Information, stokastiske processer, betinget middelværdi, martingaler

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2020

6. oktober

Matematisk beskrivelse af information

Det flg. står – ganske kompakt – på de første par sider i afsnit 5.2 i noterne. Og i starten af kapitel 3 i Röman, I.

Det virker måske abstrakt/underligt/svært, men tro mig, man vender sig hurtigt til det.

For stringent at opstille betingelser for fravær af arbitrage i fler-periode modeller er det nødvendigt at beskrive informationsudviklingen/afsløringen/flowet over tid.

Tag som eksempel et binomialtræ i 2 perioder: Hvis tilstand u realiseres på tid $t = 1$, er det givet, at tilstanden på tid $t = 2$ vil være uu eller ud. Tilstanden realiseret på tid t indeholder information om tilstandsrummet på tid $t + 1$.

Informationsflow kan beskrives vha. et *filter* (udenlandsk: *filtration*). Præcis defiinition kommer på næste slide.

Specielt kan vi med filtre give præcis mening til udsagn som "På tid t ved vi, hvad aktiekursen på tid t er;. Vi kender [måske] endda hele dens historik".

Informationsmængde og filter

Ω: Udfaldsrummet; en abstrakt mængde af ω'er. Senere: Et ω svarer til en bestemt sti igennem træet/gittret.

Informationsmængde: En mængde af delmængder (et mængdesystem) af Ω, som er lukket under (almindelige) mængdeoperationer (foreningsmængde, fællesmængde, difference og komplementærmængde). (Forklar det underlige 2^{Ω}.)

En informationsmængde betegnes ofte med $\mathcal{F}$ og kaldes også en σ-algebra.

En (endelig) informationsmængde er i 1-1-korrespondance med opdeling af Ω i disjunkte delmængder; en klassedeling (*partition*) i atomer.

Atomerne kan vi tænke på som de ting/hændelser, vi kan skelne imellem med den givne information. (Det er derfor informationsængder skal være lukkede under mængdeoperationer.)

For to informationsmængder skriver vi $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, hvis $A \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_2$; i ord: $\mathcal{F}_1$ har mindre information end $\mathcal{F}_2$.

Et filter er en familie af voksende informationsmængder, indekseret f.eks. ved tiden $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2,..,T}$: $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$. (Summepsg.: Hvorfor er $\{\emptyset, \Omega\}$ den mindste informationsængde?)

En helt central indsigt for de endelige, diskrete modeller, vi arbejder med er:

$\boxed{\text{Et filter kan repræsenteres grafisk (tegnes) som et træ.}}$

Knuderne i træet svarer til atomerne.

Det gør, at man langt hen ad vejen kan ignorere de foregående slides' abstrakte nonsens.

Advarsel: I kontinuerttidsmodeller, MatFin2 fx, går det ikke så "tegn et træ"-nemt.

Formelt set har et træ en tidsmæssig orientering (vi kører en vej ad x-aksen), men ikke en rumlig, selvom vi tegner en y-akse, gi'r "op/ned" ikke altid mening; tænk på en model med to aktier.

Nogle processer, såkaldte Markov-processer, kan repræsenteres på et gitter — det er en subtilitet, vi vender tilbage til. Senere.

Filter for møntkast

Læs selv: Eksempel 21 fra noterne.

Overvejelse: Kast med 5'er & 10'er vs. kast med to 10'ere.

Et filter kan være frembragt af en bestemt stokastisk proces.

En (relevant) stokastisk proces kan også indeholde mindre information end et givet filter. (Case in point: Vores samlede gevinst.)

Filter for aktiemodel

En models filter kan være genereret af en aktiekurs. I så fald er $\mathcal{F}_t$ den information, der ligger i aktiekursens udvikling op til og med tidspunkt t.

Et atom udgøres her af en delmængde af Ω, hvor aktiekursen er konstant. Atomer i $\mathcal{F}_t$ betegnes a_t.

Hvis atomet a_t realiseres på tid t, afsløres implicit, at et atom $a_{t+1} \subset a_t$ vil realiseres på tid $t + 1$.

Filter for aktiemodel

Atomer opsplittes i mindre atomer (på trods af at det egl. betyder "udelelig"), som tiden går. Splitting index er antal atomer a_{t+1}, som a_t splittes i.

Det ikke er muligt, at definere finansielle fordringer, hvis værdi i hvert atom ikke er konstant. Informationen tilgængelig i filtret må nødvendigvis afsløre fordringens værdi.

Et filter siges at være fuldt afslørende, hvis filteret afslører præcis hvilket atom, der realiseres. Enten ret trivielt eller dybt. Sker nogle gange i opgaver —fx spg. 2a fra oktober 2014-eksamen — dog ikke i 2020.

Målelig og tilpasset

Følger afsnit 5.3 i noterne.

$\mathcal{F}$-målelig: X er $\mathcal{F}$-målelig, hvis værdien af X er kendt givet informationen $\mathcal{F}$. Dvs. X er konstant på hvert atom i $\mathcal{F}$

Lad Y være stokastisk variabel målelig mht. informationsmængde med atomer $a_t^1, ..., a_t^m$. Da er

$$Y = \sum_{j=1}^{m} Y(a_t^j)\mathbf{1}_{\{a_t^j\}}$$

$(\mathcal{F}_t)$-tilpasset: En stokastisk proces (X_t) siges at være tilpasset $(\mathcal{F}_t)$, hvis X_t er $\mathcal{F}_t$-målelig for ethvert t. (Det skrives nogle steder $X_t \in \mathcal{F}_t$; ikompakt, men ikke helt ideel notation.) En tilpasset proces specificeres altså ved at "skrive tal på knuder i et træ."

Forudsigelig (*predictable*): En stokastisk proces (X_t) er forudsigelig, hvis $X_t \in \mathcal{F}_{t-1}$ for alle $t = 1, ..., n$.

Betinget middelværdi (eller: forventning)

Lad X være en stokastisk variabel og a_t^i, $i = 1, ..., I$ være atomer i informationsmgd. $\mathcal{F}_t$.

Den betingede middelværdi af X under sandsynlighedsmålet P betinget med informationen $\mathcal{F}_t$ defineres som

$$E^P \left[X | \mathcal{F}_t \right] [a_t^i] = \sum_{\omega \in a_t^i} X(\omega) \frac{P(\{\omega\})}{P\left(a_t^i\right)}$$

.

$E^P \left[X | \mathcal{F}_t \right]$ er en $\mathcal{F}_t$-målelig stokastisk variabel.

Da $\{\omega\} = \{\omega\} \cap a_t^i$ inde i summen, så *er* det bare middelværdi med betinget sandsynlighed. Tillige med en masse bogholderi, som notationen i høj grad håndterer.

Hvis X_{t+1} er $\mathcal{F}_{t+1}$-målelig, så har den betingede middelværdi formen

$$E^P\left[X_{t+1}|\mathcal{F}_t\right][a_t^i] = \sum_{j:a_{t+1}^j \subseteq a_t^i} X(\omega)\frac{P\left(a_{t+1}^j\right)}{P\left(a_t^i\right)}.$$

Det viser, at det vi regner ud i træ, når vi trævler os baglæns og bruger "det, der står på grenene", der *er* betinget middelværdi. Dvs. vi har regnet betingede middelværdier ud uden at vide det.

Betinget middelværdi – regneregler

1 Betinget middelværdi er lineær:

$$\begin{aligned} E\big[kX + Y|\mathcal{F}_t\big][a_t^i] &= \sum_{\omega \in a_t^i} \big(kX(\omega) + Y(\omega)\big)\frac{P(\{\omega\})}{P(a_t^i)} \\ &= kE\big[X|\mathcal{F}_t\big][a_t^i] + E\big[Y\big|\mathcal{F}_t][a_t^i] \end{aligned}$$

2 En $\mathcal{F}_t$-målelig stokastisk variabel Y kan trækkes uden for den $\mathcal{F}_t$-betingede middelværdi:

$$E\big[XY|\mathcal{F}_t\big] = YE\big[X|\mathcal{F}_t\big]$$

3 Itererede betingede forventninger (tårn-egenskaben):

$$0 \leq t \leq u : \quad E\Big[E[X|\mathcal{F}_u]\,|\mathcal{F}_t\Big] = E[X|\mathcal{F}_t]$$

Bevis: Man skyder et (tids)punkt ind og stirrer på nogle summer.

4 (Projektionsegenskaben.) Den betingede forventning af en stokastisk variabel X er den bedste forudsigelse af X's værdi i 'mean-square'-forstand blandt $\mathcal{F}_t$-målelige variable:

$$E[X|\mathcal{F}_t] = \arg\min_{Y \in \mathcal{F}_t} E\big[(X - Y)^2\big]$$

Bevis: Example 22 (= en gammel Fin1-eksamensopgave).

Martingal — iflg. Googles billeder

(a) Seletøj

(b) Roulette-relateret

(c) Nonsens

Martingal — matematisk

En tilpasset stokastisk process (X_t) er en $\mathcal{F}$-martingal, hvis $E[X_t] < \infty$ for alle $t = 1, .., T$ og

$$E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = X_{t-1}, \quad t = 1, .., T$$

Std.-martingal nr. 1 (Example 23) Lad X være en (vilkårlig) stokastisk variabel. Den stokastiske process (Y_t), defineret ved $Y_t = E[X|\mathcal{F}_t]$ for $t = 0, .., T$ er en martingal.

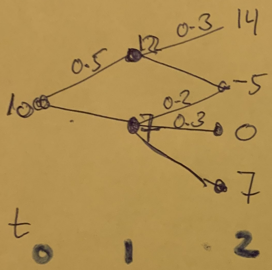
Std.-martingal nr. 2 (Example 23) En (løbende) sum af uafhængige stokastiske variable med middelværdi 0 ("fair spil") er en martingal (mht. sit naturlige filter).

En observation (Example 23) Vi kunne (pr. tårnegenskaben) alternativt have brugt definitionen $E[X_u|\mathcal{F}_t] = X_t$ for alle $t \leq u$. Og det bliver man nødt til i komtinuert tid.

En underlig proces (Example 24) Vi finder en positiv process for hvilken $M_t = E[M_{t+1}|\mathcal{F}_t]$ for alle t, specielt $E[M_t] = 1$ for alle t, men for hvilken $M(t) \to 0$ næsten sikkert for $t \to \infty$.

En opgave om filtre

I AFSNIT 5.1 / STD'er 'opg / ugl S-notation kan vi specificere en model for den stokastiske proces $X = \{X(t)\}_{t=0,1,2}$ sådan:



(Lille pointe: Gitter og træer har en orientering ("rotning") i tid, men ikke i rum. MAO. op og ned er ikke generelt veldefineret

<u>Opgaver</u>

- SKRIV MODELLEN DETALJERET OP I AFSNIT 4.2's ABSTRAKTE $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, \mathcal{F}, P)$-NOTATION/FORMALISME.
- BEREGN – OMHYGGELIGT EFTER DEFINITIONEN – $E_t(X(2))(\omega)$ FOR alle t og ω.
- ER X EN MARTINGAL?
- BEREGN $E_t(X(1))(\omega)$ for $t=0,1$ og alle ω.
- HVAD ER $E_2(X(1))(\omega)$? KAN DETTE REPRÆSENTERES I GITTERET?
- BEREGN $E_0(X(2))$ og $E_0(E_1(X_2))$. KOMMENTÉR

Her er et svar: Link