2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. S
Promatrano iz sustava putnika S' u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$t(S)$

$s(S')$

$v = \frac{s}{t}$

dilatacija vremena $t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

kontrakcija duljine $s = s_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$1 \text{ svj god} = 1g \cdot c$

$s = 7.11 \text{ god} \cdot c$

$t' = 3.35 \text{ god}$

$t = ? \quad s_0 = ?$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{s}{v} = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = vt' \quad /^2$$

$$s^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = v^2 t'^2$$

$$s^2 - s^2\frac{v^2}{c^2} = v^2 t'^2$$

$$-s^2\frac{v^2}{c^2} - v^2 t'^2 = -s^2$$

$$-v^2\left(t'^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) = -s^2$$

$$v^2 = \frac{s^2}{t'^2 + \frac{s^2}{c^2}}$$

$$\left[\sqrt{\frac{g^2c^2}{g^2}} = c\right]$$

$$v = \sqrt{\frac{s^2}{t'^2 + \frac{s^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{(7.11gc)^2}{3.35g^2 + \frac{(7.11gc)^2}{c^2}}} = 0.905c$$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{3.35g}{\sqrt{1-\left(\frac{0.905c}{c}\right)^2}} = 7.875 \text{god}$$

$$s_0 = \frac{s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{7.11 g \cdot c}{\sqrt{1-\left(\frac{0.905c}{c}\right)^2}}$$

$$s_0 = 16.713 \text{ god. svj.}$$

Putovanje promatrano sa Zemlje traje 7.875 godina, a udaljenost koju bilježe putnici u letjelici je 16.713 svjetlosnih godina

2. Računski zadaci

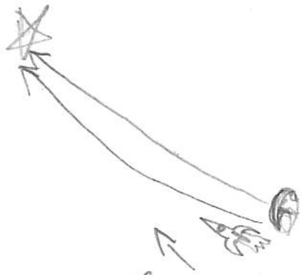
Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

S - zemljin sustav   c - brzina svjetlosti

S' - sustav u letjelici



$v_x = \lambda c$

$t' = 3,35$ god   u sustavu S' $v_x \Rightarrow v$

$t = 7,11$ god $v_x \Rightarrow 0$

vrijedno je i $v_x' = \frac{-\lambda c}{1} = -\lambda c \Rightarrow$ zemlja se udaljava od nas

$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\lambda \cancel{c}}{\cancel{c}} = \lambda$

$t' \Rightarrow x'$ 3,35 s god.

$t \Rightarrow x$ 7,11 s god

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 3,35 = \frac{7,11 - \lambda 7,11}{\sqrt{1-\lambda^2}} \Rightarrow 11,2225(1-\lambda^2) = 50,55 + 50,55\lambda^2 - 101,104\lambda$$

$$\Rightarrow -39,3275 - 61,7725\lambda^2 + 101,104\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0.6365$$ brzina letjelice

JR: $\underline{v_x = 0,6365c}$

~~Zemljin sustav~~

~~$x = 7,11$ s god $v = 0,6365c$~~

u letjelici oni će bilježiti

$t_1' = \frac{t_1 - v_x \cdot x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ svjetlosnih godina

gdje je $x = 7,11$ s god

$\boxed{t_1' = 6,0847 \text{ svjetlosnih godina}}$

Promatrano sa Zemlje izgledat će kao da letjelici treba $\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}$ vremena odnosno $\frac{7,11 \text{ s god}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,6365\cancel{c}}{\cancel{c}}\right)^2}} = \underline{9,2185}$ svjetlosnih godina. t_1

$e^{-\frac{\frac{t}{1}}{\frac{1}{2}}}$ $\quad I=\frac{U}{R}$

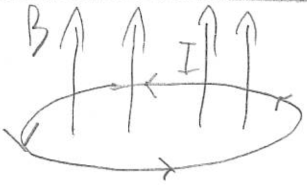
Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera $2\,\mathrm{cm}$ i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$R = 2\,cm \quad \Omega = 0.6\,\Omega \quad \varphi = 0^\circ \quad t > 0 \quad B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = 0.5\,s \quad \beta = 3\,T\,s^{-1}$

$I_{max} = ?$



$t_1 = 1\,s$

$B(t_1) = 0.406006\,T$ - Magnetsko polje pada kroz vrijeme

$B(t_2) = 0.1099\,T$

~~$B'(t) = \beta \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$~~ - tražimo maksimalnu vrijednost, odnosno max od funkcije $B'(t)$

~~$B'(t) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{\beta}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow -6e^{-2t} = 0$~~

$B'(t) = \beta e^{-\frac{t}{\tau}} - \beta t \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow 3e^{-2t} - 6te^{-2t} = 0$

$3\cancel{e^{-2t}} = 6t\cancel{e^{-2t}}$

$3 = 6t$

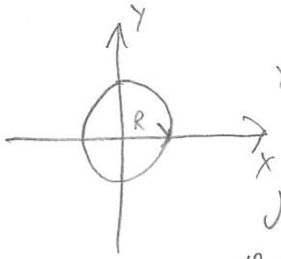
$t = 0.5\,s$

$t_{max} = 0.5\,s$

$B(t_{max}) = 0.5518\,T$

$I = \frac{U}{R} \quad S = R^2\pi = 4\pi\,cm^2 \quad \mathcal{E} = U$

$\mathcal{E} = B(t_{max}) \cdot \int_S dS$



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$J = R$
$\varphi \in [0, 2\pi]$

$\int_S dS \Rightarrow \int_0^{2\pi} r\,d\varphi$

~~$\int_S dS = \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$~~

$\int_S dS = \varphi r\Big|_0^{2\pi} = 4\pi\,cm^2 = 1.2566\,m^2$

$\mathcal{E} = 0.5518\,T \cdot 1.2566 \cdot 10^{-3}\,m^2$

$\mathcal{E} = 6.934 \cdot 10^{-4}\,V$

$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{6.934 \cdot 10^{-4}\,V}{0.5\,\Omega}$

$\boxed{I = 1.3868\,mA}$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$d = 7,11$ svj.g
$t' = 3,35$ g
$t = ?$
$s = ?$

$t = \gamma t'$

$v = \frac{d}{t} = \frac{d}{\gamma t'} = \frac{d}{t'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \ /^2$

$v^2 = \frac{d^2}{t'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow v^2\left(1+\frac{d^2}{t'^2c^2}\right) = \frac{d^2}{t'^2} \Rightarrow v^2 = \frac{d^2}{t'^2\left(1+\frac{d^2}{t'^2c^2}\right)} = 0,8183c^2 \ /\sqrt{\ }$

$\boxed{v = 0,9046c}$

$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \boxed{7,8597 g}$

$d' = v \cdot t' = 3,03$ svj.g

$\boxed{d' = d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 3,03 \text{ svj.g}}$

brzinom
svjetlosti
$t = 1$ god
$v = 3 \cdot 10^8$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$s = 7{,}11$ svj. godina $=$

$t' = 3{,}35$ god $= \underline{1{,}0564 \cdot 10^8 s}$

Z

s

svj. god $\rightarrow$ svjetlost prođe u 1. god.

1 svj. godina

~~svj. godina~~ DRUGA STR.

$\hookrightarrow$ ~~[illegible]~~

~~udaljenost između zvijezde i Zemlje~~

~~$\hookrightarrow s = 1{,}121 \cdot 10^{15}$ [illegible]~~

~~t 1 god = [illegible]~~

1 svj. god $= 3 \cdot 10^8 / 31536000$

$= 9{,}4608 \cdot 10^{15}$ m

$s = 6{,}7266 \cdot 10^{16}$ m

$\hookrightarrow t = 2{,}242 \cdot 10^8$

$\hookrightarrow$ vrijeme koje treba svjetlosti da prođe taj put

~~S sustav $\rightarrow$ Zemlja~~

~~S' sustav $\rightarrow$ zvijezda~~

NA DRUGOJ STR. $\longrightarrow$

$t = ?$

$s' = ?$

~~$1{,}056 \cdot 10^8 = 2{,}242 \cdot 10^8 \sqrt{1-\beta^2} \quad / : 2{,}242 \cdot 10^8$~~

~~$0{,}4712 = \sqrt{1-\beta^2} \quad /()^2$~~

~~$0{,}222 = 1 - \beta^2$~~

~~$\beta^2 = 0{,}778 \quad / \sqrt{}$~~

~~$\frac{v}{c} = 0{,}882 \quad / \cdot c$~~

~~$\boxed{v = 0{,}882\, c}$~~ $\rightarrow$ brzina letjelice

$x' = x \sqrt{1-\beta^2}$

$t' = t \sqrt{1-\beta^2}$

$v' = \frac{s'}{t'}$

$s' = s \sqrt{1 - (0{,}882)^2}$

$\boxed{s' = 3{,}169 \cdot 10^{16}}$

$\hookrightarrow 3{,}35$ svj. god

~~$t = 2{,}82$ god~~

3

*

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{s=7{,}11 \text{ svj. god}}$ 2

stvarna udaljenost

$s=6{,}727\cdot10^{16}\,m$

$v=2{,}646\cdot10^{8}\,m/s$

$\boxed{t=\frac{s}{v}=2{,}542\cdot10^{8}\,s=8{,}06\,god}$

VRIJEME PROŠLO NA Zemlji

S' sustav – putnici

S sustav Zemlja

$t'=3{,}35\,god \rightarrow$ od zvijezde do Zemlje

Ukupan put gledajući iz Zemlje

$s=7{,}11$ svj. godina =

$s'=s\sqrt{1-\beta^2}$

$t'=t\sqrt{1-\beta^2}$

$\frac{s'}{s}=\frac{t'}{t}$

$s'=s\sqrt{1-\beta^2}$

$s'=6{,}727\cdot10^{16}\sqrt{1-0{,}88^2}$

$\boxed{s'=3{,}195\cdot10^{16}\,s}$

$=3{,}37$ svj. god

$t'=t\sqrt{1-\beta^2}$

$1{,}0564\cdot10^{8}=2{,}242\cdot10^{8}\sqrt{1-\beta^2}\quad /:2{,}242\cdot10^{8}$

$0{,}471=\sqrt{1-\beta^2}\quad /(\,)^2$

$0{,}222=1-\beta^2$

$\beta^2=0{,}78\quad /\sqrt{}$

$\frac{v}{c}=0{,}882 \longrightarrow \boxed{v=0{,}882\,c}$

brzina letjelice

$t'=1{,}0564\cdot10^{8}\,s$

$s=6{,}727\cdot10^{16}\,m$

$v=3\cdot10^{8}\,m/s$

↳ brzina svjetlosti

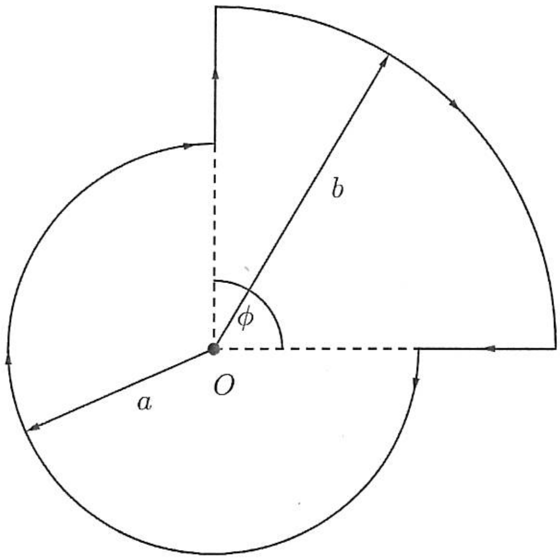
$t=\frac{s}{v}=2{,}242\cdot10^{8}\,s$

vrijeme potrebno svjetlosti da prođe taj put

$\frac{1{,}0564\cdot10^{8}}{t}=\frac{s'}{6{,}727\cdot10^{16}}$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



$$B[r] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I' dr' \times (r-r')}{|r-r'|^3} \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N A^{-2}$$

$$= 1 \cdot 10^{-7} \int \frac{I' dr' \times (r-r')}{|r-r'|^3}$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

a) trajanje putovanja sa Zemlje

→ miran promatrač na Zemlji

1 svj. god = 1 god · c
31536000 s

$t' = 3.35$ god

$s_1 = 9.4608 \cdot 10^{14}$ m

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad v = \frac{s}{t'} = \boxed{0.2122c}$$

$$\cancel{v = \frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}} \qquad \cancel{v = \frac{s(1-\frac{v^2}{c^2})}{t'}}$$

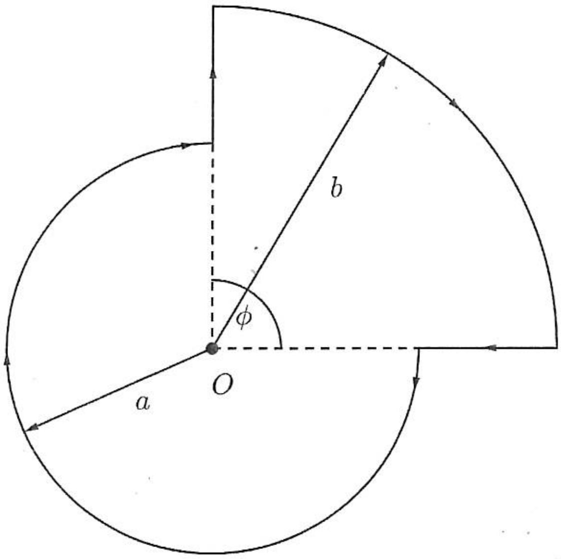
$t = 3.774$ god

b) udaljenost za putnika

$s = 7.11$ svj. god

$$s = s'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow s' = \frac{s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 8.0105 \text{ svj. god.}$$

Računski zadatak 2.2
Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



$$\oint \vec{B}\, d\vec{r} = \mu_0 I_{obuhvaćeno}$$

$$I_{obuh_1} = \int \vec{j}\, d\vec{S}_1 = j \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\varphi \int_0^a a\, da = j\left(a^2 \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$I_{obuh_2} = \int \vec{j}\, d\vec{S}_2 = j \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^b b\, db = j\left(b^2 \frac{\pi}{4}\right)$$

$$I_{obuh} = j\left(a^2 \frac{3\pi}{4} + b^2 \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\oint B\, d\vec{r} = B\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^b db + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\varphi \int_0^a da\right) = B\cdot\left(\frac{b\pi}{2} + \frac{3\pi a}{2}\right)$$

$$B\cdot\left(\frac{b\pi}{2} + \frac{3\pi a}{2}\right) = \mu_0 j\left(a^2 \frac{3\pi}{4} + b^2 \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot j\left(a^2 \frac{3\pi}{4} + b^2 \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{b\pi}{2} + \frac{3\pi a}{2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot j\, \frac{\cancel{\pi}(a^2\cdot 3 + b^2)}{4}}{\frac{\cancel{\pi}(b+3a)}{\cancel{2}}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot j\,(3a^2+b^2)}{(3a+b)}$$

Računski zadatak 2.3
Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5$ s i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 2\text{cm} = 0.02\text{m}$
$R = 0.6\,\Omega$
$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\tau = 0.5\text{ s}$
$\beta = 3\text{ T/s}$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \Phi_B = \int \vec{B}\,d\vec{S} = \int B\,dS = B(t)\,r^2\pi$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(B(t)r^2\pi\right) = -\frac{d}{dt}\left(\beta t e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi\right) =$$

$$= -\left(\beta e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi - \frac{1}{\tau}\beta t e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\beta t e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi - \beta e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi =$$

$$= \beta e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi\left(\frac{t}{\tau} - 1\right)$$

$\rightarrow$ tražimo maksimum $\mathcal{E}$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi\left(\frac{t}{\tau} - 1\right)\right) = 0$$

$$-\frac{1}{\tau}\beta e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi\left(\frac{t}{\tau} - 1\right) + \beta e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\tau}\beta e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi}_{\neq 0}\underbrace{\left(1 - \frac{t}{\tau} + 1\right)}_{= 0} = 0$$

$$2 = \frac{t}{\tau}$$

$$\Rightarrow t = 2\tau$$

$$\mathcal{E}_{MAX} = \beta e^{-\frac{2\tau}{\tau}} r^2\pi\left(\frac{2\tau}{\tau} - 1\right)$$

$$\mathcal{E}_{MAX} = \beta e^{-2} r^2\pi \cdot 1$$

$$\mathcal{E}_{MAX} = \frac{\beta r^2\pi}{e^2}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_{MAX}}{R}$$

$$I = \frac{\frac{\beta r^2\pi}{e^2}}{R}$$

$$I = 8.503 \cdot 10^{-4}\text{ A}$$

Računski zadatak 2.4

Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \tag{1}$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$\hat{k} = \hat{z}$ $\qquad \hat{E} \times \hat{B} = \hat{k}$

$$\vec{E}_x(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$$

$\hat{E} = \hat{x} \qquad \hat{k} = \hat{z}$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$\hat{B} = \hat{y}$

$$\vec{B}_y(z,t) = \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t)\hat{y}$$

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}_x \times \vec{B}_y\right)$$

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{E_0^2}{c}\cos^2(kz - \omega t)\hat{z}$$

$$I_1 = \langle \vec{S}_1 \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \qquad \langle \cos^2 x \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\vec{E}_y(z,t) = E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}$$

$\hat{E} = \hat{y} \qquad \hat{k} = \hat{z}$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\hat{B} = -\hat{x}$

$$\vec{B}_x(z,t) = \frac{E_1}{c}\cos(kz - \omega t)(-\hat{x})$$

$$\vec{S}_2 = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}_y \times \vec{B}_x\right)$$

$$\vec{S}_2 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{E_1^2}{c}\cos^2(kz - \omega t)\hat{z}$$

$$\langle \cos^2 x \rangle = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \langle \vec{S}_2 \rangle = \frac{E_1^2}{2\mu_0 c}$$

$$I_{uk} = I_1 + I_2 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} + \frac{E_1^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2\mu_0 c}\left(E_0^2 + E_1^2\right)$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

S- Zemljin referentni sustav

S' =referentni sustav putnika

$s = 7.11$ s.g.

$t' = 3.35$ g

$t, s' = ?$

$1.$ sv.god $= c \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9.848 \cdot 10^{15}$ m

$7{,}11$ sv. god $= 7 \cdot 10^{16}$ m $= s$

$3.35 = t\sqrt{1-\beta^2}$

$7 \cdot 10^{16} = s'\sqrt{1-\beta^2}$

$1{,}06 \cdot 10^{8} = t\sqrt{1-\beta^2}$

$7 \cdot 10^{16} = s'\sqrt{1-\beta^2}$

$t = \frac{1{,}06 \cdot 10^{8}}{\sqrt{1-\beta^2}} = 7{,}40$ god

$s' = \frac{7 \cdot 10^{16}}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}542 \cdot 10^{17}$ m

$c = \frac{s}{t} = \frac{7 \cdot 10^{16}}{\frac{1{,}06 \cdot 10^{8}}{\sqrt{1-\beta^2}}}$

$\frac{1{,}06 \cdot 10^{8}}{\sqrt{1-\beta^2}} c = 7 \cdot 10^{16}$

$1{,}06 \cdot 10^{8} c = 7 \cdot 10^{16}\sqrt{1-\beta^2}$

$\frac{1{,}06 \cdot 10^{8}}{7 \cdot 10^{16}} c = \sqrt{1-\beta^2}$

$\beta = \frac{v}{c}$ v-brzina letjelice

$s = 7{,}11\ s.g. = 6.722 \cdot 10^{16}\ m$

$t' = 3.35\ god = 1{,}03 \cdot 10^{8}\ s$

$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad s = s'\sqrt{1-\beta^2}$

$\frac{s}{t} = \frac{\frac{s'\sqrt{1-\beta^2}}{t'}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\frac{s}{t} = \frac{s'(1-\beta^2)}{t'}$

$st' = s't(1-\beta^2)$

$st' = s't\left(1-\left(\frac{s'}{t'c}\right)\right)$

$\frac{v}{c} = \frac{\frac{s'}{t'}}{c} = \frac{s'}{t'c}$

$st' = s't - s't\left(\frac{s'}{t'c}\right)^2$

$st' = s't - \frac{s'^3 t}{(t'c)^2}$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera $2\,\mathrm{cm}$ i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 2cm = 0.02m$

$R = 0.6\,\Omega$

$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = 0.5s$

$\beta = 3T/s$

$I = ?$

$$\mathcal{E}_{max} = r^2\pi\left(\beta e^{-\frac{1}{\tau}} + \beta \cdot 1 \cdot e^{-\frac{1}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

$$\mathcal{E}_{max} = -5.102 \cdot 10^{-4}\,V$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} = 8.503 \cdot 10^{-4}\,A$$

$$\phi = \int B\,dS$$

$$\phi = \int B(t)\,dS$$

$$\phi = B(t)\int dS$$

$$\phi = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot r^2\pi$$

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} = r^2\pi\left(\beta e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot -\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\mathcal{E} = r^2\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{r^2\pi}{\tau}\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$$

tražimo maksimum

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{r^2\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} - \frac{r^2\pi}{\tau}\left(\beta e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot -\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{-r^2\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} - \frac{r^2\pi}{\tau}\beta\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{-r^2\pi\beta}{\tau}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}\right) = 0$$

$$2\cancel{e^{-\frac{t}{\tau}}} = \frac{t\cancel{e^{-\frac{t}{\tau}}}}{\tau}$$

$$2 = \frac{t}{\tau}$$

$$\Rightarrow \underline{t = 2\tau = 1s}$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$$\boxed{v = \frac{s}{t}}$$

1 svjetlosna godina $= 3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \, s = 9.4608 \cdot 10^{15} \, m$

$$\Delta s = 7.11 \cdot 9.4608 \cdot 10^{15} \, m = 6.7266 \cdot 10^{16} \, m$$

$$\Delta t' = 3.35 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \, s = 1.056456 \cdot 10^{8} \, s$$

$\Delta t = ?$ $\quad \Delta s' = ?$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Delta s' = \Delta s \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

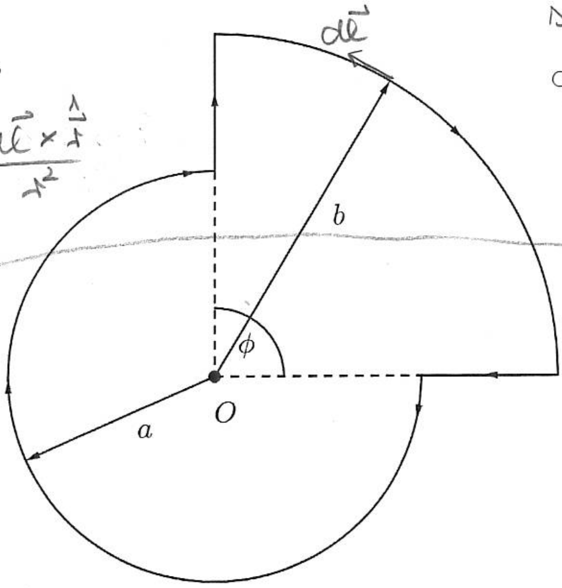
$$v = \frac{3.1536 \cdot 10^{7} \, c}{\Delta t'} = 0.2985 c$$

$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1.008 \cdot 10^{8} \, s = 3.197$ godina

$\Delta s' = 6.4199 \cdot 10^{16} \, m = 6.786$ svjetlosnih godina

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



Biot-Savartov zakon:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$\sin(\sphericalangle(d\vec{l},\hat{r})) = \sin 90° = 1$$

$$d\vec{l}\times\hat{r} = |d\vec{l}|\underbrace{|\hat{r}|}_{1}\cdot\underbrace{\sin 90°}_{1} = dl$$

$$l = \frac{2r\pi\cdot\phi}{360°}$$

$$dl = \frac{2\pi\phi}{360°}\cdot dr$$

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dl}{r^2}$$

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{2\pi\phi}{360° r^2}dr$$

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{2r}\cdot\frac{\phi}{360°}$$

→ iznos magnetskog polja u središtu petlje konstantnog radijusa R:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

→ dijelovi petlje paralelni sa radijusima a i b ne pridonose ukupnom iznosu mag. polja u točki O

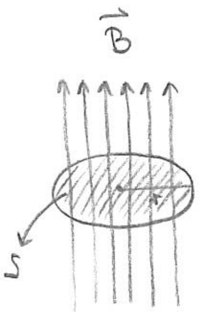
Dakle:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2b}\cdot\frac{\cancel{90°}^{1}}{\cancel{360°}_{4}} + \frac{\mu_0 I}{2a}\cdot\frac{\cancel{270°}^{3}}{\cancel{360°}_{4}} = \frac{\mu_0 I}{8b} + \frac{3\mu_0 I}{8a}$$

$$B_0 = \mu_0 I\left(\frac{1}{8b}+\frac{3}{8a}\right)$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?



$S = r^2\pi$

$r = 0.02\,\mathrm{m}$

$R = 0.6\,\Omega$

$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\qquad \tau = 0.5\,\mathrm{s}, \beta = 3\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}}$

$\Rightarrow B(t) = 3te^{-2t}, \quad t > 0$

$I = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} \qquad I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}(t)}{R} = ?$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{-d}{dt}\Phi_B = \frac{-d}{dt}B\cdot S = \frac{-d}{dt}\left(r^2\pi\cdot 3t\cdot e^{-2t}\right) =$$

$$\mathcal{E}(t) = 3r^2\pi\cdot\frac{-d}{dt}\left(te^{-2t}\right) = -3r^2\pi\left(e^{-2t} - 2te^{-2t}\right)$$

$$\mathcal{E}(t) = -3r^2\pi\cdot e^{-2t}\left(1 - 2t\right)$$

Tražim za koji t se postiže maksimum funkcije $\mathcal{E}(t)$:

$$\mathcal{E}'(t) = 0$$

$$-3r^2\pi\left[-2e^{-2t} - 2\left(e^{-2t} - 2te^{-2t}\right)\right] = 0 \quad \Big|:\left(-3r^2\pi\right) \neq 0$$

$$-2e^{-2t} - 2e^{-2t} + 4te^{-2t} = 0 \quad \Big|: e^{-2t} \neq 0$$

$$-2 - 2 + 4t = 0$$

$$4t = 4$$

$$\boxed{t = 1\,\mathrm{s}}$$

$$\mathcal{E}(1\,\mathrm{s}) = -3r^2\pi\cdot e^{-2}\left(1-2\right) = 3r^2\pi\cdot e^{-2} = 5.102\cdot 10^{-4}\,\mathrm{V}$$

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}(1\,\mathrm{s})}{R} = 8.503\cdot 10^{-4}\,\mathrm{A}$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$x_0 = 7.11c$

$t = 3.35$ god

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x = x_0\sqrt{1-\beta^2}$$

U SUSTAVU LETJELICE:

$$u_x' = \frac{x}{t}$$

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} = \frac{x}{t} = \frac{x_0\sqrt{1-\beta^2}}{t}$$

$v = 0 \Rightarrow$ LETJELICA MIRUJE U SVOME SUSTAVU

$$u_x = \frac{x_0\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}}{t}$$

$$u_x t = x_0\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}} \quad /^2$$

$$u_x^2 \cdot t^2 = x_0^2 \cdot \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)$$

$$u_x^2 \cdot t^2 = x_0^2 - \frac{u_x^2}{c^2} \cdot x_0^2$$

$$u_x^2\left(t^2 + \frac{x_0^2}{c^2}\right) = x_0^2$$

$u_x = 0.905c$ U SUSTAVU ZEMLJE

SA ZEMLJE:

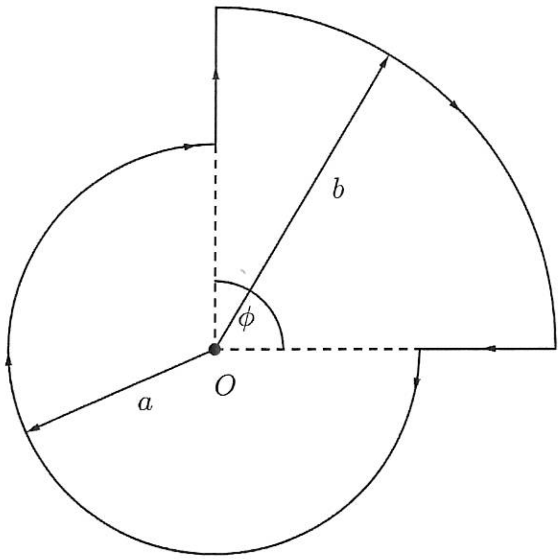
$t_0 = t \cdot \sqrt{1-\beta^2} = 1.425$ god.

UDALJENOST U LETJELICI:

$x = x_0\sqrt{1-\beta^2} = 3.02c$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90^\circ$.



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{r^2}{r^3}\, dr \qquad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dQ}{dt} \cdot \left(\int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^{a} \frac{1}{r}\, dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{b} \frac{1}{r}\, dr \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dQ}{\partial t} \left(\frac{3\pi}{2} \cdot \ln a + \frac{\pi}{2} \cdot \ln b \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dQ}{dt} \left(\frac{\pi}{2} \ln (a^3 \cdot b) \right)$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera $2\,\mathrm{cm}$ i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = 0.5\,s \quad \beta = 3\,T/s$$

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} \qquad \phi = \int B\,dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot r\,dr = 4\pi \cdot \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\varepsilon = 4\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}} - 4\pi\beta t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{1}{\tau} = 4\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -4\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + 4\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) = 0$$

$$4\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{t}{\tau} - 1 + \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) = 0$$

$$\frac{t-1}{\tau} = 1 \qquad t = 1.5\,s$$

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}{0.6} = -6.26\,A$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

$1 god = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

Zemlje mjereno $\Rightarrow$ $S = 7.11$ svj. god

putnici $\Rightarrow$ $t' = 3.35$ god

$v = \frac{S}{t}$

$v = 2.12$ svjetlost

$v = 2.12\,c$

$v_{SVJETLOSTI} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$t = \frac{S}{v_{svj}} = \frac{7.11 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{3 \cdot 10^8} = 0.745$

$t' = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

S ZEMLJE $\Rightarrow$ $t = \frac{3.35}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$

$S = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)\,s =$

$S = 9.4608 \cdot 10^{15}$ m

tolika svjetlost prijeđe u 1 god

svj god

$S = 7.11 \cdot 9.4608 \cdot 10^{15} =$

$S = 6.73 \cdot 10^{16}$ m

$S' = S \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

PUTNICI $\Rightarrow$ $= 7.11 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$t' = 3.35 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 1.056 \cdot 10^8$ s

$v' = \frac{6.73 \cdot 10^{16}}{} = 6.37 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$\frac{6.37 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 2.12\,c$

$\frac{t'}{t} = \frac{S'}{S}$

$t' S = S' \cdot t$

$3.35 \cdot 7.11 = S' \cdot t$

Računski zadatak 2.4
Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \qquad (1)$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E \times B \qquad E = B \cdot c \qquad B = \frac{E}{c} \qquad \vec{k} = \hat{z}$$

$$\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t)\hat{y} + \frac{E_1}{c} \cos(kz - \omega t)(-\hat{x})$$

$$I = \langle \vec{S} \rangle \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{E_0^2}{c} \cos^2(kz - \omega t)\hat{z} + \cancel{\frac{E_0 E_1}{c} \cos^2(kz - \omega t)} \cdot 0 + \cancel{\frac{E_0 E_1}{c} \cos^2(kz - \omega t)} \cdot 0 \right.$$

$$\left. + \frac{E_1^2}{c} \cos^2(kz - \omega t)\hat{z} \right)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{E_0^2}{c} + \frac{E_1^2}{c} \right) \cdot \cos^2(kz - \omega t)\hat{z} \qquad \underbrace{(\cos(kz - \omega t))^2}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I = \langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2 + E_1^2}{4\mu_0 \cdot c}}$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$x = 7.11$ svjetlosnih godina $\Rightarrow$ 1 svj. godina $= 9.4545 \cdot 10^{15}$ m $\Rightarrow x = 6.722 \cdot 10^{16}$ m

$t' = 3.35$ god $\Rightarrow$ 1 god $= 31536000$ s $\Rightarrow t' = 105645600$ s

$x' = ?$

$t = ?$

$t' = \dfrac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\quad t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t \quad /^2 \quad t'^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = t^2$

$\frac{v^2}{c^2} = t'^2 - t^2 \qquad v = \sqrt{\frac{t'^2-t^2}{c^2}}$

v - brzina brodu $\quad v = \frac{s}{t}$

$\Rightarrow \frac{s}{t} = \sqrt{\frac{t'^2-t^2}{c^2}} \quad /^2 \quad \frac{s^2}{t^2} = \frac{t'^2-t^2}{c^2} \qquad s^2c^2 = t^2t'^2 - t^4$

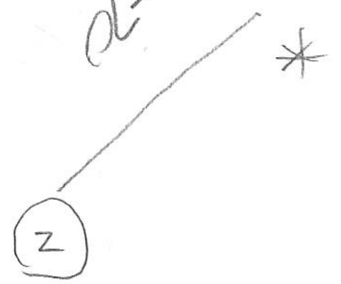
2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

d = 7,11



$$\Delta d = \frac{\Delta d_0 \sqrt{1-\beta^2}}{c}$$

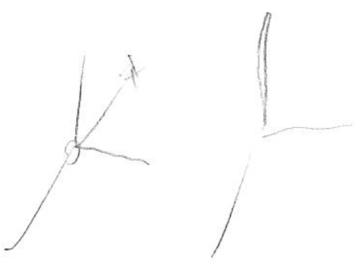
$\Delta d_0 = \Delta d \sqrt{1-\beta^2} = 3,35$ svjetlosnih godina

$t' = 3,35$ g

$\boxed{t_{na\ Zemlji} = 7,11 g}$

$d = 7,11$ g

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



$$7,11 = \frac{3,35}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Big/^2$$

$\frac{v^2}{c^2} = 0,778$ $\sqrt{\ }$

$v = 0,882c$ ✓

$d = 2,13 \cdot 10^9$ m

$50.55 - 50.55 \frac{v^2}{c^2} = 11,2225$

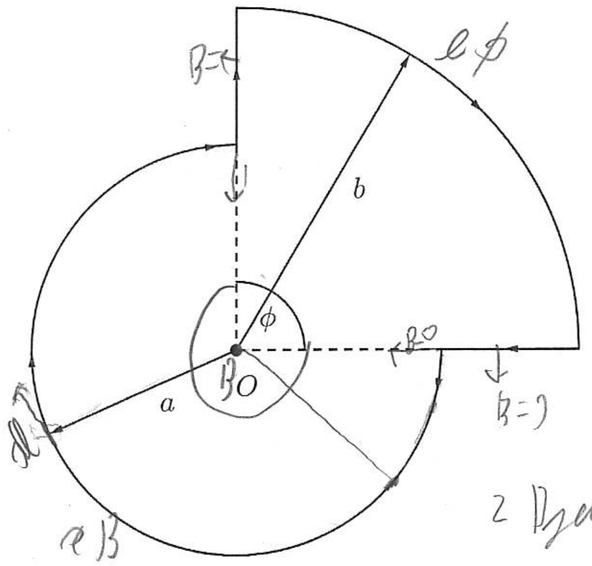
$+50.55 \frac{v^2}{c^2} = +39.33$

$v = \frac{d}{t}$

$d = v \cdot t = \boxed{2,9547 \text{ svjetlosnih godina}}$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



$$B \; \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\sin\theta\, dl}{r}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, dl \times \hat{r}}{r^2}$$

$2\,B_{luk}$

Biot - Savartov zakon

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi a} dl$$

$B = 270°$ $\quad \frac{3}{2}\pi$ $\qquad \phi = 90°$ $\quad \frac{\pi}{2}$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I \cdot \sin\theta}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi a} \sin\theta\, dl + \frac{\mu_0 I}{4\pi b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2} b} \sin\theta\, dl$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \cdot \frac{3\pi a}{2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi b^2}\frac{\pi}{2} b = \frac{3\mu_0 I}{8a} + \frac{\mu_0 I}{8b}$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera $2\,\mathrm{cm}$ i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3\ \mathrm{T/s}$. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\frac{\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$ dt $\frac{\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$ $\frac{t}{\tau^2}$

$\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\frac{d}{dt}$

$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$

$\phi = \int B\, dA \cos\alpha$

$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int B\, da \cos 0$

$-\beta e^{-\frac{t}{\tau}} - \beta \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{d}{dt}$

$-\beta \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} - \frac{\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}$

$\varepsilon = -\frac{d}{dt} B_{uj} A$

$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot r^2\pi$

$103 \cdot 10^{-06}$

$|\varepsilon| = \beta e^{-\frac{t}{\tau}} r^2\pi \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$

63

$\frac{d\varepsilon^{max}}{dt} = 0 = -\beta e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} + \frac{t}{\tau^2}\right) = 0$

$\varepsilon(t=2) = -\beta e^{-\frac{2}{0.5}} r^2\pi \left(1 - \frac{2}{0.5}\right)$

$|\varepsilon|$

$-\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} + \frac{t}{\tau^2} = 0$

$= 510{,}2 \cdot 10^{-6}\ V$

$-4 + \frac{t}{\tau^2} = 0 \quad \frac{t}{\tau^2} = 4$

$I = \frac{V}{R} = 850.33 \cdot 10^{-6}\ A$

$t = 1\ s$

Računski zadatak 2.4

Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \tag{1}$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$\langle S \rangle = \frac{E_0^2}{2}$

$\hat{x} + \hat{y}$ $\quad E = E_{01} \cos(kz - \omega t)$

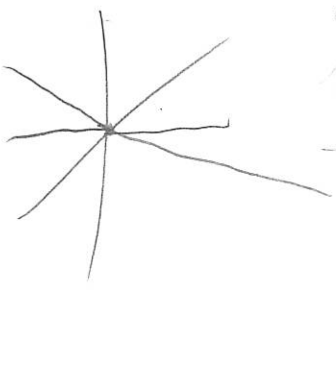
$E_0 + E_1 = E_A$ $\quad E = E_{01} \cos(kz - \omega t)(\hat{x} + \hat{y})$

$B = B_0 \cos(kz - \omega t)(-\hat{x} - \hat{y})$

$S = \frac{1}{\mu_0} B \times E$

$-\hat{z} \times (x + y) = -\hat{x} - \hat{y}$ $\quad$ 0 0 1 / 1 1 0

$B \times E = (\hat{x} + \hat{y}) \times (-\hat{x} - \hat{y})$

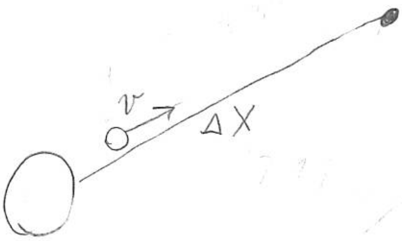


2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.



$S' - v$ $\qquad$ S

$t' = 3.35\ g$ $\qquad$ $\Delta x = 7.11\ sg$

$t = v \cdot \Delta x$ $\qquad$ $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$

$t' = v \Delta x \gamma$ $\qquad$ $\Delta x' = \frac{\Delta x^2 v}{t'}$

$\gamma = \frac{t'}{v \Delta x}$ $\qquad$ $\Delta x' = 4.5\ v$

$v = \frac{\Delta x'}{4.5}$

$v \cdot t' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}$

$v^2 t'^2 = \Delta x \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$v^2 = \frac{\Delta x^2}{t'^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$v^2\left(1 + \frac{\Delta x^2}{t'^2 c^2}\right) = \frac{\Delta x^2}{t'^2}$

$v^2\left(\frac{t'^2 c^2 + \Delta x^2}{t'^2 c^2}\right) = \frac{\Delta x^2}{t'^2}$

$v^2 = \frac{\Delta x^2}{t'^2 c^2 + \Delta x^2} \cdot c^2$

$v^2 = 1.22 \cdot 10^{-4}\ c$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$s = 7.11$ svj. god. $\Rightarrow t = 7.11$ god gledano od Zemlje

$t' = 3{,}35$ god

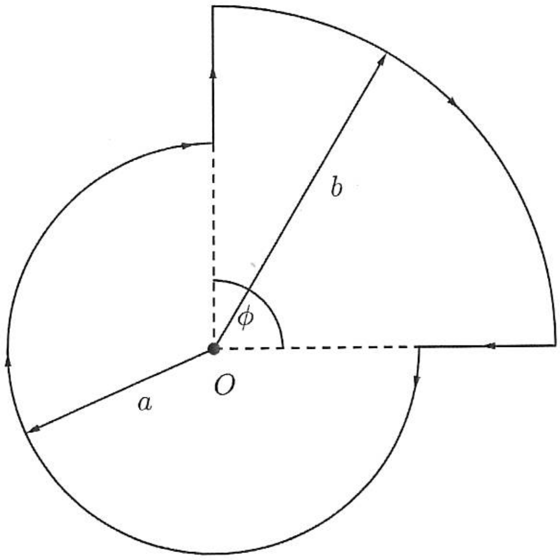
$t = ?$, $s' = ?$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = 0.88\,c$$

$$\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \Delta l = s' = 3{,}38 \text{ svjetlosnih godina}$$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



$$\int B \cdot dr = \mu_0 I$$

$$\int B_1 \, dr = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \int B_1 \, dr = B_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \, dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{a^2}{2} \, d\varphi = \left(a^2\pi - \frac{a^2\pi}{4}\right) B_1$$

$$\int B_2 \, dr = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \int B_2 \, dr = B_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^b r \, dr = \frac{B_2 \pi}{4} b^2$$

$$B_{uk} = B_1 + B_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{\left(a^2\pi - \frac{a^2\pi}{4}\right)} \qquad B_2 = \frac{4 \mu_0 I}{\pi b^2}$$

$$B_{uk} = \mu_0 I \left(\frac{1}{\left(a^2\pi - \frac{a^2\pi}{4}\right)} + \frac{4}{\pi b^2} \right)$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \Phi = \int B \cdot ds = B(t) \cdot r^2 \pi$$

$$\mathcal{E} = -r^2 \pi \frac{d B(t)}{dt} = -r^2 \pi \cdot \left(\beta e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \right)$$

$$\mathcal{E}_{max} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$, tražimo t di će $\mathcal{E}$ bit max.

i on je max za $t = 0\,s$

$$\mathcal{E}(t=0) = -3.77 \cdot 10^{-3}\,V$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} = -6.28 \cdot 10^{-3}\,A$$

Računski zadatak 2.4
Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \tag{1}$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$$\hat{B} = \hat{k} \times \hat{E} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x} + \hat{y} \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} \qquad B_1 = \frac{B_1}{c}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} (B_1 E_0 + B_0 E_1)\, \hat{z}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E \cdot B = \frac{E_1 E_0}{\mu_0 c} \cos^2(kz - \omega t)\, \hat{z}$$

$$\langle S \rangle = \frac{E_1 E_0}{\mu_0 c} \underbrace{\langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle}_{= \frac{1}{2}} = \frac{E_1 E_0}{2 \mu_0 c}$$