Završni ispit iz Fizike (24. lipanj 2024.)

1. Pitanja višestrukog izbora

Upute: Na pitanja višestrukog izbora 1.1 do 1.8 odgovorite zaokruživanjem jednog točnog odgovora na obrascu za odgovore. Točan odgovor nosi 1 bod, netočan odgovor -0.25 bodova, a neodgovoreno pitanje nula bodova.

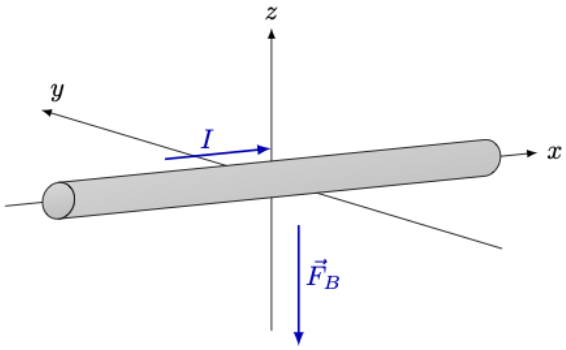
1.1 Kada bi se čestica mase $m > 0$ gibala brzinom svjetlosti c (što ne može), njezina (linearna) količina gibanja p iznosila bi:
- (a) 0,
- (b) mc,
- (c) $2mc$,
- (d) mc^2
- (e) ∞. **točno**

1.2 Vrlo dugi valjak od izolatora jednoliko je volumno nabijen pozitivnim nabojem. Koja je od sljedećih tvrdnji točna o iznosu električnog polja **unutar** valjka?
- (a) Prema Gaussovom zakonu, iznos električnog polja obrnuto je proporcionalan udaljenosti od središta valjka.
- (b) Prema Biot-Savartovom zakonu, iznos električnog polja obrnuto je proporcionalan udaljenosti od središta valjka.
- (c) Prema Ampèreovom zakonu, iznos električnog polja obrnuto je proporcionalan udaljenosti od središta valjka.
- (d) Prema Gaussovom zakonu, iznos električnog polja proporcionalan je udaljenosti od središta valjka. **točno**
- (e) Prema Ampèreovom zakonu, iznos električnog polja ne ovisi o udaljenosti od središta valjka.

1.3 Potencijal u nekom prostoru je ovisan o koordinatama kao $U(\mathbf{r}) = Ayz^2$, gdje je A konstanta. Kakvo je električno polje u tom prostoru koje odgovara tom potencijalu?
- (a) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2Ayz\hat{\mathbf{x}}$,
- (b) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Ayz\hat{\mathbf{y}}$,
- (c) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -Az\hat{\mathbf{y}} + 2Ay\hat{\mathbf{z}}$,
- (d) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -2Ay\hat{\mathbf{y}} - Az^2\hat{\mathbf{z}}$,
- (e) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -Az^2\hat{\mathbf{y}} - 2Ayz\hat{\mathbf{z}}$. **točno**

1.4 Prema Gaussovom zakonu za magnetsko polje, tok magnetskog polja $\mathbf{B}$ kroz bilo koju zatvorenu plohu jednak je nuli. Diferencijalni oblik te tvrdnje jest:
- (a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$.
- (b) $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$.
- (c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. **točno**
- (d) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.
- (e) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

1.5 Na slici je prikazana žica kroz koju teče struja te su označeni smjer struje i smjer magnetske sile na žicu. Ako je žica orijentirana tako da na nju djeluje maksimalna sila, a magnetsko polje je homogeno, koji je smjer magnetskog polja?



(a) $\hat{\mathbf{x}}$,
(b) $\hat{\mathbf{y}}$,
(c) $-\hat{\mathbf{y}}$, **točno**
(d) $\hat{\mathbf{z}}$,
(e) $-\hat{\mathbf{z}}$

1.6 Električno polje ravnog elektromagnetskog vala koji ima valni broj k i kružnu frekvenciju ω je dano s $\mathbf{E} = E_0 \sin(kz - \omega t)(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$. Koji od sljedećih izraza daje smjer pridruženog magnetskog polja $\mathbf{B}$?
(a) $\hat{\mathbf{z}}$.
(b) $-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$. **točno**
(c) $-\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}$.
(d) $\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}}$.
(e) $\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$.

1.7 U ravnom linearno polariziranom elektromagnetskom valu kružne frekvencije ω u vakuumu
(a) električno i magnetsko polje imaju stalan iznos.
(b) vektori električnog i magnetskog polje su međusobno paralelni.
(c) vektori električnog i magnetskog polja gledaju u smjeru širenja vala.
(d) Poyntingov vektor ima iznos koji se ne mijenja u vremenu.
(e) Ništa od gore navedenog nije istinito. **točno**

1.8 Laserski snop prolazi kroz dvije pukotinu i na zastoru se vidi interferencijski uzorak. Ako pokrijemo jednu pukotinu staklenom pločom, faza vala koji prolazi kroz staklo promijeni se za π u odnosu na početnu situaciju. Kako se promijeni interferencijski uzorak?
(a) Nestaje interferencijski uzorak i ostaje samo svijetla točka.
(b) Nestaje interferencijski uzorak i ostaje samo tamni zastor.
(c) Maksimumi u interferencijskom uzorku se udalje.
(d) Maksimumi u interferencijskom uzorku se približe.
(e) Maksimumi i minimumi u interferencijskom uzorku se zamijene. **točno**

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

Rješenje: Krećemo od izraza za dilitaciju vremena

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \tag{1}$$

gdje je $\Delta t'$ vrijeme mjereno od strane putnika u letjelici, Δt vrijeme mjereno na Zemlji, a v brzina kojom se letjelica giba u odnosu na Zemlju. U tom izrazu nam nedostaju vrijeme puta mjereno sa Zemlje i brzina gibanja svjetlosti. Vrijeme mjereno sa Zemlje jednostavno možemo izračunati kao

$$\Delta t = \frac{D}{v}, \tag{2}$$

gdje je D udaljenost zvijezde od Zemlje. Kombiniranjem dvaju gornjih izraza dobijemo:

$$\Delta t' = \frac{D}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{3}$$

odakle možemo izraziti i izračunati

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{c\Delta t'}{D}\right)}} = 0.905\ c. \tag{4}$$

Dalje izračunavamo vrijeme mjereno sa Zemlje:

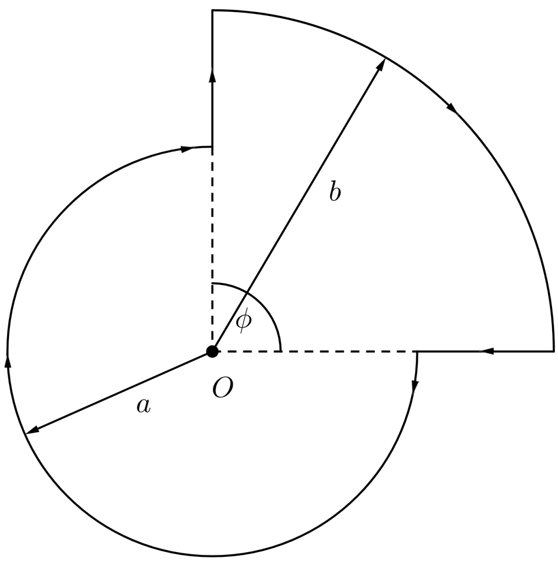
$$\Delta t = 7.86\,\text{godina}. \tag{5}$$

U smjeru gibanja, za putnike u svemirskoj letjelici dolazi do kontrakcije duljine pa će oni mjeriti udaljenost od Zemlje do zvijezde

$$D' = D\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 3.03\,\text{svjetlosne godine}. \tag{6}$$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



Rješenje: Ukupno magnetsko polje u točki O ćemo izračunati kao sumu doprinosa pojedinih dijelova petlje:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4, \tag{7}$$

gdje možemo segmentom 1 nazvati kružni luk polumjera a, segmentom 3 kružni luk polumjera b, a segmenti 2 i 4 dijelovi petlje koji povezuju veći i manji kružni luk. Magnetsko polje svakog od segmenata ćemo izračunati koristeći Biot-Savartov zakon. Prema tome, magnetsko polje koje stvara prvi segment je

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{8}$$

odnosno, iznos tog magnetskog polja

$$|\mathbf{B}_1| = B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{|\mathrm{d}\mathbf{s}_1 \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2}. \tag{9}$$

Izrazit ćemo

$$|\mathrm{d}\mathbf{s}_1 \times \hat{\mathbf{r}}| = |\mathrm{d}\mathbf{s}_1||\hat{\mathbf{r}}| \sin\theta, \tag{10}$$

gdje je θ kut između vektora $\mathrm{d}\mathbf{s}_1$ i $\hat{\mathbf{r}}$. Pošto su ova dva vektora u svakom dijelu ovog segmenta petlje okomiti jedan na drugi, $\sin\theta = 1$. Onda je magnetsko polje dano izrazom

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}s_1}{r^2}. \tag{11}$$

Sve ćemo izraziti u cilindričnom koordinatnom sustavu u kojem je $\mathrm{d}s_1 = r\mathrm{d}\phi$. Pošto ovaj dio petlje ima konstantni polumjer koristimo $r = a$. Konačno izračunavamo magnetsko polje segmenta 1:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \mathrm{d}\phi = \frac{3\mu_0 I}{8a}. \tag{12}$$

Analogno, raspisujemo Biot-Savartov zakon za svaki od preostalih segmenata. Za segment 2 vrijedi

$$|\mathbf{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{|\mathrm{d}\mathbf{s}_2 \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2}. \tag{13}$$

Pošto su za segment 2 vektori $\mathrm{d}\mathbf{s}_2$ i $\hat{\mathbf{r}}$ paralelni na cijelom segmentu, onda je

$$|\mathrm{d}\mathbf{s}_2 \times \hat{\mathbf{r}}| = 0, \tag{14}$$

odnosno

$$B_2 = 0. \tag{15}$$

Slična situacija je za segment 4 pa je

$$B_4 = 0. \tag{16}$$

Raspisujemo Biot-Savartov zakon za segment 3

$$|\mathbf{B}_3| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{|\mathrm{d}\mathbf{s}_3 \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2}. \tag{17}$$

Način raspisivanja je identičan onom kod segmenta 1 i na kraju dobijemo

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi = \frac{\mu_0 I}{8b}. \tag{18}$$

Ukupno magnetsko polje je onda

$$B = \frac{\mu_0 I}{8} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right). \tag{19}$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera $2\,\mathrm{cm}$ i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

Rješenje:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\pi\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{20}$$

$$\mathcal{E} = -r^2\pi\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{21}$$

$$\mathcal{E} = r^2\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{t}{\tau} - 1\right), \tag{22}$$

$$\mathcal{E}_{max} = ? \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{24}$$

$$r^2\pi\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{t}{\tau} - 1\right)\right) = 0, \tag{25}$$

$$r^2\pi\beta\left(-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{t}{\tau} - 1\right) + e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{1}{\tau}\right) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{r^2\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}(2\tau - t) = 0, \tag{27}$$

$$2\tau - t = 0, \Rightarrow t = 2\tau, \Rightarrow t_{\mathcal{E}_{max}} = 1\,\mathrm{s}. \tag{28}$$

$$\mathcal{E}_{max} = r^2\pi\beta e^{-\frac{1}{\tau}}\left(\frac{1}{\tau} - 1\right) = 5.1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{V}, \tag{29}$$

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} = 8.5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{A}. \tag{30}$$

Računski zadatak 2.4
Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \tag{31}$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

Rješenje: Magnetska komponenta zadanog vala dana je s

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{|k|} \times (\mathbf{E}/c) = \hat{z} \times (\mathbf{E}/c) = E_0/c \cdot \cos(kz - \omega t)\hat{y} - E_1/c \cdot \cos(kz - \omega t)\hat{x}. \tag{32}$$

Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ predstavlja snagu po jedinici površine koju nosi val i definiran je kao

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \tag{33}$$

Uz električno polje $\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}$ i magnetsko polje $\mathbf{B}(z,t) = B_0 \cos(kz - \omega t)\hat{y} - B_1 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = (E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}) \tag{34}$$

$$\times (B_0 \cos(kz - \omega t)\hat{y} - B_1 \cos(kz - \omega t)\hat{x}) \tag{35}$$

$$= E_0 B_0 \cos^2(kz - \omega t)\hat{z} + E_1 B_1 \cos^2(kz - \omega t)\hat{z} \tag{36}$$

Koristeći $E_0 = cB_0$ i $E_1 = cB_1$ i $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, dobivamo

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_0 B_0 \cos^2(kz - \omega t) + E_1 B_1 \cos^2(kz - \omega t)\right]\hat{z} \tag{37}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) + E_1^2 \cos^2(kz - \omega t)\right]\hat{z}. \tag{38}$$

Vremenski uprosječen Poyntingov vektor jednak je

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}\, dt, \tag{39}$$

dok je prosječna vrijednost $\langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle$ jednaka $\frac{1}{2}$.

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| = \left| \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[E_0^2 \left\langle \cos^2(kz - \omega t) \right\rangle + E_1^2 \left\langle \cos^2(kz - \omega t) \right\rangle\right]\hat{z} \right| \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(E_0^2 + E_1^2\right). \tag{41}$$