



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

2DO CUATRIMESTRE DE 2020

ANÁLISIS NUMÉRICO

Búsqueda de raíces

Curso:

Sassano

Integrantes:

Sebellin, Camila Belén	csebellin@fi.uba.ar	100.204
Ponce, Antonella Belén	aponce@fi.uba.ar	100.635
Companyys, Gonzalo Alejo	gcompanyys@fi.uba.ar	103.026
Sagripanti, Ramiro	rsagripanti@fi.uba.ar	102.202
Schejtman, Ezequiel	eschejtman@fi.uba.ar	102.110
Ledesma, Dylan	dledesma@fi.uba.ar	102.876

Lenguaje elegido: Python

Índice

1. Objetivo del trabajo	2
2. Introducción	2
3. Fuerza Bruta	2
4. Resolución del Polinomio de Segundo Orden	3
5. Búsqueda de Raíces	6
6. Conclusiones	15
7. Anexos	16
8. Referencias	16

Introducción

El trabajo práctico consiste de tres partes, en las cuales se utilizaron diferentes métodos para resolver determinadas situaciones.

En la primera parte, se quiere hallar la clave de un candado de 4 dígitos mediante el uso de el método de fuerza bruta.

Para la segunda parte, se propone desarrollar un algoritmo que sea capaz de calcular las raíces de una ecuación cuadrática de manera correcta, esto es, minimizando los errores de redondeo y de truncamiento.

Por último, en la tercera parte, se quiere encontrar la altura de un tanque de agua a partir de la función que modela qué tan lleno está ese tanque.

Objetivo del trabajo

El objetivo de este trabajo práctico es estudiar distintos métodos de búsqueda de raíces y comparar su efectividad, con la finalidad de identificar cuáles de ellos convergen de manera lineal o de manera cuadrática, como lo predice la teoría.

Fuerza Bruta

La primera parte del trabajo presenta la forma de hallar un número de 4 dígitos al azar usando el método de Fuerza Bruta. El algoritmo se puede describir como: plantear una posible solución, verificar si es la correcta, y si no lo es plantear una nueva solución y seguir probando.

En nuestro experimento en particular, empezamos probando con el número 0000, e incrementamos de a 1. Al llevar a cabo este experimento 100.000 veces, podemos graficar la cantidad de intentos realizados en un histograma (de intervalos 0-10, 10-20, etc...) y de esa forma analizar la utilidad del método bajo determinadas condiciones.

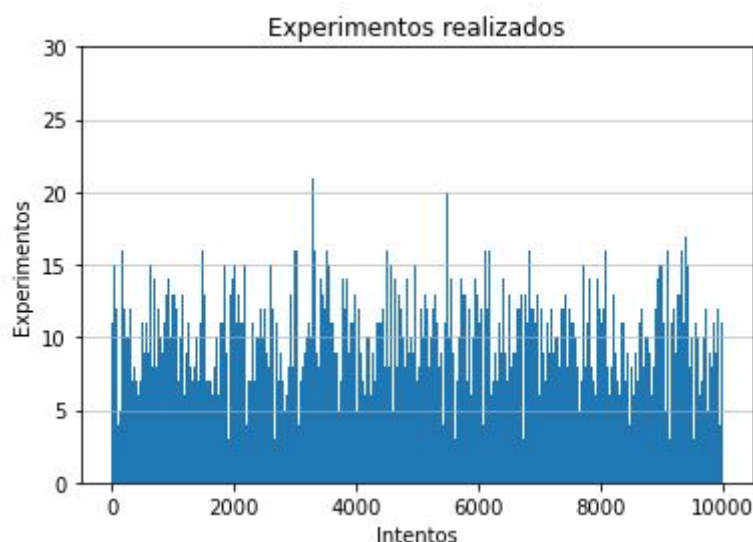


Figura 1: Histograma de Intentos para los experimentos realizados. Se utilizan intervalos de 0-10, 10-20, etc...

Usando el histograma nos damos cuenta de que la cantidad de intentos tiene una correlación con la cantidad de dígitos a hallar, en el peor de los casos 10^N intentos (siendo N la cantidad de dígitos del número que queríamos encontrar). Así, podemos decir que no tiene sentido hablar de convergencia, puesto que la cantidad de intentos (en el peor de los casos) crece exponencialmente.

Resolución polinomio de segundo orden

En la segunda parte del trabajo práctico, se desea programar un algoritmo que sea capaz de calcular las raíces de un polinomio de segundo orden, trabajando con 32 bits. Dicho algoritmo debe ser más preciso que si se utilizara la fórmula resolvente para obtener las raíces deseadas.

Dado que estamos trabajando con máquinas y contamos únicamente con 32 bits, habrá una determinada precisión que podremos garantizar cuando calculemos las raíces de manera computacional. Esto se debe a la representación en punto flotante que se utiliza en las máquinas para almacenar y operar números reales.

Según la norma IEEE 754, al trabajar con 32 bits (simple precisión) tenemos reservadas una cantidades definidas de bits para cada campo al representar números reales en la máquina:

- Bit de signo: 1 bit.
- Mantisa: 23 bits.
- Exponente: 8 bits.

La precisión p en este caso es $p = 23 + 1 = 24$, de manera que la cantidad de dígitos significativos que podemos asegurar son 7 (ver Anexo 1).

La ecuación que quiere resolverse es de la forma:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Si los cálculos los realizáramos en papel, las raíces las podríamos obtener utilizando la conocida fórmula resolvente. Sin embargo, queremos resolverlo de manera computacional, de manera que se nos presentan diferentes problemas, los cuales surgen de la representación en punto flotante.

La conocida fórmula resolvente nos da la siguiente fórmula para calcular las raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Principalmente, son dos los problemas que debemos tratar de minimizar al implementar nuestro algoritmo.

Primero, al estar trabajando con punto flotante, queremos evitar realizar restas entre dos números ‘ceranos’, pudiendo llegar a resultados absurdos si lo hacemos, debido a que las máquinas solo pueden mantener una cantidad fija de dígitos significativos. Por este motivo, como máximo vamos a poder representar valores de $1E19$. Dicho esto, podemos notar que si los coeficientes de la ecuación cuadrática son tales que $b^2 \gg 4ac$, lo que sucederá es que $\sqrt{b^2 - 4ac} \approx b$, y entonces cuando calculemos una de las dos raíces (en el caso de la ecuación (1) sería la raíz x_1), estaríamos haciendo una resta de número muy cercanos, con lo

cual la precisión con la cual se calcule esta raíz será muy baja. Esto se conoce como error de cancelación. Cabe destacar que, además del error de cancelación, también tenemos error de redondeo al estar multiplicando números representados en punto flotante.

¿Cómo podemos minimizar o evitar el error de cancelación? Observemos qué sucede si hacemos el producto de las dos raíces de la ecuación (1):

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

De esta manera, lo que hacemos es llamar x_1 a la raíz que no trae problemas (que no genera error de cancelación):

$$x_1 = - \left(\frac{b + \text{sgn}(b) \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

donde $\text{sgn}(x)$ es la función signo. Una vez computada, procedemos a calcular la segunda raíz x_2

utilizando la relación (2):

$$x_2 = \frac{c}{ax_1}$$

Como resultado de esta implementación, ya no perdemos precisión al calcular una de las dos raíces, evitando así el error de cancelación.

Segundo, al solo disponer de 32 bits, tenemos un rango de números que podremos representar. Aproximadamente, el rango representable (utilizando el formato IEEE 754) es: $R = [-1.701411733e+38 ; 3.402823466e+38]$. Lo que nos puede suceder, es que ocurra una situación de overflow (underflow), es decir, caigo fuera del rango de representación posible. Se puede dar el caso que el coeficiente b ó los coeficientes a y c sean muy grandes, y cuando calculemos b^2 ó $4ac$ para el determinante, tengamos overflow. Agregamos lógica adicional a nuestro algoritmo para evitar estas situaciones (claro está, habrá un límite a partir del cual nuestra lógica será inútil pues las magnitudes pueden ser muy grandes).

Para mejor entendimiento, listamos una lista de casos que generan errores, y expondremos los resultados obtenidos utilizando el algoritmo convencional (sin lógica adicional) y el algoritmo que implementamos.

Observación: a partir de ahora, utilizaremos AC para referirnos al algoritmo convencional y AI para referirnos al algoritmo implementado.

Caso 1: $b^2 \gg 4ac$. Utilizamos la ecuación: $x^2 + 10^{15}x - 1 = 0$.

Podemos decir varias cosas del caso 1:

Como puede verse, ambos algoritmos coinciden en la raíz x_2 , sin embargo, el AC nos da un valor totalmente distinto (y absurdo) del cual nos da el AI. Esto se debe al error de cancelación que está ocurriendo en el AC por la falta de lógica adicional. Ahora bien, el AI nos dio otra raíz para x_1 pero... ¿qué tan correcta es esta raíz? Reemplazamos en la ecuación original para averiguarlo:

$$(1 \cdot 10^{-15})^2 + (10^{15}) \cdot (10^{-15}) - 1 = 10^{-30} \neq 0$$

Matemáticamente, lo que obtuvimos es incorrecto. La razón por la cual sucede, se debe a que al ser un número tan bajo, la computadora lo redondea a cero.

Caso 2: El caso 2 lo utilizamos para mostrar la pérdida de precisión en el cálculo de una de las raíces cuando se utiliza el AC. Consideramos la ecuación: $x^2 - 50.6x + 5.05 = 0$, cuyas raíces teóricas son: $x_1 = 0.1$ y $x_2 = 50.5$.

Caso 3: En el caso 3 ejemplificamos un caso en el que el AC nos da error de overflow, mientras que el AC con su lógica adicional no. La ecuación que utilizamos es: $x^2 - 10^{30}x = 0$, cuyas raíces teóricas son $x_1 = 0$, $x_2 = 10^{30}$.

Caso	Raíces Algoritmos Convencional		Raíces algoritmo Implementado	
	x_1	x_2	x_1	x_2
1	- 8623152.0	$-1 \cdot 10^{15}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$-1 \cdot 10^{15}$
2	0.09999997	50.5	0.1	50.5
3	-inf	inf	0	10^{30}

Tabla 1: Raíces obtenidas al utilizar ambos algoritmos

Finalmente, queremos respondernos las preguntas:

➤ *¿Podemos justificar conseguir los componentes necesarios para poder operar con 64 bits utilizando el algoritmo convencional ?*

Pues la respuesta es simple: ¡NO!. ¿De qué me sirve aumentar la cantidad de bits con los que trabajo a 64, si la lógica interna de mi algoritmo no va a evitar que siga cometiendo errores de cancelación en determinados casos? Un desperdicio. Distinto sería el caso si se hablara del algoritmo implementado, pues me va a calcular ambas raíces con buena precisión y además tendríamos el plus de poder trabajar con números de órdenes de magnitud altísimos. Igualmente, debería justificarse, pues si dicha calculadora la utilizara un estudiante de nivel secundario, sería totalmente injustificable el rango de representación tan extenso.

➤ *¿Se justifica conseguir los componentes que nos permitan reducir a 16 bits con el algoritmo implementado?*

La respuesta es depende. ¿De qué? Pues de quien va a utilizar la calculadora, pues si se va a comercializar con la idea de que sea utilizada, por ejemplo, por alumnos de nivel secundario o terciario, podría ser justificable reducir a 16 bits. Mientras que, por otro lado, si la calculadora fuese a ser utilizada por ingenieros, sería más razonable quedarnos con los 32 bits, pues es más probable que se utilicen coeficientes de grandes órdenes de magnitud, al mismo tiempo que la precisión es extremadamente importante.

Búsqueda de raíces

Antes de comenzar a responder el cuestionario, definimos las funciones con las cuales vamos a trabajar:

$$V(x) = \frac{\pi x^2(3R-x)}{3} \text{ donde } R = 4,25$$

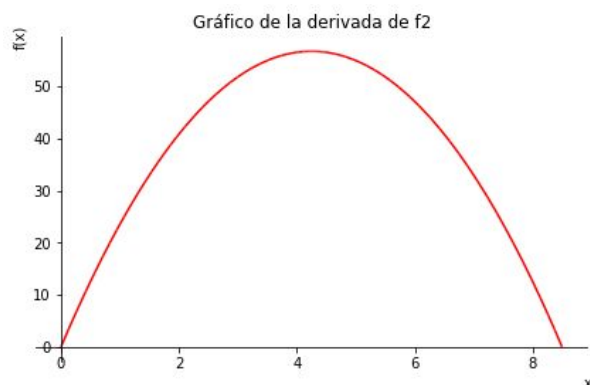
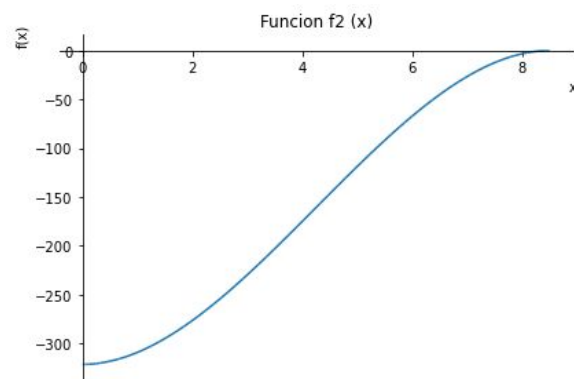
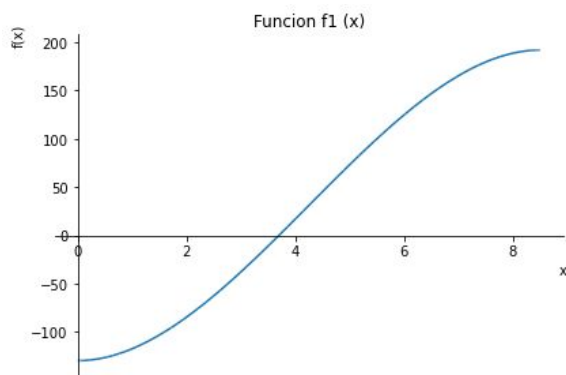
$$f_1(x) = V_{(x)} - \frac{S}{n \cdot 9,5} \cdot V_{(h_{max})} = V_{(x)} - \frac{23}{6 \cdot 9,5} \cdot V_{(2R)} = V_{(x)} - 129,75, \text{ (siendo } h_{max} = 2R)$$

$$= \frac{\pi x^2(3R-x)}{3} - 129,75$$

$$f_2(x) = V_{(x)} - 1 \cdot V_{(h_{max})} = V_{(x)} - V_{(2R)} = V_{(x)} - 321,56$$

$$= \frac{\pi x^2(3R-x)}{3} - 321,56$$

Para comenzar, se muestran los gráficos de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, seguidas de los gráficos de sus derivadas:



Los criterios que tomamos para elegir las semillas en cada uno de los métodos son los siguientes:

- ❑ **Método bisección:** Simplemente se eligió un intervalo adecuado. De manera que utilizando el Teorema de Bolzano pudiésemos asegurarnos que haya una raíz en el intervalo.

- ❑ Método de punto fijo: Una vez que analizamos analíticamente que se cumplían las hipótesis del Teorema de punto fijo, ya teníamos garantizado que para cualquier semilla p_0 tomada del intervalo utilizado, el método converge al único punto fijo de $g(x)$.
- ❑ Método de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado y Secante: Para los tres métodos, se utilizó el método de bisección para calcular las semillas. Para cada método se eligió una cantidad de iteraciones del método de bisección diferente, de manera arbitraria.

Las raíces obtenidas en cada iteración pueden verse en las tablas del inciso e)

Las raíces obtenidas para las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ mediante la implementación de los métodos: Bisección, Punto Fijo, Secante, Newton-Raphson y Newton-Raphson para raíces múltiples/modificado pueden observarse en la siguiente tabla. Se analizaron para los casos con cota de error: $1 \cdot 10^{-5}$ y $1 \cdot 10^{-13}$:

FUNCIÓN F1(X)

Método	Cota	Aproximación	Error	Cantidad de Iteraciones
Bisección	e-5	3,700146198272705	8,106231689453125e-06	20
	e-13	3,700148503084005	6.039613253960852e-14	47
Punto Fijo	e-5	3,7001447775900402	4.832745281291295e-06	14
	e-13	3,7001485030839913	5.46229728115577e-14	36
Secante	e-5	3,70014850308403	1.44868908869000e-6	4
	e-13	3,70014850308403	0	5
Newton-Raphson	e-5	3,70014850308403	4.44089209850063e-16	4
	e-13	3,70014850308403	4.44089209850063e-16	4
Newton-Raphson Moidificado	e-5	3,70014850308403	3.10862446895044e-15	4
	e-13	3,70014850308403	3.10862446895044e-15	4

Las semillas usadas para la función $f_1(x)$ fueron:

- ❖ Semilla para punto fijo (3 iteraciones de bisección): 3,1875
- ❖ Semilla para Newton (5 iteraciones de bisección): 3,453125
- ❖ Semilla para Secante (4 iteraciones de bisección): 3,71875

FUNCIÓN F2(X)

Método	Cota	Aproximación	Error	Cantidad de Iteraciones
Bisección	e-5	8,49999189376831	8,106231689453125e-06	20
	e-13	8,499999968335032	3,166496753692627e-08	28
Punto Fijo	e-5	8,49170327318554	4,054435539302403e-06	1
	e-13	8,491897200224301	3,86699667487278e-06	50
Secante	e-5	8,49998884120353	6,89630075711989e-6	21
	e-13	8,49999996281768	0	33
Newton-Raphson	e-5	8,49999206384858	7,93616129435293e-6	15
	e-13	8,49999999999994	5,86197757002083e-14	42
Newton-Raphson Moidificado	e-5	8,50000000000000	3,26609454148752e-7	3
	e-13	8,50000000000000	3,55271367880050e-15	4

Las semillas usadas para la función $f_2(x)$ fueron:

- ❖ Semilla para punto fijo (10 iteraciones de bisección): 8,49169921875
- ❖ Semilla para Newton (5 iteraciones de bisección): 8,234375
- ❖ Semilla para Secante (4 iteraciones de bisección): 7,96875

Observación: Se eligió tomar 10 iteraciones de bisección como semilla para la búsqueda de raíz por punto fijo, para tratar de obtener un resultado en menos de 50 iteraciones pero no se logró. Se podría continuar aumentando la cantidad de iteraciones de la semilla pero no lo consideramos útil ya que $f_2(x)$ es una función con raíces múltiples.

Seguidamente, se mostrará una tabla con los resultados detallados de cada método (en el caso de ser más de 6 iteraciones, sólo se mostrarán las primeras y últimas 6 iteraciones), junto con su error, su orden de convergencia P y su constante asintótica λ .

- $f_1(x) = \frac{\pi x^2(3R-x)}{3} - 129,75$
 - Cota: $1 \cdot 10^{-5}$

Bisección	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica
	0	4.2500000000000000	4.2500000000000000	0.0	0.0
	1	2.1250000000000000	2.1250000000000000	0.0	0.5
	2	3.1875000000000000	1.0625000000000000	1.0	0.5
	3	3.7187500000000000	0.5312500000000000	1.0	0.5
	4	3.4531250000000000	0.2656250000000000	1.0	0.5
	5	3.5859375000000000	0.1328125000000000	1.0	0.5
	6	3.6523437500000000	0.0664062500000000	1.0	0.5
	14	3.7003326416015625	0.0002593994140625	1.0	0.5
	15	3.7002029418945312	0.0001296997070312	1.0	0.5
	16	3.7001380920410156	0.0000648498535156	1.0	0.5
	17	3.7001705169677734	0.0000324249267578	1.0	0.5
	18	3.7001543045043945	0.0000162124633789	1.0	0.5
	19	3.7001461982727051	0.0000081062316895	0.0	0.0
Punto Fijo	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica
	0	3.1875000000000000	nan	0.0	0.0
	1	3.5011248649269766	0.3136248649269766	0.0	0.36997104885228077
	2	3.6171569851501650	0.1160321202231884	0.8982644803553381	0.40935530227930655
	3	3.6646553487982372	0.0474983636480721	0.9595776660123878	0.4244047407183664
	4	3.6848138795068439	0.0201585307086067	0.9830017839571699	0.4306329912990712
	5	3.6934948078860854	0.0086809283792415	0.9927053639592903	0.43328769204830536
	6	3.6972561473083636	0.0037613394222782	0.9968438066795551	0.43443294938066324
	9	3.6999101499447167	0.0003092563118066	0.9997407507536049	0.4352392481011324
	10	3.7000447504293379	0.0001346004846212	0.9998871700450135	0.4352801009904923
	11	3.7001033393418772	0.0000585889125393	0.999950888414972	0.4352978822516625
	12	3.7001288429714290	0.0000255036295518	0.9999786219973288	0.43530562218355284
	13	3.7001399448447589	0.0000111018733300	0.9999906941658385	0.43530899134310314
	14	3.7001447775900402	0.0000048327452813	0.0	0.0
Secante	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica
	0	3.4531250000000000	nan	0.0	0.0
	1	3.7187500000000000	nan	0.0	0.0
	2	3.699852142037337	0.2468602142037337	1.7868674117870291	0.008779080339754152
	3	3.7001499517657974	0.0001647375620637	0.9996433197626561	0.0087939208917626
	4	3.7001485030767087	0.0000014486890887	0.0	0.0
Newton Raphson	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica
	0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0	0.0
	1	3.7026503717120063	0.2495253717120063	0.0	0.00018247591825577958
	2	3.7001486962546002	0.0025016754574061	1.2971370865838932	0.030865905051818795
	3	3.7001485030840344	0.0000001931705658	0.0	0.0
Newton Raphson Modificado	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica
	0	3.4531250000000000	nan	0.0	0.0
	1	3.6970834398174945	0.2439584398174945	0.0	0.05149513733876931
	2	3.7001482100111551	0.0030647701936606	2.1144638726743685	0.031201810336976117
	3	3.7001485030840291	0.0000002930728740	0.0	0.0

- Cota $1 \cdot 10^{-13}$

Bisección	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>4.250000000000000</td><td>4.250000000000000</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr><tr><td>1</td><td>2.125000000000000</td><td>2.125000000000000</td><td>0.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>2</td><td>3.187500000000000</td><td>1.062500000000000</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>3</td><td>3.718750000000000</td><td>0.531250000000000</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>4</td><td>3.453125000000000</td><td>0.265625000000000</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>5</td><td>3.585937500000000</td><td>0.132812500000000</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>6</td><td>3.652343750000000</td><td>0.066406250000000</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>7</td><td>3.685546875000000</td><td>0.033203125000000</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>40</td><td>3.7001485030857566</td><td>0.000000000038654</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>41</td><td>3.7001485030838239</td><td>0.000000000019327</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>42</td><td>3.7001485030847903</td><td>0.000000000009663</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>43</td><td>3.7001485030843071</td><td>0.000000000004832</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>44</td><td>3.7001485030840655</td><td>0.000000000002416</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>45</td><td>3.7001485030839447</td><td>0.000000000001208</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>46</td><td>3.7001485030840051</td><td>0.000000000000604</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	4.250000000000000	4.250000000000000	0.0	0.0	1	2.125000000000000	2.125000000000000	0.0	0.5	2	3.187500000000000	1.062500000000000	1.0	0.5	3	3.718750000000000	0.531250000000000	1.0	0.5	4	3.453125000000000	0.265625000000000	1.0	0.5	5	3.585937500000000	0.132812500000000	1.0	0.5	6	3.652343750000000	0.066406250000000	1.0	0.5	7	3.685546875000000	0.033203125000000	1.0	0.5	40	3.7001485030857566	0.000000000038654	1.0	0.5	41	3.7001485030838239	0.000000000019327	1.0	0.5	42	3.7001485030847903	0.000000000009663	1.0	0.5	43	3.7001485030843071	0.000000000004832	1.0	0.5	44	3.7001485030840655	0.000000000002416	1.0	0.5	45	3.7001485030839447	0.000000000001208	1.0	0.5	46	3.7001485030840051	0.000000000000604	0.0	0.0
	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																												
	0	4.250000000000000	4.250000000000000	0.0	0.0																																																																												
	1	2.125000000000000	2.125000000000000	0.0	0.5																																																																												
	2	3.187500000000000	1.062500000000000	1.0	0.5																																																																												
	3	3.718750000000000	0.531250000000000	1.0	0.5																																																																												
	4	3.453125000000000	0.265625000000000	1.0	0.5																																																																												
	5	3.585937500000000	0.132812500000000	1.0	0.5																																																																												
	6	3.652343750000000	0.066406250000000	1.0	0.5																																																																												
	7	3.685546875000000	0.033203125000000	1.0	0.5																																																																												
	40	3.7001485030857566	0.000000000038654	1.0	0.5																																																																												
	41	3.7001485030838239	0.000000000019327	1.0	0.5																																																																												
	42	3.7001485030847903	0.000000000009663	1.0	0.5																																																																												
	43	3.7001485030843071	0.000000000004832	1.0	0.5																																																																												
	44	3.7001485030840655	0.000000000002416	1.0	0.5																																																																												
45	3.7001485030839447	0.000000000001208	1.0	0.5																																																																													
46	3.7001485030840051	0.000000000000604	0.0	0.0																																																																													
Punto Fijo	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>3.187500000000000</td><td>nan</td><td>0.0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3.5011248649269766</td><td>0.3136248649269766</td><td>0.0</td><td>0.36997104885228077</td></tr><tr><td>2</td><td>3.6171569851501650</td><td>0.1160321202231884</td><td>0.8982644803553381</td><td>0.40935530227930655</td></tr><tr><td>3</td><td>3.6646553487982372</td><td>0.0474983636480721</td><td>0.9595776660123878</td><td>0.4244047407183664</td></tr><tr><td>4</td><td>3.6848138795068439</td><td>0.0201585307086067</td><td>0.9830017839571699</td><td>0.4306329912990712</td></tr><tr><td>5</td><td>3.6934948078860854</td><td>0.0086809283792415</td><td>0.9927053639592903</td><td>0.43328769204830536</td></tr><tr><td>6</td><td>3.6972561473083636</td><td>0.0037613394222782</td><td>0.9968438066795551</td><td>0.43443294938066324</td></tr><tr><td>7</td><td>3.6988901970872057</td><td>0.0016340497788421</td><td>0.998629669861087</td><td>0.43492955655736115</td></tr><tr><td>30</td><td>3.7001485030778389</td><td>0.0000000000080354</td><td>0.9999750551261956</td><td>0.43533768099922626</td></tr><tr><td>31</td><td>3.7001485030813370</td><td>0.0000000000034981</td><td>1.0004050452466071</td><td>0.4351910625872794</td></tr><tr><td>32</td><td>3.7001485030828594</td><td>0.0000000000015223</td><td>0.9990616997072114</td><td>0.4355309218203034</td></tr><tr><td>33</td><td>3.7001485030835224</td><td>0.0000000000006630</td><td>1.0004583220543517</td><td>0.43536503683858</td></tr><tr><td>34</td><td>3.7001485030838110</td><td>0.0000000000002887</td><td>0.9999459223161519</td><td>0.43538461538461537</td></tr><tr><td>35</td><td>3.7001485030839367</td><td>0.0000000000001257</td><td>1.0020890244460043</td><td>0.43462897526501765</td></tr><tr><td>36</td><td>3.7001485030839913</td><td>0.000000000000546</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	3.187500000000000	nan	0.0		1	3.5011248649269766	0.3136248649269766	0.0	0.36997104885228077	2	3.6171569851501650	0.1160321202231884	0.8982644803553381	0.40935530227930655	3	3.6646553487982372	0.0474983636480721	0.9595776660123878	0.4244047407183664	4	3.6848138795068439	0.0201585307086067	0.9830017839571699	0.4306329912990712	5	3.6934948078860854	0.0086809283792415	0.9927053639592903	0.43328769204830536	6	3.6972561473083636	0.0037613394222782	0.9968438066795551	0.43443294938066324	7	3.6988901970872057	0.0016340497788421	0.998629669861087	0.43492955655736115	30	3.7001485030778389	0.0000000000080354	0.9999750551261956	0.43533768099922626	31	3.7001485030813370	0.0000000000034981	1.0004050452466071	0.4351910625872794	32	3.7001485030828594	0.0000000000015223	0.9990616997072114	0.4355309218203034	33	3.7001485030835224	0.0000000000006630	1.0004583220543517	0.43536503683858	34	3.7001485030838110	0.0000000000002887	0.9999459223161519	0.43538461538461537	35	3.7001485030839367	0.0000000000001257	1.0020890244460043	0.43462897526501765	36	3.7001485030839913	0.000000000000546	0.0	0.0
	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																												
	0	3.187500000000000	nan	0.0																																																																													
	1	3.5011248649269766	0.3136248649269766	0.0	0.36997104885228077																																																																												
	2	3.6171569851501650	0.1160321202231884	0.8982644803553381	0.40935530227930655																																																																												
	3	3.6646553487982372	0.0474983636480721	0.9595776660123878	0.4244047407183664																																																																												
	4	3.6848138795068439	0.0201585307086067	0.9830017839571699	0.4306329912990712																																																																												
	5	3.6934948078860854	0.0086809283792415	0.9927053639592903	0.43328769204830536																																																																												
	6	3.6972561473083636	0.0037613394222782	0.9968438066795551	0.43443294938066324																																																																												
	7	3.6988901970872057	0.0016340497788421	0.998629669861087	0.43492955655736115																																																																												
	30	3.7001485030778389	0.0000000000080354	0.9999750551261956	0.43533768099922626																																																																												
	31	3.7001485030813370	0.0000000000034981	1.0004050452466071	0.4351910625872794																																																																												
	32	3.7001485030828594	0.0000000000015223	0.9990616997072114	0.4355309218203034																																																																												
	33	3.7001485030835224	0.0000000000006630	1.0004583220543517	0.43536503683858																																																																												
	34	3.7001485030838110	0.0000000000002887	0.9999459223161519	0.43538461538461537																																																																												
35	3.7001485030839367	0.0000000000001257	1.0020890244460043	0.43462897526501765																																																																													
36	3.7001485030839913	0.000000000000546	0.0	0.0																																																																													
Secante	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>3.453125000000000</td><td>nan</td><td>0.0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3.718750000000000</td><td>nan</td><td>0.0</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>3.699852142037337</td><td>0.2468602142037337</td><td>1.7868674117870291</td><td>0.008779080339754152</td></tr><tr><td>3</td><td>3.7001499517657974</td><td>0.0001647375620637</td><td>0.9996433197626561</td><td>0.0087939208917626</td></tr><tr><td>4</td><td>3.7001485030767087</td><td>0.0000014486890887</td><td>2.5761912806364045</td><td>5.056162488177841e-06</td></tr><tr><td>5</td><td>3.7001485030840335</td><td>0.0000000000073248</td><td>inf</td><td>0.0</td></tr><tr><td>6</td><td>3.7001485030840335</td><td>0.000000000000000</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	3.453125000000000	nan	0.0		1	3.718750000000000	nan	0.0		2	3.699852142037337	0.2468602142037337	1.7868674117870291	0.008779080339754152	3	3.7001499517657974	0.0001647375620637	0.9996433197626561	0.0087939208917626	4	3.7001485030767087	0.0000014486890887	2.5761912806364045	5.056162488177841e-06	5	3.7001485030840335	0.0000000000073248	inf	0.0	6	3.7001485030840335	0.000000000000000	0.0	0.0																																								
	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																												
	0	3.453125000000000	nan	0.0																																																																													
	1	3.718750000000000	nan	0.0																																																																													
	2	3.699852142037337	0.2468602142037337	1.7868674117870291	0.008779080339754152																																																																												
	3	3.7001499517657974	0.0001647375620637	0.9996433197626561	0.0087939208917626																																																																												
	4	3.7001485030767087	0.0000014486890887	2.5761912806364045	5.056162488177841e-06																																																																												
5	3.7001485030840335	0.0000000000073248	inf	0.0																																																																													
6	3.7001485030840335	0.000000000000000	0.0	0.0																																																																													
Newton Raphson	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>0.000000000000000</td><td>0.000000000000000</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr><tr><td>1</td><td>3.7026503717120063</td><td>0.2495253717120063</td><td>0.0</td><td>0.00018247591825577958</td></tr><tr><td>2</td><td>3.7001486962546002</td><td>0.0025016754574061</td><td>1.2971370865838932</td><td>0.030865905051818795</td></tr><tr><td>3</td><td>3.7001485030840344</td><td>0.0000001931705658</td><td>2.1006472541378294</td><td>0.011901133244286785</td></tr><tr><td>4</td><td>3.7001485030840340</td><td>0.0000000000000004</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.0	0.0	1	3.7026503717120063	0.2495253717120063	0.0	0.00018247591825577958	2	3.7001486962546002	0.0025016754574061	1.2971370865838932	0.030865905051818795	3	3.7001485030840344	0.0000001931705658	2.1006472541378294	0.011901133244286785	4	3.7001485030840340	0.0000000000000004	0.0	0.0																																																		
	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																												
	0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.0	0.0																																																																												
	1	3.7026503717120063	0.2495253717120063	0.0	0.00018247591825577958																																																																												
	2	3.7001486962546002	0.0025016754574061	1.2971370865838932	0.030865905051818795																																																																												
3	3.7001485030840344	0.0000001931705658	2.1006472541378294	0.011901133244286785																																																																													
4	3.7001485030840340	0.0000000000000004	0.0	0.0																																																																													
Newton Raphson Modificado	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>3.453125000000000</td><td>nan</td><td>0.0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>3.6970834398174945</td><td>0.2439584398174945</td><td>0.0</td><td>0.05149513733876931</td></tr><tr><td>2</td><td>3.7001482100111551</td><td>0.0030647701936606</td><td>2.1144638726743685</td><td>0.031201810336976117</td></tr><tr><td>3</td><td>3.7001485030840291</td><td>0.0000002930728740</td><td>1.9839685364001156</td><td>0.036192369305710674</td></tr><tr><td>4</td><td>3.7001485030840322</td><td>0.000000000000031</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	3.453125000000000	nan	0.0		1	3.6970834398174945	0.2439584398174945	0.0	0.05149513733876931	2	3.7001482100111551	0.0030647701936606	2.1144638726743685	0.031201810336976117	3	3.7001485030840291	0.0000002930728740	1.9839685364001156	0.036192369305710674	4	3.7001485030840322	0.000000000000031	0.0	0.0																																																		
	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																												
	0	3.453125000000000	nan	0.0																																																																													
	1	3.6970834398174945	0.2439584398174945	0.0	0.05149513733876931																																																																												
	2	3.7001482100111551	0.0030647701936606	2.1144638726743685	0.031201810336976117																																																																												
3	3.7001485030840291	0.0000002930728740	1.9839685364001156	0.036192369305710674																																																																													
4	3.7001485030840322	0.000000000000031	0.0	0.0																																																																													

- $f_2(x) = \frac{\pi x^2(3R-x)}{3} - 321,56$
 - Cota: $1 \cdot 10^{-5}$

Bisección	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica
	0	4.250000000000000	4.250000000000000	0.0	0.0
	1	6.375000000000000	2.125000000000000	0.0	0.5
	2	7.437500000000000	1.062500000000000	1.0	0.5
	3	7.968750000000000	0.531250000000000	1.0	0.5
	4	8.234375000000000	0.265625000000000	1.0	0.5
	5	8.367187500000000	0.132812500000000	1.0	0.5
	6	8.433593750000000	0.066406250000000	1.0	0.5
	7	8.466796875000000	0.033203125000000	1.0	0.5

	<table><tr><td>13</td><td>8.4994812011718750</td><td>0.0005187988281250</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>14</td><td>8.4997406005859375</td><td>0.0002593994140625</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>15</td><td>8.4998703002929688</td><td>0.0001296997070312</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>16</td><td>8.4999351501464844</td><td>0.0000648498535156</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>17</td><td>8.4999675750732422</td><td>0.0000324249267578</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>18</td><td>8.4999837875366211</td><td>0.0000162124633789</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>19</td><td>8.4999918937683105</td><td>0.0000081062316895</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	13	8.4994812011718750	0.0005187988281250	1.0	0.5	14	8.4997406005859375	0.0002593994140625	1.0	0.5	15	8.4998703002929688	0.0001296997070312	1.0	0.5	16	8.4999351501464844	0.0000648498535156	1.0	0.5	17	8.4999675750732422	0.0000324249267578	1.0	0.5	18	8.4999837875366211	0.0000162124633789	1.0	0.5	19	8.4999918937683105	0.0000081062316895	0.0	0.0																																													
13	8.4994812011718750	0.0005187988281250	1.0	0.5																																																																													
14	8.4997406005859375	0.0002593994140625	1.0	0.5																																																																													
15	8.4998703002929688	0.0001296997070312	1.0	0.5																																																																													
16	8.4999351501464844	0.0000648498535156	1.0	0.5																																																																													
17	8.4999675750732422	0.0000324249267578	1.0	0.5																																																																													
18	8.4999837875366211	0.0000162124633789	1.0	0.5																																																																													
19	8.4999918937683105	0.0000081062316895	0.0	0.0																																																																													
Punto Fijo	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>7.4375000000000000</td><td>nan 0.0</td><td>0.0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>7.5067460979552694</td><td>0.0692460979552694</td><td>0.0</td><td>0.871521807787181</td></tr><tr><td>2</td><td>7.5670955824274539</td><td>0.0603494844721846</td><td>0.9289643663742565</td><td>0.8800769174333631</td></tr><tr><td>3</td><td>7.6202077706904268</td><td>0.0531121882629728</td><td>0.934109466884811</td><td>0.8875160093026867</td></tr><tr><td>4</td><td>7.6673456880629134</td><td>0.0471379173724866</td><td>0.9385363055975879</td><td>0.8940493220810317</td></tr><tr><td>5</td><td>7.7094893111340967</td><td>0.0421436230711834</td><td>0.9423878254936837</td><td>0.8998365906987719</td></tr><tr><td>6</td><td>7.7474116852381645</td><td>0.0379223741040677</td><td>0.9457710512901869</td><td>0.9050015152156328</td></tr><tr><td>7</td><td>7.7817314912629199</td><td>0.0343198060247554</td><td>0.9487677718158919</td><td>0.9096414859388349</td></tr><tr><td>44</td><td>8.2271295125207864</td><td>0.0045777446793505</td><td>0.9828004473331617</td><td>0.9670989267575715</td></tr><tr><td>45</td><td>8.2315566444871564</td><td>0.0044271319663700</td><td>0.9830990829780607</td><td>0.9676458902199191</td></tr><tr><td>46</td><td>8.2358405405398756</td><td>0.0042838960527192</td><td>0.9833874001133038</td><td>0.9681747303012284</td></tr><tr><td>47</td><td>8.2399881004453555</td><td>0.0041475599054799</td><td>0.9836659283052889</td><td>0.968686340524731</td></tr><tr><td>48</td><td>8.2440057850723019</td><td>0.0040176846269464</td><td>0.9839351614989011</td><td>0.9691815562741328</td></tr><tr><td>49</td><td>8.2478996509116644</td><td>0.0038938658393626</td><td>0.9841955605195831</td><td>0.9696611594765988</td></tr><tr><td>50</td><td>8.2516753813763071</td><td>0.0037757304646426</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	7.4375000000000000	nan 0.0	0.0		1	7.5067460979552694	0.0692460979552694	0.0	0.871521807787181	2	7.5670955824274539	0.0603494844721846	0.9289643663742565	0.8800769174333631	3	7.6202077706904268	0.0531121882629728	0.934109466884811	0.8875160093026867	4	7.6673456880629134	0.0471379173724866	0.9385363055975879	0.8940493220810317	5	7.7094893111340967	0.0421436230711834	0.9423878254936837	0.8998365906987719	6	7.7474116852381645	0.0379223741040677	0.9457710512901869	0.9050015152156328	7	7.7817314912629199	0.0343198060247554	0.9487677718158919	0.9096414859388349	44	8.2271295125207864	0.0045777446793505	0.9828004473331617	0.9670989267575715	45	8.2315566444871564	0.0044271319663700	0.9830990829780607	0.9676458902199191	46	8.2358405405398756	0.0042838960527192	0.9833874001133038	0.9681747303012284	47	8.2399881004453555	0.0041475599054799	0.9836659283052889	0.968686340524731	48	8.2440057850723019	0.0040176846269464	0.9839351614989011	0.9691815562741328	49	8.2478996509116644	0.0038938658393626	0.9841955605195831	0.9696611594765988	50	8.2516753813763071	0.0037757304646426	0.0	0.0
Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																													
0	7.4375000000000000	nan 0.0	0.0																																																																														
1	7.5067460979552694	0.0692460979552694	0.0	0.871521807787181																																																																													
2	7.5670955824274539	0.0603494844721846	0.9289643663742565	0.8800769174333631																																																																													
3	7.6202077706904268	0.0531121882629728	0.934109466884811	0.8875160093026867																																																																													
4	7.6673456880629134	0.0471379173724866	0.9385363055975879	0.8940493220810317																																																																													
5	7.7094893111340967	0.0421436230711834	0.9423878254936837	0.8998365906987719																																																																													
6	7.7474116852381645	0.0379223741040677	0.9457710512901869	0.9050015152156328																																																																													
7	7.7817314912629199	0.0343198060247554	0.9487677718158919	0.9096414859388349																																																																													
44	8.2271295125207864	0.0045777446793505	0.9828004473331617	0.9670989267575715																																																																													
45	8.2315566444871564	0.0044271319663700	0.9830990829780607	0.9676458902199191																																																																													
46	8.2358405405398756	0.0042838960527192	0.9833874001133038	0.9681747303012284																																																																													
47	8.2399881004453555	0.0041475599054799	0.9836659283052889	0.968686340524731																																																																													
48	8.2440057850723019	0.0040176846269464	0.9839351614989011	0.9691815562741328																																																																													
49	8.2478996509116644	0.0038938658393626	0.9841955605195831	0.9696611594765988																																																																													
50	8.2516753813763071	0.0037757304646426	0.0	0.0																																																																													
Secante	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>8.2343750000000000</td><td>nan 0.0</td><td>0.0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>7.9687500000000000</td><td>nan 0.0</td><td>0.0</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>8.3255018248175183</td><td>0.0911268248175183</td><td>1.3430656934306573</td><td>0.19643246582684618</td></tr><tr><td>3</td><td>8.395794654546505</td><td>0.0700776406371322</td><td>0.3531693455910923</td><td>0.562704357920617</td></tr><tr><td>4</td><td>8.4350124592339597</td><td>0.0394329937793092</td><td>0.7885818973818772</td><td>0.6354414613228059</td></tr><tr><td>5</td><td>8.4600698184254171</td><td>0.0250573591914574</td><td>1.0958717339512214</td><td>0.608409602164971</td></tr><tr><td>6</td><td>8.4753149563623964</td><td>0.0152451379369793</td><td>0.9627046923953332</td><td>0.6197899559681117</td></tr><tr><td>7</td><td>8.4847637397330846</td><td>0.0094487833706882</td><td>1.0122621243512846</td><td>0.6161649789419131</td></tr><tr><td>16</td><td>8.4997997628168687</td><td>0.0001237565041645</td><td>0.9999778978860442</td><td>0.6180244008279839</td></tr><tr><td>17</td><td>8.4998762473562035</td><td>0.0000764845393348</td><td>0.9998980470464562</td><td>0.618027658357086</td></tr><tr><td>18</td><td>8.4999235169169491</td><td>0.0000472695607456</td><td>0.999986224763954</td><td>0.6180317552436126</td></tr><tr><td>19</td><td>8.4999527310065464</td><td>0.0000292140895972</td><td>1.0000037092562344</td><td>0.6180306520879708</td></tr><tr><td>20</td><td>8.4999707862093903</td><td>0.0000180552028439</td><td>0.9999954202936868</td><td>0.6180320141261628</td></tr><tr><td>21</td><td>8.4999819449027694</td><td>0.000011586933791</td><td>1.0000388674836522</td><td>0.6180204548002236</td></tr><tr><td>22</td><td>8.4999888412035265</td><td>0.0000068963007571</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	8.2343750000000000	nan 0.0	0.0		1	7.9687500000000000	nan 0.0	0.0		2	8.3255018248175183	0.0911268248175183	1.3430656934306573	0.19643246582684618	3	8.395794654546505	0.0700776406371322	0.3531693455910923	0.562704357920617	4	8.4350124592339597	0.0394329937793092	0.7885818973818772	0.6354414613228059	5	8.4600698184254171	0.0250573591914574	1.0958717339512214	0.608409602164971	6	8.4753149563623964	0.0152451379369793	0.9627046923953332	0.6197899559681117	7	8.4847637397330846	0.0094487833706882	1.0122621243512846	0.6161649789419131	16	8.4997997628168687	0.0001237565041645	0.9999778978860442	0.6180244008279839	17	8.4998762473562035	0.0000764845393348	0.9998980470464562	0.618027658357086	18	8.4999235169169491	0.0000472695607456	0.999986224763954	0.6180317552436126	19	8.4999527310065464	0.0000292140895972	1.0000037092562344	0.6180306520879708	20	8.4999707862093903	0.0000180552028439	0.9999954202936868	0.6180320141261628	21	8.4999819449027694	0.000011586933791	1.0000388674836522	0.6180204548002236	22	8.4999888412035265	0.0000068963007571	0.0	0.0
Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																													
0	8.2343750000000000	nan 0.0	0.0																																																																														
1	7.9687500000000000	nan 0.0	0.0																																																																														
2	8.3255018248175183	0.0911268248175183	1.3430656934306573	0.19643246582684618																																																																													
3	8.395794654546505	0.0700776406371322	0.3531693455910923	0.562704357920617																																																																													
4	8.4350124592339597	0.0394329937793092	0.7885818973818772	0.6354414613228059																																																																													
5	8.4600698184254171	0.0250573591914574	1.0958717339512214	0.608409602164971																																																																													
6	8.4753149563623964	0.0152451379369793	0.9627046923953332	0.6197899559681117																																																																													
7	8.4847637397330846	0.0094487833706882	1.0122621243512846	0.6161649789419131																																																																													
16	8.4997997628168687	0.0001237565041645	0.9999778978860442	0.6180244008279839																																																																													
17	8.4998762473562035	0.0000764845393348	0.9998980470464562	0.618027658357086																																																																													
18	8.4999235169169491	0.0000472695607456	0.999986224763954	0.6180317552436126																																																																													
19	8.4999527310065464	0.0000292140895972	1.0000037092562344	0.6180306520879708																																																																													
20	8.4999707862093903	0.0000180552028439	0.9999954202936868	0.6180320141261628																																																																													
21	8.4999819449027694	0.000011586933791	1.0000388674836522	0.6180204548002236																																																																													
22	8.4999888412035265	0.0000068963007571	0.0	0.0																																																																													
Newton Raphson	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>0.0000000000000000</td><td>0.0000000000000000</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr><tr><td>1</td><td>8.3686155913978499</td><td>0.1342405913978499</td><td>0.0</td><td>0.0009429169192826054</td></tr><tr><td>2</td><td>8.4346515774279176</td><td>0.0660359860300677</td><td>0.14478069985628997</td><td>7.512144189825944</td></tr><tr><td>3</td><td>8.4674101711035465</td><td>0.0327585936756289</td><td>0.9942879164736227</td><td>15.204019144811438</td></tr><tr><td>4</td><td>8.4837259911361649</td><td>0.0163158200326183</td><td>0.9971934210690376</td><td>30.586117180959747</td></tr><tr><td>5</td><td>8.4918681985367765</td><td>0.0081422074006117</td><td>0.9986087879205948</td><td>61.34950378537539</td></tr><tr><td>6</td><td>8.4959353971020626</td><td>0.0040671985652860</td><td>0.9993073782953247</td><td>122.87587626313957</td></tr><tr><td>7</td><td>8.4979680226471217</td><td>0.0020326255450591</td><td>0.9996544309162011</td><td>245.92842184033944</td></tr><tr><td>9</td><td>8.4994920663902391</td><td>0.0005079740878706</td><td>0.9999137463485825</td><td>984.2433473059361</td></tr><tr><td>10</td><td>8.4997460382541767</td><td>0.0002539718639376</td><td>0.9999568846970541</td><td>1968.6631900187892</td></tr><tr><td>11</td><td>8.4998730203917638</td><td>0.0001269821375871</td><td>0.9999784452215071</td><td>3937.502863054566</td></tr><tr><td>12</td><td>8.4999365105120397</td><td>0.0000634901202758</td><td>0.9999892233784105</td><td>7875.182202597527</td></tr><tr><td>13</td><td>8.4999682553350571</td><td>0.0000317448230174</td><td>0.9999946117423952</td><td>15750.540880346325</td></tr><tr><td>14</td><td>8.4999841276872878</td><td>0.0000158723522308</td><td>0.9999973063184177</td><td>31501.258223497094</td></tr><tr><td>15</td><td>8.4999920638485822</td><td>0.0000079361612944</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0	0.0	1	8.3686155913978499	0.1342405913978499	0.0	0.0009429169192826054	2	8.4346515774279176	0.0660359860300677	0.14478069985628997	7.512144189825944	3	8.4674101711035465	0.0327585936756289	0.9942879164736227	15.204019144811438	4	8.4837259911361649	0.0163158200326183	0.9971934210690376	30.586117180959747	5	8.4918681985367765	0.0081422074006117	0.9986087879205948	61.34950378537539	6	8.4959353971020626	0.0040671985652860	0.9993073782953247	122.87587626313957	7	8.4979680226471217	0.0020326255450591	0.9996544309162011	245.92842184033944	9	8.4994920663902391	0.0005079740878706	0.9999137463485825	984.2433473059361	10	8.4997460382541767	0.0002539718639376	0.9999568846970541	1968.6631900187892	11	8.4998730203917638	0.0001269821375871	0.9999784452215071	3937.502863054566	12	8.4999365105120397	0.0000634901202758	0.9999892233784105	7875.182202597527	13	8.4999682553350571	0.0000317448230174	0.9999946117423952	15750.540880346325	14	8.4999841276872878	0.0000158723522308	0.9999973063184177	31501.258223497094	15	8.4999920638485822	0.0000079361612944	0.0	0.0
Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																													
0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0	0.0																																																																													
1	8.3686155913978499	0.1342405913978499	0.0	0.0009429169192826054																																																																													
2	8.4346515774279176	0.0660359860300677	0.14478069985628997	7.512144189825944																																																																													
3	8.4674101711035465	0.0327585936756289	0.9942879164736227	15.204019144811438																																																																													
4	8.4837259911361649	0.0163158200326183	0.9971934210690376	30.586117180959747																																																																													
5	8.4918681985367765	0.0081422074006117	0.9986087879205948	61.34950378537539																																																																													
6	8.4959353971020626	0.0040671985652860	0.9993073782953247	122.87587626313957																																																																													
7	8.4979680226471217	0.0020326255450591	0.9996544309162011	245.92842184033944																																																																													
9	8.4994920663902391	0.0005079740878706	0.9999137463485825	984.2433473059361																																																																													
10	8.4997460382541767	0.0002539718639376	0.9999568846970541	1968.6631900187892																																																																													
11	8.4998730203917638	0.0001269821375871	0.9999784452215071	3937.502863054566																																																																													
12	8.4999365105120397	0.0000634901202758	0.9999892233784105	7875.182202597527																																																																													
13	8.4999682553350571	0.0000317448230174	0.9999946117423952	15750.540880346325																																																																													
14	8.4999841276872878	0.0000158723522308	0.9999973063184177	31501.258223497094																																																																													
15	8.4999920638485822	0.0000079361612944	0.0	0.0																																																																													
Newton Raphson Modificado	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>8.2343750000000000</td><td>nan 0.0</td><td>0.0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>8.4971147318397815</td><td>0.2627397318397815</td><td>0.0</td><td>0.041791264698838496</td></tr><tr><td>2</td><td>8.4999996733905423</td><td>0.0028849415507608</td><td>2.013948635738772</td><td>0.03924232356702111</td></tr><tr><td>3</td><td>8.4999999999999964</td><td>0.0000003266094541</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	8.2343750000000000	nan 0.0	0.0		1	8.4971147318397815	0.2627397318397815	0.0	0.041791264698838496	2	8.4999996733905423	0.0028849415507608	2.013948635738772	0.03924232356702111	3	8.4999999999999964	0.0000003266094541	0.0	0.0																																																							
Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																													
0	8.2343750000000000	nan 0.0	0.0																																																																														
1	8.4971147318397815	0.2627397318397815	0.0	0.041791264698838496																																																																													
2	8.4999996733905423	0.0028849415507608	2.013948635738772	0.03924232356702111																																																																													
3	8.4999999999999964	0.0000003266094541	0.0	0.0																																																																													

○ Cota: $1 \cdot 10^{-13}$

Bisección	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica
	0	4.2500000000000000	4.2500000000000000	0.0	0.0
	1	6.3750000000000000	2.1250000000000000	0.0	0.5
	2	7.4375000000000000	1.0625000000000000	1.0	0.5
	3	7.9687500000000000	0.5312500000000000	1.0	0.5
	4	8.2343750000000000	0.2656250000000000	1.0	0.5
	5	8.3671875000000000	0.1328125000000000	1.0	0.5
	6	8.4335937500000000	0.0664062500000000	1.0	0.5
	7	8.4667968750000000	0.0332031250000000	1.0	0.5

	<table><tr><td>20</td><td>8.4999959468841553</td><td>0.0000040531158447</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>21</td><td>8.4999979734420776</td><td>0.0000020265579224</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>22</td><td>8.4999989867210388</td><td>0.0000010132789612</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>23</td><td>8.4999994933605194</td><td>0.0000005066394806</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>24</td><td>8.4999997466802597</td><td>0.0000002533197403</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>25</td><td>8.4999998733401299</td><td>0.0000001266598701</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>26</td><td>8.4999999366700649</td><td>0.0000000633299351</td><td>1.0</td><td>0.5</td></tr><tr><td>27</td><td>8.4999999683350325</td><td>0.0000000316649675</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	20	8.4999959468841553	0.0000040531158447	1.0	0.5	21	8.4999979734420776	0.0000020265579224	1.0	0.5	22	8.4999989867210388	0.0000010132789612	1.0	0.5	23	8.4999994933605194	0.0000005066394806	1.0	0.5	24	8.4999997466802597	0.0000002533197403	1.0	0.5	25	8.4999998733401299	0.0000001266598701	1.0	0.5	26	8.4999999366700649	0.0000000633299351	1.0	0.5	27	8.4999999683350325	0.0000000316649675	0.0	0.0																																								
20	8.4999959468841553	0.0000040531158447	1.0	0.5																																																																													
21	8.4999979734420776	0.0000020265579224	1.0	0.5																																																																													
22	8.4999989867210388	0.0000010132789612	1.0	0.5																																																																													
23	8.4999994933605194	0.0000005066394806	1.0	0.5																																																																													
24	8.4999997466802597	0.0000002533197403	1.0	0.5																																																																													
25	8.4999998733401299	0.0000001266598701	1.0	0.5																																																																													
26	8.4999999366700649	0.0000000633299351	1.0	0.5																																																																													
27	8.4999999683350325	0.0000000316649675	0.0	0.0																																																																													
Punto Fijo	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>8.4916992187500000</td><td>nan</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr><tr><td>1</td><td>8.4917032731855393</td><td>0.0000040544355393</td><td>0.0</td><td>0.9990231993823667</td></tr><tr><td>2</td><td>8.4917073236607035</td><td>0.0000040504751642</td><td>0.999511177622872</td><td>0.9990236766312023</td></tr><tr><td>3</td><td>8.4917113701812941</td><td>0.0000040465205906</td><td>0.9995116967161038</td><td>0.9990241531404201</td></tr><tr><td>4</td><td>8.4917154127531003</td><td>0.0000040425718062</td><td>0.9995117735826541</td><td>0.9990246293422107</td></tr><tr><td>5</td><td>8.4917194513819005</td><td>0.0000040386288003</td><td>0.9995114051746904</td><td>0.999025105670893</td></tr><tr><td>6</td><td>8.4917234860734645</td><td>0.0000040346915640</td><td>0.9995128475783641</td><td>0.9990255803615643</td></tr><tr><td>7</td><td>8.4917275168335458</td><td>0.0000040307600813</td><td>0.9995120407464253</td><td>0.9990260556070244</td></tr><tr><td>44</td><td>8.4918739427248582</td><td>0.0000038892416612</td><td>0.9995215181213715</td><td>0.9990433069861251</td></tr><tr><td>45</td><td>8.4918778282457090</td><td>0.0000038855208508</td><td>0.9995213855271816</td><td>0.9990437646542538</td></tr><tr><td>46</td><td>8.4918817100510875</td><td>0.0000038818053785</td><td>0.9995212573954967</td><td>0.99904422226011</td></tr><tr><td>47</td><td>8.4918855881463227</td><td>0.0000038780952352</td><td>0.9995216132183259</td><td>0.9990446792389933</td></tr><tr><td>48</td><td>8.4918894625367329</td><td>0.0000038743904103</td><td>0.9995219760682846</td><td>0.999045135687083</td></tr><tr><td>49</td><td>8.4918933332276261</td><td>0.0000038706908931</td><td>0.9995218651246126</td><td>0.9990455920230735</td></tr><tr><td>50</td><td>8.4918972002243009</td><td>0.0000038669966749</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	8.4916992187500000	nan	0.0	0.0	1	8.4917032731855393	0.0000040544355393	0.0	0.9990231993823667	2	8.4917073236607035	0.0000040504751642	0.999511177622872	0.9990236766312023	3	8.4917113701812941	0.0000040465205906	0.9995116967161038	0.9990241531404201	4	8.4917154127531003	0.0000040425718062	0.9995117735826541	0.9990246293422107	5	8.4917194513819005	0.0000040386288003	0.9995114051746904	0.999025105670893	6	8.4917234860734645	0.0000040346915640	0.9995128475783641	0.9990255803615643	7	8.4917275168335458	0.0000040307600813	0.9995120407464253	0.9990260556070244	44	8.4918739427248582	0.0000038892416612	0.9995215181213715	0.9990433069861251	45	8.4918778282457090	0.0000038855208508	0.9995213855271816	0.9990437646542538	46	8.4918817100510875	0.0000038818053785	0.9995212573954967	0.99904422226011	47	8.4918855881463227	0.0000038780952352	0.9995216132183259	0.9990446792389933	48	8.4918894625367329	0.0000038743904103	0.9995219760682846	0.999045135687083	49	8.4918933332276261	0.0000038706908931	0.9995218651246126	0.9990455920230735	50	8.4918972002243009	0.0000038669966749	0.0	0.0
Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																													
0	8.4916992187500000	nan	0.0	0.0																																																																													
1	8.4917032731855393	0.0000040544355393	0.0	0.9990231993823667																																																																													
2	8.4917073236607035	0.0000040504751642	0.999511177622872	0.9990236766312023																																																																													
3	8.4917113701812941	0.0000040465205906	0.9995116967161038	0.9990241531404201																																																																													
4	8.4917154127531003	0.0000040425718062	0.9995117735826541	0.9990246293422107																																																																													
5	8.4917194513819005	0.0000040386288003	0.9995114051746904	0.999025105670893																																																																													
6	8.4917234860734645	0.0000040346915640	0.9995128475783641	0.9990255803615643																																																																													
7	8.4917275168335458	0.0000040307600813	0.9995120407464253	0.9990260556070244																																																																													
44	8.4918739427248582	0.0000038892416612	0.9995215181213715	0.9990433069861251																																																																													
45	8.4918778282457090	0.0000038855208508	0.9995213855271816	0.9990437646542538																																																																													
46	8.4918817100510875	0.0000038818053785	0.9995212573954967	0.99904422226011																																																																													
47	8.4918855881463227	0.0000038780952352	0.9995216132183259	0.9990446792389933																																																																													
48	8.4918894625367329	0.0000038743904103	0.9995219760682846	0.999045135687083																																																																													
49	8.4918933332276261	0.0000038706908931	0.9995218651246126	0.9990455920230735																																																																													
50	8.4918972002243009	0.0000038669966749	0.0	0.0																																																																													
Secante	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>8.2343750000000000</td><td>nan</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr><tr><td>1</td><td>7.9687500000000000</td><td>nan</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr><tr><td>2</td><td>8.3255018248175183</td><td>0.0911268248175183</td><td>-5.517579021437588</td><td>0.19643246582684618</td></tr><tr><td>3</td><td>8.3955794654546505</td><td>0.0700776406371322</td><td>0.35331693455910923</td><td>0.562704357920617</td></tr><tr><td>4</td><td>8.4350124592339597</td><td>0.0394329937793092</td><td>0.7885818973818772</td><td>0.6354414613228059</td></tr><tr><td>5</td><td>8.4600698184254171</td><td>0.0250573591914574</td><td>1.0958717339512214</td><td>0.608409602164971</td></tr><tr><td>6</td><td>8.4753149563623964</td><td>0.0152451379369793</td><td>0.9627046923953332</td><td>0.6197899559681117</td></tr><tr><td>7</td><td>8.4847637397330846</td><td>0.0094487833706882</td><td>1.0122621243512846</td><td>0.6161649789419131</td></tr><tr><td>28</td><td>8.4999993733595733</td><td>0.0000003759776776</td><td>0.8581960733058596</td><td>0.6470588221398147</td></tr><tr><td>29</td><td>8.4999996166394407</td><td>0.0000002432798674</td><td>1.0627252772003148</td><td>0.6296296307113631</td></tr><tr><td>30</td><td>8.4999997698156537</td><td>0.0000001531762130</td><td>0.7709831752352528</td><td>0.6999999953612723</td></tr><tr><td>31</td><td>8.4999998770390022</td><td>0.0000001072233484</td><td>2.5689797218855652</td><td>0.40000000662675383</td></tr><tr><td>32</td><td>8.4999999199283423</td><td>0.0000000428893401</td><td>-0.0</td><td>1.0</td></tr><tr><td>33</td><td>8.4999999628176823</td><td>0.0000000428893401</td><td>-inf</td><td>0.0</td></tr><tr><td>34</td><td>8.4999999628176823</td><td>0.0000000000000000</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	8.2343750000000000	nan	0.0	0.0	1	7.9687500000000000	nan	0.0	0.0	2	8.3255018248175183	0.0911268248175183	-5.517579021437588	0.19643246582684618	3	8.3955794654546505	0.0700776406371322	0.35331693455910923	0.562704357920617	4	8.4350124592339597	0.0394329937793092	0.7885818973818772	0.6354414613228059	5	8.4600698184254171	0.0250573591914574	1.0958717339512214	0.608409602164971	6	8.4753149563623964	0.0152451379369793	0.9627046923953332	0.6197899559681117	7	8.4847637397330846	0.0094487833706882	1.0122621243512846	0.6161649789419131	28	8.4999993733595733	0.0000003759776776	0.8581960733058596	0.6470588221398147	29	8.4999996166394407	0.0000002432798674	1.0627252772003148	0.6296296307113631	30	8.4999997698156537	0.0000001531762130	0.7709831752352528	0.6999999953612723	31	8.4999998770390022	0.0000001072233484	2.5689797218855652	0.40000000662675383	32	8.4999999199283423	0.0000000428893401	-0.0	1.0	33	8.4999999628176823	0.0000000428893401	-inf	0.0	34	8.4999999628176823	0.0000000000000000	0.0	0.0
Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																													
0	8.2343750000000000	nan	0.0	0.0																																																																													
1	7.9687500000000000	nan	0.0	0.0																																																																													
2	8.3255018248175183	0.0911268248175183	-5.517579021437588	0.19643246582684618																																																																													
3	8.3955794654546505	0.0700776406371322	0.35331693455910923	0.562704357920617																																																																													
4	8.4350124592339597	0.0394329937793092	0.7885818973818772	0.6354414613228059																																																																													
5	8.4600698184254171	0.0250573591914574	1.0958717339512214	0.608409602164971																																																																													
6	8.4753149563623964	0.0152451379369793	0.9627046923953332	0.6197899559681117																																																																													
7	8.4847637397330846	0.0094487833706882	1.0122621243512846	0.6161649789419131																																																																													
28	8.4999993733595733	0.0000003759776776	0.8581960733058596	0.6470588221398147																																																																													
29	8.4999996166394407	0.0000002432798674	1.0627252772003148	0.6296296307113631																																																																													
30	8.4999997698156537	0.0000001531762130	0.7709831752352528	0.6999999953612723																																																																													
31	8.4999998770390022	0.0000001072233484	2.5689797218855652	0.40000000662675383																																																																													
32	8.4999999199283423	0.0000000428893401	-0.0	1.0																																																																													
33	8.4999999628176823	0.0000000428893401	-inf	0.0																																																																													
34	8.4999999628176823	0.0000000000000000	0.0	0.0																																																																													
Newton Raphson	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>0.0000000000000000</td><td>0.0000000000000000</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr><tr><td>1</td><td>0.3686155913978499</td><td>0.1342405913978499</td><td>0.0</td><td>0.0099429169192826054</td></tr><tr><td>2</td><td>0.4346515774279176</td><td>0.0660359860300677</td><td>0.14478069985628997</td><td>7.512144189825944</td></tr><tr><td>3</td><td>0.4674101711035465</td><td>0.0327585936756289</td><td>0.9942879164736227</td><td>15.204019144811438</td></tr><tr><td>4</td><td>0.4837259911361649</td><td>0.0163158200326183</td><td>0.9971934210690376</td><td>30.586117180959747</td></tr><tr><td>5</td><td>0.4918681985367765</td><td>0.0081422074006117</td><td>0.9986087879205948</td><td>61.34950378537539</td></tr><tr><td>6</td><td>0.4959353971020626</td><td>0.0040671985652860</td><td>0.9993073782953247</td><td>122.87587626313957</td></tr><tr><td>7</td><td>0.4979680226471217</td><td>0.0020326255450591</td><td>0.9996544309162011</td><td>245.92842184033944</td></tr><tr><td>36</td><td>8.49999999999962164</td><td>0.0000000000037854</td><td>1.0023717868345183</td><td>131899915118.68352</td></tr><tr><td>37</td><td>8.49999999999981064</td><td>0.0000000000018900</td><td>0.995267888204594</td><td>265041414485.66138</td></tr><tr><td>38</td><td>8.49999999999990532</td><td>0.0000000000009468</td><td>1.0054332948725395</td><td>527104842531.9847</td></tr><tr><td>39</td><td>8.49999999999995257</td><td>0.0000000000004725</td><td>0.9972980331463817</td><td>1058176604175.3984</td></tr><tr><td>40</td><td>8.49999999999997620</td><td>0.0000000000002363</td><td>0.9891932450434171</td><td>2132265638488.773</td></tr><tr><td>41</td><td>8.49999999999998810</td><td>0.0000000000001190</td><td>1.0328569025503964</td><td>4138415785899.598</td></tr><tr><td>42</td><td>8.49999999999999396</td><td>0.0000000000000586</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0	0.0	1	0.3686155913978499	0.1342405913978499	0.0	0.0099429169192826054	2	0.4346515774279176	0.0660359860300677	0.14478069985628997	7.512144189825944	3	0.4674101711035465	0.0327585936756289	0.9942879164736227	15.204019144811438	4	0.4837259911361649	0.0163158200326183	0.9971934210690376	30.586117180959747	5	0.4918681985367765	0.0081422074006117	0.9986087879205948	61.34950378537539	6	0.4959353971020626	0.0040671985652860	0.9993073782953247	122.87587626313957	7	0.4979680226471217	0.0020326255450591	0.9996544309162011	245.92842184033944	36	8.49999999999962164	0.0000000000037854	1.0023717868345183	131899915118.68352	37	8.49999999999981064	0.0000000000018900	0.995267888204594	265041414485.66138	38	8.49999999999990532	0.0000000000009468	1.0054332948725395	527104842531.9847	39	8.49999999999995257	0.0000000000004725	0.9972980331463817	1058176604175.3984	40	8.49999999999997620	0.0000000000002363	0.9891932450434171	2132265638488.773	41	8.49999999999998810	0.0000000000001190	1.0328569025503964	4138415785899.598	42	8.49999999999999396	0.0000000000000586	0.0	0.0
Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																													
0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0	0.0																																																																													
1	0.3686155913978499	0.1342405913978499	0.0	0.0099429169192826054																																																																													
2	0.4346515774279176	0.0660359860300677	0.14478069985628997	7.512144189825944																																																																													
3	0.4674101711035465	0.0327585936756289	0.9942879164736227	15.204019144811438																																																																													
4	0.4837259911361649	0.0163158200326183	0.9971934210690376	30.586117180959747																																																																													
5	0.4918681985367765	0.0081422074006117	0.9986087879205948	61.34950378537539																																																																													
6	0.4959353971020626	0.0040671985652860	0.9993073782953247	122.87587626313957																																																																													
7	0.4979680226471217	0.0020326255450591	0.9996544309162011	245.92842184033944																																																																													
36	8.49999999999962164	0.0000000000037854	1.0023717868345183	131899915118.68352																																																																													
37	8.49999999999981064	0.0000000000018900	0.995267888204594	265041414485.66138																																																																													
38	8.49999999999990532	0.0000000000009468	1.0054332948725395	527104842531.9847																																																																													
39	8.49999999999995257	0.0000000000004725	0.9972980331463817	1058176604175.3984																																																																													
40	8.49999999999997620	0.0000000000002363	0.9891932450434171	2132265638488.773																																																																													
41	8.49999999999998810	0.0000000000001190	1.0328569025503964	4138415785899.598																																																																													
42	8.49999999999999396	0.0000000000000586	0.0	0.0																																																																													
Newton Raphson Modificado	<table><tr><th>Iteración</th><th>Raiz</th><th>Error</th><th>Convergencia</th><th>Cte Asintótica</th></tr><tr><td>0</td><td>8.2343750000000000</td><td>nan</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr><tr><td>1</td><td>8.4971147318397815</td><td>0.2627397318397815</td><td>0.0</td><td>0.041791264698838496</td></tr><tr><td>2</td><td>8.4999996733905423</td><td>0.0028849415507608</td><td>2.013948635738772</td><td>0.03924232356702111</td></tr><tr><td>3</td><td>8.4999999999999964</td><td>0.0000003266094541</td><td>2.0180562734361365</td><td>0.03330448362793215</td></tr><tr><td>4</td><td>8.5000000000000000</td><td>0.0000000000000036</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr></table>	Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica	0	8.2343750000000000	nan	0.0	0.0	1	8.4971147318397815	0.2627397318397815	0.0	0.041791264698838496	2	8.4999996733905423	0.0028849415507608	2.013948635738772	0.03924232356702111	3	8.4999999999999964	0.0000003266094541	2.0180562734361365	0.03330448362793215	4	8.5000000000000000	0.0000000000000036	0.0	0.0																																																		
Iteración	Raiz	Error	Convergencia	Cte Asintótica																																																																													
0	8.2343750000000000	nan	0.0	0.0																																																																													
1	8.4971147318397815	0.2627397318397815	0.0	0.041791264698838496																																																																													
2	8.4999996733905423	0.0028849415507608	2.013948635738772	0.03924232356702111																																																																													
3	8.4999999999999964	0.0000003266094541	2.0180562734361365	0.03330448362793215																																																																													
4	8.5000000000000000	0.0000000000000036	0.0	0.0																																																																													

Para continuar, importando el paquete (from scipy import optimize.brentq), las raíces que se obtuvieron para $V(x) = 0$, fueron:

$$x_1 = 0, x_2 = 12.75$$

Utilizando el algoritmo implementado en la parte 2 para la calculadora, queremos calcular las raíces de la derivada de $V(x)$. Primero calculamos dicha derivada.

Siendo $V(x) = \frac{\pi x^2(3R-x)}{3}$, la derivada es $V'(x) = 2\pi Rx - \pi x^2$.

Por ende, queremos las raíces de la ecuación: $-\pi x^2 + 2\pi R x = 0$. Los resultados obtenidos con el algoritmo implementado son:

$$x_1 = 0, x_2 = 8.5$$

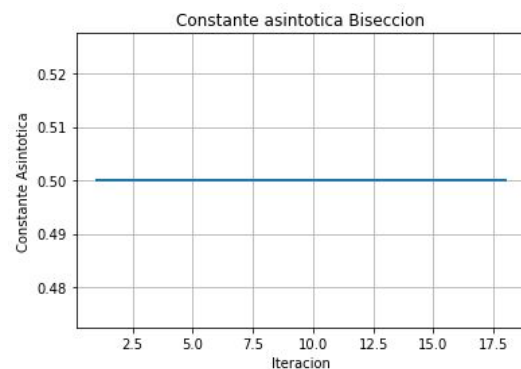
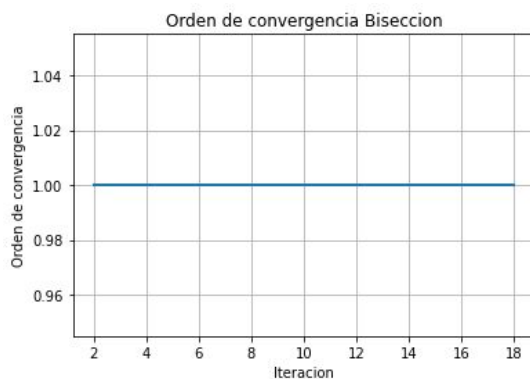
Si resolvemos la ecuación despejando llegamos a:

$$-\pi x^2 + 2\pi R x = x(2\pi R - \pi x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x = 2R = 8.5$$

Podemos observar que nuestro algoritmo nos dio las raíces correctas como era esperado.

Por último, se presentará algunos gráficos de orden de convergencia que fueron considerados destacables para cada método:

❖ **Bisección:**



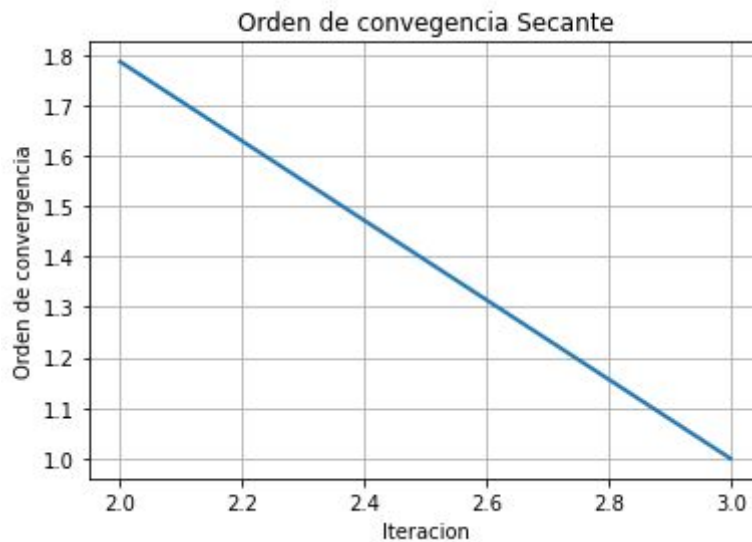
Este gráfico corresponde a la función $f_1(x)$ para el caso de la cota de $1 \cdot 10^{-5}$. Se puede apreciar que el orden de convergencia para la bisección es lineal, como era esperado. Este gráfico se repite para todos los casos en los cuales se aplicó el método de la bisección. Asimismo, la constante asintótica para la bisección en ambas funciones dio como resultado 0.5.

❖ **Punto Fijo:**



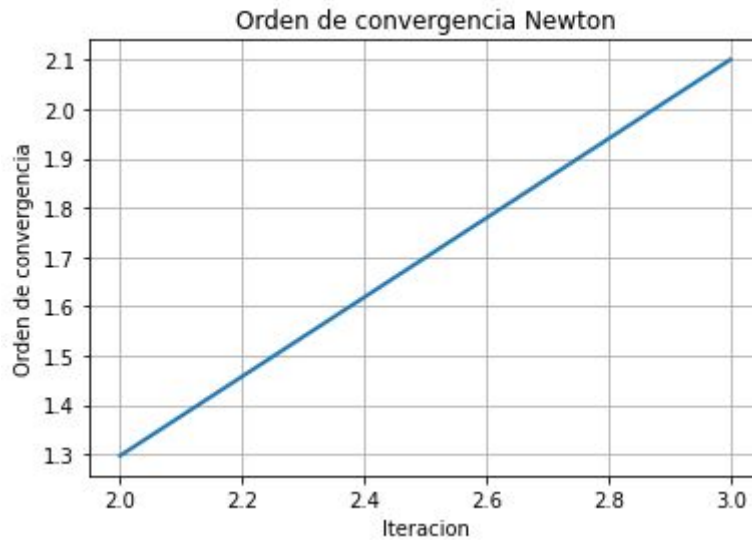
Este gráfico corresponde a la función $f_1(x)$ para el caso de la cota de $1 \cdot 10^{-5}$. Se puede apreciar que el orden de convergencia para punto fijo es lineal (converge a 1), como era esperado.

❖ **Secante:**

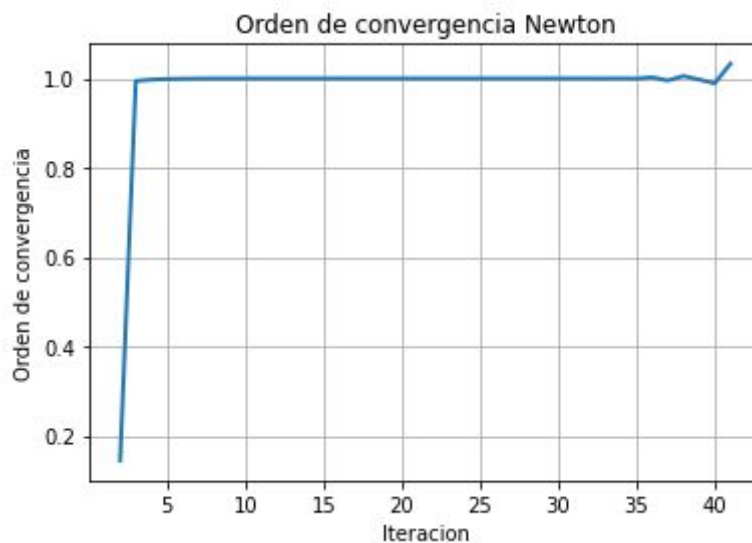


Este gráfico corresponde a la función $f_1(x)$ para el caso de la cota de $1 \cdot 10^{-5}$. Se puede apreciar que el orden de convergencia para el método secante es lineal, como era esperado.

❖ **Newton-Raphson:**

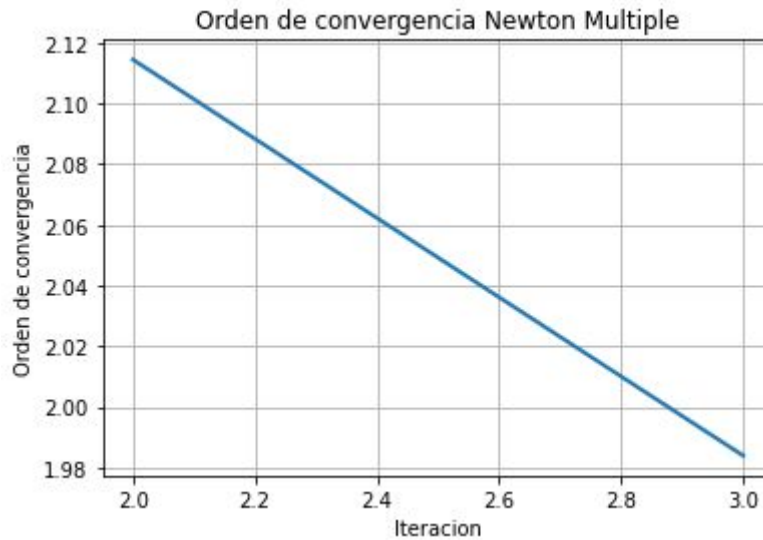


Este gráfico corresponde a la función $f_1(x)$ para el caso de la cota de $1 \cdot 10^{-13}$. Se puede apreciar que el orden de convergencia para el método de Newton-Raphson es cuadrático (converge a 2), como era esperado.

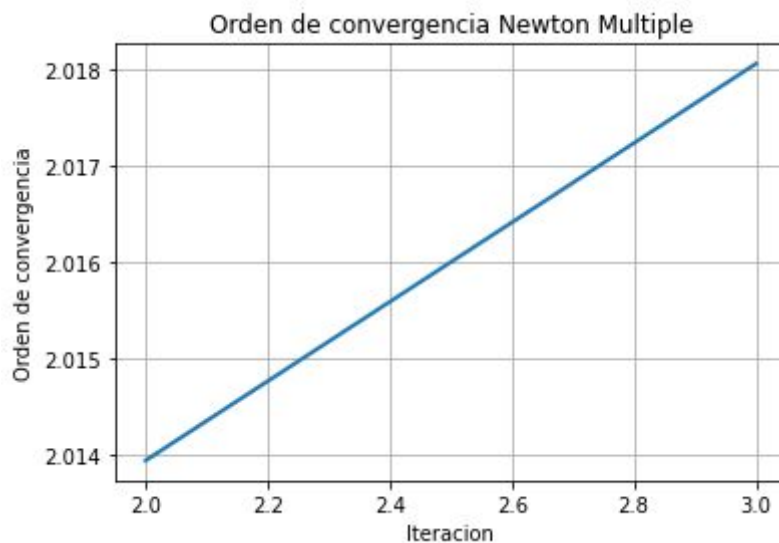


Este gráfico corresponde a la función $f_2(x)$ para el caso de la cota de $1 \cdot 10^{-13}$. Se puede apreciar que este método converge linealmente aunque lo esperado sería que la convergencia sea cuadrática.

❖ **Newton-Raphson modificado:**



Este gráfico corresponde a la función $f_1(x)$ para el caso de la cota de $1 \cdot 10^{-13}$. Se puede apreciar que este método converge cuadráticamente al igual que Newton-Raphson ya que la función tiene una raíz simple, como era esperado.



Este gráfico corresponde a la función $f_2(x)$ para el caso de la cota de $1 \cdot 10^{-13}$. A diferencia de Newton-Raphson, se puede apreciar que este método sí converge cuadráticamente.

Como puede observarse en los gráficos anteriores, aquellos casos en los que se realiza una mayor cantidad de iteraciones se aprecia mejor cómo va convergiendo el método, ya sea lineal o cuadráticamente. Al tener pocas iteraciones la convergencia es más directa y no llegan a apreciarse las oscilaciones alrededor del orden de convergencia correspondiente. Estas pocas iteraciones se deben a que se utilizaron semillas próximas a la raíz por lo que se alcanzó la cota de error deseada con gran rapidez.

Conclusiones

Podemos concluir, en primer lugar, que es justificable el uso del método de fuerza bruta cuando se trabaja con una cantidad de dígitos pequeña, no se tiene información del número a encontrar, y cuando identifiquemos un rango de números enteros determinado. También descartamos su uso para encontrar raíces reales o complejas.

Por otro lado, si queremos programar algoritmos que sean capaces de resolver ecuaciones mediante fórmulas matemáticas, es muy importante analizar todos los posibles errores que pueden llegar a ocurrir con las implementaciones, causa de la representación en punto flotante de las máquinas. Una vez analizados, si es posible, se debe llegar a soluciones que minimicen tales errores computacionales.

Por último, al aplicar los distintos métodos de búsquedas de raíces pudimos corroborar que los órdenes de convergencia obtenidos se corresponden con los esperados teóricamente en la mayoría de los casos. Es observable, que en el caso de $f_2(x)$ cuando se aplica el método de punto fijo para ambas cotas, se llegó a la cantidad máxima de iteraciones. Esto se debe a que el método converge muy lentamente. Se podría solucionar utilizando una semilla con mayor cantidad de iteraciones de bisección o aumentando el límite de iteraciones¹. Cabe destacar que al aplicar los métodos para raíces simples a la función $f_2(x)$ se obtuvo una gran cantidad de iteraciones en comparación con Newton-Raphson modificado, este fue el primer indicio de que la función en realidad tenía raíces múltiples. Realizamos la comparación entre Newton-Raphson y Newton-Raphson modificado ya que de los métodos para raíces simples, el primero es el único que asegura un orden de convergencia cuadrático: en el caso de la cota e-5, Newton-Raphson se aproximó a la raíz en 15 iteraciones mientras que el método modificado en 3. Para la cota e-13, Newton-Raphson realizó 42 iteraciones y el modificado tan solo 4. Al tardar más en converger concluimos que esa función efectivamente tenía raíces múltiples. Por este motivo, aplicando Newton-Raphson no se obtiene la convergencia cuadrática esperada. Ésta es recuperada al aplicar el método para raíces múltiples.

Anexos

Anexo 1:

$$\log_{10}(2^p) = \log_{10}(2^{24}) \approx 7.22 \Rightarrow \text{Redondeo a 7 por ser la cantidad de dígitos un número natural}$$

Referencias

[1] Numerical Linear Algebra with Applications - William Ford - First Edition, 2015.

¹ Se probó empíricamente que para el caso de la cota de e-5, si se usa una semilla con 10 iteraciones el método alcanza dicha cota en 1 iteración. Para la cota de e-13 se necesitaría como mínimo 500 iteraciones.