Arbitrage-prisfastsættelse og lineær programmering; inkomplethed og ikke-arbitrage-intervaller

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2020

Måske 23. september

LP og 1. hovedsætning

For en 1-periode-model bestemt ved (π, D) kan vi betragte (*consider the following odd construction*) det lineære optimerings- eller programmeringsproblem (LP-problem):

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^N} \theta \cdot \pi \ \text{ u.b. } \ D^\top \theta \geq 0 \qquad \text{(P)}$$

Da 0-vektoren er del af det, vi optimerer over, så er den optimale værdi højest 0. Hvis den optimale værdi i punktet θ^* er < 0, så (a) er der arbitrage, (b) må løsningen til (P) være ∞ (gang θ^* med et stort tal).

Ergo: En fornuftig løsning til (P) er det samme som fravær af arbirage.

Det duale problem til (P) er

$$\max_{\psi \in \mathbb{R}^S} 0 \cdot \psi \;\; \text{u.b.} \;\; D\psi = \pi \text{ og } \psi \geq 0 \qquad \text{(D)}$$

Dualitetssætningen siger, at der er en fornuftig løsning til (P) præcis hvis der er en fornuftig løsning til (D). (Og at de optimale værdier er de samme.)

Men en løsning til (D) er en tilstandsprisvektor.

(I hvert fald op til nogle skarpe uligheder, der spiller dårligt sammen med LP-probemer. Løsningen ligger i en mere detaljeret undersøelse af “gratis lotto-kuponer”; ofte omtalt som type-1- og type-2-arbitrage. Det slap for med vores abstrakte bevis den anden dag.)

Ergo: Der er ingen arbitrage hvis og kun hvis, der findes en tilstandsprisvektor.

Tidligere var der i Mat Fin 1 fokus på hvordan man manuelt løser LP-problemer; simplex-algoritmen. Nu gør vi det bare med Excel (eller R eller ...), hvorved visse gamle eksamensspørgsmål bliver irrelevante.

Fikst til konkret at behandle høj-dimensionale inkomplette modeller – ses på næste slide.

Arbitragefrihed af inkomplette modeller

Hvis man ikke er helt tryg ved *kvalificeret gæt*-metoden til at finde tilstandsprisvektorer i inkomplette modeller, som tidligere har set, så kan man betragte (dvs. løse) familien ($j = 1, \ldots, S$) af LP-problemer

$$\max_{\psi \in \mathbb{R}^S} \psi_j \quad \text{u.b} \;\; \pi = D\psi, \;\; \psi \geq 0 \qquad (\mathrm{P}j)$$

Hvis alle de optimale løsninger er endelige og strengt positive, så er modellen arbitragefri.

Alternativt kan man løse en vilkårligt valgt agents nytteoptimeringsproblem og bruge Proposition 10 og Theorem 3 (the state-price utility theorem).

Udflugt: Hvor sandsynligt er det, at en tilfældigt konstrueret model er arbitragefri?

Svaret er: Langt mindre, end man umiddelbart ville tro.

Vi siger sædvanligvis, at arbitragefrihed er en mild/uskyldig/meget rimelig/nødvendig antagelse. Men hvis man ikke er forsigtig, vil man sagtens kunne komme til at konstruere modeller med arbitrage.

Betagt en model (π, D) med N aktiver og N tilstande, hvor hver indgang i π og D er noget, vi har fået ved at simulere uafhængige normalfordelinger med middelværdi 0.

Man kan vise at D er invertibel med sandsynlighed 1; $\psi = D^{-1}\pi$ giver derfor mening. Pr. symmetri er alle kvadrandter lige sandsynlige opholdssteder for ψ . Der er $(1/2)^N$ af dem, og kun 1 giver en arbitragefri model, så sandsynligheden for at modellen er arbitragefri er altså $(1/2)^N$.

Eksemplet er ekstremt, men arbitrage-problemet kan snildt blive reelt i praksis.

Inkomplethed og ikke-arbitrage-intervaller

I en arbitrage-fri (men ikke nødvendigvis komplet) 1-periode-model (π, D) indfører vi nu et nyt aktiv. Det har tid 1-betaling $x \in \mathbb{R}^S$ og tid 0-pris π_x. Vi antager, at dette ikke påvirker tid-0-priserne på de øvrige ("de gamle") aktiver.

Betragt nu

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^N} \theta \cdot \pi \quad \text{u.b.} \quad D^\top \theta \geq x \qquad \text{(U-P)}$$

og lad θ^* betegne den optimale løsning (der rimeligvis antages at eksistere).

I ord, så leder vi efter den billigste super-replikerende strategi.

Lemma *Tallet* $\bar{\pi} := \theta^* \cdot \pi$ *er en i arbitrage-forstand minimal øvre grænse for* π_x.

Bevis (Kort) Hvis $\pi_x > \bar{\pi}$ er der en tydelig arbitrage ($\rightsquigarrow$ øvre grænse). Hvis $\pi_x < \bar{\pi}$ *og* der er en arbitrage, der involverer en kort position i x, så er det i modstrid med minimaliteten af θ^* ($\rightsquigarrow$ minimal).

På samme måde vises løsningen ($\underline{\pi}$) til

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}^N} \theta \cdot \pi \;\text{ u.b. }\; D^\top \theta \leq x \qquad \text{(L-P)}$$

at være en maksimal nedre grænse for π_x.

Vi har således:

Sætning *Antag x-aktivet ikke kan replikeres. Den udvidede model er arbitrage-fri hvis og kun hvis* $\pi_x \in]\underline{\pi}, \bar{\pi}[$.

Disse er grænser, man i konkrete tilfælde (=eksamensopgaver; typisk nr. 2) kan udregne numerisk. I den forbindelse kan det være nyttigt at læse Example 3 i denne lille Excel-note.

Karakteristisk eksempel:
Mat Fin 1-eksamen december 2014, opgave 2 (med dette svar).