Valuta-forwards mm.
Grundlæggende optionsteori

MatFin1 på CBS, onsdag 2/9 2020

rolf@math.ku.dk

Dagens plan

Lidt om valutamarkeder; notationskonvention, en arbitragerelation.

Valuta-forwards; Proposition 13.

En anelse mere om valutamarkeder; forskningsspørgsmål – og sølvpapirshat.

Grundlæggende optionsteori fra afsnit 6.2; put- og call-optioner.

Put/call-pariteten (Proposition 16) – og hvad deraf følger.

Optioner overalt – eksempler til køerne kommer hjem (ofte via gamle eksamensopgaver).

Valutakursalgebra

Vi angiver en valutakurs som $\frac{xxx}{yyy}$, eller *xxxyyy*, hvorved vi mener det antal enheder af (hjemlig) valuta *xxx*, vi skal betale for at få 1 enhed af (den udenlandske) valuta *yyy*.

Eksempel: 1/9 2020 er DKKUSD 6,24

Forsigtig: Dette er fastlandseuropæisk (og korrekt!) kvotering, i England og USA vender man brøken.

Resultat: Valutakurser opfører sig som brøker, fx

$$\frac{EUR}{USD} = \frac{DKK}{USD} / \frac{DKK}{EUR}$$

Eksempel/bevis: Lad os sige DKKEUR = 7,44, DKKUSD = 6,24, men EURUSD = 1 (ikke 0.8387). Tag 6,24 kroner op af lommen og køb 1 dollar. Brug den dollar til købe 1 euro. Brug den euro til at købe 7,44 kroner. Nu står vi pludselig med 7,44 kroner. Det er for godt til at være sandt – eller arbitrage.

Valutaforwards

Proposition 13. *Let X denote the exchange rate between two currencies, economies; i.e. $X(t)$ is the no. units of domestic currency needed at time t to buy 1 unit of foreign currency. The time-t forward price of an expiry-T forward contract on the exchange rate is*

$$\mathrm{Fwd}^{FX}(t,T) = e^{(r_d - r_f)(T-t)} X(t),$$

where r_d and r_f are, respectively, the domestic and the foreign interest rate. For a stock that pays a constant continuous dividend yield δ, the formula above holds with δ playing the role of r_f.

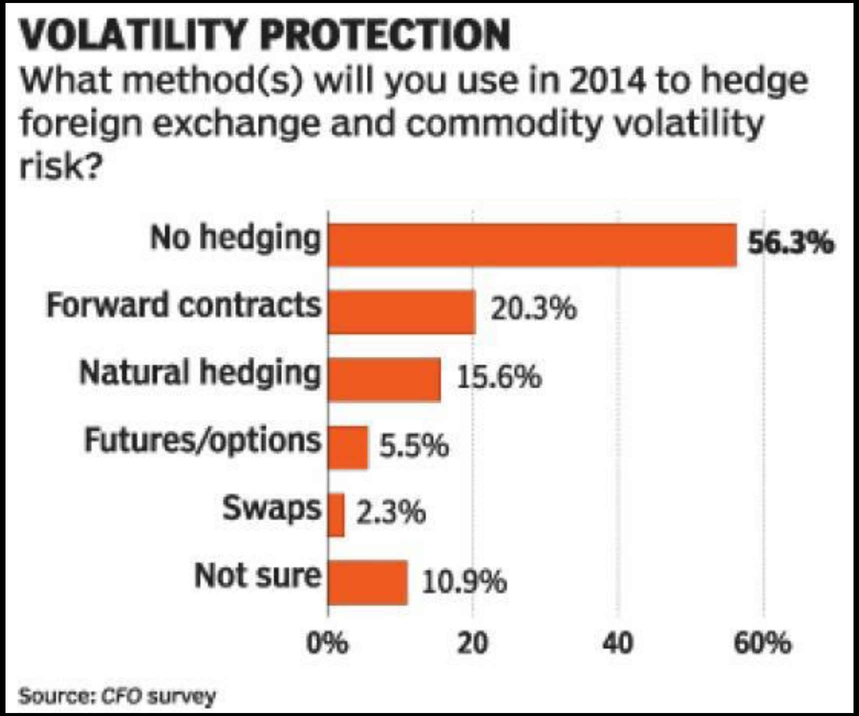
Bevis: Vi justerer omhyggeligt carry-argumentet fra i går (her som I svaret på spg. 3a fra Fin1-eksamen juni 2014)

	A	B	C	D	E
5	På tid 0 købes 1 USD for indenlandsk lånte penge, den sættes i den udenlandske bank,				
6	og der indgås -exp(r_udl * T) forward-kontrakter.				
7	Netto-betaling på tid 0 er 0				
8					
9	Betaling på tid T (danske kroner)				
10					
11	Forward	-exp(r_udl*T)*(Y(T) - Fwd(0,T))			
12	Indl. lån	-exp(r_jh*T)*Y(0)			
13	Valuta	exp(r_udl*T)*Y(T)			
14	Netto	exp(r_udl*T)*Fwd(0;T)-exp(r_hj*T)Y(0)			
15					
16	Denne betaling er kendt på tid 0. Hvis ikke den 0, så er der arbitrage.				
17	Ergo: **Fwd(0;T) = exp((r_hj-r_udl)*T)*Y(0)**				
18					

I praksis

Bruger virksomheder så denne elegante lærebogsløsning til at afdække valutarisiko?

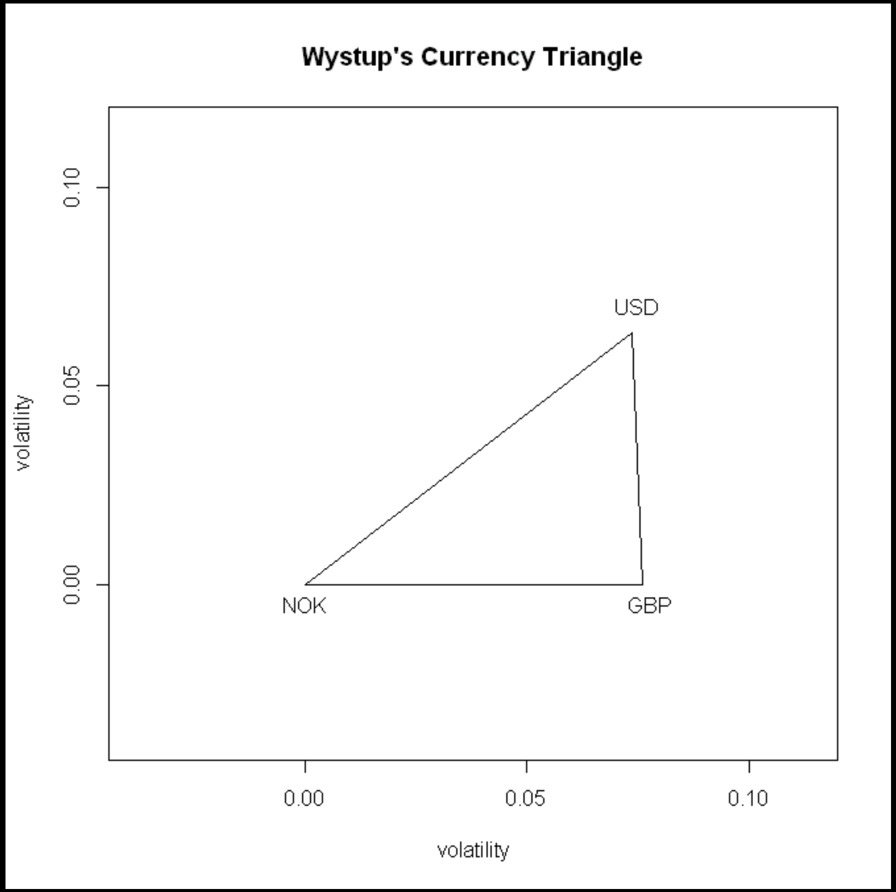
I høj grad nej. Hverken store (figuren til højre; de første 5 gi'r 100%) eller små (*war stories*).



Ofte anvendes endda en tredjevaluta til afregning; tænk dollars. Dette kan yderligere øge risikoen.

Valutatrekanten illustrerer dette. Sidelængder indikerer risiko. (Hvorfor: Cosinusrelation-relation på næste side.)

Hvis vi skal fra norske kroner til britiske pund, så bli'r vejen længere ved at gå over dollar.



ET RIMELIGT MÅL FOR RISIKO ER VARIANSEN AF RELATIVE VALUTAKURSÆNDRINGER I TID — ELLER ÆNDRINGER I <u>LOG</u>-VALUTAKURSEN. ($\ln(x) \approx x-1$ for $x \approx 1$)

(OG DET MED AT LÆGGE KONSTANTER TIL ER LIGEGYLDIGT FOR VARIANS etc)

<u>SÅ</u>

$$\mathrm{VAR}\left(\ln\left(\frac{EUR}{USD}\right)\right) \overset{\text{BEGRUNDELSE}}{=} \mathrm{VAR}\left(\ln\left(\frac{DKK}{USD}\Big/\frac{DKK}{EUR}\right)\right)$$

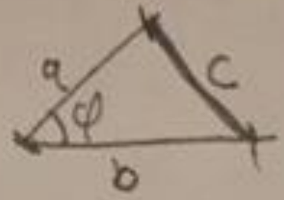
$$\overset{\text{ln-regneregel}}{=} \mathrm{VAR}\left(\ln\left(\frac{DKK}{USD}\right) - \ln\left(\frac{DKK}{EUR}\right)\right)$$

$$\overset{\text{REGNEREGEL FOR KOVARIANS}}{=} \underbrace{\mathrm{VAR}\left(\ln\left(\frac{DKK}{USD}\right)\right)}_{:=a^2} + \underbrace{\mathrm{VAR}\left(\ln\left(\frac{DKK}{EUR}\right)\right)}_{:=b^2} - 2\,\mathrm{cov}\left(\ln\frac{DKK}{USD}, \ln\frac{DKK}{EUR}\right)$$

$$\overset{\text{def af korrelation}}{=} a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{corr}\left(\ln\frac{DKK}{USD}, \ln\frac{DKK}{EUR}\right)$$

KALD nu venstresiden c^2 og "MØNSTERGENKEND" COSINUSRELATIONEN

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi)$$



Grundlæggende optionsteori

Optioner giver ret, men ikke pligt, til at gøre et eller andet. Call-optioner til at købe til aftalt pris, put-optioner til at sælge.

Vi tager resten fra bladet i afsnit 6.2 – følgende slides er eksempler.

Payoff-diagrammer er nyttige, put/call-pariteten er central

Proposition 16. *(Base-case put-call parity) Let* $call_t$ *and* put_t *denote prices of (European) expiry-*T*, strike-*K *calls and the prices on a certain stock. If the stock does not pay dividends during the life of the options, then we have*

$$call_t - put_t = S_t - KP(t,T).$$

Konverterbare realkreditobligationer

Fra MatFin1-eksamen oktober 2017:

Opgave 3

Spg. 3a

Forklar hvorfor et konverterbart lån (fra låntagers synspunkt) kan ses som en kort position i en inkonverterbar obligation kombineret med en lang position i en amerikansk call-option.

Svaret sakset

	A
1	3a
2	
3	Så længe låntager ikke konverterer, så betaler han rente og afdrag som på et almidenligt lån,
4	hvilket netop svarer til en kort position in en obligation; man har solgt obligationen mod at
5	få nogle penge i hånden på tid 0.
6	Når/hvis der konvereteres, så betaler låntager den restetrende hovedstol, men har så ikke
7	nogen fremtidige forpligtelser. Det kan vi se som at man køber en inkonverterbar obligation
8	for pris= den resterende hovedstol, altså at man indfrier en call-option med strike = resterende hovedstol,
9	hvorefter betalinegrne i fremtiden fra den lange og den korte position netter ud.
10	

Tillægsspørgsmål:

- Hvorfor kan låntager overhovedet havde lyst til at betale sit lån tilbage før tid? Vil det ikke kun ske, hvis han vinder i lotto, mener at gæld er syndigt eller noget andet, vores modeller ikke tager højde for?
- Er det ikke bare godt for udlåner, hvis låntager betaler tilbage før, han skal?
- Låntager kan købe sin udstedte obligation tilbage på markedet til markedskurs (som teoretisk er <= 100). Dette kaldes often en *delivery option.* Hvorfor er dette egentlig ikke en option? (Men kan være værdifuld alligevel.)

Brexit, odds og tilstandspriser

Fra MatFin1, november 2016

Spg. 4b

Kort før EU-afstemningen 23/6 2016 gav (bookmaker-)markedet (decimal-)odds 5 på *Leave*, dvs. på at Storbritanien stemte for at forlade EU, altså Brexit.

- **Argumenter for** at når rentediskontering ignoreres, så viser dette, at den risiko-neutrale sandsynlighed for *Leave* var $\frac{1}{5}$.

6	**4b**
7	Vædder man 0.2 på Leave får man 1 kr. igen i tilfælde af Leave, 0 ellers. Det er altså en digital optionspris.
8	Og sådan en er pr. konstruktion (når vi glemmer rentediskontering) Q-sandsynligheden for udfaldet.
9	

Binary Backwards

A Twitter exchange leads to a useful discussion on option modeling. So, social media isn't all bad…

Anybody who writes exams or performs job interviews knows the value of questions. If they are based on true stories or statements, even better. To my delight this showed up in my Twitter timeline (Figure 1).

(Let us assume @FMTrader1 describes an at-the-money down-binary (or digital) option with one week (five business days; 5/252 years) to expiry.)

Starter for ten, Q1: *What is the initial price of the digital option?*

The payoff is either 1 or 0, thus 1 is the only case with a positive rate of return, so the price, p, must solve $(1-p)/p = 0.7$, i.e., $p = 0.588$.

Going into modeling, Q2: *Is that price consistent with the Black–Scholes model?* In the Black–Scholes model, the price of this at-the-money down-binary option is

$$1 - \Phi\left(\frac{\tau\left(r - d - \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

which goes rapidly to ½ for $\tau \to 0$, meaning that with one week to expiry we'd need extreme parameter assumptions to generate a price of 0.588. So, in a word: No. (The question can also be phrased such that it works for students who've only heard of the standard binomial model, but either the question or the answer becomes much less elegant.)

Feeling smug, I sent out the questions to people in the quantitative financ[e] community.

One of the recipients, let's call him KwantDaddy, chipped in with Q3 (at 10:39): *Is it consistent with a jump diffusion model (à la the Merton model)? If*

Swaptioner

Fra MatFin1, november 2018.

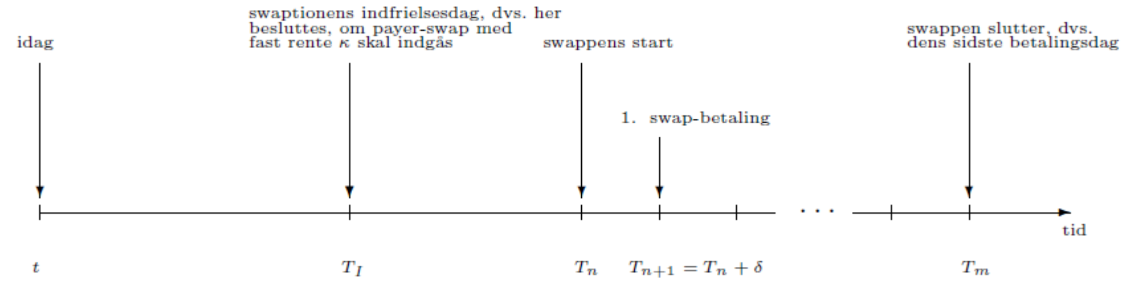
Svaret kan læses i den vejledende besvarelse – det er ikke super vigtigt lige her.

Et vink synes jeg næsten giver svaret; det viste sig ikke at være tilfældet.

Spg. 2b

Beregn tid 0-swap-renter.

Nu betragtes en såkaldt swaption, der – som ordet antyder – er en option på en swap-rente. Helt præcist er det en kontrakt, der på et indfrielsestidspunkt giver ret, men ikke pligt, til at indgå en payer-swap (dvs. man betaler fast rente) med fast rente κ, kaldet swaptionens strike-rente. Tidslinjen for betalinger (samt definition af notation) fremgår af figuren nedenfor:



Spg. 2c

Argumenter for at swaptionens værdi på indfrielsestidspunktet T_I (=dens *pay-off*) er

$$\delta(\omega(T_I;T_n,T_m,\delta)-\kappa)^+\sum_{j=n+1}^{m}P(T_I,T_j),$$

hvor $\omega(T_I;T_n,T_m,\delta)$ er tid T_l-swaprenten for den underliggende swap, dvs.

$$\omega(T_I;T_n,T_m,\delta)=\frac{P(T_I,T_n)-P(T_I,T_m)}{\delta\sum_{j=n+1}^{m}P(T_I,T_j)}.$$

Put-call-pariteten set anderledes

Fra MatFin1-eksamen januar 2018

Spg. 3b

Forklar følgende udsagn (fra [redacted]).

> Put-call pariteten viser, at en call-option svarer til en gearet position i det underliggende aktiv suppleret med en tabsforsikring.

3b

(Lad os antage rente og dividende er 0.)

Put-call-pariteten siger at call(t) = put(t) + S(t) - K

Call-optionen kan altså ses som en lang positionen i aktien (+S) og i put'en (+put),
samt en kort position i bankbogen. Man har altså købt sine aktiver for (delvist)
lånte penge; dette er netop en gearet position. Put-optionen har positivt pay-off
netop når aktiens kurs falder (til under striken) og kan derfor ses som en tabsforsikring.

Et struktureret produkt

Fra Fin1-eksamen, juni 2011. (Findes også som en MatFin1-opgave.)

Based on a true story.

Betragt et finansielt aktiv, en såkaldt IFN-kontrakt, der på tid $T = 3$ har denne "pay-off"-struktur:

- Hvis $S(T) \leq 100$, så modtager investor (eller: ejeren) 100.
- Hvis $100 < S(T) \leq 125$, så modtager investor $0.8 \times S(T) + 20$.

1

- Hvis $S(T) > 125$, så modtager investor 120.

Spg. 1b

Vis at IFN-kontrakten kan skrives som en portefølje af nulkuponobligationer og call-optioner. **Beregn** den arbitrage-fri tid-0-pris på IFN-kontrakten.

Svar med en tegning: