2020年考研数学一真题解析

一、选择题

(1)【答案】 D

【解析】 (方法一) 利用结论:若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim g(x)$,则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

(A)$\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$.

(B)$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$.

(C)$\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^{\sin x}t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$.

(D)$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t\sim\int_0^{1-\cos x}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\sim\int_0^{\frac{1}{2}x^2}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}x^5$.

故应选(D).

(方法二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别是 x 的 m 阶和 n 阶无穷小,则$\int_0^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$ 是 $x\to 0$ 时的 $n(m+1)$ 阶无穷小.

(A)$\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t$,$m=2$,$n=1$,则 $n(m+1)=3$.

(B)$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t$,$m=\frac{3}{2}$,$n=1$,则 $n(m+1)=\frac{5}{2}$.

(C)$\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t$,$m=2$,$n=1$,则 $n(m+1)=3$.

(D)$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t$,$m=\frac{3}{2}$,$n=2$,则 $n(m+1)=5$.

故应选(D).

(2)【答案】 C

【解析】 (方法一) 直接法

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\cdot 0=0$$

故应选(C).

(方法二) 排除法

取 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{|x|}}=0,\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0$$

但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,则排除选项(A),(B).

若取 $f(x)=x$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,但

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\neq 0$$

排除(D),故应选(C).

(3)【答案】 A

【解析】 利用函数 $z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0)处可微的充要条件 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-f'_x\Delta x-f'_y\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$.

因为 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可微,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}x-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

而 $\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}x+\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}y-f(x,y)$.

有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$,即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

正确答案选(A).

(4)【答案】 A

【解析】 由阿贝尔定理,当 $|r|<R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 收敛,进而,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛.

所以,当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时,$|r|\geqslant R$. 答案选(A).

【评注】 解析中用到了原命题成立时,它的逆否命题一定成立.

(5)【答案】 B

【解析】 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换得到 $\boldsymbol{B}$,故存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t=\boldsymbol{B}$$

因 $\boldsymbol{P}_i$ 均可逆,故有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$,记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$ 故应选(B).

(6)【答案】 C

【解析】 由直线标准方程知 L_1,L_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1,b_1,c_1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(a_2,b_2,c_2)^{\mathrm{T}}$,直线 L_1,L_2 分别经过 $A(a_2,b_2,c_2),B(a_3,b_3,c_3)$ 两点. 于是 L_1,L_2 交于一点 $\Leftrightarrow\begin{cases}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\overrightarrow{AB}|=0\\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\text{ 不平行}\end{cases}$,即有

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\overrightarrow{AB}|=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3-a_2\\ b_1&b_2&b_3-b_2\\ c_1&c_2&c_3-c_2\end{vmatrix}=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

从而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

(7)【答案】 D

【解析】 A、B、C 中恰有一个事件发生即$(A\cup B\cup C)-(AB\cup BC\cup AC)$. 因为 $P(AB)=0$,故 $P(ABC)=0$. 所以恰有一个事件发生可以只考虑$(A\cup B\cup C)-(BC\cup AC)$的概率

$$P((A\cup B\cup C)-(BC\cup AC))=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AC)-P(BC)-P(AC)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

答案选(D).

(8)【答案】 B

【解析】

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$EX=\dfrac{1}{2}$,$DX=\dfrac{1}{4}$,X_i 独立同分布,方差存在,根据中心极限定理

$\sum_{i=1}^{100} X_i$ 近似服从正态分布 $N\left(100\times\frac{1}{2},100\times\frac{1}{4}\right)$，即 $N(50,25)$.

$$P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leqslant 55\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \leqslant \frac{55-50}{\sqrt{25}}\right\} = \Phi\left(\frac{55-50}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(1)$$

答案选(B).

二、填空题

(9)【答案】 -1

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(e^x-1)}{(e^x-1)\ln(1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-e^x}{2} = -1$$

(10)【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{1}{t}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(-\frac{1}{t^2}\right)\frac{dt}{dx} = \left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = -\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}.$$

则 $\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=1} = -\sqrt{2}$.

(11)【答案】 $n+am$

【解析】 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]dx = -f'(x)\Big|_0^{+\infty} - af(x)\Big|_0^{+\infty}$

只需求出 $f'(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 及 $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 即可.

微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$$

当 $a>2$ 时，λ_1,λ_2 为两负实根，$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$,

当 $a=2$ 时，$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，$f(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$,

当 $0<a<2$ 时，$\lambda_{1,2} = \left(C_1\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right)e^{-\frac{a}{2}x}$.

不论如上哪种情形，均有 $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，$f'(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. 因而

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]dx = -f'(x)\Big|_0^{+\infty} - af(x)\Big|_0^{+\infty}$$
$$= f'(0) + af(0) = n + am.$$

(12)【答案】 $4e$

【解析】 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导，利用 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{x(xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = e^{x^3y^2} + xe^{x^3y^2}\cdot 3x^2y^2$$

所求$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,1)} = 4e$.

(13)【答案】 $a^2(a^2-4)$

【解析】 由行列式性质恒等变形，例如把 2 行加到 1 行，3 行加到 4 行，再把 1 列的 -1 倍加到 2 列，4 列的 -1 倍加到 3 列

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$$

【评注】 基本计算题，解法非常多，也可每列都加到第 1 列，再消 0，…

(14)【答案】 $\frac{2}{\pi}$

【解析】 $X \sim U\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$Y = \sin X$，$EX = 0$.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY = E(XY) = E(X\sin X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cdot\frac{1}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(\sin x - x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

三、解答题

(15)【解】 由$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - y = 0 \\ f'_y = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$得驻点为$(0,0)$，$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$.

可计算 $A = f''_{xx} = 6x$，$B = f''_{xy} = -1$，$C = f''_{yy} = 48y$

判别式 $\Delta = AC - B^2 = 288xy - 1$.

在$(0,0)$点处，$\Delta = -1 < 0$，不是极值点；

在$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$点处，$\Delta = 3 > 0$ 且 $A = 1 > 0$，取极小值为 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{216}$.

(16)【分析】 挖去奇点(0，0)，用格林公式

【解】 取 $L_1: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$（$\varepsilon^2$ 足够小），方向为顺时针方向，

则 $I = \oint_{L+L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2}dy - \oint_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$

令 $P = \frac{4x-y}{4x^2+y^2}$，$Q = \frac{x+y}{4x^2+y^2}$，

计算得$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4x^2-8xy+y^2}{(4x^2+y^2)^2}$

因而 $I = 0 - \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1}(4x-y)dx + (x+y)dy = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1} 2dxdy$

其中 $D_1 = \{(x,y) \mid 4x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2\}$.

所以 $I = \frac{2}{\varepsilon^2}\times\pi\times\varepsilon\times\frac{\varepsilon}{2} = \pi$.

(17)【分析】 得到和函数的微分方程，解微分方程求出和函数.

【解】 由阿达玛公式 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} = 1$.

幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = \dfrac{1}{\rho} = 1$，所以，当 $|x| < 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛.

令 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^n + 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 1 = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 1$$

即 $S'(x) = xS'(x) + \dfrac{1}{2} S(x) + 1$，$\dfrac{S'(x)}{S(x)+2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-x}$.

$\ln|S(x)+2| = -\dfrac{1}{2}\ln|1-x| + \ln C_1$

$|S(x)+2| = \dfrac{C_1}{\sqrt{1-x}}$，$S(x)+2 = \dfrac{\pm C_1}{\sqrt{1-x}}$.

亦是 $S(x)+2 = \dfrac{C}{\sqrt{1-x}}$，

由 $S(0) = 0$ 得 $C = 2$，所求和函数为 $S(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} - 2$.

(18)【分析】 利用投影轮换法.

【解】 曲面 $\Sigma: z = \sqrt{x^2+y^2}$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{z'_x, z'_y, -1\} = \left\{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right\}$

则 $I = \iint\limits_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \{-z'_x, -z'_y, 1\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint_{\Sigma} \left[-\frac{x(xf(xy)+2x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(yf(xy)+2y+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} + zf(xy) + z\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} \left[-\sqrt{x^2+y^2} f(xy) - 2\sqrt{x^2+y^2} + zf(xy) + z\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (D: 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4)$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 r \cdot r \mathrm{d}r = \frac{14}{3}\pi$$

【评注】 本题只给出 $f(x)$ 连续，因而不能采取补曲面高斯公式计算.

(19)【证明】 (Ⅰ) 设 $|f(c)| = M$.

若 $c \in (0,1]$，由拉格朗日定理知存在 $\xi \in (0,c)$，使

$$f'(\xi) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{f(c)}{c}$$

从而有 $|f'(\xi)| = \dfrac{|f(c)|}{c} = \dfrac{M}{c} \geqslant M$.

若 $c \in (1,2]$，同理存在 $\xi \in (1,2)$，使

$$f'(\xi) = \frac{f(2)-f(c)}{2-c} = \frac{-f(c)}{2-c}$$

从而有 $|f'(\xi)| = \dfrac{|f(c)|}{2-c} = \dfrac{M}{2-c} \geqslant M$.

综上所述，存在 $\xi \in (0,2)$，使得 $|f'(\xi)| \geqslant M$.

(Ⅱ) 若 $c \in [0,1)$，则

$$M = |f(c)| = |f(c) - f(0)| = |f'(\xi)| c \leqslant Mc$$

由于 $0 \leqslant c < 1$，则 $M = 0$.

同理，当 $c \in (1,2]$ 时，也可得 $M = 0$.

若 $c = 1$，且 $M > 0$

$$M = |f(1)| = \left|\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x < M$$

矛盾，则 $M = 0$. 原题得证.

(20)【解】 (Ⅰ)二次型 f 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为二次型 g. 记二次型 f,g 的矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$$

因 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，于是 $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$，$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$，即 $\begin{cases} a + b = 5, \\ ab = 4. \end{cases}$

又因 $a \geqslant b$，故 $a = 4, b = 1$.

(Ⅱ)对二次型 $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 和 $g = 4y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2$，

只要令 $\begin{cases} x_1 = y_2, \\ x_2 = -y_1, \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是正交矩阵合于所求.

【评注】 如求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量并单位化构造正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，

经 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{z}$ 得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 5z_1^2$.

类似构造正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_2$ 使 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = 5z_1^2$，即 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{z}$ 有 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{y}$，

从而 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{y}$ 而得 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ 亦可.

(21)【解】 (Ⅰ)因 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \neq k\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 不共线，即 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$ 可逆.

或(反证法)若 $\boldsymbol{P}$ 不可逆，有

$$|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}| = 0$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 成比例，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha}$. 又 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量与已知条件矛盾.

(Ⅱ)(方法一) 由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} - 6\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = 6\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{P}$ 可逆，于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

记 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，而 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$ 特征值 $2, -3$.

于是 $\boldsymbol{A}$ 有 2 个不同特征值从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(方法二) 因 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})$，

由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} - 6\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，

于是 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，

即 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}$，

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha}) = 2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha})$，

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是特征向量，有 $\boldsymbol{A\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$

从而 $\lambda = 2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，类似有 $\lambda = -3$ 是特征值. 下略.

(22)【解】 (Ⅰ)(X_1, Y) 的分布函数 $F(x,y)$

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= P\{X_1 \leqslant x, Y \leqslant y\} = P\{X_1 \leqslant x, X_3X_1 + (1-X_3)X_2 \leqslant y\} \\
&= P\{X_3 = 0\}P\{X_1 \leqslant x, X_3X_1 + (1-X_3)X_2 \leqslant y \mid X_3 = 0\} + \\
&\quad P\{X_3 = 1\}P\{X_1 \leqslant x, X_3X_1 + (1-X_3)X_2 \leqslant y \mid X_3 = 1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant y \mid X_3 = 0\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant x, X_1 \leqslant y \mid X_3 = 1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant x, X_1 \leqslant y\} \\
&= \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant x\}P\{X_2 \leqslant y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant \min(x,y)\} \\
&= \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(\min(x,y))
\end{aligned}
$$

(Ⅱ)Y 的分布函数

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{X_3X_1 + (1-X_3)X_2 \leqslant y\} \\
&= P\{X_3 = 0\}P\{X_3X_1 + (1-X_3)X_2 \leqslant y \mid X_3 = 0\} + \\
&\quad P\{X_3 = 1\}P\{X_3X_1 + (1-X_3)X_2 \leqslant y \mid X_3 = 1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{X_2 \leqslant y \mid X_3 = 0\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant y \mid X_3 = 1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{X_2 \leqslant y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant y\} = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

$Y \sim N(0,1)$.

(23)【解】 $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ $f(x) = F'(x) = \begin{cases} m\left(\dfrac{t}{\theta}\right)^{m-1} \cdot \dfrac{1}{\theta} e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

(Ⅰ)$P\{T > t\} = \int_t^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_t^{+\infty} = F(+\infty) - F(t) = e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, t > 0.$

$$
\begin{aligned}
P\{T > s+t \mid T > s\} &= \frac{P\{T > s+t, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > s+t\}}{P\{T > s\}} = \frac{e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m}}{e^{-(\frac{s}{\theta})^m}} \\
&= e^{-(\frac{t+s}{\theta})^m + (\frac{s}{\theta})^m}
\end{aligned}
$$

(Ⅱ)给定 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，似然函数为

$$
L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i) = \prod_{i=1}^{n} m\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{m-1} \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m} = m^n \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i^{m-1}}{\theta^m} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m}
$$

$$
\ln L(\theta) = n\ln m + \sum_{i=1}^{n}(m-1)\ln t_i - mn\ln\theta - \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^m}{\theta^m}
$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -mn\dfrac{1}{\theta} - \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-m)t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0$，$-\dfrac{n}{\theta} + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0$，

解得 $\theta^m = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^m$，不难验证为最大值.

最大似然估计值 $\hat{\theta} = \sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^m}$.