Rundt om put/call-pariteten
Optionseksempler

MatFin1 på CBS, tirsdag 8/9 2020

rolf@math.ku.dk

Dagens plan

Grundlæggende optionsteori fra afsnit 6.2; put- og call-optioner.

Put/call-pariteten (Proposition 16) – og hvad deraf følger.

Optioner overalt – eksempler til køerne kommer hjem (ofte via gamle eksamensopgaver).

Rentekurver, forwardrenter og swap-kontrakter (= ting, man kan behandle uden en specific stokastisk model) kommer først i morgen.

Put/call-pariteten

Proposition 16. *(Base-case put-call parity) Let* $call_t$ *and* put_t *denote prices of (European) expiry-*T*, strike-*K *calls and the prices on a certain stock. If the stock does not pay dividends during the life of the options, then we have*

$$call_t - put_t = S_t - KP(t,T).$$

Vi beviste det med et simpelt portefølje/replikationsargument. I noterne er der også et abstrakt bevis. Det vender vi tilbage til senere.

Ligeså Corollary 3, der er en mere general put/call-paritet (dvs. med dividender) – samt en forbindelse til forwardpriser.

Hvis der er dividender, bli'r S-leddet på højresiden på en eller anden måde anderledes:

- 2b fra Fin1-eksamen juni 2012, put/call-paritet med en slags dividende.
- 3c fra Fin1-eksamen juni 2013, put/call-paritet med en anden slags dividende.

Put/call-pariteten er nyttig fordi …

- Den kan fange fejlagtig intuition (fx ”hvis den forventede værdi at S(T) stiger, så stiger call-prisen"; pr. samme argument sku' put-prisen falde, men det er i modstrid m/ fast højreside i put-call-pariteten).

- Den fortæller, at hvis vi kan prisfaststte call-optioner, så kan vi lynhurtigt prisfastsætte put-optioner. (Men det kan vi ikke endnu!)

- Yndlingsaversion: ”Implicit volatilitet for put-optioner”

- Den er ofte ”fødselshjælper” beviser/udregninger/vurderinger/opgaver.

- For rigtige data kan bruge den til at estimere rente og dividender – og til at finde fejl i data

- Det kan teoretisk/teknisk set være behageligt at arbejde

med put-optionen, der har en begrænset (og kontinuert)

payoff-funktion (max(K-x,0)).

Put-call-pariteten set anderledes

Fra MatFin1-eksamen januar 2018

Spg. 3b
Forklar følgende udsagn ([redacted]).

> Put-call pariteten viser, at en call-option svarer til en gearet position i det underliggende aktiv suppleret med en tabsforsikring.

3b

(Lad os antage rente og dividende er 0.)

Put-call-pariteten siger at call(t) = put(t) + S(t) - K

Call-optionen kan altså ses som en lang positionen i aktien (+S) og i put'en (+put), samt en kort position i bankbogen. Man har altså købt sine aktiver for (delvist) lånte penge; dette er netop en gearet position. Put-optionen har positivt pay-off netop når aktiens kurs falder (til under striken) og kan derfor ses som en tabsforsikring.

Konverterbare realkreditobligationer

Fra MatFin1-eksamen oktober 2017:

Opgave 3

Spg. 3a

Forklar hvorfor et konverterbart lån (fra låntagers synspunkt) kan ses som en kort position i en inkonverterbar obligation kombineret med en lang position i en amerikansk call-option.

Svaret sakset

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	3a										
2											
3	Så længe låntager ikke konverterer, så betaler han rente og afdrag som på et almidenligt lån,										
4	hvilket netop svarer til en kort position in en obligation; man har solgt obligationen mod at										
5	få nogle penge i hånden på tid 0.										
6	Når/hvis der konvereteres, så betaler låntager den restetrende hovedstol, men har så ikke										
7	nogen fremtidige forpligtelser. Det kan vi se som at man køber en inkonverterbar obligation										
8	for pris= den resterende hovedstol, altså at man indfrier en call-option med strike = resterende hovedstol,										
9	hvorefter betalinegrne i fremtiden fra den lange og den korte position netter ud.										
10											

Tillægsspørgsmål:

- Hvorfor kan låntager overhovedet havde lyst til at betale sit lån tilbage før tid? Vil det ikke kun ske, hvis han vinder i lotto, mener at gæld er syndigt eller noget andet, vores modeller ikke tager højde for?

- Er det ikke bare godt for udlåner, hvis låntager betaler tilbage før, han skal?

- Låntager kan købe sin udstedte obligation tilbage på markedet til markedskurs (som teoretisk er <= 100). Dette kaldes often en delivery option. Hvorfor er dette egentlig ikke en option? (Kan være værdifuld alligevel.)

Alt det og meget mere kan man (snart) høre mig tale om i podcasten 'Rig på viden' https://www.podplay.com/da/podcast/390891/rig-pa-viden

Brexit, odds og tilstandspriser

Fra MatFin1, november 2016

<u>Spg. 4b</u>

Kort før EU-afstemningen 23/6 2016 gav (bookmaker-)markedet (decimal-)odds 5 på *Leave*, dvs. på at Storbritanien stemte for at forlade EU, altså Brexit.

- **Argumenter for** at når rentediskontering ignoreres, så viser dette, at den risiko-neutrale sandsynlighed for *Leave* var $\frac{1}{5}$.

6	**4b**
7	Vædder man 0.2 på Leave får man 1 kr. igen i tilfælde af Leave, 0 ellers. Det er altså en digital optionspris.
8	Og sådan en er pr. konstruktion (når vi glemmer rentediskontering) Q-sandsynligheden for udfaldet.
9	

Binary Backwards

A Twitter exchange leads to a useful discussion on option modeling. So, social media isn't all bad…

Anybody who writes exams or performs job interviews knows the value of questions. If they are based on true stories or statements, even better. To my delight this showed up in my Twitter timeline (Figure 1).

(Let us assume @FMTrader1 describes an at-the-money down-binary (or digital) option with one week (five business days; 5/252 years) to expiry.)

Starter for ten, Q1: *What is the initial price of the digital option?*

The payoff is either 1 or 0, thus 1 is the only case with a positive rate of return, so the price, p, must solve $(1-p)/p = 0.7$, i.e., $p = 0.588$.

Going into modeling, Q2: *Is that price consistent with the Black–Scholes model?* In the Black–Scholes model, the price of this at-the-money down-binary option is

$$1-\Phi\left(\frac{\tau\left(r-d-\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

which goes rapidly to ½ for $\tau\to 0$, meaning that with one week to expiry we'd need extreme parameter assumptions to generate a price of 0.588. So, in a word: No. (The question can also be phrased such that it works for students who've only heard of the standard binomial model, but either the question or the answer becomes much less elegant.)

Feeling smug, I sent out the questions to people in the quantitative financ community.

One of the recipients, let's call him KwantDaddy, chipped in with Q3 (at 10:39): *Is it consistent with a jump diffusion model (à la the Merton model)? If*

Swaptioner

Fra MatFin1, november 2018.

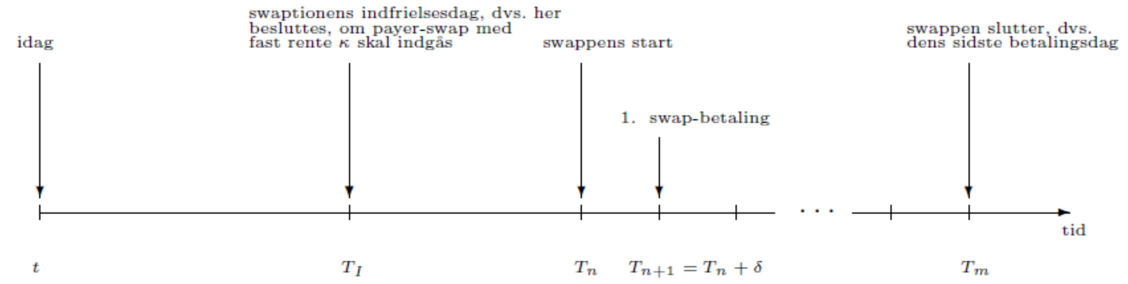
Svaret kan læses i den vejledende besvarelse – det er ikke super vigtigt lige her.

Et vink synes jeg næsten giver svaret; det viste sig ikke at være tilfældet.

Spg. 2b

Beregn tid 0-swap-renter.

Nu betragtes en såkaldt swaption, der – som ordet antyder – er en option på en swap-rente. Helt præcist er det en kontrakt, der på et indfrielsestidspunkt giver ret, men ikke pligt, til at indgå en payer-swap (dvs. man betaler fast rente) med fast rente κ, kaldet swaptionens strike-rente. Tidslinjen for betalinger (samt definition af notation) fremgår af figuren nedenfor:



Spg. 2c

Argumenter for at swaptionens værdi på indfrielsestidspunktet T_I (=dens *pay-off*) er

$$\delta(\omega(T_I; T_n, T_m, \delta) - \kappa)^+ \sum_{j=n+1}^{m} P(T_I, T_j),$$

hvor $\omega(T_I; T_n, T_m, \delta)$ er tid T_I-swaprenten for den underliggende swap, dvs.

$$\omega(T_I; T_n, T_m, \delta) = \frac{P(T_I, T_n) - P(T_I, T_m)}{\delta \sum_{j=n+1}^{m} P(T_I, T_j)}.$$

Et struktureret produkt

Fra Fin1-eksamen, juni 2011. (Findes også som en MatFin1-opgave.)

Based on a true story.

Betragt et finansielt aktiv, en såkaldt IFN-kontrakt, der på tid $T = 3$ har denne "pay-off"-struktur:

- Hvis $S(T) \leq 100$, så modtager investor (eller: ejeren) 100.
- Hvis $100 < S(T) \leq 125$, så modtager investor $0.8 \times S(T) + 20$.

1

- Hvis $S(T) > 125$, så modtager investor 120.

Spg. 1b
Vis at IFN-kontrakten kan skrives som en portefølje af nulkuponobligationer og call-optioner. **Beregn** den arbitrage-fri tid-0-pris på IFN-kontrakten.

Svar med en tegning: