>0$，故选$[A]$

**方法3**： 用拉格朗日余项一阶泰勒公式. 泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n,$$

其中$R_n=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^n$. 此时$n$取1代入，可得

$$\Delta y-dy=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2>0$$

又由$dy=f'(x_0)\Delta x>0$，选$(A)$ .

(8)【答案】$(C)$

【详解】记 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则区域 $D$ 的极坐标表示是：$0 \le r \le 1$，$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. 题目考察极坐标和直角坐标的互化问题，画出积分区间，结合图形可以看出，直角坐标的积分范围(注意 $y=x$ 与 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的交点是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$)，于是 $D: 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}, y \le x \le \sqrt{1-y^2}$

所以，原式 $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$. 因此选 $(C)$

(9)【答案】$D$

【详解】

**方法 1**：数列收敛的性质：收敛数列的四则运算后形成的新数列依然收敛

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 也收敛.选 D.

**方法 2**：记 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$，($p$ 级数，$p = \frac{1}{2}$ 级数发散)；$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$ ($p$ 级数，$p=1$ 级数发散)均发散。由排除法可知，应选 D.

(10)【答案】$D$

【详解】

**方法 1**：化条件极值问题为一元函数极值问题。

已知 $\varphi(x_0, y_0) = 0$，由 $\varphi(x,y) = 0$，在 $(x_0, y_0)$ 邻域，可确定隐函数 $y = y(x)$，满足 $y(x_0) = y_0$，$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \varphi}{\partial y}$。

$(x_0, y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的一个极值点 $\Leftrightarrow x = x_0$ 是 $z = f(x, y(x))$ 的极值点。它的必要条件是

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.f'_x(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}\right|_{x=x_0} = 0$$

若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$，则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$，或 $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0$，因此不选 $(A)$，$(B)$.

若 $f'_x(x_0, y_0) \ne 0$，则 $f'_y(x_0, y_0) \ne 0$ (否则 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} \ne 0$). 因此选 $(D)$

**方法 2**：用拉格朗日乘子法. 引入函数 $F(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$，有

$$\begin{cases} F_x' = f_x'(x,y) + \lambda\varphi_x'(x,y) = 0 & (1) \\ F_y' = f_y'(x,y) + \lambda\varphi_y'(x,y) = 0 & (2) \\ F_\lambda' = \varphi'(x,y) = 0 \end{cases}$$

因为 $\varphi_y'(x_0,y_0) \neq 0$，所以 $\lambda = -\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$，代入(1)得

$$f_x'(x_0,y_0) = -\frac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$$

若 $f_x'(x_0,y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0) \neq 0$，选 $(D)$

(11)【答案】A

【详解】

**方法 1**：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则由线性相关定义存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

为了得到 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 的形式，用 $A$ 左乘等式两边，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_sA\alpha_s = 0 \qquad ①$$

于是存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得①成立，所以 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

**方法 2**：如果用秩来解,则更加简单明了. 只要熟悉两个基本性质，它们是:

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) < s$；2. $r(AB) < r(B)$.

矩阵 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s) = A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，设 $B = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$， 则由

$r(AB) < r(B)$ 得 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) < s$ . 所以答案应该为( $A$ ).

(12) 【答案】$B$

【详解】用初等矩阵在乘法中的作用(矩阵左乘或右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等行变换或列变换)得出

将 $A$ 的第 2 行加到第 1 行得 $B$，即 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \underline{\underline{\text{记}}}\ PA$

将 $B$ 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 $C$，即 $C = B\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{\text{记}}}\ BQ$

因为$PQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$，故$Q=P^{-1}E=P^{-1}$.

从而$C=BQ=BP^{-1}=PAP^{-1}$ ,故选($B$).

(13)【答案】C

【详解】本题考条件概率的概念和概率的一般加法公式

根据条件概率的定义，当$P(B)>0$时，$P\left\{A\middle|B\right\}=\dfrac{P\left\{AB\right\}}{P\left\{B\right\}}=1$得$P\left\{AB\right\}=P\left\{B\right\}$

根据加法公式有$P\left\{A\bigcup B\right\}=P\left\{A\right\}+P\left\{B\right\}-P\left\{AB\right\}=P\left\{A\right\}$,故选(C)

(14) 【答案】A.

【详解】由于$X$与$Y$的分布不同，不能直接判断$P\{|X-\mu_1|<1\}$和$P\{|Y-\mu_2|<1\}$的大小与参数关系. 如果将其标准化后就可以方便地进行比较了。

随机变量标准化，有$\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$，且其概率密度函数是偶函数. 所以

$$P(\left|X-\mu_1\right|<1)=P(\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1})=2P\left\{0<\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}=2[\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-\Phi(0)]=2\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-1.$$

同理有，$P(\left|Y-\mu_2\right|<1)=2\Phi(\dfrac{1}{\sigma_2})-1$

因为$\Phi(x)$是单调递增函数，当$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$时，$2\Phi(\dfrac{1}{\sigma_1})-1>2\Phi(\dfrac{1}{\sigma_2})-1$，即$\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$，所以$\sigma_1<\sigma_2$，故选(A).

**三、解答题**

(15)【详解】积分区域对称于$x$轴，$\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}y$为$y$的奇函数，

从而知 $\displaystyle\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$

所以 $\displaystyle I=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy\overset{\text{极坐标}}{=\!=\!=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$

(16)【详解】(I) 由于$0<x<\pi$时，$0<\sin x<x$，于是$0<x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$ ,说明数列$\{x_n\}$单调减少且$x_n>0$. 由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.记为$A$.

递推公式两边取极限得$A=\sin A,\ \therefore A=0$

(II) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$，为“$1^\infty$”型.

因为离散型不能直接用洛必达法则，先考虑$\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}$

$$\lim_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln(\frac{\sin t}{t})}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot\frac{(t\cos t-\sin t)}{t^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-t\sin t-\cos t}{6t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

(17)【详解】用分解法转化为求$\dfrac{1}{1+ax}$的展开式，而这是已知的.

由于 $$\frac{1}{2+x-x^2}=\frac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\qquad(|x|<1)$$

因此 $$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}\qquad(|x|<1).$$

(18)【详解】(I)由于题目是验证，只要将二阶偏导数求出来代入题目中给的等式就可以了

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

同理 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\dfrac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

所以 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$ 成立.

(II) 令 $f'(u)=p$ 于是上述方程成为 $\dfrac{dp}{du}=-\dfrac{p}{u}$，则 $\int\dfrac{dp}{p}=-\int\dfrac{du}{u}+c$，

即 $\ln|p|=-\ln u+c$，所以 $f'(u)=p=\dfrac{c}{u}$

因为 $f'(1)=1$，所以 $c=1$，得 $f(u)=\ln u+c_2$

又因为 $f(1)=0$，所以 $c_2=0$，得 $f(u)=\ln u$

(19)【详解】

**方法 1**：把 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 $t$ 求导，得：$xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$

令 $t=1$，则 $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=-2f(x,y)$；

再令 $P=yf(x,y),\ Q=-xf(x,y)$，

所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf'_x(x,y)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf'_y(x,y)$

得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以由格林公式知结论成立.

**方法 2**： $D$ 是单连通区域，对于 $D$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 $L$，$\Gamma$ 为 $D$ 内的一曲线

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_\Gamma yf(x,y)dx-xf(x,y)dy \text{ 在 } D \text{ 内与路径无关}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-xf(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(yf(x,y)) \quad ((x,y)\in D)$$

$$\Leftrightarrow xf'_x(x,y)+yf'(x,y)+2f(x,y)=0 \quad ((x,y)\in D)$$

同方法 1，由 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 可证得上式.

因此结论成立.

(20)【详解】(I)系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{bmatrix}$ 未知量的个数为 $n=4$，且又 $AX=b$ 有三个线性无关解，设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解，则 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 是 $AX=0$ 的两个线性无关的解. 因为 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 线性无关又是齐次方程的解，于是 $AX=0$ 的基础解系中解的个数不少于 2，得 $4-r(A)\geq 2$，从而 $r(A)\leq 2$.

又因为 $A$ 的行向量是两两线性无关的，所以 $r(A)\geq 2$. 所以 $r(A)=2$.

(II)对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$[A|b]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[3]+[1]\times(-a)}]{[2]+[1]\times(-4)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]\times(1-a)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&4a+b-5&4-2a\end{array}\right],$$

由 $r(A)=2$，得 $\begin{cases}4-2a=0\\4a+b-5=0\end{cases}$， 即 $a=2,\ \ b=-3$.

所以 $[A|b]$ 作初等行变换后化为; $\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-4&2\\0&-1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$,

它的同解方程组 $\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4\\x_2=-3+x_3-5x_4\end{cases}$ ①

①中令 $x_3=0,x_4=0$ 求出 $AX=b$ 的一个特解 $(2,-3,0,0)^T$；

$AX=0$ 的同解方程组是 $\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4\\x_2=x_3-5x_4\end{cases}$ ②

取 $x_3=1,x_4=0,$ 代入②得 $(-2,1,1,0)^T$；取 $x_3=0,x_4=1,$ 代入②得 $(4,-5,0,1)^T$. 所以 $AX=0$ 的基础解系为 $(-2,1,1,0)^T$， $(4,-5,0,1)^T$

所以方程组 $AX=b$ 的通解为:

$$(2,-3,0,0)^T+c_1(-2,1,1,0)^T+c_2(4,-5,0,1)^T，\ c_1,c_2 \text{为任意常数}$$

(21)【详解】(I) 由题设条件 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$，$A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$，故 $\alpha_1, \alpha_2$ 是 $A$ 的对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量，又因为 $\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关，故 $\lambda = 0$ 至少是 $A$ 的二重特征值. 又因为 $A$ 的每行元素之和为 $3$，所以有 $A(1,1,1)^T = (3,3,3)^T = 3(1,1,1)^T$，由特征值、特征向量的定义，$\alpha_0 = (1,1,1)^T$ 是 $A$ 的特征向量, 特征值为 $\lambda_3 = 3$，$\lambda_3$ 只能是单根，$k_3\alpha_0, k_3 \neq 0$ 是全体特征向量，从而知 $\lambda = 0$ 是二重特征值.

于是 $A$ 的特征值为 $3,0,0$；属于 $3$ 的特征向量: $k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$；属于 $0$ 的特征向量: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$，$k_1, k_2$ 不都为 $0$.

(Ⅱ) 为了求出可逆矩阵必须对特征向量进行单位正交化 .

先将 $\alpha_0$ 单位化, 得 $\eta_0 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

对 $\alpha_1, \alpha_2$ 作施密特正交化, 得 $\eta_1 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$，$\eta_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^T$.

作 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，则 $Q$ 是正交矩阵,并且 $Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(22)【详解】 $f_Y(y) = F_Y'(y)$，由于 $f_X(x)$ 是分段函数，所以在计算 $P\left\{X^2 \leq y\right\}$ 时，要相应分段讨论. 求 $F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4)$, 只是与 $X$ 有关，不必先求出 $F(x,y)$ 的函数.

(I) 因为 $F_Y(y) = P\left\{Y \leq y\right\} = P\left\{X^2 \leq y\right\}$，当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0;$

当 $0 \leq y < 1$ 时，$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{2}dx + \int_{0}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}dx = \frac{3}{4}\sqrt{y}$；

当 $1 \leq y < 4$ 时，$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}dx + \int_{0}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}$；

当 $y \geq 4$ 时，$F_Y(y) = 1;$

综上所述，有

$$F_Y(y)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{X^2\le y\right\}=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le y<4\\ 1, & 4\le y\end{cases}$$

由概率密度是分布函数在对应区间上的的微分，所以，

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

这个解法是从分布函数的最基本的概率定义入手，对$y$进行适当的讨论即可，属于基本题型.

(Ⅱ) 由协方差的计算公式$\text{cov}(X,Y)=\text{cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)\cdot E(X^2)$

需要计算$E(X)$，$E(X^2)$，$E(X^3)$.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4};$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}dx=\frac{5}{6};$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}dx=\frac{7}{8}.$$

故$\text{cov}(X,Y)=\text{cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)(X^2)=\dfrac{7}{8}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{2}{3}.$

(III) 根据二维随机变量的定义$F(a,b)=P\left\{X\le a,Y\le b\right\}$，有

$$F(-\frac{1}{2},4)=P(X\le-\frac{1}{2},Y\le 4)=P\left\{X\le-\frac{1}{2},X^2\le 4\right\}=P\left\{-2\le X\le-\frac{1}{2}\right\}$$

由一维概率计算公式$P\left\{a\le X\le b\right\}=\int_a^b f_X(x)dx$有，$F(-\dfrac{1}{2},4)=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{1}{4}$.

(23)【答案】$\theta$的矩估计$\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}-\overline{X}$；$\theta$的最大似然估计$\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$.

【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩，此题中被估参数只有一个，故只需要用样本一阶原点矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望)，所以矩估计的关键在于

找出总体的矩 $E(X)$.

最大似然估计，实质上就是找出使似然函数最大的那个参数，问题的关键在于构造似然函数. 样本值中 $x_i$ 小于 1 的概率是 $\theta$， $x_i$ 大于 1 的概率是 $(1-\theta)$. 因此，似然函数应为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\theta\right)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}.$$

(I) 由数学期望的定义：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx=\int_0^1 \theta xdx+\int_1^2(1-\theta)xdx=\frac{1}{2}\theta+\frac{3}{2}(1-\theta)=\frac{3}{2}-\theta$$

样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$ 即 $\dfrac{3}{2}-\theta=\overline{X}$，解得 $\theta=\dfrac{3}{2}-\overline{X}$.

所以参数 $\theta$ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}-\overline{X}$. 其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(Ⅱ) 对样本 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 按照 $<1$ 或者 $\geq 1$ 进行分类，不妨设：$x_{p1},x_{p2},\cdots x_{pN}<1$，$x_{pN+1},x_{pN+2},\cdots x_{pn}\geq 1$. 似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^N(1-\theta)^{n-N}, & x_{p1},x_{p2},\cdots x_{pN}<1, x_{pN+1},x_{pN+2},\cdots x_{pn}\geq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

在 $x_{p1},x_{p2},\cdots x_{pN}<1$， $x_{pN+1},x_{pN+2},\cdots x_{pn}\geq 1$ 时，等式两边同取自然对数得

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta),$$

由于 $\ln L(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 在 $\theta$ 的同一点取得最大值，所以令

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0,$$

解得 $\theta=\dfrac{N}{n}$，所以 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$.