Arbitragefri prisfastsættelse i en-periode-binomialmodellen

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2020

15. september

Dagens plan

(Lidt speciel dag — kun 4 studerende på Zoom pga. miskommunikation; mest min skyld.)

- Rentesregning: Opgave 3 fra Fin1, juni 2018.
- Odds og arbitrage, del 1: Burkina Faso – Mali
- En-periode-binomialmodellen: 1 periode, 2 tilstande: Hvad er en call-option værd — og hvorfor? *Risk-neutral pricing 101*. I har set det før. Men det er altså meget, meget vigtigt.

Röman, bind 1 behandler dagens materiale i kapitel 2, specielt afsnit 2.1. Her følger jeg dog mestendels noternes afsnit 4.1.

Odds og arbitrage, del 1: Burkina Faso – Mali

Example 1, side 11 i noterne.

Nogle bookmakere havde sat odds på en kamp ved Africa Nations' Cup:

	Burkina Faso - Mali		
Bookmaker	1 (B F win)	X (draw)	2 (Mali win)
Aebet	5.50	3.10	1.61
Bet-at-home.com	3.65	3.20	1.75
EasyBets	4.20	3.30	1.73
Expekt	4.05	3.15	1.85
InterWetten	3.50	2.80	2.00
MrBookmaker	4.60	3.05	1.73

Vælg det bedste (dvs. det højeste) odds for hvert udfald og spil 1/odds kr. på hvert.

Det koster kun 0.9848 kr., men betaler helt sikkert 1 kr.

Det er i en nøddeskal hvad en arbitragemulighed er. En pengemaskine, *a free lunch*.

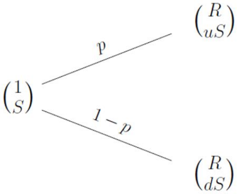
Læg mærke til, at vi hverken behøver vide noget om fodbold eller om statistik.

Nettet er fyldt med tilbud om at finde den slags den slags *surebets* (fx) – af mere eller mindre lødig kvalitet; så i praksis er tingene mere komplicerede – *such is life*.

Ikke-pensum refrerence: Franck, Verbeek & Nüesch (2013) om arbitrage i spillemarkeder.

Afsnit 4.1: En-periode-binomialmodellen

For at sige noget om, hvad optioner er er værd, starter vi med en-periode-binomialmodellen fra noternes afsnit 4.1: Aktien kan gå op til uS (ssh p) eller ned til d (ssh $1 - p$).



Bemærk strukturen: Det, vi ikke ved er ,*om* aktiekursen går op eller ned. Givet den går op, ved vi hvor den lander; u og d kender vi — ligesom vi ved hvilke tal, der står på en ternings sider.

Desuden har modellen et risikofrit aktiv (bankbogen) der laver 1 kr. til R kr. (Vi skriver ofte $R = 1 + r$.)

Rygmarvseksempel: $u = 1.2$, $d = 0.9$, $R = 1.05$ (dvs. rente på 5%). (Hvorfor viser sig senere.)

En call-option giver ret, men ikke pligt, til at købe aktien på tid 1 til den på forhånd fastlagte (*strike*-, *exercise*- eller *aftale*-)kurs K; den har

$$\text{pay-off } = \max\left(S(1) - K, 0\right) = (S(1) - K)^{+} = C(1).$$

Optionen kan *replikeres* ved at lave en portefølje med a stk. aktier og b kr. på bankbogen ($b < 0 \sim$ et lån) der opfylder at

$$\begin{aligned} auS + bR &= (uS - K)^+ =: C_u, \\ adS + bR &= (dS - K)^+ =: C_d. \end{aligned}$$

Det har løsningen

$$a = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} = \frac{\text{“}\Delta C\text{”}}{\Delta S} \text{ enheder af aktien,}$$

og $b = (C_u - auS)/R$ kr. i banken. (Man kan vise at $a \geq 0$ og $b \leq 0$.)

Optionen må (… *ellers arbitrage* …) koste det samme som den replikerende portefølje, altså $aS + b$.

Med den *risiko-neutrale sandsynlighed*

$$q = \frac{R - d}{u - d},$$

kan det udtrykkes som en diskonteret forventet værdi,

$$C(0) = \frac{1}{R}(qC_u + (1 - q)C_d) = \frac{1}{R}\mathrm{E}^q(C(1)). \tag{1}$$

Ligning (1) kaldes (eller: er et eksempel på) risiko-neutral prisfastsættelse.