2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$x = 7.11 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 365 \cdot c$

$t' = 3.35\,y$ $\qquad x = 6.722 \times 10^{16}\,m$

$v' = v \qquad v_0 = 0$

$x' = (x - vt)\gamma$

$t' = (t - \frac{vx}{c^2})\gamma$

$\frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t - \frac{vx}{c^2}}$

$v = \frac{x - vt}{t - \frac{vx}{c^2}}$

$vt - \frac{v^2 x}{c^2} = x - vt$

$2vt = x(1 + \beta^2)$

$2t = x + \frac{xv}{c^2}$

$t = \frac{x(c^2 + v)}{2c^2}$

$t' = \frac{\frac{x(c^2+v)}{2c^2} - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ $\qquad t' = \frac{x(c^2 - v)}{2c^2} \cdot \gamma$ $\qquad t' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{x(c^2 - v)}{2c^2} \quad /^2$

$t'^2 - \frac{t'^2 v^2}{c^2} = \frac{x^2(c^4 - 2c^2 v + v^2)}{2c^2}$

$2 \cdot t'^2 \cdot c^2 - 2t'^2 v^2 = x^2 c^4 - 2x^2 c^2 v + v^2$

$2 \cdot t'^2 \cdot c^2 - x^2 c^4 = (2t'^2 + 1) \cdot v^2 - (2x^2 c^2) v$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$e^{-\frac{1}{\tau}} = a$

$I = \frac{U}{R}$

$r = 2cm$

$R = 0.6\Omega$

$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}} = \beta t a^t$

$\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S B \cdot ds = \frac{-\partial B}{\partial t} \cdot r^2\pi = \beta t a^{t-1} \cdot r^2\pi$

$= \beta t e^{\frac{1-t}{\tau}}$

$I = \frac{\beta t e^{\frac{1-t}{\tau}} \cdot r^2\pi}{R}$

Računski zadatak 2.4

Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \tag{1}$$

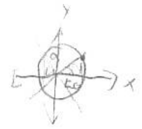
Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

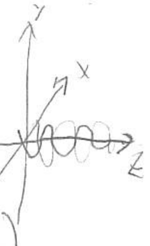
$S = \frac{1}{\mu_0} E \times B$

uprosječeni vektor je $\frac{S_{MAX}}{\sqrt{2}}$

$S_{MAX} = \frac{1}{\mu_0} E_{MAX} \times B_{MAX}$

$B = \frac{k}{|k|} \times (E/c)$





$B = E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y} + E_0 \cos(kz - \omega t)$

$S_{MAX} = \frac{1}{\mu_0} \left(\sqrt{E_1^2 + E_0^2}\right)\left(\sqrt{E_0^2 + E_1^2}\right)$

$S_{pr} = \frac{E_1^2 + E_0^2}{\mu_0 \sqrt{2}}$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1

Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$t_{svjetlost} = 1 god$

$D = 7{,}11 \text{ god } c = 7{,}11 \cdot c$

$t_0 = 3{,}35 god$

$t = ?$

$D_0 = ?$

$$V_{brod} = \frac{t_{svjetlost}}{t_0} \cdot c = 0{,}2985\, c$$

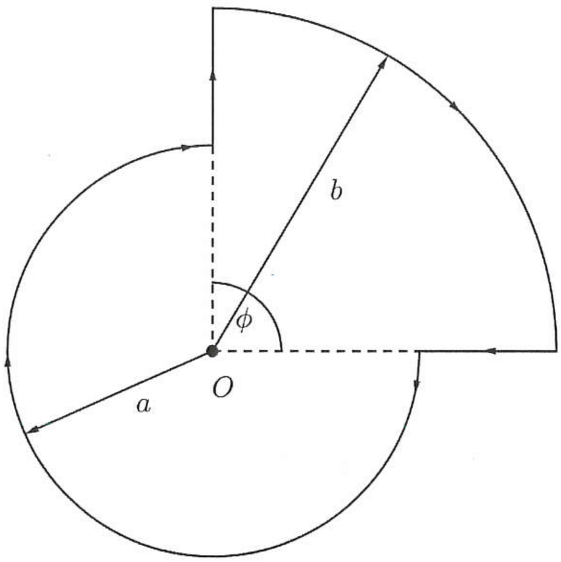
$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3{,}51 \text{ god}$$

$$D = D_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$D_0 = \frac{D}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 7{,}45 \text{ god } c$$

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



$$\underbrace{\oint \vec{B} d\vec{l}}_{Br\varphi} = \mu_0 \int J \, dA = \mu_0 I \qquad d\vec{l} = r \, d\varphi$$

$B_1 \ldots \quad B_1\left(\frac{\pi}{2} b\right) = \mu_0 I$

$$B_1 = \frac{2\mu_0 I}{\pi b}$$

$B_2 \ldots \quad B_2\left(\frac{3\pi}{2} a\right) = \mu_0 I$

$$B_2 = \frac{2\mu_0 I}{3\pi a}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{3a}\right)$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5$ s i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 2\,\mathrm{cm}$

$R = 0{,}6\,\Omega$

$B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = 0{,}5\,\mathrm{s}$

$\beta = 3\,\mathrm{T/s}$

$I_{max} = ?$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\,\hat{n}\,dA = -\frac{d}{dt}B(t)A = -r^2\pi\frac{d}{dt}\left(\beta t e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\mathcal{E} = -r^2\pi\beta\left(e^{-\frac{t}{\tau}} + t\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

$$= -r^2\pi\beta\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\frac{t}{\tau}\right)$$

$$= r^2\pi\beta e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{t}{\tau} - 1\right)$$

$\mathcal{E}_{max}\ldots$

$$\frac{d}{dt}\, e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{t}{\tau} - 1\right) = 0$$

$$\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) - e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = 0$$

$$\frac{2}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad \Big| : \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$$

$$2 - \frac{t}{\tau} = 0$$

$$\frac{t}{\tau} = 2$$

$t = 1\,\mathrm{s}$ $\qquad$ $\mathcal{E}$ je maksimalan za $t_1 = 1\,\mathrm{s}$

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}(t_1)}{R} = \frac{r^2\pi\,\beta\, e^{-\frac{1}{0{,}5}}\left(\frac{1}{0{,}5} - 1\right)}{R} = 8{,}5034\cdot 10^{-4}\,\mathrm{A}$$

2. Računski zadaci

Uputa: Postupke rješavanja računskih zadataka 2.1 do 2.4 napišite na papire na kojima su sami zadaci zadani. U slučaju nedostatka prostora za pisanje obratite se dežurnom nastavniku koji će vam dati dodatne prazne papire. Računski zadaci nose 5 bodova.

Računski zadatak 2.1
Udaljenost neke određene zvijezde, mjereno iz Zemljina referentnog sustava, je 7.11 svjetlosnih godina. Promatrano iz sustava putnika u svemirskoj letjelici, vrijeme potrebno da bi se stiglo od Zemlje do zvijezde je 3.35 godina. Koliko traje putovanje promatrano sa Zemlje te kolika je prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u svemirskoj letjelici? Upute: Jedna svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe tokom jedne godine.

$s = 7.11 g \cdot c$ $\qquad t = \frac{s}{v}$

$t' = 3.35 g$

$$\frac{s}{v} = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = v t' \quad /^2$$

$$s^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = v^2 t'^2$$

$$v^2\left(t'^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) = s^2$$

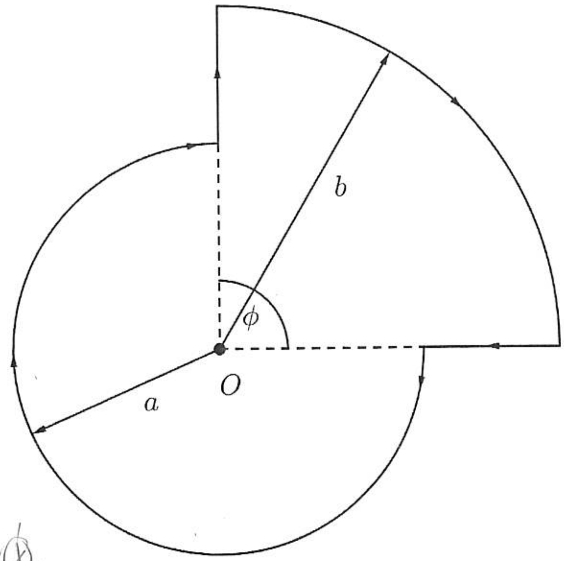
$$v = \sqrt{\frac{s^2}{t'^2 + \frac{s^2}{c^2}}} = 0,905c$$ ↗ brzina letjelice

$$t_Z = \frac{s}{v} = 7.86 g$$ → trajanje putovanja promatrano s Zemlje

$$s' = s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 3,02 gc$$ → prijeđena udaljenost koju bilježe putnici u letjelici

Računski zadatak 2.2

Petljom na slici teče struja jakosti I. Izračunajte iznos magnetskog polja u točki O. Polumjeri dijelova petlje su a i b, a kut je $\phi = 90°$.



$\otimes$ B_A

$\otimes$ B_B

$$r = \frac{3}{4} \cdot 2a\pi$$

$$dr = \frac{3}{2}\pi\, da$$

$$\oint B_A\, dr = \mu_0 I$$

$$B_A \cdot \int_0^a \frac{3}{2}\pi\, da = \mu_0 I$$

$$B_A \cdot \frac{3}{2} a\pi = \mu_0 I$$

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{\frac{3}{2} a\pi} = \frac{2\mu_0 I}{3a\pi}$$

$$B_{UK} = B_A + B_B$$

$$B_{UK} = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$r = \frac{1}{4} 2 \cdot b\pi$$

$$dr = \frac{1}{2}\pi\, db$$

$$\oint B_B\, dr = \mu_0 I$$

$$B_B \cdot \int_0^b \frac{1}{2}\pi\, db = \mu_0 I$$

$$B_B = \frac{\mu_0 I}{\frac{1}{2} b\pi} = \frac{2\mu_0 I}{b\pi}$$

Računski zadatak 2.3

Kružna petlja polumjera 2 cm i otpora $0.6\,\Omega$ nalazi se u prostoru homogenog magnetskog polja $\mathbf{B}$ čiji je smjer okomit na ravninu petlje. Magnetsko polje mijenja se u vremenu za $t > 0$ prema izrazu $B(t) = \beta t e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdje je $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$ i $\beta = 3$ T/s. Kolika je maksimalna jakost struje koja se inducira u petlji?

$r = 0.02\,\mathrm{m}$ $\quad \tau = 0.5\,\mathrm{s}$ $\quad I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} = ?$

$R = 0.6\,\Omega$ $\quad \beta = 3\,\mathrm{T/s}$

$$\Phi_B = \int B\,dS = B(t)\cdot S = B(t)\cdot r^2\pi$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_B$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} B(t)\cdot r^2\pi = -r^2\pi\cdot\beta\cdot\left(e^{-\frac{t}{\tau}} + t\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

$$\mathcal{E} = -r^2\pi\,\beta\cdot\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\mathcal{E}(t) = -r^2\pi\,\beta\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$\mathcal{E}'(t) = 0 \quad \rightarrow$ tražim za koji t je $\mathcal{E}(t)$ max

$$-r^2\pi\beta\left(-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} - \left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\right) = 0$$

$\ne 0$

$$-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} + t\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\frac{1}{\tau}\right)$$

$$-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$-\frac{2}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{2}{\tau} + \frac{t}{\tau^2}\right) = 0$$

$\ne 0$

$$\frac{t}{\tau^2} = \frac{2}{\tau}$$

$$\frac{2}{\tau} = \frac{t}{\tau^2} \quad /\cdot\tau \ne 0$$

$$t = 2\tau = 1\,\mathrm{s}$$

$$\mathcal{E}(1\,\mathrm{s}) = -0.02^2\pi\cdot 3\cdot\left(e^{-2} - 2e^{-2}\right) = 5.1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$$

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}(1\,\mathrm{s})}{R} = 8.5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{A}$$

Računski zadatak 2.4

Električna komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu jednaka je

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_1 \cos(kz - \omega t)\hat{y}. \tag{1}$$

Izračunajte intenzitet, tj. iznos vremenski uprosječenog Poyntingovog vektora zadanog EM vala.

$$B = \hat{z} \times \frac{E}{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t) & \frac{E_1}{c}\cos(kz-\omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$S \to +z$ smjeru

$E \to \hat{x} + \hat{y}$ smjeru

$$B = -\frac{E_1}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{x} + \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{y} \quad B \to -\hat{x}+\hat{y} \text{ smjer}$$

$$B(z,t) = -\frac{E_1}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{x} + \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{y}$$

$$S = \frac{1}{\mu_0} E \times B \rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_0\cos(kz-\omega t) & E_1\cos(kz-\omega t) & 0 \\ -\frac{E_1}{c}\cos(kz-\omega t) & \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t) & c \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{E_0^2}{c}\cos^2(kz-\omega t) + \frac{E_1^2}{c}\cos^2(kz-\omega t)\right)\hat{z}$$

$$S = \frac{E_0^2 + E_1^2}{\mu_0 c}\cos^2(kz-\omega t)\,\hat{z}$$

Amplituda

$$I = \frac{A_S}{2} = \frac{E_0^2 + E_1^2}{2\mu_0 c}$$