

ДИФРАКЦИЯ НА ВЫТЯНУТОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ С ИМПЕДАНСНЫМИ ГРАНИЦАМИ. МЕТОД ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Корольков А.И., Шанин А.В., Белоус А. А.

*Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова,
физический факультет, 119991, Москва, Ленинские горы.*

E-mail: korolkov@physics.msu.ru

Изучается задача дифракции на вытянутом теле вращения с импедансными граничными условиями. Рассматривается случай приосевого падения высокочастотной волны. Дифракционный процесс описывается с помощью метода параболического уравнения. С помощью теоремы Грина выводится граничное интегральное уравнение типа Вольтерра. Для задачи дифракции на тонком конусе с постоянным импедансом строится итерационное численное решение. Также, численные результаты сравниваются с результатами прямого дифракционного акустического эксперимента, выполненного с использованием метода М-последовательности

Ключевые слова: вытянутые тела вращения, дифракция на конусе, импедансный конус, параболическое уравнение, метод М-последовательности

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача дифракции на вытянутом теле вращения. Иными словами, предполагается, что продольные размеры тела значительно превышают его поперечные размеры. Поле на поверхности удовлетворяет импедансным граничным условиям. Рассматривается случай приосевого падения. Также предполагается, что длины волн значительно меньше продольных размеров препятствия. При таких предположениях дифракционная задача значительно упрощается и может быть решена в рамках метода параболического уравнения.

Задачи дифракции на вытянутых телах привлекают значительное внимание исследователей. В частности, хорошо изучен случай идеальных граничных условий [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Этот случай также рассматривался авторами [9, 10]. Подробный обзор существующих методов может быть найден в [10]. К сожалению, задачи дифракции на телах вращения с импедансными граничными условиями практически не изучены. Авторам известны лишь работы, посвященные импедансному конусу [11, 12, 13]. В данных работах с помощью интегрального представления Конторовича-Лебедева задачу удастся свести к интегральному уравнению типа Фредгольма. Для случая

тонкого конуса строится диаграмма направленности. В [14] исследовано дальнее поле вблизи поверхности конуса.

Настоящая работа является обобщением результатов, полученных в [10], на случай импедансных граничных условий. А именно, выводится граничное интегральное уравнение в параболической постановке. Полученное уравнение относится к классу Вольтерра, что позволяет его решить с помощью метода итераций.

В работе выводятся интегральные уравнения двух типов. Уравнение первого типа, более общее, является двумерным и имеет ядро, зависящее от четырех переменных: двух координат источника и двух координат приемника на поверхности препятствия. Данное уравнение формулируется для произвольного вытянутого тела. Путем учета угловой симметрии выводится ряд одномерных уравнений для угловых мод. Эти уравнения, соответственно, справедливы только для тел вращения. При осевом падении остается только уравнение для нулевой моды, которое решается методом итераций для задачи дифракции на конусе с постоянным импедансом.

Кроме того, полученные численные и аналитические результаты сравниваются с результатами прямого акустического дифракционного эксперимента, выполненного с применением метода М-последовательности. Сравнение проводится для случая идеальных граничных условий Неймана.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи для уравнения Гельмгольца

Рассмотрим трехмерное пространство, описываемое цилиндрическими координатами (x, r, φ) . Будем считать, что x — продольная координата в том смысле, что все волновые процессы происходят под малым углом к оси x . Пусть везде вне тела выполняется уравнение Гельмгольца:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\perp} + k^2 \right) \tilde{u}(x, r, \varphi) = 0, \quad (1)$$

$$\Delta_{\perp} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Временная зависимость имеет форму $\exp\{-i\omega t\}$ и далее не выписывается. Тело вращения занимает симметричную относительно оси x область $r < f(x)$. Будем обозначать поверхность тела символом Γ . Тело может быть как компактным

$(X_1 \leq x \leq X_2)$, так и полубесконечным $(x \geq X_1)$. Важным примером тела вращения является конус:

$$r = f(x) = \alpha x, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Падающая волна имеет вид:

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{ik(x \cos \theta + r \cos \varphi \sin \theta)\}, \quad (3)$$

где угол падения θ предполагается малым.

Полное поле \tilde{u} представляется в следующем виде:

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{\text{in}} + \tilde{u}^{\text{sc}}. \quad (4)$$

Здесь \tilde{u}^{sc} — рассеянное поле, удовлетворяющее условиям излучения. Условия излучения формулируются в виде принципа предельного поглощения. А именно, предполагается, что волновое число k имеет малую положительную мнимую часть. Следовательно, рассеянное поле затухает при $|x| \rightarrow \infty$ или $|r| \rightarrow \infty$.

На поверхности тела должны выполняться импедансные граничные условия:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} = \eta \tilde{u}, \quad (5)$$

где η — импеданс, \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности тела. На импеданс накладывается условие неизлучения энергии

$$\text{Im}[\eta] \leq 0. \quad (6)$$

Если на поверхности тела имеются конические точки (такие, как вершина конуса), то в них должны удовлетворяться условия Мейкснера, заключающиеся в интегрируемости «энергии» $|\nabla \tilde{u}|^2 + |\tilde{u}|^2$ вблизи конической точки.

Постановка задачи для параболического уравнения

Предполагается, что тело вращения вытянуто в том смысле, в котором это понятие было введено в [10]. А именно, предполагается, что дифракционный процесс носит приосевой характер, т. е. выполнены следующие условия:

1. Угол падения мал: $\theta \ll 1$.
2. Наклон поверхности меняется плавно: $\dot{f} \ll 1$. Здесь \dot{f} — производная df/dx .
3. Угол дифракции мал: $(\ddot{f}/k)^{1/3} \ll 1$. Здесь \ddot{f} — производная d^2f/dx^2 .

Поясним последнее условие. Продольный размер зоны Френеля определяется выражением [15]:

$$\Delta x = (\ddot{f})^{-2/3} k^{-1/3}. \quad (7)$$

Угол дифракции может быть оценен как изменение наклона поверхности на Δx , т. е. как $\Delta x \ddot{f} = (\ddot{f} / k)^{1/3}$.

В соответствии с методом параболического уравнения, представим полное поле в виде

$$\tilde{u}(x, r, \varphi) = \exp\{ikx\} u(x, r, \varphi), \quad (8)$$

где $u(x, r, \varphi)$ является медленной функцией x по сравнению с экспоненциальным множителем. Подставляя (8) в (1) и пренебрегая членом со второй производной по x , получаем параболическое уравнение теории дифракции (ПУТД):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_{\perp} \right) u = 0. \quad (9)$$

Падающая волна (3) в параболическом приближении принимает вид

$$u^{\text{in}}(x, r, \varphi) = \exp\{ik(\theta r \cos \varphi - x\theta^2 / 2)\}, \quad (10)$$

где учтено, что $\cos \theta \approx 1 - \theta^2 / 2$, $\sin \theta \approx \theta$. Легко проверить, что (10) удовлетворяет (9).

В случае осевого падения $\theta = 0$ имеем

$$u^{\text{in}} = 1. \quad (11)$$

Импедансные граничные условия (5) переходят в

$$N[u](x, f(x), \varphi) = \eta u, \quad N \equiv \frac{\partial}{\partial r} - ik\dot{f}. \quad (12)$$

Переход от $\partial / \partial n$ к N подробно обсуждается в [10]. А именно, непосредственно вычисляя производную от (8), и пренебрегая членами порядка $(\dot{f})^2$, получим (12).

Как известно, наличие импедансных граничных условий может приводить к появлению поверхностных волн. Если их скорость существенно меньше скорости волн в среде, параболическое приближение не будет справедливым. Потребуем выполнения следующего условия

$$\eta / k \ll 1. \quad (13)$$

Тогда скорость распространения поверхностных волн будет близка к скорости звука [16], и, следовательно, они будут хорошо описываться параболическим приближением. Также предполагается выполнение условия неизлучения энергии (6).

Постановка задачи для ПУТД должна быть дополнена начальным условием

$$u^{sc} = 0, \quad \text{при } x < X_1, \quad (14)$$

отражающим тот факт, что ПУТД описывает только волны, распространяющиеся в положительном направлении.

Кроме того, должны выполняться условия излучения, накладываемые в виде принципа предельного поглощения.

Наконец, требуется выполнение условий Мейкснера. А именно, вблизи конической точки требуется локальная интегрируемость следующего выражения [10]:

$$|\Delta_\perp u|^2 + |u|^2. \quad (15)$$

ВЫВОД ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема Грина для параболического уравнения

Введем векторные обозначения для точек пространства $\mathbf{r} = (x, r, \varphi)$. Определим функцию Грина как решение неоднородного параболического уравнения с источником в точке $\mathbf{r}_s = (x_s, r_s, \varphi_s)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_\perp \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (16)$$

где оператор в левой части действует на компоненты вектора \mathbf{r} , а δ — дельта-функция Дирака. Решение уравнения должно удовлетворять начальному условию, то есть должно обращаться в ноль при $x < x_s$. При помощи непосредственной подстановки в (16) можно убедиться, что функция Грина при $x > x_s$ имеет следующий вид:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{k}{2\pi i(x - x_s)} \exp \left\{ \frac{ik}{2} \frac{(\Delta r)^2}{x - x_s} \right\}, \quad (17)$$

где Δr — расстояние между проекциями векторов в поперечной плоскости:

$$(\Delta r)^2 = r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos(\varphi - \varphi_s).$$

Сформулируем теорему Грина для параболического уравнения. Пусть Ω — конечная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и внешней нормалью \mathbf{n} . Рассмотрим пару неоднородных параболических уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_\perp \right) v(x, r, \varphi) = q(x, r, \varphi), \quad (18)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_\perp \right) w(x, r, \varphi) = h(x, r, \varphi) \quad (19)$$

для некоторых v, q, w, h . Отметим, что второе уравнение является комплексно сопряженным к первому, то есть описывает распространение волн в отрицательном направлении.

Введем векторные функции:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(ikv, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad \mathbf{w}(x, y, z) = \left(-ikw, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \quad (20)$$

Наконец, сформулируем теорему Грина [10]:

$$\int_{\partial\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})w - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v] dS = 2ik \int_{\Omega} [qw - hv] dV. \quad (21)$$

Граничное интегральное уравнение для полного поля

Применим теорему Грина к области Ω , сечение которой изображено на Рис. 1. Область ограничена плоскостью $x = X$, где $X < X_1$, плоскостью $x = x_*$ для некоторого $x_* > X_1$, цилиндром $r = R$, где $R \rightarrow \infty$, и поверхностью тела вращения Γ . Область Ω обладает осевой симметрией относительно оси x . В качестве v подставим в (18) рассеянное поле u^{sc} , а в качестве w подставим $g(\mathbf{r}_*, \mathbf{r})$, где

$$r_* = (x_* + \varepsilon, f(x_* + \varepsilon), \varphi_*).$$

Здесь φ_* предполагается произвольным, ε — малым (ниже рассматривается предел $\varepsilon \rightarrow 0$). Проводя выкладки, аналогичные таковым в [10], получим следующее интегральное уравнение:

$$U^{\text{sc}}(x_*, \varphi_*) = \frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} U^{\text{sc}}(x, \varphi) \{ \bar{N}[W](x, \varphi) - \eta W(x, \varphi) \} f(x) dx d\varphi +$$

$$\frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} W(x, \varphi) \{ N[U^{\text{in}}](x, \varphi) - \eta U^{\text{in}}(x, \varphi) \} f(x) dx d\varphi, \quad (22)$$

где были введены следующие обозначения:

$$\bar{N} \equiv \frac{\partial}{\partial r} - ik \frac{df}{dx},$$

$$U^{\text{sc}}(x, \varphi) \equiv u^{\text{sc}}(x, f(x), \varphi),$$

$$U^{\text{in}}(x, \varphi) \equiv u^{\text{in}}(x, f(x), \varphi),$$

$$W(x, \varphi) \equiv w(x, f(x), \varphi). \quad (23)$$

Введем обозначение для ядра уравнения (22):

$$K(x_*, \varphi_*, x, \varphi) \equiv \frac{if(x)}{k} (\bar{N}[W](x, \varphi) - \eta W(x, \varphi)). \quad (24)$$

Уравнение (22) может быть упрощено. А именно, применяя теорему Грина к области Ω с функциями

$$v(r) = u^{\text{in}}(r), \quad w(r) = g(r_*, r),$$

получим интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} U^{\text{in}}(x_*, \varphi_*) &= \frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} U^{\text{in}}(x, \varphi) \{ \bar{N}[W](x, \varphi) - \eta W(x, \varphi) \} f(x) dx d\varphi - \\ &\frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} W(x, \varphi) \{ N[U^{\text{in}}](x, \varphi) - \eta U^{\text{in}}(x, \varphi) \} f(x) dx d\varphi + 2U^{\text{in}}(x_*, \varphi_*). \end{aligned} \quad (25)$$

Складывая (22) и (25), получим уравнение для полного поля $U = U^{\text{sc}} + U^{\text{in}}$ на поверхности тела:

$$U(x_*, \varphi_*) = \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} K(x_*, \varphi_*, x, \varphi) U(x, \varphi) dx d\varphi + 2U^{\text{in}}(x_*, \varphi_*). \quad (26)$$

Ядро (22) дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} K(x_*, \varphi_*, x, \varphi) &= \frac{ikf(x)}{2\pi} \left(\frac{1}{ik} \frac{ik\dot{f}(x) - \eta}{x_* - x} + \frac{f(x) - f(x_*)\cos(\varphi - \varphi_*)}{(x_* - x)^2} \right) \times \\ &\exp \left\{ \frac{ik}{2} \frac{(f(x))^2 + (f(x_*))^2 - 2f(x_*)f(x)\cos(\varphi - \varphi_*)}{x_* - x} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение (26) является уравнением Вольтерра по переменной x и уравнением с разностным ядром по переменной φ .

Граничное интегральное уравнение для угловых мод

Воспользуемся осевой симметрией задачи. Представим падающее и полное поля на поверхности тела в виде рядов Фурье:

$$U^{\text{in}}(x, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n^{\text{in}}(x) e^{in\varphi}, \quad U(x, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(x) e^{in\varphi}. \quad (28)$$

Функции U_n удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$U_n(x_*) = \int_{X_1}^{x_*} K_n(x_*, x) U_n(x) dx + 2U_n^{\text{in}}(x_*), \quad (29)$$

где

$$K_n(x_*, x) = \int_0^{2\pi} K(x_*, \varphi, x, 0) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (30)$$

Используя (27), можно получить явное выражение для $K_n(x_*, x)$:

$$K_n(x) = \frac{-(-i)^{n+1}}{(x_* - x)^2} \exp \left\{ \frac{ik}{2} \frac{r_*^2 + r^2}{x_* - x} \right\} \left[\left(r + (x_* - x) \left(\frac{df}{dx} - \frac{\eta}{ik} \right) \right) J_n \left(\frac{kr_* r}{x_* - x} \right) - \frac{ir_*}{2} \left(J_{n-1} \left(\frac{kr_* r}{x_* - x} \right) - J_{n+1} \left(\frac{kr_* r}{x_* - x} \right) \right) \right], \quad (31)$$

где $r = f(x)$, $r_* = f(x_*)$, J_n — функция Бесселя первого рода.

Стоит отметить, что по аналогии с [10] для конечного тела вращения может быть получено выражение для диаграммы направленности и доказана оптическая теорема.

ДИФРАКЦИЯ НА ИМПЕДАНСНОМ КОНУСЕ ПРИ ОСЕВОМ ПАДЕНИИ

Граничное интегральное уравнение для конической задачи при осевом падении

Рассмотрим конус, для которого $X_1 = 0$, т. е. вершина конуса находится в начале координат, как показано на Рис. 2. Профиль конуса представляет собой прямую линию (2), где α является тангенсом угла между осью конуса и его образующей. Предполагается, что $\alpha \ll 1$.

Пусть падающая волна распространяется вдоль оси x , то есть имеет вид (9). В этом случае полное поле обладает осевой симметрией и описывается нулевой компонентой ряда (28):

$$U(x, \varphi) = U_0(x) = U(x).$$

Тогда задача сводится к одномерному интегральному уравнению:

$$U(x_*) = \int_0^{x_*} K_0(x_*, x) U(x) dx + 2 \quad (32)$$

с ядром

$$K_0 = \frac{ik\alpha^2 x_* x}{(x_* - x)^2} \exp \left\{ \frac{ik\alpha^2}{2} \frac{x_*^2 + x^2}{x_* - x} \right\} \times \left[J_0 \left(k\alpha^2 \frac{x_* x}{x_* - x} \right) + iJ_1 \left(k\alpha^2 \frac{x_* x}{x_* - x} \right) - \frac{\eta(x_* - x)}{ikx_* \alpha} J_0 \left(k\alpha^2 \frac{x_* x}{x_* - x} \right) \right]. \quad (33)$$

Случай разделяющихся переменных

Пусть импеданс меняется обратно пропорционально x :

$$\eta = \frac{\tilde{\eta}}{x}. \quad (34)$$

Тогда задача для параболического уравнения может быть решена с помощью метода разделения переменных. Перейдем в систему координат (x, ρ, φ) с

$$\rho = r / x, \quad (35)$$

и введем новую полевую переменную \hat{u} :

$$u(x, \rho x, \varphi) = \Xi^{-1}(x, \rho) \hat{u}(x, \rho, \varphi), \quad \Xi(x, \rho) \equiv kx \exp\{-ikx\rho^2 / 2\}. \quad (36)$$

Уравнение (9) переходит в

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ikx^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right) \hat{u} = 0, \quad (37)$$

а граничное условие (12) переходит в

$$\frac{1}{x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho}(x, \alpha, \varphi) = \eta \hat{u}. \quad (38)$$

При выполнении (34) условие (38) переходит в

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho}(x, \alpha, \varphi) = \tilde{\eta} \hat{u} \quad (39)$$

и, следовательно, переменные разделяются.

Представим полное поле в виде

$$\hat{u} = \hat{u}^{\text{sc}} + \hat{u}^{\text{in}}, \quad \hat{u}^{\text{in}} = \Xi(x, \rho)$$

Разделяя переменные в (37), получим следующее представление для рассеянного поля:

$$\hat{u}^{\text{sc}} = \int C(\lambda) H_0^1(\sqrt{\lambda} \rho) \exp\left(i \frac{\lambda}{2kx}\right) d\lambda, \quad (40)$$

где H_0^1 — функция Ханкеля 1-го рода, а $C(\lambda)$ и контур интегрирования подлежат определению. Для определения $C(\lambda)$ подставим (40) в (38), и воспользуемся известным соотношением из теории Бесселевых функций [17]:

$$kx \exp\left\{\frac{-ikx\rho^2}{2}\right\} = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{i\lambda}{2kx}\right\} J_0(\sqrt{\lambda} \rho) d\lambda \quad (41)$$

и получим:

$$C(\lambda) = \frac{i}{2} \frac{\eta J_0(\sqrt{\lambda} \alpha) - J_0(\sqrt{\lambda} \alpha) \sqrt{\lambda}}{\eta H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} \alpha) - \dot{H}_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} \alpha) \sqrt{\lambda}}, \quad (42)$$

где были введены следующие обозначения:

$$\frac{dJ_0(\sqrt{\lambda}\rho)}{d(\sqrt{\lambda}\rho)} \equiv J_0(\sqrt{\lambda}\rho), \frac{dH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)}{d(\sqrt{\lambda}\rho)} \equiv \dot{H}_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho) \quad (43)$$

Таким образом, рассеянное поле $u^{\text{sc}}(x, r)$ дается следующим выражением:

$$\hat{u}^{\text{sc}} = \frac{i}{2kx} \exp\left(\frac{ik\rho^2 x}{2}\right) \int_0^\infty \frac{\eta J_0(\sqrt{\lambda}\alpha) - J_0(\sqrt{\lambda}\alpha)}{\eta H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\alpha) - \dot{H}_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\alpha)} H_0^1(\sqrt{\lambda}\rho) \exp\left(i\frac{\lambda}{2kx}\right) d\lambda. \quad (44)$$

Данный ответ можно получить и непосредственно из (32). Действительно, интегральное уравнение в данном случае сводится к уравнению с разностным ядром при помощи замены $x \rightarrow 1/\tau$. Решение, соответственно, строится с помощью интегрального преобразования Фурье. Аналогичные выкладки были проделаны авторами в [10].

Стоит заметить, что импеданс в данном случае достигает больших значений при малых x и, следовательно, условие (13) нарушается вблизи носика. Таким образом, формула (44) является только модельным решением для параболического уравнения. Ниже формула (44) будет использована для верификации метода численного интегрирования уравнения (32).

Также стоит отметить, что аналогичный случай разделяющихся переменных для уравнения Гельмгольца рассмотрен в [18].

Численное решение уравнения (32)

Случай переменного импеданса (34)

При малых x граничные условия в уравнении (32) близки к идеальным условиям Дирихле. Можно показать, что граничное интегральное уравнение для задачи Дирихле является уравнением Вольтерра 1-го рода, а такое уравнение, как известно, не может быть решено методом итераций. Следовательно, метод итераций не может быть применен и к уравнению (32).

Будем решать (32), заменяя интеграл в правой части его дискретным аналогом и сводя интегральное уравнение к системе линейных уравнений. А именно, будем искать решение, аппроксимируя U кусочно-линейными функциями [19]:

$$N_i(x) = \begin{cases} 0 & x_{i-1} > x, \\ (x - x_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}) & x_i > x > x_{i-1}, \\ (x_{i+1} - x) / (x_{i+1} - x_i) & x_{i+1} > x > x_i, \\ 0 & x > x_{i+1}. \end{cases} \quad (45)$$

Индекс i пробегает значения от 1 до M , где M — число базисных функций. Поле U ищется в виде:

$$U(x) \approx \sum_{i=1}^M U_i N_i(x), \quad (46)$$

где U_i — неизвестные числа подлежащие определению. Подставляя (46) в (32), получим следующую систему линейных уравнений:

$$U_i = \sum_{j=1}^M K_{ij} U_j + 2, \text{ где } K_{ij} = \int_0^{x_i} K_0(x_i, x) N_j(x) dx. \quad (47)$$

Для корректного вычисления матричных элементов K_{ij} необходимо учитывать поведение ядра $K_0(x_*, x)$ вблизи особой точки $x_* = x$. Используя асимптотические формулы для функций Бесселя большого аргумента, можно показать, что ядро имеет особенности двух типов. Первая особенность имеет осциллирующий характер:

$$K_0^a(x_*, x) \sim \sqrt{\frac{xx_*}{(x_* - x)^3}} \left(1 + \frac{i(x - x_*)}{8k\alpha^2 xx_*} \right) \exp \left\{ \frac{ik\alpha^2}{2} \frac{(x_* + x)^2}{x_* - x} \right\} \quad (48)$$

Вторая особенность является интегрируемой:

$$K_0^b(x_*, x) \sim \sqrt{\frac{1}{xx_*(x_* - x)}} \exp \left\{ \frac{ik\alpha^2}{2} (x_* - x) \right\}. \quad (49)$$

Для вычисления интеграла от $K_0^a(x_*, x)$ контур интегрирования деформировался в верхнюю полуплоскость. Для вычисления $K_0^b(x_*, x)$ применялся метод вычитания сингулярности [20]. После регуляризации матричные элементы K_{ij} вычислялись с помощью метода трапеций. На Рис. 3 представлен результат решения системы (47) и приведено точное решение (44).

Случай постоянного импеданса

При постоянном импедансе уравнение (32) может быть решено методом итераций. А именно, будем решать следующую итерационную задачу:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(x), \quad (50)$$

$$U^{(0)}(x) = 2U^{\text{in}}(x) = 2, \quad (51)$$

$$U^{(n+1)}(x_*) = \int_0^{x_*} K_0(x_*, x) U^{(n)}(x) dx, \quad n > 0. \quad (52)$$

Результат итерационного решения приведен на Рис. 4. Как можно видеть из графиков, для достижения приемлемой точности достаточно совершить 10-15 итераций.

ПРЯМОЙ ДИФРАКЦИОННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ НА ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОМ КОНУСЕ

Для случая идеально жесткого конуса, т. е. при $\eta = 0$, уравнение (26) было проверено экспериментально. Узкий (угол при вершине $2\alpha = 5.5$ градусов) цельный дюралюминиевый конус круглого сечения длиной 1 метр был подвешен в воздухе. Маленький (характерный размер около 1 см) микрофон был помещен на его поверхности. Конус облучался при помощи точечного по сравнению с длиной волны источника (использовался арматурный источник Knowles RAB-32257 с характерным размером около 1 см) с разных сторон так, чтобы микрофон попадал в освещенную источником или затененную конусом область (Рис. 5)

Эксперимент проводился при помощи метода М-последовательности: конус облучался псевдослучайным сигналом с частотами 1 кГц – 10 кГц, и из корреляции между псевдослучайным сигналом и выходным сигналом с микрофона вычислялся импульсный отклик системы [21]. После накладывания маски во временной области при помощи преобразования Фурье вычислялся частотный отклик.

Численное решение уравнения (24) при неосевом падении

После аппроксимации поля на поверхности U кусочно-линейными функциями (45), оно представляется в виде:

$$U(x, \varphi) \approx \sum_{i=1}^M U_i(\varphi) N_i(x), \quad (53)$$

где $U_i(\varphi)$ — неизвестные искомые функции, имеющие угловую зависимость. Подставив (53) в (26), получим систему интегральных уравнений:

$$U_i(\varphi_*) = \sum_{j=1}^M \int_0^{2\pi} K_{ij}(\varphi_*, \varphi) U_j(\varphi) d\varphi + 2U_i^{\text{in}}(\varphi_*), \quad (54)$$

где индекс $i = 1, \dots, M$,

$$U_i^{\text{in}}(\varphi_*) = U^{\text{in}}(x_i, \varphi_*), \quad (55)$$

$$K_{ij}(\varphi_*, \varphi) = \int_0^{x_j} K(x_i, \varphi_*, x, \varphi) N_j(x) dx. \quad (56)$$

Подынтегральное выражение в (54) осциллирует около точки $x = x_i$, что может вызвать численную ошибку. Как и в случае вычисления интеграла от (46), сместим контур интегрирования в верхнюю полуплоскость так, чтобы ядро K экспоненциально спадало. Затем дискретизируем систему (52) конечными разностями и решим ее методом итераций.

Результаты эксперимента и сравнение с решением (54)

Осевое падение

В случае осевого падения ($r_s = 0$) дифрагированное поле практически отсутствовало. Поле, измеренное на поверхности конуса, было близко к полю, измеренному на аналогичном расстоянии от источника в отсутствие конуса. Этот результат можно качественно объяснить с помощью метода зон Френеля для заданного источника и приемника [22]. Дифракция предполагается значительной, если препятствие покрывается несколькими зонами Френеля по отношению к координатам источника и приемника. Оценим разность прямого пути от источника к приемнику и пути луча, дифрагированного на конусе (Рис. 6):

$$L_1 - L_0 = \Delta l(1 - \cos \alpha) \approx \Delta l \alpha^2 / 2. \quad (57)$$

Размер первой зоны Френеля $D/$ можно найти, приравняв разность путей к половине длины волны:

$$\Delta l = \lambda / \alpha^2. \quad (58)$$

В эксперименте использовались частоты 1-10 кГц. Соответственно, размер зоны Френеля будет минимален на высоких частотах. Для конуса, исследуемого в эксперименте с углом α равным 2.75 градуса, минимальное значение величины Δl может быть оценено как $(330/10^4)/(2.75 * \pi / 180)^2 \approx 14$, что в 14 раз больше длины конуса. Следовательно, при осевом падении на конусе укладывается меньше одной зоны Френеля. Иными словами, при осевом падении данный конус представляет собой препятствие малых размеров, слабо возмущающее волновое поле.

Отметим, что аналогичный результат можно получить, непосредственно решая уравнение (32).

Неосевое падение

Используя оценку, аналогичную (58), можно показать, что дифракционный процесс становится более заметным, когда источник смещается с оси конуса. В данном разделе предоставляется экспериментальное подтверждение этому факту. Результаты

эксперимента для шести положений источника $y_s = \pm 0.5, \pm 0.3, \pm 0.1$ м, $x_s = -1$ м в сравнении с численным решением уравнения (54) показаны на Рис. 7, 8, 9. Микрофон был размещен на поверхности конуса в точке с продольной координатой $x = 0.8$ м, как показано на Рис. 5. На графиках представлены модули величины $|U/U^{\text{in}}|$, чтобы исключить геометрическое затухание поля.

Из эксперимента можно сделать следующие выводы: 1) модуль поля в освещенной части конуса ($y_s < 0$) больше, чем в теневой области ($y_s > 0$); 2) Величина $|U/U^{\text{in}}|$ стремится к 2 в освещенной зоне с ростом частоты (это соответствует случаю отражения от абсолютно жесткой стенки) и стремится к нулю в тени.

Расхождения в теории и эксперименте авторы связывают с ошибками измерения расстояний, электрическими шумами и несовершенством источника и микрофона. Также отметим, что точность параболического приближения уменьшается с ростом y , поскольку дифракционный процесс перестает быть приосевым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе с помощью метода параболического уравнения была рассмотрена дифракция на вытянутом теле вращения с импедансными граничными условиями в случае приосевого падения. С помощью теоремы Грина выведено граничное интегральное уравнение типа Вольтерра. Для случая осевого падения на конус с переменным импедансом (34) строится точное решение данного уравнения. Для случая постоянного импеданса интегральное уравнение решается численно с помощью метода итераций.

Полученные результаты подтверждается экспериментально для случая дифракции на идеальном жестком конусе с помощью прямого акустического дифракционного эксперимента с использованием метода М-последовательности.

Работа поддержана грантом РНФ 14-22-00042.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов И.В. Дифракция на сильно вытянутом теле вращения // Акустический журнал, 2011, т. 57, № 2, с. 147-152 (2011).
2. Andronov I.V., Bouche D. Diffraction by a narrow circular cone as by a strongly elongated body // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 185, Issue 4, pp. 517-522 (2012).
3. Andronov I.V., Bouche D., Duruflé M. High-frequency diffraction of a plane electromagnetic wave by an elongated spheroid // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 60 (11), pp. 5286-5295 (2012).
4. Kirpichnikova N.Y., Popov M.M. Leontovich-Fick parabolic equation method in the problems of short-wave diffraction by prolate bodies // J. Math. Sci. (N.Y.) Vol. 194, №1, pp. 30-43 (2013).
5. Попов М.М., Кирпичникова Н.Я. О проблемах применения параболического уравнения к дифракции на вытянутых телах // Акустический журнал, т. 60, № 4, с. 339-346 (2014).
6. Engineer J.C., King J.R., Tew R.H. Diffraction by slender bodies // European Journal of Applied Mathematics. Vol. 9, pp. 129-158 (1998).
7. Smyshlyaev V.P. Diffraction by Conical Surfaces at High Frequencies // Wave Motion 12 (4), pp. 329-339 (1990).
8. Felsen L.B. Plane wave scattering by small angle cones // IRE Trans. Antennas Propagat. 50, pp. 121-129 (1957).
9. Шанин А.В. Асимптотики волнового поля при дифракции на конусе и дифракционный ряд на сфере // Записки научных семинаров ПОМИ, 393, стр. 234-258 (2011).
10. Shanin A.V., Korolkov A.I. Diffraction by an elongated body of revolution. A boundary integral equation based on the parabolic equation // Wave motion (2018), <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.10.006>
11. Лялинов М.А. О дифракции плоской волны на импедансном конусе // Зап. научн. сем. ПОМИ, 297, стр 191-215 (2003).
12. Bernard J.-M. L. and Lyalinov M.A. Electromagnetic scattering by a Smooth Convex Impedance Cone // IMA J. Appl. Math. 69, pp. 285-333 (2004).
13. Antipov Y.A. Diffraction of a plane wave by a circular cone with an impedance boundary condition // SIAM J. Appl. Math. Vol. 62, No. 4, pp. 1122-1152 (2003).

14. *Lyalinov M.A.* The far field asymptotics in the problem of diffraction of an acoustic plane wave by an impedance cone // Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 16 (2), pp. 277-286 (2009).
15. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн // М.: Совесткое радио (1970)
16. *Корольков А.И., Шанин А.В.* Дифракция высокочастотной волны на импедансном отрезке при скользящем падении // Акустический журнал, т. 62, № 3, с. 648-656 (2016)
17. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.: Физматгиз, 1963.
18. *Felsen L.B.*, Electromagnetic properties of wedge and cone surfaces with linearly varying surface impedance // IEEE Trans. Antennas Propag., Vol. 7 (2), pp. 231-243
19. *Зенкевич О.С.* Метод конечных элементов в технике // М.: Мир (1975).
20. *Kantorovich L.V., Krylov V.I.* Approximate methods of higher analysis // Interscience publishers, Inc., New York, 1958.
21. *Шанин А.В., Валяев В.Ю.* Метод последовательностей максимальной длины в дифракционном эксперименте // Акустический журнал, т. 57, № 3, с. 420-425 (2011).
22. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред, М.: Наука (1980).

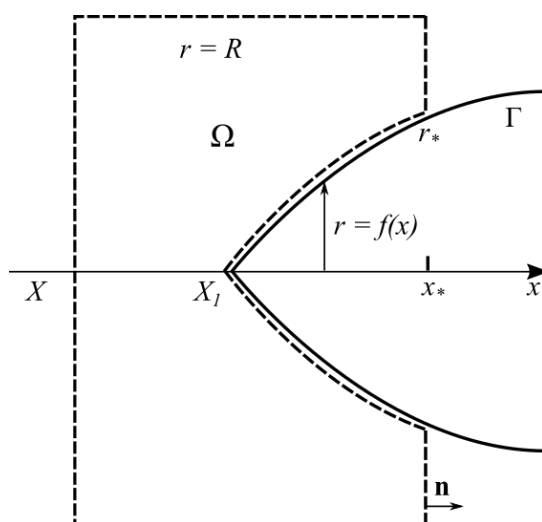


Рис. 1. Сечение области для теоремы Грина.

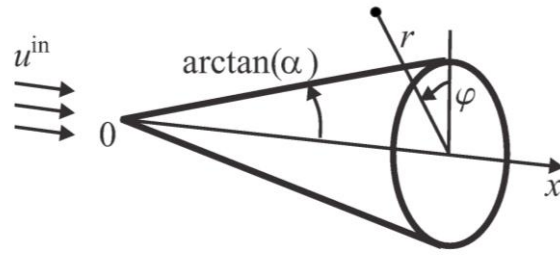


Рис. 2. Геометрия задачи дифракции на конусе.

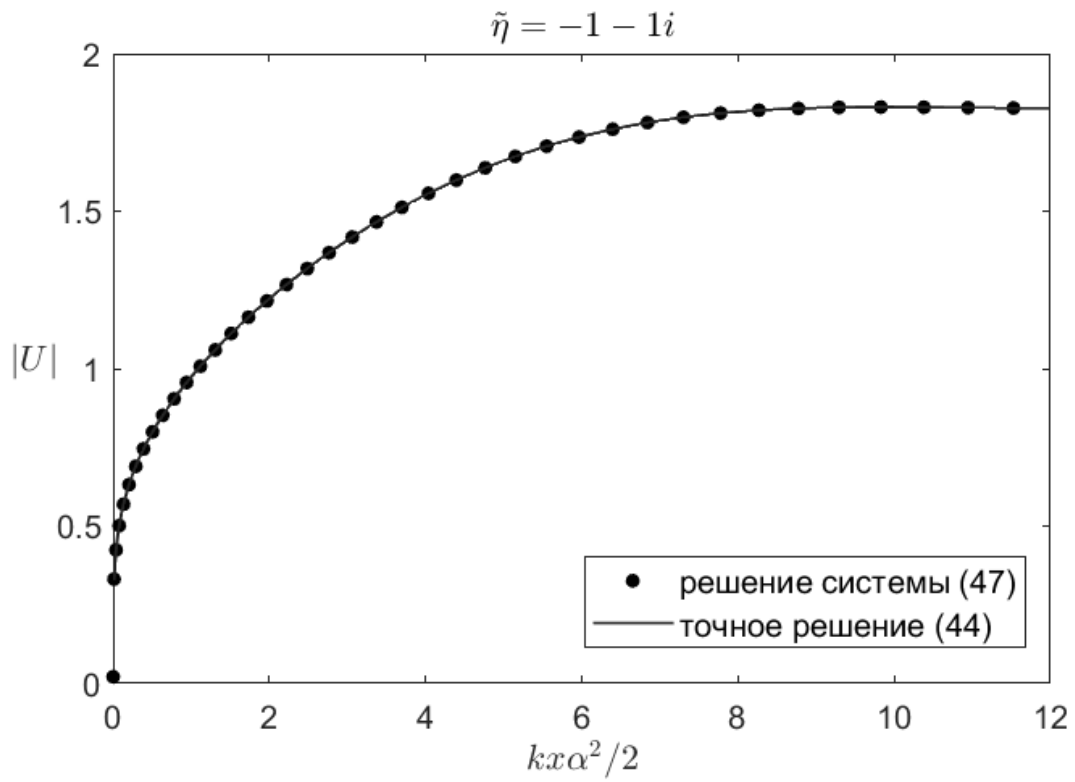


Рис. 3. Численное решение для случая переменного импеданса.

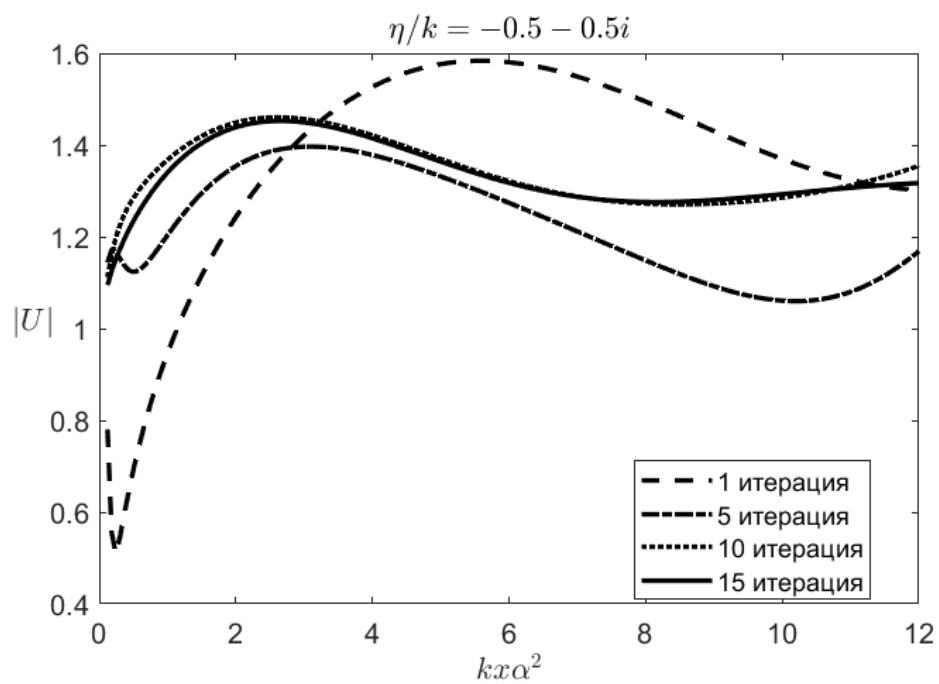


Рис. 4. Итерационное решение для случая постоянного импеданса.

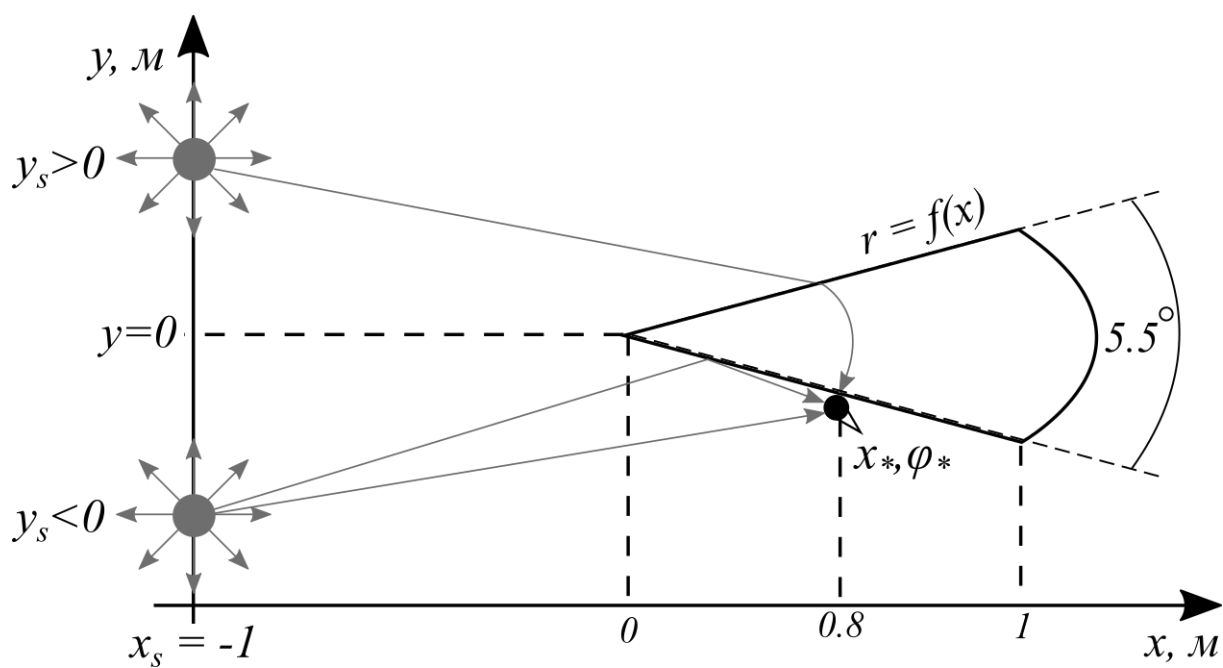


Рис. 5. Схема эксперимента.

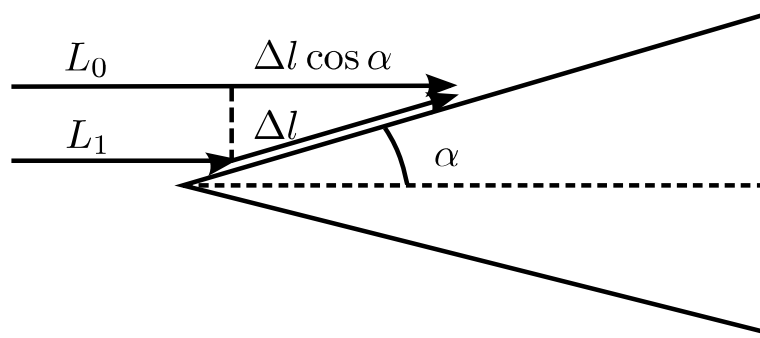


Рис. 6. Иллюстрация к оценке размера зоны Френеля.

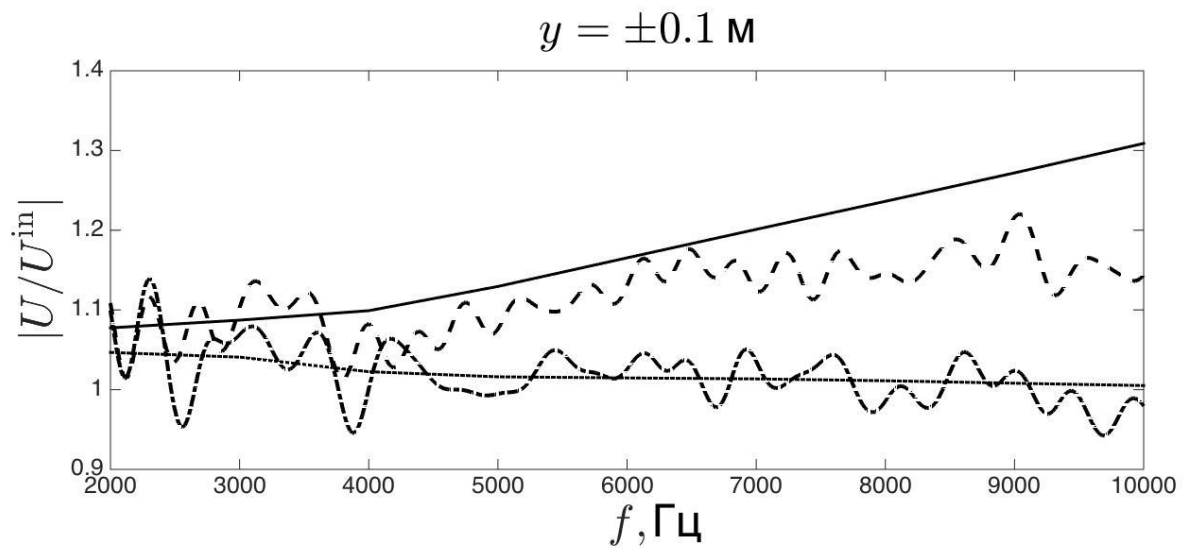


Рис. 7. Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для $y = \pm 0.1 \text{ м}$: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для $y = -0.1 \text{ м}$, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для $y = 0.1 \text{ м}$.

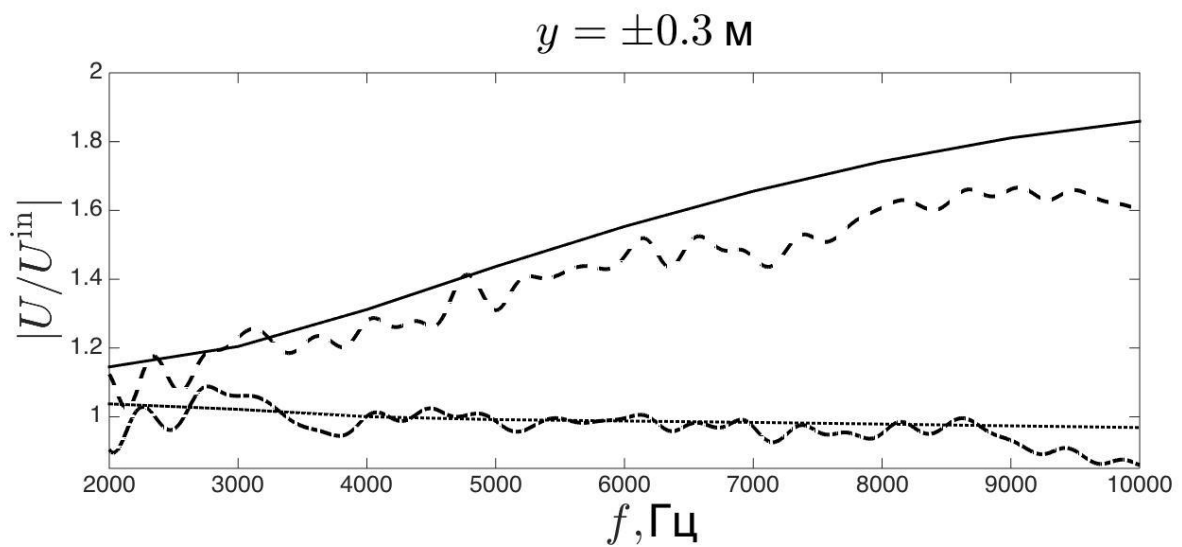


Рис. 8. Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для $y = \pm 0.3$ м: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для $y = -0.3$ м, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для $y = 0.3$ м.

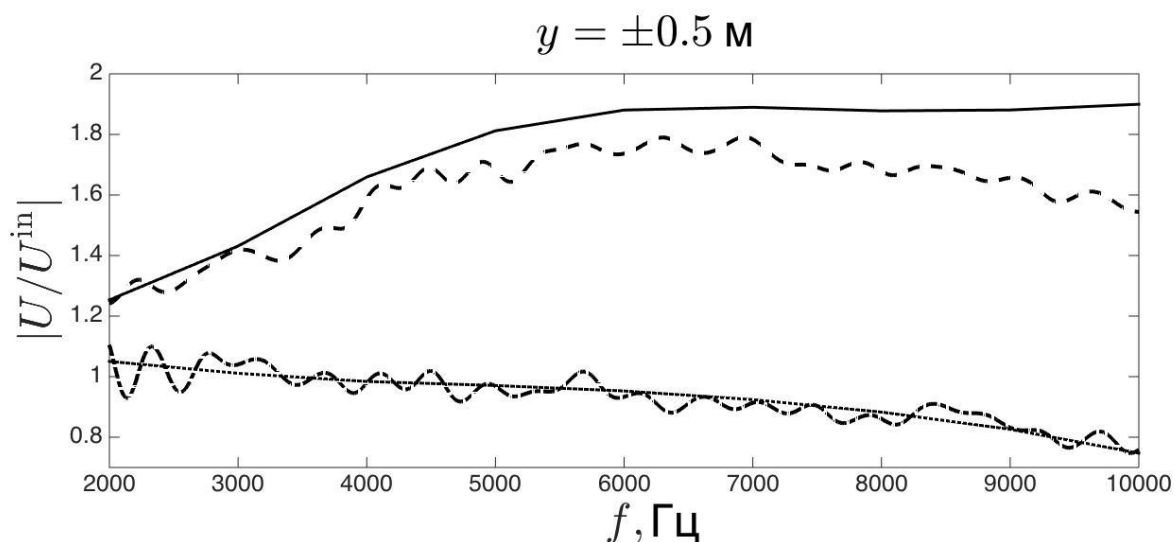


Рис. 9. Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для $y = \pm 0.5$ м: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для $y = -0.5$ м, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для $y = 0.5$ м.