Afsnit 4.3: *The State-Price Utility Theorem*

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2020

23. september

Afsnit 4.3

(π, D)-modeller som beskrevet i kapitel 4 kaldes ofte for tilstandsprismodeller (*state price models*).

Vi ser på fravær af arbitrage og forventet nyttemaksimering i tilstandsprismodeller.

Ved risiko-neutral prisfastsættelse antages *ikke*, at agenter er risiko-neutrale, men kun det meget mildere (dvs. mere realistiske) fravær af arbitrage.

I inkomplette modeller er fravær af arbitrage generelt ikke nok til at fastlægge entydige priser på nye aktiver. (Med mindre det nye aktiv *tilfældigvis* kan replikeres. Senere ser vi på ikke-arbitrage-intervaller.)

Proposition 10: Forventet nyttemaksimering bryder sammen, hvis og kun hvis der er arbitrage.

Theorem 3— eller analysen lige efter — fortæller:
Risiko-neutral ssh q_i er proportional med produktet af p_i-ssh og en nytte-maksimerende repræsentativ agents marginalnytte i den pågældende tilstand,

$$q_i \propto p_i u'(c_i^*).$$

I dårlige tilstande er forbruget lavt og marginalnytten høj. Agenten er derfor villig til at betale en høj pris for et aktiv, der betaler i den tilstand: Fortolkning: forsikring. (Tænk gerne CAPM.)

Anvendelser/konsekvenser af Theorem 3

Resultatet i Theorem 3 har ikke et almindeligt udbedt mere beskrivende navn; *the state-price utility theorem* kunne være et bud.

I stikordsform; mellemregninger ug uddybninger i noterne:

- *Zero-level pricing* i inkomplette modeller.
- Martingalmetoden til løsning af nytteoptimeringsproblemer i komplette modeller. (Også fler-periode.) Se opgave 4a i MatFin1-eksamen fra oktober 2014.

Example 20 — tal på

Betragt en investor, der kan investere sin tid-0-formue i aktier og i banken, og som ønsker at maksimere sin forventede tid-1 nytte:

$$\max_{x_S, x_b} \mathbf{E}^P(u(W(1))) \quad \text{ubb} \quad \begin{aligned} x_S S(0) + x_b &\leq W(0) \\ x_S S(1) + x_b(1+r) &= W(1) \end{aligned}$$

hvor u har formen

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma},$$

for et eller andet γ, som (så) afspejler investorens (konstante) relative risiko-aversion.

Lad os se på en-periode-binomialmodellen

$$S(1) = \begin{cases} uS(0) & \text{med ssh } p \\ dS(0) & \text{med ssh } 1-p \end{cases},$$

og mere specifikt antage at $W(0) = 100$, $S(0) = 100$, $u = 1.25$, $d = 0.95$, $r = 0.095$, $p = 0.5$ og $\gamma = 0.5$.

Dette regneark kan (til husbehov) bruges til at løse (og lege med) problemet numerisk.

Hvordan ser løsningen ud, og passer det med the state-price utility theorem?

Hva' sker der, når man sætter γ op?

Hva' sker der, når man sætter r op og ned? Og hvis man gør det helt til $r = 0.3$, $r = -0.1$? (Sammenlign med Proposition 10.)
Hvordan kan man indføre kortsalgsrestriktioner?

Er flere end to mulige udfald noget problem? (Svar: Nej. Her er noget, jeg selv lige har siddet og eksperimenteret med. Det har noget med vigtigheden af af at have en aktive market maker at gøre i rammen fra denne bog af Bill Sharpe.)