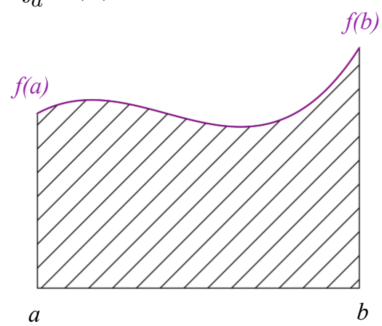
Intégration numérique

Pour rappel, calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ revient à calculer l'aire sous la courbe de f sur $[a, b]$



Cette intégrale peut être difficile, voire impossible, à calculer analytiquement, c'est la raison pour laquelle on recourt aux méthodes numériques pour approximer cette aire.

1 Méthode du rectangle

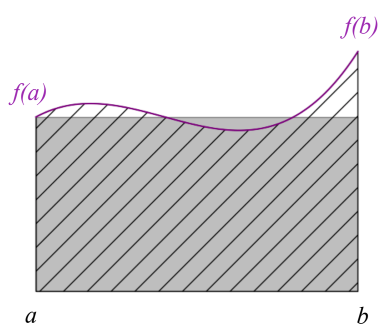
1.1 Simple

La méthode du rectangle consiste à calculer l'aire sous la courbe en réalisant une approximation avec un rectangle que l'on arrive mieux à calculer (On remplace f par un polynôme d'ordre 0).

Il en existe trois variantes, selon la position du point d'échantillonnage dans l'intervalle :

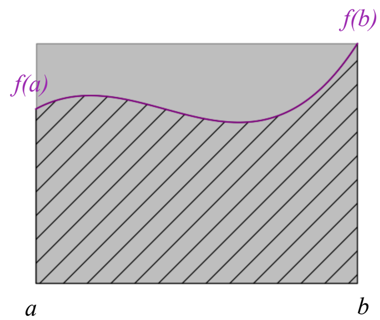
Rectangle à gauche :

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx (b-a)f(a)$$



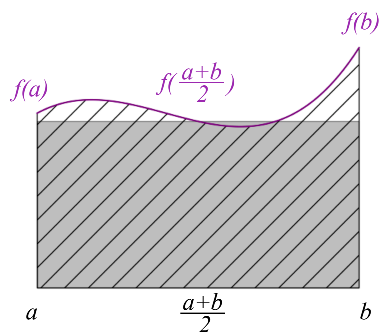
Rectangle à droite :

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx (b-a)f(b)$$



Rectangle au milieu (méthode du point milieu) :

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$



1.2 Composite

Une meilleure stratégie consiste à décomposer l'intervalle où l'on doit faire l'intégration, soit l'intervalle $[a, b]$, en n sous-intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$:

Les différents points engendrés sont notés x_i pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Les valeurs aux extrémités sont $a = x_0$ et $b = x_n$. Dans chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on peut utiliser la méthode du rectangle. On a alors :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx$$

Rectangle à gauche :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx \approx p \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = p \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ip)$$

Où $p = \frac{(b-a)}{n}$ représente le pas.

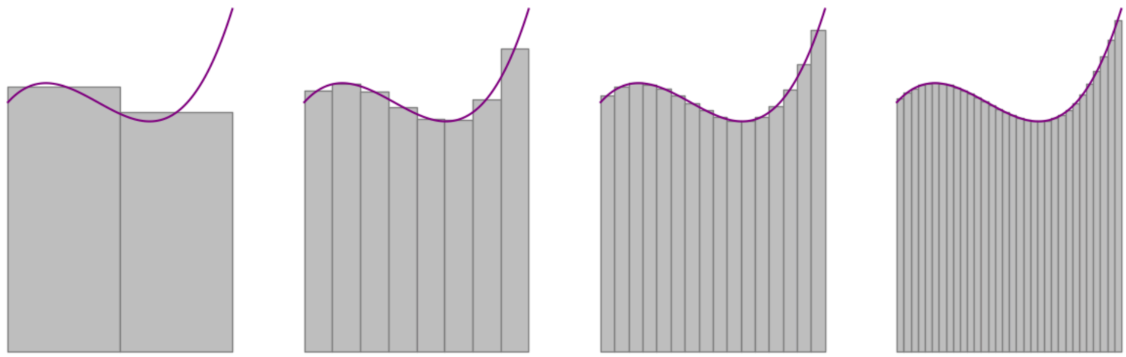
Rectangle à droite :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx \approx p \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = p \sum_{i=1}^{n} f(a+ip)$$

Rectangle au milieu (méthode du point milieu) :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx \approx p \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) = p \sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+\frac{1}{2})p)$$

Plus il y aura de rectangles, plus l'approximation sera fine :



1.3 Erreur

L'ordre d'une méthode numérique mesure la rapidité avec laquelle l'erreur diminue quand le pas devient plus petit.

L'erreur dans le cas du rectangle à droite ou à gauche vérifie :

$$|erreur| \leq \frac{(b-a)p}{2} \underset{x\in[a,b]}{max} |f'(x)|$$

On dit que c'est une méthode d'ordre 1, l'erreur proportionnelle à p.

Dans le cas milieu :

$$|erreur| \leq \frac{(b-a)p^2}{24} \underset{x\in[a,b]}{max} |f''(x)|$$

C'est une méthode d'ordre 2, l'erreur est proportionnelle à p^2.

1.4 Exemple

Il s'agit d'évaluer numériquement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)\ dx$$

dont la valeur exacte est 1.

[1]:
```
def rectangle_droit_composite(f, a, b, n):
    p = (b-a)/n
    s = 0
    for i in range(1, n+1):
        s += f(a+i*p)
    return p*s
```

On commence par 10 intervalles ($p = \frac{\pi}{20}$) :

[2]:
```
import math

x = rectangle_droit_composite(math.sin, 0, math.pi/2, 10)

x
```

[2]: 1.076482802694102

Avec une erreur égale :

[3]:
```
1 - x
```

[3]: -0.07648280269410201

Ensuite, pour 100 intervalles ($p = \frac{\pi}{200}$) l'erreur égale :

[4]:
```
1 - rectangle_droit_composite(math.sin, 0, math.pi/2, 100)
```

[4]: -0.007833419873582104

Et pour 1000 intervalles ($p = \frac{\pi}{2000}$) l'erreur égale :

[5]:
```
1 - rectangle_droit_composite(math.sin, 0, math.pi/2, 1000)
```

[5]: -0.0007851925466306753

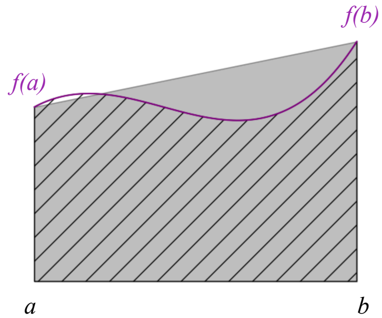
On peut observer que l'erreur est proportionnelle au pas; en divisant le pas par 10, l'erreur est aussi divisée par 10.

2 Méthode du trapèze

2.1 Simple

On procède de la même façon que la méthode du rectangle. Cette fois, cependant, on remplace f par le polynôme de degré 1 passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ en réalisant une approximation avec un trapèze. Sa forme épouse mieux la courbe ; l'estimation sera donc plus précise.

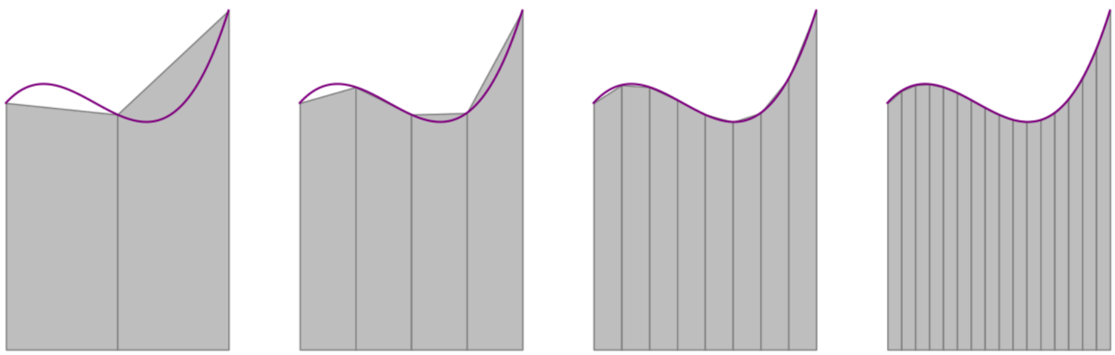
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$



2.2 Composite

Dans chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on peut utiliser la méthode du trapèze. On a alors :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \approx p \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = p \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a+ip) + f(a+(i+1)p)}{2} = p(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ip))$$



2.3 Erreur

L'erreur dans ce cas vérifie :

$$|erreur| \leq \frac{(b-a)p^2}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

C'est une méthode d'ordre 2, l'erreur est proportionnelle à p^2.

2.4 Exemple

On reprend le même exemple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)\; dx$$

[6]:
```
def trapèze_composite(f, a, b, n):
    p = (b-a)/n
    s = (f(a)+f(b))/2
```

```python
    for i in range(1, n):
        s += f(a+i*p)
    return p*s
```

[7]:
```python
1 - trapèze_composite(math.sin, 0, math.pi/2, 1)
```

[7]: 0.21460183660255172

[8]:
```python
1 - trapèze_composite(math.sin, 0, math.pi/2, 10)
```

[8]: 0.0020570136456428134

[9]:
```python
1 - trapèze_composite(math.sin, 0, math.pi/2, 100)
```

[9]: 2.0561760392445727e-05

On remarque facilement la rapidité de convergence de la méthode du trapèze par rapport à la méthode du rectangle droit ou gauche; en divisant le pas par 10 l'erreur est divisée non pas par 10 mais par 10^2.

3 TP

Implémenter les méthodes restantes (rectangle gauche et rectangle milieu)

3.1 Méthode de Simpson

On reprend le raisonnement utilisé antérieurement, mais cette fois on approxime f par un polynôme de degré 2 dont la courbe passe par les points $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ et $(b, f(b))$:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

1. Écrire une fonction $simpson(f, a, b)$ qui renvoie la valeur approchée de $\int_a^b f(x)\ dx$ par la méthode de *Simpson*.

La méthode de *Simpson* composite s'écrit comme suit :

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{p}{6}\sum_{i=0}^{n-1}(f(a+ip) + 4f(a+(i+\frac{1}{2})p) + f(a+(i+1)p)$$

avec $p = \frac{b-a}{n}$.

2. Écrire une fonction $simpson\_composite(f, a, b, n)$ qui renvoie la valeur approchée de $\int_a^b f(x)\ dx$ par la méthode de *Simpson*.
3. Comparer les résultats en utilisant la méthode $quad(f, a, b)$ du module *scipy.integrate*.

3.2 Application

Comme la fonction e^{-x^2} n'a pas de primitive (sauf $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$), appliquer les différentes méthodes pour calculer :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

et comparer les résultats avec la solution exacte à 9 chiffres : 0,746824133.