2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$s = 7.11\,sg$

$t' = 3.35\,g$

$$v_x' = \frac{v_x \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - v_x}$$

$s' = ?$

$t = ?$

$v_x' = 0$

$s' = s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = s$

$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t$

$t' = t$

$s' = s$

$$\boxed{\begin{array}{l} s' = 7.11\,sg \text{ (svjetlosnih godina)} \\ t = 3.35\,g \text{ (godine)} \end{array}}$$

S – Zemljin sustav

S' – sustav putnika

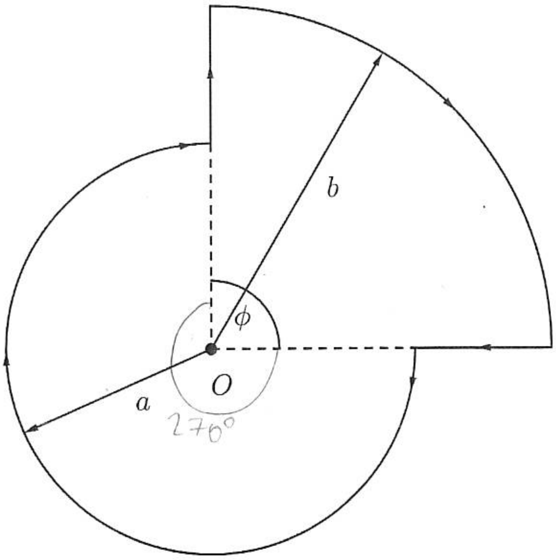
$\frac{s}{t} = v_x \qquad \frac{s'}{t'} = v_x'$

$$\frac{s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = v_x'$$

$\frac{s}{t} = v_x' = v_x.$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90^\circ$.



$S = r^2\pi$

$S_1 = \frac{b^2\pi}{4}$ $\quad S_2 = \frac{3a^2\pi}{4}$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$I = konst.$

$B_1 + B_2 = B$ $\quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{\frac{2\pi b}{4}}$ $\quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a \cdot \frac{3}{4}}$

$B_1 = 2\frac{\mu_0 I}{\pi b}$ $\quad B_2 = \frac{2}{3}\frac{\mu_0 I}{\pi a}$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{2}{b} + \frac{2}{3a}\right) T}$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 2cm = 0{,}02\,m$

$R = 0{,}6\,\Omega$

$B(t) = \beta t e^{\frac{-t}{\tau}}$

$\tau = 0{,}5s$

$\beta = 3T/s$

$I_{max} = ?$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$I = \frac{2\pi r B(t)}{\mu_0}$

$I_{max}(t = 0{,}5s) = \frac{2\pi \cdot 0{,}02 \cdot \beta t e^{\frac{t}{\tau}}}{\mu_0}$

$\boxed{I_{max} = 55\,181{,}92\,A}$

$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt}$

$\frac{dB}{dt} = \frac{\beta t e^{\frac{-t}{\tau}}}{dt} = \beta e^{\frac{-t}{\tau}} - \frac{\beta t e^{\frac{-t}{\tau}}}{\tau}$

$= \beta e^{\frac{-t}{\tau}}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) = 0$

$t = \tau = 0{,}5s$

Računski zadatak 2.4
Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \quad (1)$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$E(z,t) = E_0 \cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz-\omega t)\hat{y}$

$\vec{E}_{0(z,t)} = E_0 \cos(kz-\omega t)\hat{x}$

$\vec{B}_{0(z,t)} = \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{y}, \quad B_0 = \frac{E_0}{c}$

$\vec{E}_{1(z,t)} = E_1 \cos(kz-\omega t)\hat{y}$

$\vec{B}_{1(z,t)} = \frac{E_1}{c}\cos(kz-\omega t)-\hat{x}, \quad B_1 = \frac{E_1}{c}$

$= -\frac{E_1}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{x}$

$\hat{k} = \hat{z}$

$\hat{E}\times\hat{B} = \hat{k}$

$\hat{B} = \hat{k}\times\hat{E}$

$\hat{B}_0 = \hat{z}\times\hat{x}$

$\hat{B}_0 = \hat{y}$

$\hat{B}_1 = \hat{z}\times\hat{y}$

$\hat{B}_1 = -\hat{x}$

$\hat{x}\times\hat{y} = z$

$\hat{y}\times\hat{z} = x$

$\hat{z}\times\hat{x} = y$

$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{y} - \frac{E_1}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{x}$

$\bar{S} = I = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{2\mu_0}$

$\vec{E}\times\vec{B} = [E_0\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_1\cos(kz-\omega t)\hat{y}] \times [\frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{y} - \frac{E_1}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{x}]$

$\vec{E}\times\vec{B} = \frac{E_0^2}{c}\cos^2(kz-\omega t)\hat{z} + \frac{E_1^2}{c}\cos^2(kz-\omega t)\hat{z}$

$$I = \bar{S} = \frac{\frac{E_0^2}{c}\cos^2(kz-\omega t) + \frac{E_1^2}{c}\cos^2(kz-\omega t)}{2\mu_0} = \frac{\cos^2(kz-\omega t)[E_0^2+E_1^2]}{2\mu_0 c}, \quad c = 3\cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ N A^{-2}

$$\boxed{I(t) = \bar{S}(t) = 1{,}33\cdot 10^{-3}(\cos^2(kz-\omega t)[E_0^2+E_1^2]) \text{ W m}^{-1} = \frac{\cos^2(kz-\omega t)[E_0^2+E_1^2]}{2\mu_0 c} \text{ W m}^{-1}}$$

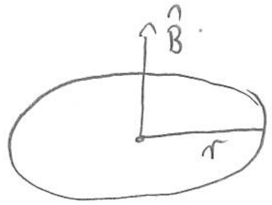
Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 0{,}02\,\mathrm{m}$ $\qquad \tau = 0{,}5\,\mathrm{s}$

$R = 0{,}6\,\Omega$ $\qquad \beta = 3\,\mathrm{T/s}$

$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$



$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{0{,}065}{0{,}6} = 0{,}1083\,\mathrm{A}$$

$$U = \mathcal{E}$$

$$\phi = \int \vec{B}\cdot\hat{n}\cdot dS$$

$$\phi = \int \vec{B}\cdot dS = B\cdot S$$

$$= B\cdot r$$

$$\phi = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}\ \cdot$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\left(\frac{d\,\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}\, 2\pi r}{dt}\right)$$

$$= -\left(\beta e^{-\frac{t}{\tau}} 2\pi r + \beta t\cdot\left(-\frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot 2\pi r\right)$$

$$= -\beta e^{-\frac{t}{\tau}} 2\pi r + \beta \frac{t^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} 2\pi r$$

$$\mathcal{E} = \beta e^{-\frac{t}{\tau}} 2\pi r\left(-1 + \frac{t^2}{\tau}\right)$$

$$0 = \beta\frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} 2\pi r + 2\beta\frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} 2\pi r - \beta\frac{t^3}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} 2\pi r$$

$$= \beta 2\pi r e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{t}{\tau} + 2\frac{t}{\tau} - \frac{t^3}{\tau^2}\right)$$

$$1 + 2 - \frac{t^2}{\tau} = 0$$

$$\frac{t^2}{\tau} = 3$$

$$t = \sqrt{3\tau}$$

Računski zadatak 2.4
Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \qquad (1)$$

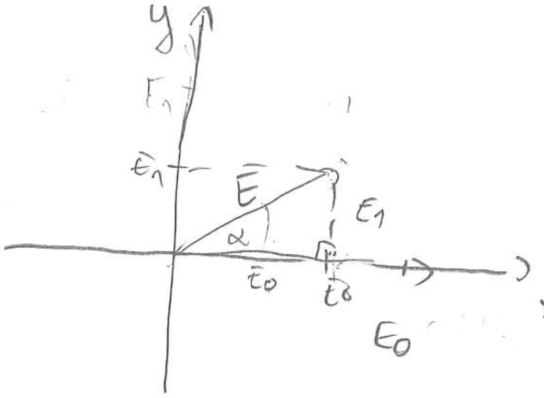
Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$$\bar{S} = \frac{E^2}{2\mu_0 c}$$

$$E(z,t) = E_0 \cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz-\omega t)\hat{y}$$

$$\hat{k} = \hat{z}$$

$$\bar{S} = \frac{E_0^2 + E_1^2}{2\mu_0 c}$$



$$E(z,t) = (E_0\hat{x} + E_1\hat{y})\cos(kz-\omega t)$$

$$B(z,t) = \qquad \cos(kz-\omega t)$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2}$$

cos

$\hat{x}$

$$\sin\alpha = \frac{E_1}{E}$$

$$E = E\cos(kz-\omega t)\left(\frac{E_0}{E}\hat{x} + \frac{E_1}{E}\hat{y}\right)$$

$$E = E\cos(kz-\omega t)\left(\cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y}\right)$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$s = 7,11 \, sg$

$t' = 3,35$ godina

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3,35 g}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{3.35}{7,11}$$

$$s' = s' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$s' = \frac{s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{7,11}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{7,11}{\frac{3,35}{7,11}} = \frac{7,11^2}{3,35} = 15.09 \, sg$$

$1 \, sg \rightarrow$ udaljenost koju prijeđe svjetlost u 1 g

$$v = \frac{s}{t} \qquad 1g = 31536000 \, s$$

$$s = v \cdot t = 2.998 \cdot 10^8 \, m/s \cdot 1g = 9,45 \cdot 10^{15} \, m \rightarrow 1 \, sg$$

$$2,998 \cdot 10^8 = \frac{7,11 \cdot 9.45 \cdot 10^{15}}{t}$$

$$t = 224220960 = 7,11 \, g$$

Putnici bilježe 15.09 svjetlosnih godina, a vrijeme proteklo na Zemlji bi bilo 7.11 godina.

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 2\,\mathrm{cm}$

$R = 0{,}6\,\Omega$

$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \to ?$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = \int B\,dS = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot S = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot r^2\pi$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\left(\beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot r^2\pi\right)}{dt} = -r^2\pi \cdot \beta \cdot \frac{d\left(t e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} = -r^2\pi \cdot \beta \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - \frac{t^2}{\tau}\right)\right)$$

$$\left(t e^{-\frac{t}{\tau}}\right)' = e^{-\frac{t}{\tau}} - t \cdot \frac{t}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - \frac{t^2}{\tau}\right)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_{MAX}}{R} =$$

Računski zadatak 2.4

Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \tag{1}$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$$S = \frac{1}{\mu_0} E \times B$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = E_1 \hat{x} - E_0 \hat{y}$$

$$B = \frac{1}{c} \cos(kz - \omega t)(E_1 \hat{x} - E_0 \hat{y})$$

$$S = \frac{1}{\mu_0} E \times B \rightarrow S = (E_1 \hat{x} - E_0 \hat{y}) \times (E_0 \hat{x} + E_1 \hat{y})$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ E_1 & -E_0 & 0 \\ E_0 & E_1 & 0 \end{vmatrix} = E_0^2 \hat{k} + E_1^2 \hat{k} = (E_0^2 + E_1^2)\hat{k}$$

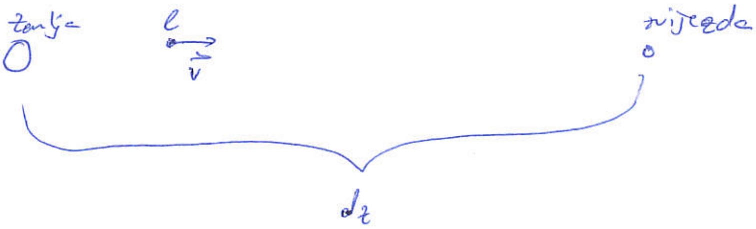
2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1
Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$d_z = 7{,}11 \cdot c$ god

$t_e = 3{,}35$ god



$\beta = \frac{v}{c}$

$d_z = 7{,}11 \cdot c \cdot$ god

$t_e = 3{,}35$ god

$t_z = ?,\ d_e = ?$

$$t_e = \frac{t_z - \frac{v \cdot d_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_z = \frac{t_e}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_z = \gamma \cdot t_e$$

$$t_e \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{t_e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v \cdot d_z}{c^2}$$

$$3{,}35\,\text{god} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{3{,}35\,\text{god}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v \cdot 7{,}11 c \cdot \text{god}}{c^2}$$

$$3{,}35\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{3{,}35}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v \cdot 7{,}11}{c} \Big/ \cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$3{,}35\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 3{,}35 - 7{,}11\frac{v}{c} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\cancel{3{,}35} - 3{,}35\frac{v^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}} = \cancel{3{,}35} - 7{,}11\frac{v}{c} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$3{,}35\frac{v}{c} = 7{,}11\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Big/^2$$

DRUGA STRANA →

$$3{,}35\frac{v}{c} = 7{,}11\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad /^2$$

$$11{,}22\frac{v^2}{c^2} = 50{,}55\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$11{,}22\frac{v^2}{c^2} = 50{,}55 - 50{,}55\frac{v^2}{c^2}$$

$$61{,}77\frac{v^2}{c^2} = 50{,}55$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 0{,}8184$$

$$v^2 = 0{,}8184\,c^2 \quad /\sqrt{}$$

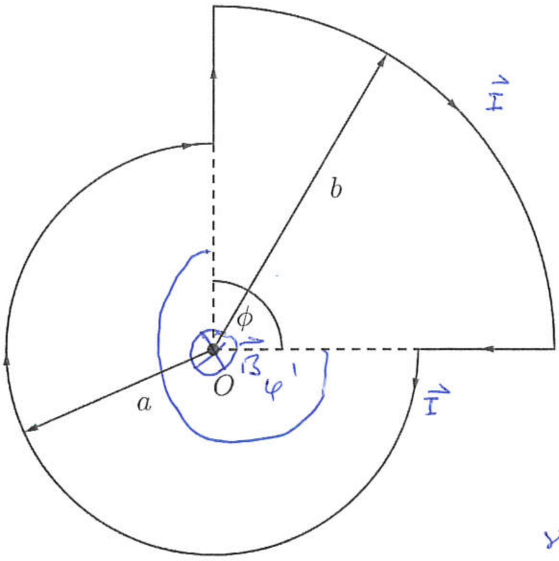
$$\boxed{v = 0{,}9046\,c}$$

$$t_z = \gamma\cdot t_e = \frac{3{,}35\,\text{god}}{\sqrt{1-\frac{0{,}9046^2 c^2}{c^2}}} = \boxed{7{,}86\,\text{god}}$$

$$v = \frac{d_e}{t_e} \qquad d_e = v\cdot t_e = 0{,}9046\,c\cdot 3{,}35\,\text{god} = \boxed{3{,}03\ \text{svjetlosnih godina}}$$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



kružna petlja:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2r}}$$

$$\varphi = 90° = \frac{\pi}{2}$$

Promjene iz $b \to a$ i obrnuto, silnice vodiča ~~na~~ prolaze kroz točku O, stoga ne utječu na stvaranje mag. polja u toj točki.

$$\oint_{\partial S} B \cdot dr = \mu_0 \cdot \int_S J \cdot dS = \mu_0 \cdot I \cdot \int_S dS$$

$$B_{uk} = B_a + B_b$$

$$B_{uk} = \frac{\varphi'}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot a} + \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2b}$$

$$B_{uk} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{2\pi}{1}} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2a} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{1}} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2b}$$

$$B_{uk} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2b}$$

$$\boxed{B_{uk} = \frac{1}{8} \cdot \mu_0 \cdot I \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right)}$$

Računski zadatak 2.3

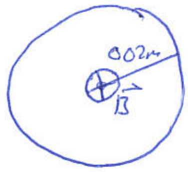
Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja B čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 0{,}02\,m$

$R = 0{,}6\,\Omega$

$B(t) = \beta \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \beta = 3\,T s^{-1} \qquad \tau = 0{,}5\,s$

$I_{max} = ?$



$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt} \qquad \Phi_B(t) = \int_S B \cdot dS = \int_S B(t) \cdot dS = B(t) \cdot r^2\pi$$

$$= 3t \cdot e^{-2t} \cdot r^2\pi$$

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d(3t \cdot e^{-2t} \cdot r^2\pi)}{dt} = -r^2\pi \cdot \frac{d}{dt}(3t \cdot e^{-2t}) = -r^2\pi \cdot \left(3 \cdot e^{-2t} + 3 \cdot t \cdot (-2) \cdot e^{-2t}\right)$$

$$= -r^2 \cdot \pi \cdot (-2) \cdot 3 \cdot t \cdot e^{-2t} - r^2\pi \cdot 3 \cdot e^{-2t} = 6r^2\pi \cdot t \cdot e^{-2t} - 3r^2\pi \cdot e^{-2t}$$

$$\mathcal{E}_i(t) = i(t) \cdot R \Rightarrow i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = \frac{6r^2\pi \cdot t \cdot e^{-2t} - 3r^2 \cdot \pi \cdot e^{-2t}}{0{,}6\,\Omega}$$

$$= 10r^2\pi \cdot t \cdot e^{-2t} - 5r^2\pi \cdot e^{-2t}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow 10r^2\pi \cdot (e^{-2t} - 2t \cdot e^{-2t}) + 10r^2\pi \cdot e^{-2t} = 0 \quad /: 10r^2\pi$$

$$e^{-2t} + e^{-2t} = 2t \cdot e^{-2t} \quad /: e^{-2t}$$

$$1 + 1 = 2t$$

$$2 = 2t$$

$$t = 1\,s$$

$$I_{max} = 10r^2\pi \cdot t \cdot e^{-2t} - 5r^2\pi \cdot e^{-2t} = 10 \cdot (0{,}02\,m)^2 \cdot \pi \cdot 1\,s \cdot e^{-2s} - 5 \cdot (0{,}02\,m)^2 \cdot \pi \cdot e^{-2s}$$

$$\boxed{= 8{,}5 \cdot 10^{-4}\,A}$$

Računski zadatak 2.4

Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

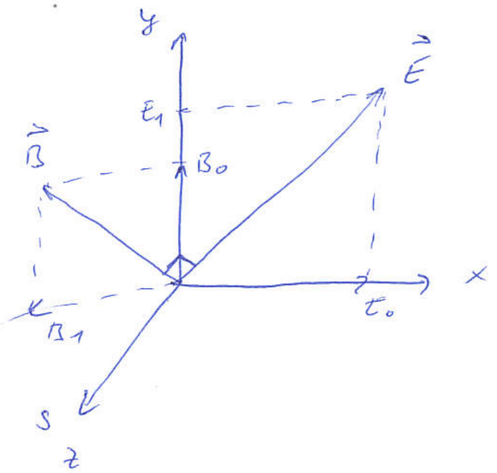
$$\mathbf{E}(z,t) = E_0\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_1\cos(kz-\omega t)\hat{y}. \tag{1}$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$$\vec{E}(z,t) = E_0\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_1\cos(kz-\omega t)\hat{y}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \qquad B_1 = \frac{E_1}{c}$$

$$\vec{B} = B_0\cdot\cos(kz-\omega t)\cdot\hat{y} + B_1\cdot\cos(kz-\omega t)\cdot(-\hat{x})$$



Može se pretpostaviti, jer su obe dvije Električne komponente u fazi. (dolazi do konstruktivne interferencije za određenu točku svaki period).

$$E_{MAX} = \sqrt{E_0^2 + E_1^2}$$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c\cdot\varepsilon_0\cdot E_{MAX}^2$$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2}\cdot c\cdot\varepsilon_0\cdot\left(\sqrt{E_0^2+E_1^2}\right)^2$$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c\cdot\varepsilon_0\cdot\left(E_0^2 + E_1^2\right)$$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_1^2$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$x_2 = 7.11\ g\cdot c$

$t'_2 = 3{,}35\ g$

$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$t_2 = \frac{t'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad t_2 = \frac{x_2}{v}$

$\frac{x_2}{v} = \frac{t'_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$\frac{x_2^2}{v^2} = \frac{t'^2_2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$x_2^2 - x_2^2\frac{v^2}{c^2} = v^2 t'^2_2$

$v^2\left(t'^2_2 + \frac{x_2^2}{c^2}\right) = x_2^2$

$v = \frac{x_2}{\sqrt{t'^2_2 + \frac{x_2^2}{c^2}}} = 0.9046c$

$x_1 = 0 \quad t_1 = 0$

$x_2 = 7.11\ gc \quad t_2 = ?$

$v = \frac{7.11\ gc}{t_2}$

$t_2 = \frac{7.11\ gc}{v} \quad t'_2 = 3.35\ g$

$t'_2 = \frac{\frac{x_2}{v} - \frac{v\cdot x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$t'^2_2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{x_2^2}{v^2} - 2\frac{x_2}{v}\cdot\frac{v x_2}{c^2} + \frac{v^2\cdot x_2^2}{c^2}$

$t'^2_2 - \frac{v^2}{c^2}t'^2_2 = \frac{x_2^2}{v^2} - 2\frac{x_2^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}x_2^2 \quad /\cdot v^2$

$t'^2_2 v^2 - \frac{v^4}{c^2}t'^2_2 = x_2^2 - 2\frac{x_2^2}{c^2}v^2 + \frac{v^4}{c^2}x_2^2$

$v^4\left(\frac{x_2^2}{c^2} + \frac{t'^2}{c^2}\right) + \left(t'^2_2 - 2\frac{x_2^2}{c^2}\right)v^2 + x_2^2 = 0$

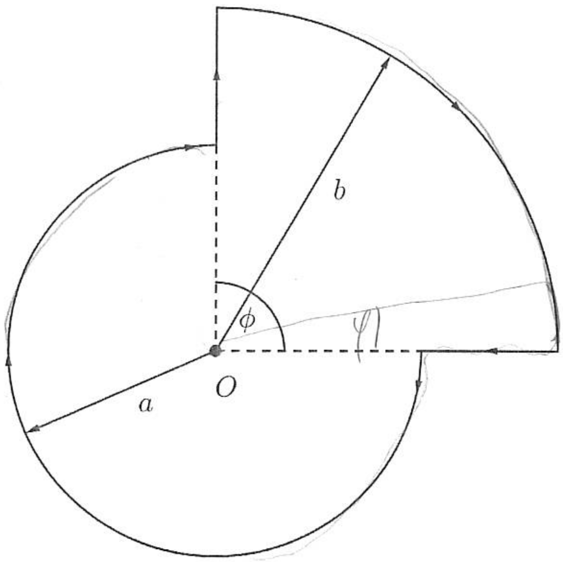
Za zemlju putovanje traje $t = \frac{x_2}{v} = 7.86$ godina

Putnici bilježe $x'_2 = vt'_2 = 3.35$ svj. godina

$t'_2 = t_2\sqrt{1-\beta^2} =$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



$$\oint B\,dl = \mu_0 \cdot I_{uk} \qquad dl = b \cdot d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} B \cdot b\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} B \cdot a\,d\varphi = \mu_0 I_{uk}$$

$$I_{uk} = \int J\,dS$$

$$I_{uk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{b} J\,r\,dr\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\int_0^{a} J\,r\,dr\,d\varphi$$

$$B \cdot b\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + B \cdot a\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \mu_0 I_{uk}$$

$$B\left(\frac{\pi}{2} b + \frac{3}{2}\pi a\right) = \mu_0 I_{uk}$$

$$I_{uk} = J\left(\frac{b^2}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{a^2}{2}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$B = \mu_0 \frac{J\left(\frac{b^2}{4}\pi + \frac{3a^2}{4}\pi\right)}{\frac{b}{2}\pi + \frac{3}{2}a\pi} = \mu_0 \frac{J\left(\frac{b^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right)}{\frac{b}{2} + \frac{3}{2}a} = \mu_0 \frac{I}{\frac{b}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi a}$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera $2\,\mathrm{cm}$ i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 2\,\mathrm{cm}$ $\quad S = r^2\pi$ $\quad S = 1{,}2566\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$

$R = 0{,}6\,\Omega$

$$\Phi = \int \vec{B}\,d\vec{S} = B\cdot S\cos 0^\circ = B\cdot S$$

$$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -S\beta\frac{d}{dt}\left(te^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\Phi = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot S$$

$$\mathcal{E} = -S\beta\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\mathcal{E}' = -S\beta\left(-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} - \left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right) = 0$$

$$-\frac{2}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$-2 + \frac{t}{\tau} = 0 \qquad t = 2\tau$$

$$\mathcal{E}_{max} = -S\beta\left(e^{-2} - 2e^{-2}\right)$$

$$\mathcal{E}_{max} = -5{,}1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{V}$$

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} = 8{,}5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{A}$$

Računski zadatak 2.4

Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \tag{1}$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad |S| = \frac{1}{\mu_0} |E||B| \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{\mu_0} E \cdot B$$

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{E^2}{c} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) + E_1^2 \cos^2(kz - \omega t)}{c}$$

$$\langle S \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{E_0^2 \langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle + E_1^2 \langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle}{c}$$

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{1}{2} E_0^2 + \frac{1}{2} E_1^2 \right) = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(E_0^2 + E_1^2 \right)$$

srednja vrijednost od $\cos^2(kz-\omega t) = \frac{1}{2}$

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(E_0^2 + E_1^2 \right)$$