Amerikanske optioner

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2020

20. oktober

Amerikanske optioner

Optioner med mulighed for førtidig indfrielse. Afsnit 6.5 i noterne, afsnit 2.7.14 i Röman, I – og ofte i opgaver.

Kaldes af historiske årsager *amerikanske*; det ku' ligeså godt ha' været *orange* eller *varmforzinkede*. (Eller ihvertfald næsten ligeså godt; se side nederst side 4 her.)

Optioner med kun et, fast indfrielsestidpunkt kaldes europæiske.

Prisfastsættelse: I hver knude: Tjek om optionen er mere værd *død* end *i live*. Hvis ja, så indfri og byt ud

Eller som formel/ligning:

$$\pi_g^{AMR}(t) = \max\left\{ g(S(t)), \frac{1}{1+\rho_t} \mathrm{E}_t^Q(\pi_g^{AMR}(t+1)) \right\}, \qquad (*)$$

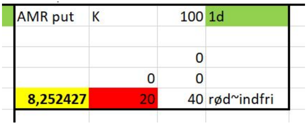
hvor g betegner payoff-funktionen (fx $g(x) = (K - x)^+$ for en put-option) og $\pi_g^{AMR}(T) = g(S(T))$.

Ligning (*) kan ses som et specialtilfælde af dynamisk programmering eller et eksempel på Bellmans optimalitetsprincip.

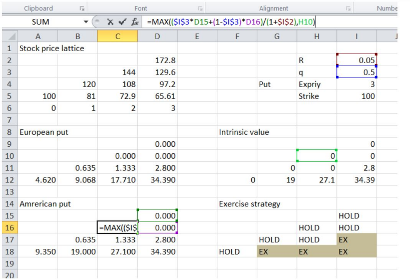
Ideen dukker op mange andre steder – fx hvis man vil vide, hvornår man skal *pull the goalie*.

Det er nemmere gjort end sagt – idet det dog er vigtigt, at man gør *præcis*, hvad formel (*) siger.

Regneeksempler: MatFin1, januar 2018, spg. 1d; *Example 27* i noterne.



AMR put	K	100	1d
		0	
	0	0	
8,252427	20	40	rød~indfri



Clipboard | Font | Alignment | Numbe

SUM | =MAX((I3*D15+(1-I3)*D16)/(1+I2),H10)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Stock price lattice								
2				172.8				R	0.05
3			144	129.6				q	0.5
4		120	108	97.2			Put	Expriy	3
5	100	81	72.9	65.61				Strike	100
6	0	1	2	3					
7									
8	European put					Intrinsic value			
9				0.000					0
10			0.000	0.000				0	0
11		0.635	1.333	2.800			0	0	2.8
12	4.620	9.068	17.710	34.390		0	19	27.1	34.39
13									
14	Amrerican put					Exercise strategy			
15				0.000					HOLD
16			=MAX((I	0.000				HOLD	HOLD
17		0.635	1.333	2.800			HOLD	HOLD	EX
18	9.350	19.000	27.100	34.390		HOLD	EX	EX	EX
19									
20									

Vigtigt specialtilfælde: Hvis renten er positiv bør amerikanske call-optioner på aktiver uden dividende aldrig indfris førtidigt. Bevis: Mertons tunnel-agtigt – idet man dog potentielt skal være forsigtig for at få skarpe uligheder.

Alle tre antagelser (call, $r > 0$ og $\delta = 0$) er vigtige; som gamle eksamensopgaver viser:

- For put-optioner kan førtidig indfrielse være optimalt selv for $r > 0$ & $\delta = 0$.
- $r = 0$ & $\delta > 0 \Rightarrow \text{Put}^{EU} = \text{Put}^{AMR}$
- $r < 0$ & $\delta = 0 \rightsquigarrow \text{Call}^{AMR} > \text{Call}^{EU}$
- Korollar: Put-call-pariteten holder ikke for amerikanske optioner.