

Standardbinomialmodellen — og lidt om Black-Scholes + implicit volatilitet

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2020

30. september

Afsnit 5.5: Standardbinomialmodellen

Aktiekursen går multiplikativt op og ned iht.

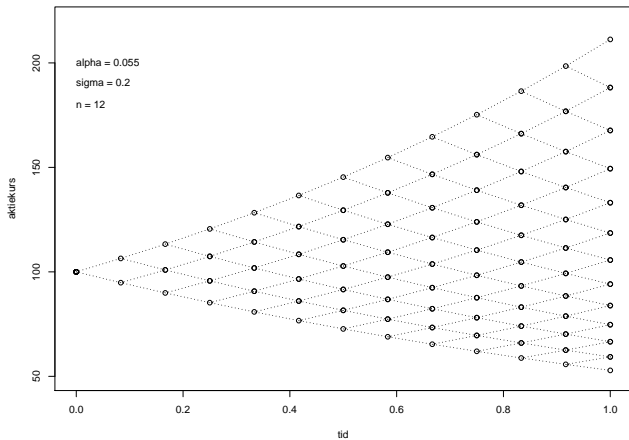
$$\begin{aligned}u &= \exp(\alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}) \\d &= \exp(\alpha\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}),\end{aligned}$$

hvor α og σ er kendte konstanter. Lad os sige op/ned p -ssh begge er $1/2$.

Dukker op i eksamensopgaver på lidt forskellige måder – se fx opgave 1, MatFin1, oktober 2019.

I afsnit 2.7.1-10 i Röman, I har en hoben forskellige binomialmodelspecifikationer – men faktisk ikke lige denne. (Cox-Ross-Rubinstein og Jarrow-Rudd er specialtilfælde.)

standardbinomialmodellen



Ved at Taylor-udvilke exp-fkt får vi

$$E_t^P \left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} \right) = \mu \Delta t + o(\Delta t),$$

hvor $\mu = \alpha + \sigma^2/2$ og størrelsesordensnotationen “ $o(\Delta t)$ ” betyder at restleddet går hurtigere imod 0 end Δt .

Taylor-udvikler man noget mere:

$$\text{var}_t^P \left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} \right) = \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t),$$

Hvorfor restled og ikke eksakt? For bedre at kunne se strukturen.

Vi kan bruge det til at estimere μ , α og specielt σ .

Den sædvanlige $q = (R - d)/(u - d)$ lløber ingen steder.

Vi har (uden eksplicit at bruge formen af q)

$$E_t^Q \left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} \right) = r\Delta t + o(\Delta t),$$

mens var_t^Q ikke ændres. (Her skal der “tayloreres” og bruges formen af q til køerne kommer hjem.) Det sidste kan ses som en illustration af noget, der kaldes Girsanovs sætning.

Derfor: $n \rightarrow \infty$ -grænseværdier for optionspriser eksisterer og afhænger ikke af α — som derfor ofte udlades. (Og $p = 1/2$ heller ikke nødvendigt.)

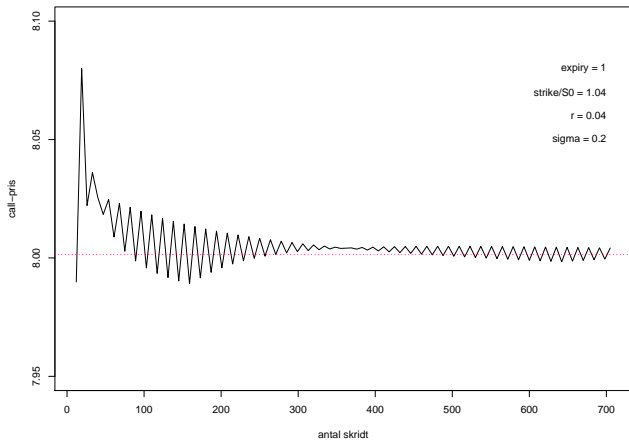
Hjertet i prisfastsættelsesalgoritmen ser sådan ud:

```
call[,n+1]<-pmax(S0*u^(0:n)*d^(n:0)-strike,0)

for (i in n:1) {
  for (j in 1:i){
    call[j,i]<-(q*call[j+1,i+1]+(1-q)*call[j,i+1])/R
  }
}
```

(Pas på: Matricer og koodinatsystemer bytter om på 1.- og 2.-akser.)

konvergens af call-priser i std'binomialmodel



Nyttigt trick: Skift til log-afkast(rater):

$$a_{t,t+h} = \ln(S(t+h)/S(t)),$$

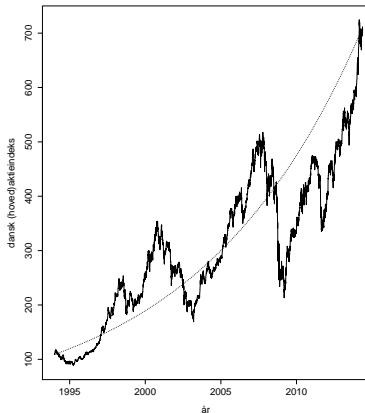
hvor h kaldes afkasthorisonten.

Fordel: Log-afkast er additive i tid, dvs.

$$a_{t,t+n*\Delta t} = \sum_{i=1}^n a_{t+(i-1)*\Delta t,t+i*\Delta t}.$$

Det er simple afkast ikke (jf. opgave på ugeseddel). De er det til genæld på tværs af aktiver. (Men hvis horisonten er kort, så er der ikke stor forskel.)

Data: Daglige observationer af KFX/C20-indeks(afkast)
1994-2014.(Dividendejustering glemmer vi alt om.)



Estimator:

Horizon (h)	average of a_h 's	$\hat{\alpha}$	std. dev. of a_h 's	$\hat{\sigma}$
1 day	0.000399	0.101 [0.042]	0.0123	0.195 [0.0019]
5 days (~ 1 week)	0.00181	0.101 [0.043]	0.0280	0.198 [0.0042]
21 days (~ 1 month)	0.00734	0.100 [0.043]	0.0578	0.202 [0.0089]

Table 5.1: Estimation of parameters of the standard binomial model on Danish data 1994-2014. Numbers in square brackets are standard errors.

Opgave: Genskab disse tal selv og opdater til 2020-data.

Variationen i momenter af rå afkast: Man skal huske tidsskalering. Binomialmodellen lægger en ganske speciel sådan på, men der vil altid være en. (*Sarkastisk bemærkning til økonometrikere.*)

Variationen i $\hat{\alpha}$ 'erne : “Heltalsdivisionseffekt”. (Og ja, med log-afkast er det α , der estimeres.) Disse estimater er generelt ustabile.

Variation i $\hat{\sigma}$ 'erne kan opstå pga. manglende uafhængighed af afkast. (+ lidt “heltal”). Men vi har ihvertfald fat i et eller andet rigtigt mht. tidsskaleringen. Disse estimater er generelt stabile.

Tillægsspørgsmål: Sker der noget i weekenden?

dag-til-dag	$\hat{\sigma}$
mandag \rightarrow tirsdag	0.189
tirsdag \rightarrow onsdag	0.200
onsdag \rightarrow torsdag	0.192
torsdag \rightarrow fredag	0.178
fredag \rightarrow mandag	0.214

Ikk' meget! Standardafvigelseerne er ihvertfald ikke en faktor $\sqrt{3}$ større. Ergo for finansmodelleringsformål er der ca. 250 dage i et år. (Men pas på i rentemarkeder, hvor der ofte bruges noget, der ligner faktiske, fysiske dage i kontraktspesifikationen. Du betaler også rente på dit lån i weekenden.)

Afsnit 7.1-3: Black-Scholes' model og formel

I grænsen for std'binom'modellen sidder der en kontinuert model, hvor aktiekursen er lognormalfordelt, en geometrisk brownisk bevægelse.

Arbitragefrie call-optionspriser er givet ved Black-Scholes' formel

$$\begin{aligned} \text{call}(t) = & S(t) \Phi \left(\frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \\ & - e^{-r(T-t)} K \Phi \left(\frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right), \end{aligned}$$

hvor Φ er std'-normalfordelingsfkt'.

Man kan opskrive call-optionsprisen i std'binomialmodellen, så den ligner Black-Scholes' formel, fx Röman, I, 2.7.17.

Man bevise konvergensen stringent med (en tilpas kraftig version af) den centrale grænseværdisætning.

I skal have hørt om Black-Scholes, men der kommer ikke “regnetekniske” eksamensopgaver i det i MatFin1. Emnet behandles i stor grad MatFin2.

Afsnit 7.4- Implicit volatilitet

Vi kan se Black-Scholes' call-pris-formel som en funktion af volatiliteten σ ; $\text{call}^{BS}(\sigma; \dots)$.

For en bestemt observeret call-pris, call^{obs} , kan vi definere og beregne dens implicitte volatilitet, σ^{imp} som løsningen til ligningen

$$\text{call}^{BS}(\sigma^{imp}; \dots) = \text{call}^{obs}.$$

Overvejelser viser, at entydighed (monotonicitet) og eksistens (Mertons tunnel) er i orden. Og at call- og put-optionspriser er voksende i volatilitet.

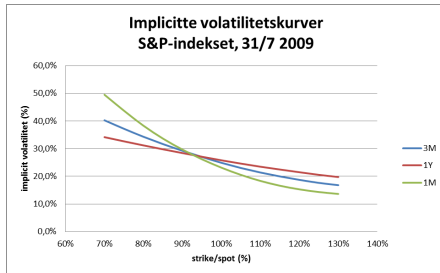
Ofte angiver (*kvoterer*) markedsdeltagere implicit volatilitet i stedet for priser.

Det betyder ikke, at de tror på/antager B-S-modellen holder. Snarere tværtimod: Hvis den gjorde, så ville alle implicitte volatiliteter være ens.

Ens imp' vol' observeres ikke i data. Man ser derimod et *smile* eller et *skew* over strike-priser.

Med rigtige data

I aktie- og rentemarkeder ser man typisk (som nedenfor) *skew*, dvs. at implicitte volatiliteter er aftagende i strike. Et *smile*, er hvor kurven af implicitte volatiliteter har minimum omkring $K \approx S(t)$, *at-the-money*; dette ses ofte i valutamarkeder.



Om *skew* og *smile*

Smile: Tungere-end-normalfordeling-haler for afkaststrater.

Skew: Negativ korrelation mellem underliggende og volatilitet; venstreskæv afkaststratfordeling.

Udbud/efterspørgsel eller psykologi: *Fear and greed*; put-optioner som forsikring, call-optioner til spekulation.

Modelteknisk, I: Spring \leadsto smile – og har specielt effekt for korte løbetider.

Modelteknisk, II: Stokastisk volatilitet \leadsto mere masse i halerne. Med negativ korrelation mellem aktieafkast og volatilitet (når markedet falder, bli'r alle mere nervøse) \leadsto skew. (Men det kan man faktisk også med en simpel normalfordelt model for aktien.)

Fra Fin1-eksamen juni 2014

Spg. 3b

Du er begyndt i en kvantitativ analyse-stilling (som *quant*) i en bank. En af bankens *traders* (en, der faktisk handler med optioner) kommer og siger til dig:

Når jeg handler put-optioner, så er det typisk til en højere volatilitet, end når jeg handler call-optioner. Kan du lave en model for det?

Giver det mening, hvad traderen siger? Hvad svarer du traderen? (Dit svar forventes forståeligtvis begrundet.)

19					
20	3b				
21	Når traderen sig "handler til volatilitet" mener han "den implicite volatilitet, handelsprisen svarer til".				
22	Out-of-the-money optioner er de mest likvide, og/så der ligger i traderens udsagn nok implicit				
23	en strike-afhængighed.				
24	(Så det er ikke decideret vrøvl, hvad traderen siger; det er det sjældent for den slags folk.)				
25	Det, der beskrives er et "skew" i implicite volatiliteter (imp' vol' aftagende i strike) ;				
26	det har vi set er "empirisk plausibelt".				
27	Man kan eks'vis forklare det med en model hvor aktie-volatilitet og aktie-afkast er negativt korrelerede.				
28					