Finansielle flerperiodemodeller: Arbitrage, martingalmål og fundamentalsætninger

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2020

7. og 13. oktober

Plan

Tilbage til afsnit 5.2, hvor vi ser på finansielle modeller

- (S, δ, ρ): Priser, dividender, rente.
- Handelsstrategier og dividende-strømmme.
- Selvfinansiering,
- Arbitrage.
- Replikation og komplethed.
- Et konkret legetøjseksempel.

Afsnit 5.4:

- Martingalmål, Q (Def. 31) og lokalkarakterisation af disse (Thm. 4).
- Theorem 5: Selv-finansierende strategiers diskonterede værdiprocesser er Q-martingaler.
- En model er arbitragefri, hvis og kun hvis den har et martingalmål. (Thm. 6; "1st fundamental theorem of asset pricing".)
- En arbitragefri model er komplet hvis og kun hvis den har et entydigt martingalmål. (Thm. 7; "2nd fundamental theorem of asset pricing".)

Finansielle ingredienser

Prisprocesser: $(S^1, \dots, S^N)$. (Teknisk betingelse: $S^i_T \equiv 0$ for alle i — som en lille overvejelse viser er tvingende nødvendig for fravær af arbitrage.)

Dividendeprocesser: $(\delta^1, ..., \delta^N)$. En ejer af aktiv i modtager δ^i_t på tid t. Pr. konvention er priser som ex-dividende, men/og ofte vil vi tænke på δ^i_T som S^i_T.

Diskonteringsfaktor eller bankbog:

$$R_{s,t} = (1 + \rho_s)(1 + \rho_{s+1})...(1 + \rho_{t-1}),$$

hvor ρ er en kort-rente proces. Værdien på tid t af 1 kr. sat i banken på tid s.

Afkastraten på det lokalt risikofrie aktiv mellem s og $s+1$ er kendt allerede på tid s, men mellem $s+1$ og $s+2$ er den det ikke. Formelt set defineres aktivet ved $S_t^0 \equiv 1$, $\delta_t^0 = \rho_{t-1}$. (Hvorfor?)

Disse processer er eksogent givne, men altså stokastiske.

Det viser sig ganske fikst, at vi kan klare dividender, stokastisk rente og stiafhængighed i et hug. (Det er mere besværligt i kontinuert tid.)

Handelstrategi er en N-dimensional tilpasset proces $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^N)$. Den lever på $t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Fortolkning: $\phi^i_t(\omega)$ er det antal stk. af aktiv i, vi ejer på tid t. Dette er stokastisk og kan basere sig på tid-t-tilgængelig information — men "ikke mere" pr. tilpassethed.

Dividende(eller: betalings)-strømmen for en handelstrategi:

$$\delta^\phi_0 = -\phi_0 \cdot S_0 = -\sum_i \phi^i_0 S^i_0 \text{ (initialt udlæg)}$$

og

$$\delta^\phi_t = \phi_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) - \phi_t \cdot S_t \text{ for } t = 1, \ldots T.$$

Glorified bookkeeping.

En arbitrage-mulighed er en handelstrategi ϕ så

$$P(\delta^\phi \geq 0) = 1 \;\text{ og }\; P(\delta^\phi > 0) > 0,$$

eller i vektorulighedsnotation $\delta^\phi > 0$. Fortolkning: *A free lunch*.

En handelsstrategi er selvfinansierende mellem 0 og T hvis der gælder

$$\delta_t^\phi = 0 \quad \text{for } t = 1, \ldots, T-1,$$

dvs. at

$$\phi_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) = \phi_t \cdot S_t.$$

Fortolkning: Der skydes hverken penge ind eller trækkes penge ud imellem tid 1 og $T-1$. Men det *er* muligt at omlægge porteføljen. Og igen: Selvfinansieringsbetingelsen er egentlig bare bogholderi.

Et konkret legetøjseksempel

Opgave 1 fra MatFin1, januar 2017. *Didn't go down too well with the students.* (Men det var i nogen grad forventet.)

Spg. 1a-d er en konkret ("med tal") illustration af de finansielle begreber fra foregående slides.

Spg. 1e er numerisk verifikation af den diskonterede værdiproces for en selvfinansierende handelsstrategi er en Q-martingal — Thm. 5.

Komplethed

(Ved en besyndelig fejl var definitionen af komplethed smuttet ud af 1. version af noterne under revidering. Fikset nu.)

Komplethed defineres som at der for enhver tilpasset process, X, findes handelstrategi, ϕ hvis dividende-strøm matcher, dvs.

$$X_t = \delta_t^{\phi} \text{ for alle } t \geq 1.$$

Eller simpelthen: Alt kan replikeres.

Som ofte: Tænk over definitionen

Hva' skete der med selvfinansieringsbetingelsen?
Dette mere generelt – og for fx en call-option er den replikerende strategi efter denne definition selvfinansierende.

Hvorfor ikke "$t = 0$" i definitionen?
Vi kan ikke selv bestemme, hvad den replikerende strategi koster.

Martingalmål; Q

Sandsynlighedsmålet Q kaldes et martingalmål for modellen (S, δ, ρ) hvis

$$\widetilde{S}_t^i = \mathrm{E}_t^Q \left(\sum_{j=t+1}^{T} \widetilde{\delta}_j^i \right) \quad \text{for alle } i, t, \omega,$$

hvor $\widetilde{\cdot}$ angiver diskontering m/ bankbogen, dvs. division med $R_{0,t}$.

(Hvis man ikke lige kan se, hva' det har med *martingaler* at gøre, så skal man være undskyldt. En slides tid, ihvertfald.)

Det kan (som gjort i Thm. 4) mere nyttigt udtrykkes som at

$$S_t^i = \mathrm{E}_t^Q \left(\frac{S_{t+1}^i + \delta_{t+1}^i}{1 + \rho_t} \right) \quad (\text{altså } \forall\, i, t, \omega).$$

Dette er en lokal karakterisation; der indgør kun t og $t+1$. Og det "lugter mere af martingal". Og det er en nyttig øvelse i regneregler for betingende middelværdier.

Hvis man arbejder i kontinuert tid, så er det væsentligt mere 'tricky' at lave en tilsvarende lokalkarateristation. Det gør meget af MatFin2 med. (Nøgleord: Drift og volatilitet, Itos formel, parabolsk partiel differentialligning.)

For en handelsstrategi ϕ, definerer vi dens værdiproces V^{ϕ} via $V^{\phi}(t) = \phi(t) \cdot S(t)$.

Theorem 5: Enhver selvfinansierende handelsstrategis diskonterede værdiproces er en Q-martingal.

Bevis: I hånden

Theorem 6/1. fundamentalsætning: Modellen (S, δ, ρ) er arbitragefri, hvis og kun hvis den har et martingalmål Q.

Bevis: Noterne

Beviset giver og også Corollary 2: *Det er nok at tjekke alle 1-periode delmodeller.* (Men disse skal tjekkes hver for sig og behøver ikke være — men er det ofte mere eller mindre.)

Ved at vifte med hænderne får vi ligeledes Theorem. 7/2. fundamentalsætning: En arbitragefri model er komplet hvis og kun hvis Q er entydigt.