

# Stokastisk rente Konverterbare obligationer Realkredit

Matematisk Finansiering 1  
Efterår 2020

21. oktober

## Stokastisk rente generelt

Læg mærke til at vores analyser fra uge 2 stadig gælder; her udvider vi til hvad man kan kalde *ikke-lineære renteprodukter*.

Opskriften (noternes afsnit 8.1) på at konstruere en arbitragefri stokastisk rentemodel er:

- Et kort-rente( $\rho$ )-gitter/træ m/ (betingede)  $Q$ -ssh gives.
- Man regner NKO-priser (altså: igennem gitteret for ethvert  $T$ ) ud via

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + \rho_t} E_t^Q (P(t + 1, T)),$$

hvor  $P(T, T) = 1$ .

- Disse udregninger sikrer, at de givne ssh. — uanset hva' de måtte være — faktisk kommer fra et risikoneutralt- eller martingalmål. (Bemærk forskellen fra “den typiske opgave 1”.)
- Vi bruger iøvrigt lokalkarakterisationsligningen

$$\pi(t) = \frac{1}{1 + \rho_t} E_t^Q(\pi(t+1) + \delta(t+1))$$

for et godt ord. Fx til at prisfastsætte optioner.

- Optionerne kan være på den korte rente ( $\rho$ ) selv (kaldet cap(letter); kan ses som optioner på NKO'er og kan bruges til at konstruere lån med loft) eller på swap-renten (kaldet swaptioner; kan ses som optioner på kupon-obligationer).

Vil man *kalibrere* (afsnit 8.1.1 i noterne), så udfører man øvelsen baglæns. Givet NKO-priser/en observeret rentekurve, find da et kort-rente-gitter (niveauer og ssh.) således, at hvis vi gennemfører opskriften ovenfor, så produceres/rammes netop de observerede NKO-priser.

Dette er et såkaldt inverst problem. Der er langt flere frihedgrader (ubekendte) end ligninger, så løsningen meget lidt entydig. Noterne har et par forslag til, hvordan man kan sætte struktur på; Ho-Lee- og Black-Derman-Toy-modellerne.

Og der står noget om en såkaldt forwardalgoritme, der kan spare en orden på beregningskompleksiteten. Men det er ligegyldigt her.

## Variablet forrentede lån handler til par

InvFin-eksamen juni 2004, opgave 2 viser det for en “variablet forrentet” annuitet.

Men det abstrakte bevis (som er lettere end konkrete taludregninger pga. stiafhængighed) virker så længe blot rentebetalingen er kendt 1 periode i forvejen. Man kunne fx sætte  $\rho_t$  ind i annuitetsformlen for at bestemme afdraget på tid  $t + 1$ .

Er rentebetalingen 1 periode i forvejen ikke er kendt, så får man — en ret forfærdelig eksamensopgave! Hvis man virkelig prøver, kan man også komme galt afsted så  $H_T \neq 0$ ; variabel rente, fast ydelse  $\leadsto$  pengene passer ikke til sidst/stokastisk løbetid.

## Konverterbare obligationer

Afsnit 8.3. Her høster vi virkelig frugten af den ganske generelle gennemgang.

Vi gør det ud fra Fin1-eksamen april 2007, opgave 2. Denne har et svar-addendum med en meget detaljeret forklaring af sammenhængen mellem konverterbare obligationer og amerikanske optioner – som vi så er bekendt med i MatFin1-opgaver (fx december 2014, spg. 3c) .

Konverterbare obligationen finder stor anvendelse inden for realkredit – dvs. til finansiering af boligkøb.

Tingene blandes:

- NKO-beregning & martingaler. *Muligt add-on: Forward- og swap-renter.*
- Annuiteter. Klassiske lånetyper (annuitet, stående og serie) skal man kende (står i afsnit 2.3 i noterne); effektiv rente og varigheder spørger jeg ikke til i MatFin1.
- Amerikanske optioner & konverterbare obligationer  
~realkredit.

# Lidt mere om realkreditlån

	A	B	C	D	E	F	G
1	Realkreditlån til ejerboliger og fritidshuse						
2	<a href="https://rkr.statistikbank.dk/202">https://rkr.statistikbank.dk/202</a>						
3							
4		2. kvartal 2017			2. kvartal 2020		
5		Mia. kr. hovedstol			Mia. kr. hovedstol		
6	Fastforrentet (konverterbar) med afdrag	428.3	27.9%		579.1	37.8%	
7	Fastforrentet (konverterbar) uden afdrag	180	11.7%		243.8	15.9%	
8	Variabel rente, refin'frekvens ≤ 1 år, med afdrag	178.4	11.6%		169.3	11.0%	
9	Variabel rente, refin'frekvens ≤ 1 år, uden afdrag	263.4	17.2%		207.8	13.6%	
10	Variabel rente, refin'frekvens > 1 år, med afdrag	167.3	10.9%		209.2	13.6%	
11	Variabel rente, refin'frekvens > 1 år, uden afdrag	315.4	20.6%		275.7	18.0%	
12							
13	Variable rente m/ loft, med afdrag	60.3	3.9%		43.2	2.8%	
14	Variabel rente m/ loft, uden afdrag	38.5	2.5%		15.6	1.0%	
15							
16	Total	1532.8			1684.9		
17							
18	Andel konverterbare		40%			49%	
19	Andel uden øvre rentegrænse		54%			48%	
20	Andel uden afdrag		52%			44%	



Data er lette at skaffe fra Finans Danmark.

Fastforrentet er i virkeligheden konverterbar, dvs. fast rente + tilbagebetalingsret. Vigtig forskel, hvis renten falder jf. diskussion om andelsboligforeninger og swaps.

$\text{ssh}(\text{afdragsfrit} \mid \text{fast rente}) \sim 30\%$ ,

$\text{ssh}(\text{afdragsfrit} \mid \text{kort variabel rente}) \sim 60\%$ .

(Både 2017 og 2020 – selv med skift i overordnet fordeling.)

Siger nok noget om forskellig menneskelig natur. (Mit valg, min anbefaling: Fast, afdragsfrit.)

Hør mig sige mere om reakkredit i podcasten Rig på viden

## “Øv selv”-renteopgaver

Opgave 3 fra MatFin1-eksamen december 2014.  
Konverterbar obligation; gik fint, folk havde læst på lektionen.

Opgave 2 fra MatFin1-eksamen november 2018. Spg. 2c-d  
gik ikke godt, på trods af at der i den første næsten intet er  
at vise.

Opgave 2 fra MatFin1-eksamen januar 2018. En  
trinomialmodel – som gik ganske fint.

Opgave 3 fra MatFin1-eksamen oktober 2014. Variable  
variationer.