Arbitrageteoriens hovedsætninger; 1. version (Eller: Resten af afsnit 4.2)

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2020

22. september

Formalisering

En matrix/vektor-formulering af en en-periode-model med N aktiver og S mulige udfald/tilstande på tid 1.

Matricen D angiver tid-1 betalinger. Rækker svarer til aktiver, søjler til tilstande. Helt specifikt: Aktiv i betaler $D_{i,j}$ i tilstand j.

Vektoren π angiver tid-0 priser; det koster π_i på tid 0 at købe det i'te aktiv.

En portefølje, θ, er en N-dimensional vektor; θ_i angiver det antal enheder af aktiv i, vi køber på tid 0.

En porteføljes betalingsrække (som søjlevektor) er: $D^\top\theta$. (Summe-spg.: Hvorfor? Transponeringer er ikke-trivielle her, selv i det kvadratiske tilfælde. Bemærk at vi kan skrive præcis det samme som summer, som prik-produkter eller via matrix-multiplikation.)

Arbitrage betyder, at der findes en portefølje så $(-\theta^\top\pi, \theta^\top D) > 0$. (Vektorpositivitetsnotation forklares.) Summe-spg.: Hvorfor er det "a free lunch"?

Komplethed betyder at $\forall y (\in \mathbb{R}^S)\ \exists \theta_y (\in \mathbb{R}^N)$ så $D^\top\theta_y = y$; i ord: Alt kan replikeres.

En tilstandsprisvektor ψ (i $\mathbb{R}^S$) er en vektor, der opfylder at $\psi >> 0$ og $\pi = D\psi$.

Sprogbrug om arbitragetyper

Omen arbitrage θ kan man møde flg. betegnelser:

- Stærk: $\theta \cdot \pi < 0$. ("Vi kan trykke penge",)
- Svag:$\theta \cdot \pi = 0$ og $D^\top \theta > 0$. ("Gratis lotto-kuponer".)
- Semi-stærk: $\theta \cdot \pi = 0$ og $D^\top \theta >> 0$.
- Risikofri: $\theta \cdot \pi = 0$ og $(D^\top \theta)_j = c > 0$ for alle j.

Desuden kan man støde på såkaldt <u>statistisk arbitrage</u> – men det er hverken pensum eller arbitrage!

Hovedsætninger

Proposition 7, arbitrageteoriens 1. hovedsætning (*first fundamental theorem of asset pricing*) – eller i hvert fald en variant heraf: En model er arbitrage-fri hvis og kun hvis den har en tilstandsprisvektor.

Bevis: Elektronisk fra noterne – kig tilbage i afsnit 2.1. Hvis-delen er nem. Kun hvis-delen bruger en separationsætning for konvekse mængder (abstrakt og ikke-konstruktivt; men kort og stringent) eller viden om dualitet for lineær programmering (mindre abstrakt og potentielt konstruktivt, men svært at få de helt rigtige skarpe uligheder; vi vender tilbage hertil).

Proposition 9, arbitrageteoriens 2. hovedsætning: : En arbitrage-fri model er komplet hvis og kun hvis har en præcis 1 tilstandsprisvektor.

Bevis: Fra noterne. En eksersits i lineær algebra. Essensen er at tælle ligninger og ubekendte.

Rundt og rundt om hovedsætningerne

- Om noternes ω-notation ifm. stokastiske variable.
- Den operationelle del ved ikke-arbitrage-analyse er det lineære ligningsystem $\pi = D\psi$; det er dets løsning(srum), vi skal have styr på.
- Hvorfor ordet "tilstandspris"? Ækvivalente ord: Priser på simple aktiver, Arrow/Debreu-priser.
- Repræsentation af priser som (risiko-neutrale, "Q") forventninger. (Ligning (4.4).)
- *General to specific*: Anvendelse på en-periode-binomialmodellen; side 84 i noterne.

- At vise at en inkomplet model er arbitrage-fri:
  Kvalificeret gæt + gør prøve; ofte del af eksamensopgave. Gør-det-selv-opgave: 2b fra MatFin1-eksamen december 2014. (Løs også 2a.)
- *Example 18*: En lille, komplet og arbitrage-fri model. (Sub-matrix-ideen kan også bruges til at tjekke for fravær af arbitrage isf. den måske lidt underlige måde, det bliver gjort på.)
- *Example 19*: Parametriseret model, der kan være enten arbitrage-fri og inkomplet eller komplet og have arbitrage, men aldrig komplet og arbitrage-fri. Spidsfindig eller syg afhængigt af øjnene, der ser. Eksamensopgave fra før min tid i MatFin1. Noget lidt tilsvarende sker i spg. 1c i Fin1 juni 2015-eksamen.

Opgave

Analyser spillemarkedet fra noternes *Example 1* i den formelle (π, D)-ramme. Hvad er π, hvad er D?

Når vi siger "der er arbitrage i det marked", hvad har vi så implicit antaget angående risikofrit aktiv?

Argumenter for at i den formelle ramme vil enhver forskel imellem to bookmakeres odds (på samme hændelse) skabe arbitrage.

Er der noget særligt ved den arbitrage, der konstrueres i eksemplet? (Tænk: Hvad går vi (ikke) kort i?)