1989年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分.)

(1) 已知 $f'(3)=2$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$_______.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$,则 $f(x)=$_______.

(3) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$_______.

(4) 向量场 $u(x,y,z)=xy^2 i+ye^z j+x\ln(1+z^2)k$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $divu=$_______.

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则逆矩阵 $(A-2E)^{-1}=$_______.

二、选择题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分.)

(1) 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ ( )

(A) 有且仅有水平渐近线

(B) 有且仅有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线

(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线

(2) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$,则点 P 的坐标是 ( )

(A) (1,-1,2) (B) (-1,1,2)

(C) (1,1,2) (D) (-1,-1,2)

(3) 设线性无关的函数 y_1、y_2、y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解,C_1、C_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是 ( )

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$ (B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$ (D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

(4) 设函数 $f(x)=x^2, 0\le x<1$, 而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$, 其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n=1,2,3,\cdots$, 则 $S(-\dfrac{1}{2})$ 等于 ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

(5) 设 A 是 n 阶矩阵, 且 A 的行列式 $|A|=0$, 则 A 中 ( )

(A) 必有一列元素全为 0
(B) 必有两列元素对应成比例
(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合
(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1) 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2) 设曲线积分 $\int_C xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0)=0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 的值.

(3) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分.)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分.)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 f 为连续函数, 求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分.)

证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分.)

问 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$$

有解, 并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分.)

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, 证明:

(1) $\frac{1}{\lambda}$为A^{-1}的特征值;

(2) $\frac{|A|}{\lambda}$为A的伴随矩阵A^*的特征值.

九、(本题满分9分.)

设半径为R的球面$\sum$的球心在定球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$上,问当R为何值时,球面$\sum$在定球面内部的那部分的面积最大?

十、填空题(本题满分6分,每小题2分.)

(1) 已知随机事件A的概率$P(A)$=0.5,随机事件B的概率$P(B)$=0.6及条件概率

$P(B|A)$=0.8,则和事件$A\bigcup B$的概率$P(A\bigcup B)$=_______.

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为0.6和0.5.现已知目标被命中,则它是甲射中的概率为_______.

(3) 若随机变量ξ在(1,6)上服从均匀分布,则方程$x^2+\xi x+1=0$有实根的概率是______.

十一、(本题满分6分.)

设随机变量X与Y独立,且X服从均值为1、标准差(均方差)为$\sqrt{2}$的正态分布,而Y服从标准正态分布.试求随机变量$Z=2X-Y+3$的概率密度函数.

1989年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分.)

(1)【答案】-1

【解析】原式=$-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{-h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$.

(2)【答案】$x-1$

【解析】由定积分的性质可知,$\int_0^1 f(t)dt$ 和变量没有关系,且 $f(x)$ 是连续函数,故 $\int_0^1 f(t)dt$ 为一常数,为简化计算和防止混淆,令 $\int_0^1 f(t)dt=a$,则有恒等式 $f(x)=x+2a$,两边0到1积分得

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x+2a)dx,$$

即 $$a=\int_0^1 (x+2a)dx=\int_0^1 xdx+2a\int_0^1 dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+2a\left[x\right]_0^1=\frac{1}{2}+2a,$$

解之得 $a=-\dfrac{1}{2}$,因此 $f(x)=x+2a=x-1$.

(3)【答案】π

【解析】**方法一:** L 的方程又可写成 $x^2+y^2=1(y\le 0)$,被积分函数在 L 上取值,于是

原积分=$\int_L 1ds=\pi$(半径为1的的半圆周长).

方法二: 写出 L 的参数方程,

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},\ (-\pi\le t\le 0)$$

则 $$\int_L (x^2+y^2)ds=\int_{-\pi}^0(\cos^2 t+\sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}dt=\int_{-\pi}^0 1\cdot dt=\pi.$$

(4)【答案】2

【解析】直接用散度公式

$$div\vec{u}\big|_P=[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(ye^z)+\frac{\partial}{\partial z}(x\ln(1+z^2))]\big|_P$$

$$=(y^2+e^z+x\cdot\frac{2z}{1+z^2})\big|_{(1,1,0)}=1^2+e^0+0\cdot\frac{20}{1+0^2}=1+1=2.$$

(5)【答案】$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【解析】由于

$$A-2E=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

为求矩阵的逆可有多种办法,可用伴随,可用初等行变换,也可用分块求逆.

方法一:如果对$(A-2E\vdots E)$作初等行变换,则由$(A-2E\vdots E)\to(E\vdots(A-2E)^{-1})$可以直接得出$(A-2E)^{-1}$.

本题中,第一行乘以$\left(-1\right)$加到第二行上;再第二行乘以$\frac{1}{2}$,有

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

从而知 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

方法二:对于2阶矩阵的伴随矩阵有规律:$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,则求$A$的伴随矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

如果$\left|A\right|\neq 0$,这样

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{1}{\left|ad-bc\right|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

再利用分块矩阵求逆的法则:$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$,

本题亦可很容易求出 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】(A)

【解析】函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 只有间断点 $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}$, 其中 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数, 而当 $x\to 0^+$ 时, x 为无穷小, 而无穷小量和一个有界函数的乘积仍然是无穷小,

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$, 故函数没有铅直渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\ \underline{\underline{\text{令}t=\frac{1}{x}}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1,$$

所以 $y=1$ 为函数的水平渐近线,所以答案为(A).

【相关知识点】铅直渐近线：如函数 $y=f(x)$ 在其间断点 $x=x_0$ 处有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则 $x=x_0$ 是函数的一条铅直渐近线；

水平渐近线：当 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a,(a\text{为常数})$, 则 $y=a$ 为函数的水平渐近线.

(2)【答案】(C)

【解析】题设为求曲面 $S:F(x,y,z)=0$ (其中 $F(x,y,z)=z+x^2+y^2-4$)上点 P 使 S 在该点处的法向量 $\vec{n}$ 与平面 $2x+2y+z-1=0$ 的法向量 $n_0=\{2,2,1\}$ 平行.

S 在 $P(x,y,z)$ 处的法向量

$$n=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}=\{2x,2y,1\},$$

若 $n\,//\,n_0$, 则 $n=\lambda n_0,\lambda$ 为常数, 即 $2x=2\lambda,2y=2\lambda,1=\lambda$. 即 $x=1,y=1$.

又点 $P(x,y,z)\in S$, 所以 $z=4-x^2-y^2\Big|_{(x,y)=(1,1)}=4-1^2-1^2=2$, 故求得 $P(1,1,2)$.

因此应选(C).

(3)【答案】(D)

【解析】由二阶常系数非齐次微分方程解的结构定理可知, y_1-y_3, y_2-y_3 为方程对应齐次方程的特解, 所以方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解为

$$y=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3,$$

即 $y=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$, 故应选 D.

(4)【答案】(B)

【解析】$S(x)$ 是函数 $f(x)$ 先作奇延拓后再作周期为 2 的周期延拓后的函数的傅式级数的和函数, 由于 $S(x)$ 是奇函数, 于是 $S(-\frac{1}{2})=-S(\frac{1}{2})$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 连续, 由傅式级数的收敛性定理, $S(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$. 因此, $S(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$. 应选(B).

(5)【答案】(C)

【解析】本题考查 $|A|=0$ 的充分必要条件, 而选项(A) 、(B)、(D)都是充分条件, 并不必要.

因为对矩阵 A 来说, 行和列具有等价性, 所以单说列或者单说行满足什么条件就构成了 $|A|=0$ 的必要条件, 但是不具有任意性, 只需要存在一列向量是其余列向量的线性组合.

以 3 阶矩阵为例, 若 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}$,

条件(A)必有一列元素全为 0, (B)必有两列元素对应成比例均不成立, 但有 $|A|=0$, 所以(A)、(B)不满足题意, 不可选.

若 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\\1&2&5\end{pmatrix}$, 则 $|A|=0$, 但第三列并不是其余两列的线性组合, 可见(D)不正确.

这样用排除法可知应选(C).

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1)【解析】由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关, 可以先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 也可以先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

方法一: 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 由复合函数求导法,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+g_1'\frac{\partial}{\partial x}(x)+g_2'\frac{\partial}{\partial x}(xy)=2f'+g_1'+yg_2',$$

再对 y 求偏导, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2f'+g_1'+yg_2')=2f''\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)$$

$$+\left[g_{11}''\frac{\partial}{\partial y}(x)+g_{12}''\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]+\left[g_2'+yg_{21}''\frac{\partial}{\partial y}(x)+yg_{22}''\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]$$

$$=-2f''+g_{11}''\cdot 0+xg_{12}''+g_2'+yg_{21}''\cdot 0+xyg_{22}''$$

$$=-2f''+xg_{21}''+g_2'+xyg_{22}''.$$

方法二：先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+g_1'\frac{\partial}{\partial y}(x)+g_2'\frac{\partial}{\partial y}(xy)=-f'+xg_2',$$

再对 x 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-f'+xg_2')$$

$$=-f''\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+g_2'+xg_{21}''\frac{\partial}{\partial x}(x)+xg_{22}''\frac{\partial}{\partial x}(xy)$$

$$=-2f''+g_2'+xg_{21}''+xyg_{22}''.$$

【相关知识点】复合函数求导法则：若 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数存在, 函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2)【解析】**方法一：**先求出 $\varphi(x)$, 再求曲线积分.

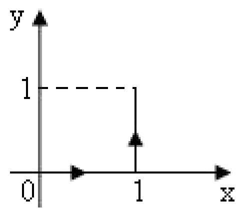
设 $P(x,y),Q(x,y)$ 有连续偏导数, 在所给的单连通区域 D 上, $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关, 则在 D 上有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $y\varphi'(x)=2xy$, 即 $\varphi'(x)=2x,\varphi(x)=x^2+C$. 由 $\varphi(0)$=0, 得 $C=0$, 即 $\varphi(x)=x^2$, 因此

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+yx^2dy=\frac{1}{2}\int_{(0,0)}^{(1,1)}y^2dx^2+x^2dy^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_{(0,0)}^{(1,1)}d(x^2y^2)=\frac{1}{2}(x^2y^2)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}.$$

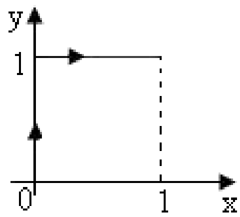
或取特殊路径如图：

$$I=\int_L xy^2dx+yx^2dy=\int_0^1 0\bullet dx+\int_0^1 y\bullet 1^2dy$$



$$=\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

方法二：不必求出 $\varphi(x)$，选取特殊的路径，取积分路径如图，则



$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$$

$$=\int_0^1 y\varphi(0)dy+\int_0^1 xdx=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(3)【解析】利用三重积分的性质，

Ω 关于 yz 平面对称，x 对 x 为奇函数，所以 $\iiint\limits_\Omega xdV=0$，即 $\iiint\limits_\Omega (x+z)dV=\iiint\limits_\Omega zdV$.

Ω 是由球心在原点半径为 1 的上半球面与顶点在原点、对称轴为 z 轴、半顶角为 $\frac{\pi}{4}$ 的锥面所围成. 故可选用球坐标变换，则 $\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le 1$，

所以 $$I=\iiint\limits_\Omega zdV=\iiint\limits_\Omega \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^1\rho^3d\rho=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi\int_0^1\rho^3d\rho$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1=\frac{\pi}{8}.$$

四、(本题满分 6 分.)

【解析】直接展开 $f(x)$ 相对比较麻烦，可 $f'(x)$ 容易展开，

$$f'(x)=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot\frac{1-x-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

由 $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^nt^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n,(|t|<1)$，令 $t=x^2$ 得

$$\frac{1}{1+t}=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},(x^2<1)$$

即 $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},(|x|<1)$$

所以

$$f(x)=\int_0^x f'(u)du+f(0),$$

$$=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^{2n}du+\arctan\frac{1+0}{1-0}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x u^{2n}du$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},(|x|<1)$$

当 $x=\pm1$ 时, 式 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 均收敛, 而左端 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=1$ 处无定义.

因此 $$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1).$$

五、(本题满分 7 分.)

【解析】先将原式进行等价变换, 再求导, 试着发现其中的规律,

$$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt,$$

所给方程是含有未知函数及其积分的方程, 两边求导, 得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt,$$

再求导, 得

$$f''(x)=-\sin x-f(x), \text{即} \qquad f''(x)+f(x)=-\sin x.$$

这是个简单的二阶常系数非齐次线性微分方程, 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$,

此特征方程的根为 $r=\pm i$, 而右边的 $\sin x$ 可看作 $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $\alpha\pm i\beta=\pm i$ 为特征根, 因此非齐次方程有特解 $Y=xa\sin x+xb\cos x$.

代入方程并比较系数, 得 $a=0,b=\frac{1}{2}$, 故 $Y=\frac{x}{2}\cos x$, 所以

$$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x,$$

又因为 $f(0)=0,f'(0)=1$, 所以 $c_1=0,c_2=\frac{1}{2}$, 即 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$.

六、(本题满分 7 分.)

【解析】**方法一:** 判定方程 $f(x)=0$ 等价于判定函数 $y=f(x)$ 与 x 的交点个数.

令 $$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx,$$

其中 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 是定积分, 为常数, 且被积函数 $1-\cos 2x$ 在 $(0,\pi)$ 非负, 故

$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx>0$, 为简化计算, 令 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=k>0$, 即 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$,

则其导数 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$, 令 $f'(x)=0$ 解得唯一驻点 $x=e$,

即 $$\begin{cases} f'(x)>0, 0<x<e \\ f'(x)<0, e<x<+\infty \end{cases},$$

所以 $x=e$ 是最大点, 最大值为 $f(e)=\ln e-\frac{e}{e}+k=k>0$.

又因为 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-\frac{x}{e}+k)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x-\frac{x}{e}+k)=-\infty \end{cases}$, 由连续函数的介值定理知在 $(0,e)$ 与 $(e,+\infty)$

各有且仅有一个零点(不相同), 故方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有两个不同实根.

方法二: $$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x}dx,$$

因为当 $0\le x\le\pi$ 时, $\sin x\ge 0$, 所以

$$\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx=\sqrt{2}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2\sqrt{2}>0,$$

其它同方法一.

七、(本题满分 6 分.)

【解析】对方程组的增广矩阵作初等行变换.

第一行分别乘以有 (-4)、(-6) 加到第二行和第三行上, 再第二行乘以 (-1) 加到第三行上, 有

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 1 & -2 & -4\lambda+3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{array}\right).$$

由于方程组有解的充要条件是 $r(A)=r(\overline{A})$, 故仅当 $-\lambda+1=0$, 即 $\lambda=1$ 时, 方程组有解. 此时秩 $r(A)=r(\overline{A})=2<n=3$, 符合定理的第二种情况, 故方程组有无穷多解.

由同解方程组 $\begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3=1, \\ \quad x_2-2x_3=-1, \end{cases}$ 令 $x_3=t$, 解得原方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 = -t+1, \\ x_2 = 2t-1, \\ x_3 = t, \end{cases} \quad \text{(其中 } t \text{ 为任意常数).}$$

【相关知识点】1. 非齐次线性方程组有解的判定定理：

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵 $\overline{A}=\left(A\vdots b\right)$ 的秩，即是 $r(A)=r(\overline{A})$（或者说，b 可由 A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线表出，亦等同于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 是等价向量组）

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，线性方程组 $Ax=b$，则

（1） 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})=n.$

（2） 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})<n.$

（3） 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A)+1=r(\overline{A}).$

$\Leftrightarrow$ b 不能由 A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线表出.

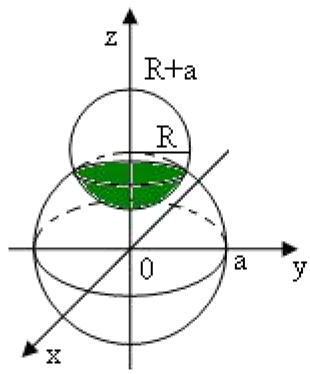
八、（本题满分 8 分.）

【解析】(1) 由 λ 为 A 的特征值可知，存在非零向量 α 使 $A\alpha=\lambda\alpha$，两端左乘 A^{-1}，得 $\alpha=\lambda A^{-1}\alpha$. 因为 $\alpha\neq 0$，故 $\lambda\neq 0$，于是有 $A^{-1}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\alpha$. 按特征值定义知 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

(2) 由于逆矩阵的定义 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，据第 (1) 问有 $\dfrac{A^*}{|A|}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\alpha\Rightarrow A^*\alpha=\dfrac{|A|}{\lambda}\alpha$，按特征值定义，即 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 A^* 的特征值.

【相关知识点】矩阵特征值与特征向量的定义：设 A 是 n 阶矩阵，若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX=\lambda X$ 成立，则称 λ 是矩阵 A 的特征值，称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

九、（本题满分 9 分.）



【解析】由球的对称性，不妨设球面 $\sum$ 的球心是 $(0,0,a)$，

于是 $\sum$ 的方程是 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$.

先求 $\sum$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的交线 Γ：

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-a)^2=R^2, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \end{cases} \Rightarrow z=\frac{2a^2-R^2}{2a}.$$

代入上式得Γ的方程 $\quad x^2+y^2=R^2-\frac{R^4}{4a^2}$.

它在平面xOy上的投影曲线$\begin{cases} x^2+y^2=b^2, b^2=R^2-\frac{R^4}{4a^2}(0<R<2a), \\ z=0, \end{cases}$

相应的在平面xOy上围成区域设为D_{xy}, 则球面$\sum$在定球面内部的那部分面积

$$S(R)=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy.$$

将$\sum$的方程两边分别对x,y求偏导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z-a}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z-a},$$

所以 $\quad S(R)=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{x}{a-z})^2+(\frac{y}{a-z})^2}dxdy$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{x}{a-z})^2+(\frac{y}{a-z})^2}dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

利用极坐标变换$(0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le b)$有

$$S(R)=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy \xlongequal{\text{极坐标变换}} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^b\frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho$$

$$=-\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^b\frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d(R^2-\rho^2)$$

$$=2\pi R(-\sqrt{R^2-\rho^2})\Big|_0^b=2\pi R(-\sqrt{R^2-b^2}+R)$$

代入$b^2=R^2-\frac{R^4}{4a^2}$, 化简得$S(R)=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}$.

这是一个关于R的函数, 求$S(R)$在$(0,2a)$的最大值点, $S(R)$两边对R求导, 并令

$S'(R)=0$, 得$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a}=0$, 得$R=\frac{4a}{3}$.

且 $\begin{cases} S'(R)>0, 0<R<\dfrac{4}{3}a \\ S'(R)<0, \dfrac{4}{3}a<R<2a \end{cases}$,

故 $R=\dfrac{4a}{3}$ 时 $S(R)$ 取极大值, 也是最大值.

因此, 当 $R=\dfrac{4a}{3}$ 时球面 $\sum$ 在定球面内部的那部分面积最大.

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 2 分.)

(1)【解析】

方法一： $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)=0.7$.

方法二： $P(A\bigcup B)=P(B)+P(A\overline{B})=P(B)+P(A)P(\overline{B}|A)=0.6+0.5\times 0.2=0.7$.

(2)【解析】设事件 A =“甲射中”, B =“乙射中”, 依题意, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$,

A 与 B 相互独立, $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0.6\times 0.5=0.3$.

因此, 有 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.5-0.3=0.8$.

$$P(A|A\bigcup B)=\frac{P(A(A\bigcup B))}{P(A\bigcup B)}=\frac{P(A)}{P(A\bigcup B)}=0.75 .$$

(3)【解析】设事件 A =“方程有实根”, 而方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的充要条件是其判别式 $\Delta=\xi^2-4\geq 0$, 即 $A=\left\{\xi^2-4\geq 0\right\}=\left\{\xi^2\geq 4\right\}$.

随机变量 ξ 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布, 所以其分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{x-1}{6-1}, & 1\leq x<6, \\ 1, & x\geq 6. \end{cases}$

由分布函数的定义 $P\left(x\leq k\right)=F(k)$,

$$P\left\{\xi\geq 2\right\}=1-P\left\{\xi<2\right\}=1-0.2=0.8. \qquad 而 P\left\{\xi\leq -2\right\}=0.$$

所以由概率的可加性, 有 $P(A)=\left\{\xi^2\geq 4\right\}=P\left\{\xi\geq 2\right\}+P\left\{\xi\leq -2\right\}=0.8+0=0.8$.

【相关知识点】广义加法公式： $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

条件概率： $P(B|A)=\dfrac{P(BA)}{P(A)}$, 所以 $P(AB)=P(BA)=P(B|A)P(A)$.

十一、(本题满分 6 分.)

【解析】$X \sim N(1,2)$, $Y \sim N(0,1)$, 由独立的正态变量 X 与 Y 的线性组合仍服从正态分布,

且

$$EZ = 2EX - EY + 3 = 5,\ DZ = 4DX + DY = 4\times 2 + 1 = 9,$$

得 $\quad Z \sim N(5,9)$.

代入正态分布的概率密度公式, 有 Z 的概率密度函数为 $\quad f_Z(z) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$.

【相关知识点】对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, 则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y),$$

其中 a,b,c 为常数.