1993年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分,把答案填在题中横线上.)

(1) 函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调减少区间为____________.

(2) 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为____________.

(3) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则其中系数 b_3 的值为____________.

(4) 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $div(\mathrm{grad}u)=$____________.

(5) 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零,且 A 的秩为 $n-1$,则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为____________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt$,$g(x)=x^3+x^4$ 则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ( )

(A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为 ( )

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$ (B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$ (D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$

(3) 设有直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$,则 L_1 与 L_2 的夹角为 ( )

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

(4) 设曲线积分 $\int_L[f(x)-e^x]\sin ydx-f(x)\cos ydy$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续

导数, 且 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 等于 (　　)

(A) $\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}$　　(B) $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

(C) $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}-1$　　(D) $1-\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

(5) 已知 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$, P 为三阶非零矩阵, 且满足 $PQ=0$, 则

(A) $t=6$ 时, P 的秩必为 1　　(B) $t=6$ 时, P 的秩必为 2

(C) $t\neq 6$ 时, P 的秩必为 1　　(D) $t\neq 6$ 时, P 的秩必为 2

三、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分.)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^{x}$.

(2) 求 $\displaystyle\int\frac{xe^{x}}{\sqrt{e^{x}-1}}dx$.

(3) 求微分方程 $x^{2}y'+xy=y^{2}$, 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

四、(本题满分 6 分)

计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}2xzdydz+yzdzdx-z^{2}dxdy$, 其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 与 $z=\sqrt{2-x^{2}-y^{2}}$ 所围立体的表面外侧.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n^{2}-n+1)}{2^{n}}$ 的和.

六、(本题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分.)

(1) 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f'(x)\geq k>0, f(0)<0$, 证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

(2) 设 $b>a>e$, 证明 $a^{b}>b^{a}$.

七、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{2}+3x_2^{2}+3x_3^{2}+2ax_2x_3(a>0)$, 通过正交变换化成标准形

$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times n$ 矩阵, 其中 $n<m$, E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB=E$, 证明 B 的列向量组线性无关.

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发, 以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发, 其速度大小为 $2v$, 方向始终指向 A, 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程, 并写出初始条件.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分, 把答案填在题中横线上.)

(1) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽取两次, 每次抽一个, 抽出后不再放回, 则第二次抽出的是次品的概率为_______.

(2) 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)=$_______.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty<x<+\infty$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

(2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】$0 < x \le \frac{1}{4}$

【解析】由连续可导函数的导数与 0 的关系判别函数的单调性.

将函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}})dt$, 两边对 x 求导, 得 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

若函数 $F(x)$ 严格单调减少, 则 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$, 即 $\sqrt{x} < \frac{1}{2}$.

所以函数 $F(x)$ 单调减少区间为 $0 < x \le \frac{1}{4}$.

【相关知识点】函数的单调性：设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

(2)【答案】$\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$

【解析】先写出旋转面 S 的方程：$3(x^2+z^2)+2y^2=12$.

令 $$F(x,y,z) = 3(x^2+z^2)+2y^2-12.$$

则 S 在点 (x,y,z) 的法向量为

$$\vec{n} = \pm\left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\} = \pm\{6x, 4y, 6z\},$$

所以在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的法向量为

$$\vec{n} = \pm\left\{0, 4\sqrt{3}, 6\sqrt{2}\right\} = \pm 2\left\{0, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\right\}.$$

因指向外侧, 故应取正号, 单位法向量为

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\left\{0, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\right\}}{\sqrt{(0)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}\left\{0, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}.$$

(3)【答案】$\frac{2}{3}\pi$

【解析】按傅式系数的积分表达式 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$,

所以 $b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3xdx=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 3xdx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 3xdx$.

因为 $x^2\sin 3x$ 为奇函数, 所以 $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 3xdx=0$；

$x\sin 3xdx$ 为偶函数, 所以

$$b_3=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 3xdx=2\int_0^{\pi}x\sin 3xdx$$

$$=2\int_0^{\pi}xd(-\frac{1}{3}\cos 3x)=\left[-\frac{2x}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi}+\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\cos 3xdx$$

$$=\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi .$$

(4)【答案】$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

【解析】先计算 u 的梯度, 再计算该梯度的散度.

因为 $\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$,

所以 $div(\operatorname{grad}u)=div\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 分别对 x,y,z 求偏导数, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},$$

由对称性知

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

将 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$ 分别对 x,y,z 求偏导, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

因此， $div(\mathrm{grad}\,u)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

(5)【答案】$k(1,1,\cdots,1)^T$

【解析】因为$r(A)=n-1$，由$n-r(A)=1$知，齐次方程组的基础解系为一个向量，故$Ax=0$的通解形式为$k\eta$. 下面根据已知条件“A的各行元素之和均为零”来分析推导$Ax=0$的一个非零解，它就是$Ax=0$的基础解系.

各行元素的和均为 0，即

$$\begin{cases} a_{11}+a_{12}\cdots+a_{1n}=0 \\ a_{21}+a_{22}\cdots+a_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}+a_{n2}\cdots+a_{nn}=0 \end{cases},$$

而齐次方程组$Ax=0$为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}.$$

两者比较，可知$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$是$Ax=0$的解. 所以应填$k(1,1,\cdots,1)^T$.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分.)

(1)【答案】(B)

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$为“$\dfrac{0}{0}$”型的极限未定式，又分子分母在点0处导数都存在，

运用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt}{x^3+x^4}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{3x^2+4x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\cos\ x$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{3x^2+4x^3}.$$

因为当$x\to 0$，$\sin x\to 0$，所以$\sin(\sin^2 x)\sim\sin^2 x\sim x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3+4x}=\frac{1}{3},$$

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价的无穷小量. 应选(B).

【相关知识点】无穷小的比较：

设在同一个极限过程中, $\alpha(x),\beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$,

(1) 若 $l\neq 0$, 称 $\alpha(x),\beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小；

(2) 若 $l=1$, 称 $\alpha(x),\beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小, 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(3) 若 $l=0$, 称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$.

若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(不为 ∞), 称 $\alpha(x),\beta(x)$ 不可比较.

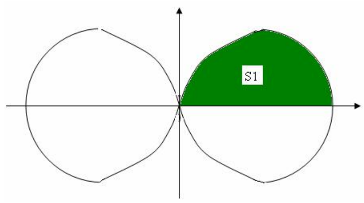
(2)【答案】(A)

【解析】由方程可以看出双纽线关于 x 轴、 y 轴对称, (如草图)

只需计算所围图形在第一象限部分的面积；

双纽线的直角坐标方程复杂, 而极坐标方程

较为简单： $\rho^2=\cos 2\theta$.



显然, 在第一象限部分 θ 的变化范围是

$\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$. 再由对称性得

$$S=4S_1=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2 d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta,$$

应选(A).

(3)【答案】(C)

【解析】这实质上是求两个向量的夹角问题, L_1 与 L_2 的方向向量分别是

$$\vec{l_1}=(1,-2,1),\quad \vec{l_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-1,2),$$

L_1 与 L_2 的夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=|\cos(\vec{l_1},\vec{l_2})|=\frac{|\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}|}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, 应选(C).

(4)【答案】(B)

【解析】在所考察的单连通区域上,该曲线积分与路径无关$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y}((f(x)-e^x)\sin y)=\frac{\partial}{\partial x}(-f(x)\cos y),$$

即 $$(f(x)-e^x)\cos y=-f'(x)\cos y,$$

化简得 $f'(x)+f(x)=e^x$, 即 $\left[e^x f(x)\right]'=e^{2x}$,

解之得 $e^x f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$, 所以 $f(x)=e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x}+C)$.

由 $f(0)=0$ 得 $C=-\frac{1}{2}$, 因此 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, 故应选(B).

【相关知识点】曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在单连通区域内与路径无关的充分必要条件是

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

(5)【答案】(C)

【解析】若 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, $AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\le n$.

当 $t=6$ 时,矩阵的三行元素对应成比例, $r(Q)=1$, 有 $r(P)+r(Q)\le 3$, 知 $r(P)\le 2$,

所以, $r(P)$ 可能是 1,也有可能是 2,所以(A)、(B)都不准确;

当 $t\ne 6$ 时,矩阵的第一行和第三行元素对应成比例, $r(Q)=2$, 于是从 $r(P)+r(Q)\le 3$

得 $r(P)\le 1$, 又因 $P\ne 0$, 有 $r(P)\ge 1$, 从而 $r(P)=1$ 必成立,所以应当选(C).

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分.)

(1)【解析】令 $\frac{1}{x}=t$, 则当 $x\to\infty$ 时, $t\to 0$,

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to 0}(\sin 2t+\cos t)^{\frac{1}{t}},$$

这是 1^∞ 型未定式,

$$\lim_{t\to 0}(\sin 2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}(1+\sin 2t+\cos t-1)^{\frac{1}{\sin 2t+\cos t-1}\cdot\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}},$$

而 $\lim_{t\to 0}(1+\sin 2t+\cos t-1)^{\frac{1}{\sin 2t+\cos t-1}}$ 是两个重要极限之一,即

$$\lim_{t\to0}(1+\sin 2t+\cos t-1)^{\frac{1}{\sin 2t+\cos t-1}}=e .$$

所以 $$\lim_{t\to0}(\sin 2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}e^{\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}} .$$

而 $$\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}\overset{洛}{=\!=}\lim_{t\to0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{1}=2 ,$$

故 $$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}=e^{2} .$$

(2)【解析】**方法一**：$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2\int xd\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}dx$.

令 $\sqrt{e^x-1}=t$, 则 $x=\ln(t^2+1),dx=\frac{2tdt}{t^2+1}$,

所以 $$\int\sqrt{e^x-1}dx=\int t\cdot\frac{2tdt}{t^2+1}=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=2\int(1-\frac{1}{t^2+1})dt$$

$$=2t-2\arctan t+C=2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C ,$$

所以 $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}dx$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C .$$

方法二：令 $\sqrt{e^x-1}=t$, 则 $e^x=t^2+1,x=\ln(t^2+1),dx=\frac{2tdt}{t^2+1}$,

所以 $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{(t^2+1)\ln(t^2+1)}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int\ln(t^2+1)dt$$

$$=2t\ln(t^2+1)-2\int td\ln(t^2+1)=2t\ln(t^2+1)-4\int\frac{t^2}{t^2+1}dt .$$

关于 $\int\frac{t^2}{t^2+1}dt$ 的求解同方法一, 所以

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2t\ln(t^2+1)-4(t-\arctan t)+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C .$$

(3)【解析】**解法一**：所给方程为伯努利方程, 两边除以 y^2 得

$$x^2y^{-2}y'+xy^{-1}=1, 即 -x^2(y^{-1})'+xy^{-1}=1 .$$

令 $y^{-1}=z$, 则方程化为 $-x^2z'+xz=1$, 即 $z'-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}$,

即 $\quad (\frac{z}{x})'=-\frac{1}{x^3}$,

积分得 $\quad \frac{z}{x}=\frac{1}{2}x^{-2}+C$.

由 $y^{-1}=z$ 得 $\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}x^{-2}+C$,

即 $\quad y=\frac{2x}{1+2Cx^2}$,

代入初始条件 $y|_{x=1}=1$, 得 $\quad C=\frac{1}{2}$, 所以所求方程的特解是 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

解法二：所给方程可写成 $\ y'=(\frac{y}{x})^2-\frac{y}{x}$ 的形式, 此方程为齐次方程.

令 $\frac{y}{x}=u$, 则 $y=xu, y'=u+xu'$, 所以方程可化为

$$u+xu'=u^2-u \text{ , 分离变量得 } \quad \frac{du}{u(u-2)}=\frac{dx}{x},$$

积分得 $\quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|+C_1$, $\quad$ 即 $\frac{u-2}{u}=Cx^2$.

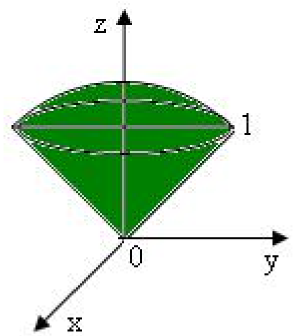
以 $\frac{y}{x}=u$ 代入上式, 得 $y-2x=Cx^2y$. 代入初始条件 $y|_{x=1}=1$, 得 $C=-1$,

故特解为 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

四、(本题满分 6 分)

【解析】将 I 表成 $I=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2z+z-2z=z .$$



又 Σ 是封闭曲面, 可直接用高斯公式计算.

记 Σ 围成区域 Ω , 见草图, Σ 取外侧, 由高斯公式得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iiint\limits_{\Omega}zdV .$$

用球坐标变换求这个三重积分.

在球坐标变换下, Ω 为: $0\le\theta\le2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le\sqrt{2}$, 于是

$$I=\iiint_{\Omega} z dV=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos\varphi\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\sin\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{\sqrt{2}}=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

五、(本题满分 7 分)

【解析】先将级数分解,

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n .$$

第二个级数是几何级数,它的和已知

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}.$$

求第一个级数的和转化为幂级数求和. 考察

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}(|x|<1) .$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}=(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n)''=(\frac{1}{1+x})''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{2^n}=\frac{1}{2^2}S(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\frac{2}{(1+\frac{1}{2})^3}=\frac{4}{27}.$

因此原级数的和 $A=\dfrac{4}{27}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{22}{27}.$

六、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分.)

(1)【解析】**证法一**:由拉格朗日中值定理可知,在 $(0,x)$ 存在一点 ξ,使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)=xf'(\xi) ,$$

即 $f(x)=xf'(\xi)+f(0)$.

因为 $f'(\xi)\ge k>0$,所以当 $x\to+\infty$ 时, $xf'(\xi)\to+\infty$,故 $f(x)\to+\infty$.

由 $f(0)<0$, 所以在 $(0,x)$ 上由介值定理可知, 必有一点 $\eta\in(0,x)$ 使得 $f(\eta)=0$.

又因为 $f'(\xi)\geq k>0$, 故 $f(x)$ 为严格单调增函数, 故 η 值唯一.

证法二：用牛顿-莱布尼兹公式, 由于

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt\geq f(0)+\int_0^x kdt=f(0)+kx\ ,$$

以下同方法 1.

(2)【解析】先将不等式做恒等变形:

因为 $b>a>e$, 故原不等式等价于 $b\ln a>a\ln b$ 或 $\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$.

证法一：令 $f(x)=x\ln a-a\ln x,\ \ (x>a>e)$, 则 $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}$.

因为 $x>a>e$, 所以 $\ln a>1, \dfrac{a}{x}<1$, 故 $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}>0$.

从而 $f(x)$ 在 $x>a>e$ 时为严格的单调递增函数, 故 $f(x)>f(a)=0,\ \ (x>a>e)$.

由此 $f(b)=b\ln a-a\ln b>0$, 即 $a^b>b^a$.

证法二：令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\ (x>e)$, 则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\in(e,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 为严格的单调递减函数, 故存在 $b>a>e$ 使得

$$f(b)=\frac{\ln b}{b}<f(a)=\frac{\ln a}{a}$$

成立. 即 $a^b>b^a$.

七、(本题满分 8 分)

【解析】写出二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$, 它的特征方程是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-a\\0&-a&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0\ .$$

f 经正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 那么标准形中平方项的系数 1, 2, 5 就是 A 的特征值.

把 $\lambda=1$ 代入特性方程, 得 $a^2-4=0\Rightarrow a=\pm2$.

因 $a>0$ 知 $a=2$. 这时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1=1$, 由 $(E-A)x=0$, $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得 $X_1=(0,1-1)^T$.

对于 $\lambda_2=2$, 由 $(2E-A)x=0$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得 $X_2=(1,0,0)^T$.

对于 $\lambda_3=5$, 由 $(5E-A)x=0$, $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得 $X_3=(0,1,1)^T$.

将 X_1,X_2,X_3 单位化, 得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

故所用的正交变换矩阵为

$$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

【相关知识点】二次型的定义：含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式(即每项都是二次的多项式)

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad 其中\ a_{ij}=a_{ji},$$

称为 n 元二次型. 令 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$, $A=\left(a_{ij}\right)$, 则二次型可用矩阵乘法表示为

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx,$$

其中 A 是对称矩阵 $\left(A^T=A\right)$, 称 A 为二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的矩阵.

八、(本题满分 6 分)

【解析】**证法一**：对 B 按列分块，记 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$，若

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0,$$

即 $$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0,\quad \text{亦即}\quad B\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0.$$

两边左乘 A，得 $AB\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$，即 $E\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$，亦即 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$.

所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 线性无关.

证法二：因为 B 是 $m\times n$ 矩阵，$n<m$，所以 $r(B)\le n$.

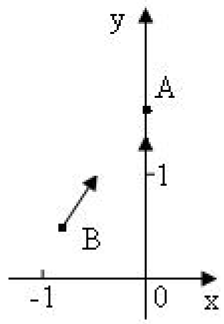
又因 $r(B)\ge r(AB)=r(E)=n$，故 $r(B)=n$. 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 线性无关.

【相关知识点】1. 向量组线性相关和线性无关的定义：存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；否则，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

2. 矩阵乘积秩的结论：乘积的秩小于等于单个矩阵的秩

九、（本题满分 6 分）

【解析】如图，设当 A 运动到 $(0,Y)$ 时，B 运动到 (x,y).



由 B 的方向始终指向 A，有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-Y}{x-0}$，即

$$Y=y-x\frac{dy}{dx}. \qquad (1)$$

又由 $v=\dfrac{dY}{dt}$，$2v=\sqrt{(\dfrac{dy}{dt})^2+(\dfrac{dx}{dt})^2}$，得

$$\sqrt{(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dx}{dt})^2}=2\frac{dY}{dt}.$$

由题意，$x(t)$ 单调增，$\dfrac{dx}{dt}>0$，所以 $\dfrac{dx}{dt}\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}=2\dfrac{dY}{dt}$. 亦即

$$\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=2\frac{dY}{dx}. \qquad (2)$$

由(1),(2)消去Y, $\frac{dY}{dx}$,便得微分方程 $\qquad 2xy''+\sqrt{1+y'^2}=0$.

初始条件显然是$y(-1)=0, y'(-1)=1$.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分, 把答案填在题中横线上.)

(1)**【解析】**可以用古典概型, 也可以用抽签原理.

方法一:从直观上看, 第二次抽出次品的可能性与第一次抽到正品还是次品有关, 所以考虑用全概率公式计算.

设事件$B_i=$"第i次抽出次品" $i=1,2$, 由已知得$P(B_1)=\frac{2}{12}, P(\overline{B_1})=\frac{10}{12}$,

$P(B_2\mid B_1)=\frac{1}{11}, P(B_2\mid \overline{B}_1)=\frac{2}{11}$. 应用全概率公式

$$P(B_2)=P(B_1)P(B_2\mid B_1)+P(\overline{B}_1)P(B_2\mid \overline{B}_1)=\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}+\frac{10}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{6}.$$

方法二:对填空题和选择题可直接用抽签原理得到结果.

由抽签原理(抽签与先后次序无关), 不放回抽样中第二次抽得次品的概率与第一次抽得次品的概率相同, 都是$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

(2)**【解析】方法一:**可以用分布函数法, 即先求出分布函数, 再求导得到概率密度函数.

由已知条件, X在区间$(0,2)$上服从均匀分布, 得X的概率密度函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}.$$

先求F的分布函数$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$.

当$y\le 0$时, $F_Y(y)=0$; 当$y\ge 4$时, $F_Y(y)=1$; 当$0<y<4$时,

$$F_Y(y)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{X^2\le y\right\}=P\left\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}F_X(x)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{0}0dx+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{\sqrt{y}}{2}.$$

即 $$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \frac{\sqrt{y}}{2}, & 0<y<4,\\ 1, & y\ge 4.\end{cases}$$

于是,对分布函数求导得密度函数

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}},\ 0<y<4\\ 0,\qquad 其他\end{cases}.$$

故随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

方法二：也可以应用单调函数公式法.

由于 $y=x^2$ 在 $(0,4)$ 内单调,反函数 $x=h(y)=\sqrt{y}$ 在 $(0,2)$ 内可导,且导数

$h'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ 恒不为零,因此,由连续型随机变量函数的密度公式,得到随机变量 Y 的概率

密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\left|h'(y)\right|f_X\left[h(y)\right],\ 0<y<4\\ \qquad 0,\qquad\qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{2},\ 0<y<4,\\ \qquad 0,\qquad 其他,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}},\ 0<y<4,\\ \quad 0,\qquad 其他.\end{cases}$$

故随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

十一、(本题满分 6 分)

【解析】(1)第一问是常规问题,直接运用公式对其计算可得期望与方差.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}e^{-|x|}dx=0\ .$$

(因为被积函数 $\dfrac{x}{2}e^{-|x|}$ 是奇函数,积分区域关于 y 轴对称,所以积分值为 0.)

$$\begin{aligned}D(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2}e^{-|x|}dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-|x|}dx\overset{\text{偶函数积分的性质}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2}\cdot2\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx\\&=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx\\&=2(-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx)\\&=2(-e^{-x}\Big|_0^{+\infty})=2.\end{aligned}$$

(2) 根据协方差的计算公式 $cov(X,Y)=E(X\,|\,X\,|)-E(X)E(|\,X\,|)$ 来计算协方差.

因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{2}e^{-|x|}dx=0$,所以

$$Cov(X,Y) = E(X\,|\,X\,|) - 0E(|\,X\,|) = E(X\,|\,X\,|)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\,x\,|\,f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} x\,|\,x\,|\,e^{-|x|}dx = 0.$$

（因为被积函数 $\frac{x}{2}|\,x\,|\,e^{-|x|}$ 是奇函数, 积分区域关于 y 轴对称, 所以积分值为 0.）

所以 X 与 $|\,X\,|$ 不相关.

(3) 方法一：

对于任意正实数 $a(0 < a < +\infty)$, 事件 $\left\{|\,X\,| < a\right\}$ 含于事件 $\left\{X < a\right\}$, 且

$0 < P\left\{X < a\right\} < 1$,

所以 $P\left\{X < a, |\,X\,| < a\right\} = P\left\{|\,X\,| < a\right\}$, $P\left\{X < a\right\}P\left\{|\,X\,| < a\right\} < P\left\{|\,X\,| < a\right\}$,

可见 $P\left\{X < a, |\,X\,| < a\right\} \neq P\left\{|\,X\,| < a\right\}P\left\{X < a\right\}$,

因此 X 与 $|\,X\,|$ 不独立.

方法二：因为 $P\{X \le 1\} = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 1 - \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}dx = 1 + \frac{1}{2}e^{-x}\Big|_{1}^{+\infty} = 1 - \frac{1}{2e}$ ；

又 $P\{|X| \le 1\} = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{0}^{1} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{0}^{1} = 1 - \frac{1}{e}$ ，显然有

$P\{X \le \mathbf{1}, |X| \le \mathbf{1}\} = P\{|X| \le \mathbf{1}\} \ne P\{X \le \mathbf{1}\}P\{|X| \le \mathbf{1}\}$ ，因此 X 与 $|\,X\,|$ 不独立.