

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет

Белоус Артем Андреевич

**Метод М-последовательности в дифракционном  
акустическом эксперименте**

Специальность 01.04.06 —  
«акустика»

Научно-квалификационная работа

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., доцент  
Шанин Андрей Владимирович

Москва — 2018

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	6
<b>Глава 1. Обзор литературы</b> . . . . .	9
1.1 Применение MLS-эксперимента . . . . .	9
1.2 Виды и методы испытания звукопоглощающих материалов . . . . .	9
1.3 Прохождение звука через поток, теория Блохинцева . . . . .	9
1.4 Дифракция на конусе . . . . .	9
<b>Глава 2. Применение метода М-последовательности к экспериментальному исследованию дифракционных задач</b> . . . . .	10
2.1 Последовательность максимальной длины . . . . .	10
2.2 Схема эксперимента . . . . .	11
2.3 Оборудование и параметры эксперимента . . . . .	12
2.4 Выделение импульсного отклика, связанного только с дифракционным процессом . . . . .	13
2.5 Измерение производной объемной скорости источника . . . . .	15
2.6 Фильтрация . . . . .	18
2.7 Измерения в пустом полупространстве . . . . .	19
<b>Глава 3. Экспериментальная оценка частотной зависимости коэффициента отражения звукопоглощающего материала при наклонном падении</b> . . . . .	22
3.1 Введение . . . . .	22
3.2 Постановка задачи . . . . .	25
3.3 Описание поля сферической волны. Интеграл Фурье-Бесселя . . . . .	26
3.4 Отыскание коэффициента отражения с помощью обращения интеграла Фурье-Бесселя . . . . .	27
3.5 Описание эксперимента . . . . .	30
3.6 Экспериментальные результаты . . . . .	32

<b>Глава 4. Измерение импульсного отклика акустического</b>	
<b>MLS-сигнала в среде с потоком . . . . .</b>	<b>36</b>
4.1 Введение . . . . .	36
4.2 Описание эксперимента . . . . .	37
4.3 Теоретическое описание . . . . .	39
4.3.1 Расчет сноса звукового поля . . . . .	39
4.3.2 Расчет фокусировки звукового поля . . . . .	42
4.4 Экспериментальные результаты и моделирование . . . . .	44
4.5 Шумы и время накопления . . . . .	47
4.6 Заключение . . . . .	49
<b>Глава 5. Дифракция на вытянутом теле вращения с</b>	
<b>импедансными границами. Метод граничного</b>	
<b>интегрального параболического уравнения . . . . .</b>	<b>51</b>
5.1 Введение . . . . .	51
5.2 Постановка задачи . . . . .	52
5.2.1 Постановка задачи для уравнения Гельмгольца . . . . .	52
5.2.2 Постановка задачи для параболического уравнения . . . . .	54
5.3 Вывод граничного интегрального уравнения . . . . .	56
5.3.1 Теорема Грина для параболического уравнения . . . . .	56
5.3.2 Граничное интегральное уравнения для полного поля . . . . .	57
5.3.3 Граничное интегральное уравнение для угловых мод . . . . .	59
5.4 Дифракция на импедансном конусе при осевом падении . . . . .	60
5.4.1 Граничное интегральное уравнение для конической	
задачи при осевом падении . . . . .	60
5.4.2 Случай разделяющихся переменных . . . . .	61
5.4.3 Численное решение уравнения (5.38) . . . . .	63
5.5 Прямой дифракционный эксперимент на идеально жестком конусе	
5.5.1 Численное решение уравнения (5.30) . . . . .	67
5.5.2 Результаты эксперимента и сравнение с решением (54) . . . . .	68
5.6 Заключение . . . . .	70
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>72</b>

Список рисунков . . . . . 73

Список таблиц . . . . . 76

## Введение

**Цели и задачи работы.** В данной работе рассмотрены некоторые эксперименты с применением метода М-последовательности измерения импульсного отклика трассы распространения акустического сигнала. Среди рассмотренных задач измерение угловой зависимости коэффициента отражения акустического сигнала от поглощающего материала (глава 2), изучение прохождения акустического сигнала через струю (глава 3), а также экранирование акустического сигнала поверхностью узкого конуса (глава 4).

Рассматриваемые задачи объединены методом М-последовательности (Maximum Length Sequence или MLS), применяемым при их экспериментальном решении. Этот метод не является новым и ранее широко использовался в решении задач архитектурной акустики, где псевдошумовой сигнал может заменять звуковой импульс при измерении времени реверберации, и в радиолокации, где широкополосный лоцирующий сигнал позволяет уменьшить чувствительность к внешнему паразитному шуму. В данной работе метод М-последовательности адаптируется и применяется для разноплановых задач теории дифракции, и подтверждается его эффективность в задачах, требующих от измеренных сигналов хорошего соотношения сигнал/шум.

Кратко сформулируем основные цели работы:

1. Разработать метод измерения угловой зависимости коэффициента поглощения звукопоглощающего материала, работающий при помощи обращения интеграла Фурье-Бесселя.
2. С помощью метода М-последовательности исследовать влияние воздушной струи на проходящий через нее акустический сигнал,.
3. Обобщить результаты работы [Shanin2011] на случай конуса с импедансной поверхностью и провести эксперимент, подтверждающий параболическую теорию.

**Научная новизна.** Метод М-последовательности ранее применялся к дифракционному акустическому эксперименту (например, [ValeraPhdthesis] в задаче дифракции на трехгранном конусе).

**Достоверность.** Достоверность полученных результатов обеспечивается сравнением результата эксперимента с теоретическими результатами (теорией пористых сред Био в случае отражения от плоского слоя, теорией Блохинцева

акустических волн в движущихся средах в случае прохождения сигнала через поток, теорией параболического уравнения и теорией Смышляева в случае дифракции на конусе).

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Четвертая открытая всероссийская конференция по аэроакустике, Звенигород, Россия, 29 сентября - 1 ноября 2015.
2. Акустика среды обитания, Москва, Россия, 13 мая 2016.
3. XV Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» имени А.П. Сухорукова («Волны-2016»), Красновидово, Московская область, Россия, 5-10 июня 2016.
4. Четвертый международный семинар «Вычислительный эксперимент в аэроакустике», Светлогорск, Россия, 21 сентября - 24 ноября 2016.
5. Дни дифракции 2017, Санкт-Петербург, Россия, 19-23 июня 2017.
6. Дни дифракции 2018, Санкт-Петербург, Россия, 4-8 июня 2018.
7. VII Всероссийская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике», Светлогорск, Россия, 17 - 22 сентября 2018.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором или при его непосредственном участии.

Автор принимал активное участие в НИР, проводимых на кафедре акустики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова:

1. Исследования новых абсорбционных материалов (24 декабря 2015 - 24 декабря 2016);
2. Разработка методики высокоточных дифракционных экспериментов (1 июня 2015 - 15 октября 2015);
3. Развитие новых экспериментальных и теоретических методов исследования звуковых полей и применение этих методов к задачам архитектурной акустики (1 января 2014 - 31 декабря 2016);

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них: 2 статьи в рецензируемых журналах (из них 1 только принята

к публикации), 3 статьи в трудах конференций (из них 1 только принята к публикации), 4 в тезисах докладов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, заключения, приложения и библиографии. Общий объем диссертации 80 страниц, включающих 30 рисунков. Библиография включает 70 наименований на 5 страницах.

## **Глава 1. Обзор литературы**

### **1.1 Применение MLS-эксперимента**

MLS-эксперимент широко использовался в строительной акустике и в радиолокации. MLS - это альтернатива ЛЧМ эксперименту и импульсным источникам.

### **1.2 Виды и методы испытания звукопоглощающих материалов**

Поглощающие материалы. Измерение затухания от углов (Канев). Сравнение существующих методов (импедансная труба и метод диффузного поля с описанным в данной работе).

### **1.3 Прохождение звука через поток, теория Блохинцева**

Прохождение звука через поток, без учета темы генерации звука потоком. Звук в движущихся средах - наука, где главный человек - Блохинцев. Основные явления это фокусировка и снос, здесь будут описаны проведенные ранее эксперименты в этой области с наблюдением этих явлений, и где они были предсказаны.

### **1.4 Дифракция на конусе**

Конус - это каноническая классическая задача, здесь будет обзор подходов к ее решению.



## Глава 2. Применение метода М-последовательности к экспериментальному исследованию дифракционных задач

В данной главе описывается применение метода MLS к акустическому дифракционному эксперименту. Предлагается метод вычисления части импульсного отклика, не относящейся к излучающему и приемному трактам, а относящейся исключительно к дифракционному процессу. Используется измерение объемной скорости с помощью метода двух микрофонов, открытый конец источника моделируется с помощью поправки Вайнштейна [Weinstein1966]. В последующих главах данная методика применяется для различных акустических дифракционных экспериментов.

### 2.1 Последовательность максимальной длины

Последовательность максимальной длины (Maximum Length Sequence, MLS) представляет собой псевдослучайную периодическую двоичную последовательность, автокорреляционная функция которой очень близка к периодически повторяющемуся единичному импульсу. Последовательность  $\{S_k = \pm 1\}$  порядка  $M$  имеет период  $L = 2^M - 1$ , а ее автокорреляционная функция  $\{A_k\}$  имеет вид:

$$A_k = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L S_n S_{n+k-1} = \begin{cases} 1, & k = 1; \\ -1/L, & k = 2 \dots L. \end{cases} \quad (2.1)$$

Благодаря этому свойству MLS, ее можно использовать для измерения импульсного отклика линейных стационарных систем. Если подать на вход системы сигнал в виде М-последовательности и вычислить взаимнокорреляционную функцию выходного сигнала с М-последовательностью, получится сигнал, представляющий собой отклик системы на автокорреляционную функцию М-последовательности - практически отклик на дельта-функцию, то есть сигнал, близкий к импульсному отклику системы.

Действительно, пусть  $\{R_k\}$  — отклик системы на М-последовательность  $\{S_k\}$ , а  $\{G_k\}$  — импульсный отклик системы. Тогда  $\{R_k\}$  есть свертка  $\{S_k\}$  и  $\{G_k\}$ :

$$R_k = \sum_{n=1}^L S_{k-n} G_n, \quad (2.2)$$

а взаимная корреляция  $\{H_k\}$  последовательностей  $\{R_k\}$  и  $\{S_k\}$  есть отклик системы на  $\{A_k\}$ :

$$H_k = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L S_m R_{k+m} = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L S_m \sum_{n=1}^L S_{k+m-n} G_n = \sum_{n=1}^L A_{k-n} G_n \approx G_k. \quad (2.3)$$

## 2.2 Схема эксперимента

Общая схема эксперимента представлена на (Рис. 2.1). На вход системы подается М-последовательность  $\{S_k^{\text{in}}\}$ . Этот сигнал через ЦАП и усилитель подается на источник акустических волн. Микрофон располагается вблизи рассеивателя или на его поверхности. Сигнал с микрофона усиливается и преобразуется в цифровой вид. После этого вычисляется взаимнокорреляционная функция  $\{H_k^{\text{in}}\}$  выходного и входного сигналов:

$$H_k = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L S_n^{\text{in}} S_{k+n}^{\text{out}}. \quad (2.4)$$

Следует отметить, что для такой постановки эксперимента не требуется использовать безэховые помещения, поскольку полезный сигнал от рассеивателя появляется в импульсном отклике системы раньше помех, приходящих от акустического окружения. Для надежного разделения полезного и паразитного сигналов следует располагать рассеиватель на достаточном удалении от пола и прочих предметов, а затем применять окно во временной области, отсекая паразитные сигналы. Сигнал  $\{H_k\}$  — отклик системы на  $\{A_k\}$ . Он близок к импульсному отклику всей системы и включает в себя, помимо чисто волновой части, еще и отклики источника и электрических трактов. Вопрос выделения из него полезной части рассматривается ниже.

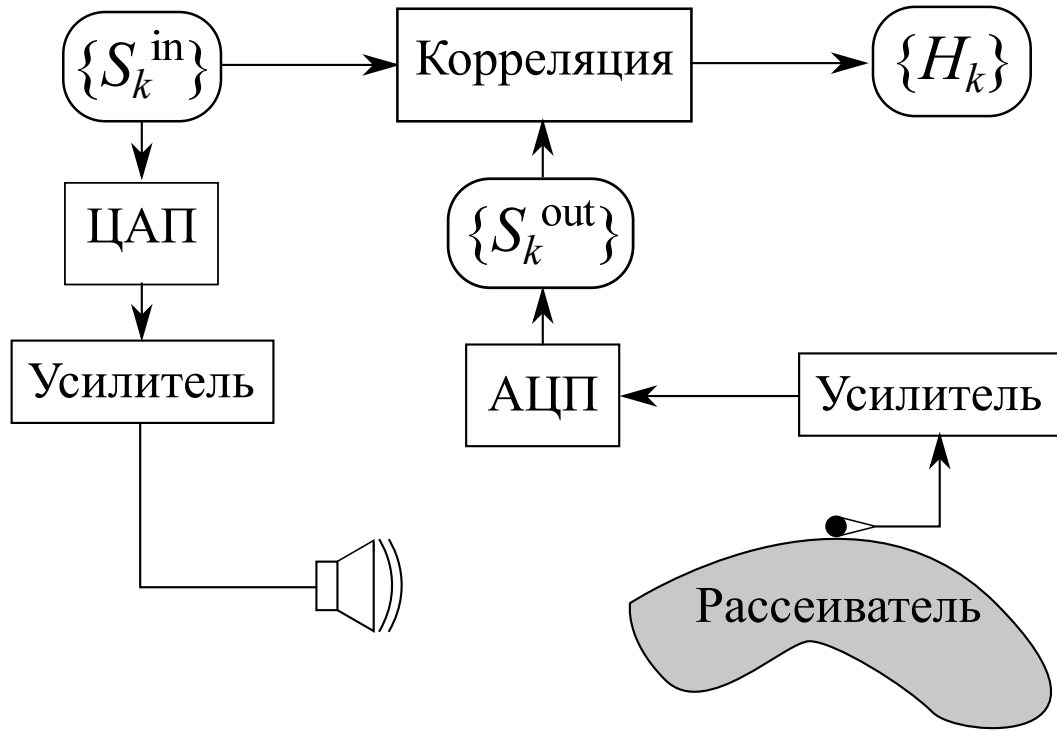


Рисунок 2.1 — Схема эксперимента.

### 2.3 Оборудование и параметры эксперимента

В данной работе в качестве входного сигнала использовалась  $M$ -последовательность порядка  $M = 19$ . Частота дискретизации ЦАП и АЦП составляла  $F_s = 48000$  Гц. Такие параметры дают длительность входного сигнала  $T = (2^M - 1)/F_s \approx 4$  с. Источником служил Bruel&Kjaer 4295 OmniSource с адаптером, позволяющим измерять объемную скорость источника (4299 Volume Velocity Adaptor). Схема источника с адаптером приведена на (Рис. 2.2).

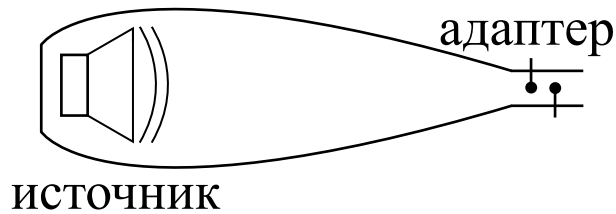


Рисунок 2.2 — Схема источника с адаптером для измерения объемной скорости.

Источник представляет собой электродинамическую головку, помещенную в продолговатый пластиковый корпус с узким отверстием (3,75 см). Такая конструкция позволяет создавать акустическое поле, близкое к полю точечного

монопольного источника. Адаптер представляет собой пластиковую трубку кругового сечения, плотно пригнанную к выходному отверстию источника. Внутри трубки помещены два микрофона, сигналы с которых используются для восстановления объемной скорости источника. Для регистрации рассеянного сигнала использовался Bruel&Kjaer 4957 1/4 inch Array Microphone, характеристики которого близки к характеристикам микрофонов в адаптере.

## 2.4 Выделение импульсного отклика, связанного только с дифракционным процессом

Как уже было сказано, сигнал  $\{H_k\}$  необходимо очистить, выделив импульсный отклик дифракционного процесса. Заметим, что основные помехи вносятся источником звука OmniSource, в котором происходят многочисленные переотражения.

Для простоты будем рассматривать дискретные сигналы  $\{A_k\}$  и  $\{H_k\}$  как непрерывные сигналы  $A(t)$  и  $H(t)$ . При этом будем помнить, что Фурье-образы таких сигналов определены для дискретного набора частот. Введем следующие функции:

1.  $W(t)$  - производная объемной скорости источника по времени при подаче на вход системы сигнала  $A(t)$ .
2.  $H^{\text{prop}}(t)$  - импульсный отклик, описывающий распространение волны от источника до микрофона (именно он нас и интересует), определяемый соотношением

$$p(t) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) H^{\text{prop}}(t - \tau) d\tau, \quad (2.5)$$

где  $p(t)$  - давление в точке наблюдения при подаче на вход системы сигнала  $A(t)$ ,  $\rho_0$  - плотность воздуха.

3.  $H^{\text{recv}}(t)$  - импульсный отклик приемной части (микрофона, усилителя и АЦП), определяемый соотношением

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) H^{\text{recv}}(t - \tau) d\tau \quad (2.6)$$

Нормировочный множитель  $\rho_0/4\pi$  в формуле, определяющей  $H^{\text{prop}}$ , введен из следующих соображений. Хорошо известно, что в свободном пространстве точечный монополярный источник создает давление, пропорциональное производной его объемной скорости по времени:

$$p = \frac{\rho_0}{4\pi R} W(t - R/c), \quad (2.7)$$

где  $R$  - расстояние от источника до точки наблюдения. Таким образом, в этом случае импульсный отклик  $H^{\text{prop}}$  представляет собой дельта-функцию (в дискретном случае — одиночный импульс):

$$H^{\text{prop}} = \frac{\delta(t - R/c)}{R}. \quad (2.8)$$

Амплитуда дельта-функции обратно пропорциональна расстоянию до источника  $R$  и обращается в единицу при  $R = 1$  м, что удобно. Будем обозначать Фурье-образ сигнала  $\zeta(t)$  как  $\zeta_\omega$ . Тогда для наших сигналов будем иметь:

$$p_\omega = W_\omega H_\omega^{\text{prop}}, \quad (2.9)$$

$$H_\omega = p_\omega H_\omega^{\text{recv}}. \quad (2.10)$$

Если удастся измерить производную по времени объемной скорости источника  $W(t)$ , то можно будет восстановить дифракционную часть импульсного отклика:

$$H_\omega^{\text{prop}} = \frac{H_\omega}{W_\omega H_\omega^{\text{recv}}}. \quad (2.11)$$

Заметим, что предложенная процедура выделения части импульсного отклика, связанной только с дифракционным процессом никак не использует преимуществ метода М-последовательностей. Действительно, и  $W_\omega$  и  $H_\omega$  пропорциональны спектру входного сигнала, а значит, при любом достаточно широкополосном входном сигнале (2.11) дает возможность восстановить функцию  $H^{\text{prop}}(t)$ . Тем не менее, использование М-последовательностей позволяет повысить качество восстановления.

Длительность используемого в эксперименте сигнала (4 с) соответствует более чем 1 км пути, проходимого волной. При этом нас интересуют только первые несколько метров импульсного отклика, а вся остальная его часть является

помехой. Чтобы ослабить влияние этой помехи, используем для вычисления Фурье-образов только начальную часть сигналов  $H(t)$  и  $W(t)$ . Длительность этой части следует взять такой, чтобы в нее попала вся существенно ненулевая часть сигнала  $W(t)$ . В описываемых ниже экспериментах использовались первые 50 м сигналов  $H(t)$  и  $W(t)$ , что соответствует примерно 100 переотражениям в корпусе источника.

## 2.5 Измерение производной объемной скорости источника

Как было сказано ранее, для измерения объемной скорости источника может быть применен адаптер с двумя микрофонами. Схема используемого адаптера приведена на (Рис. 2.3).

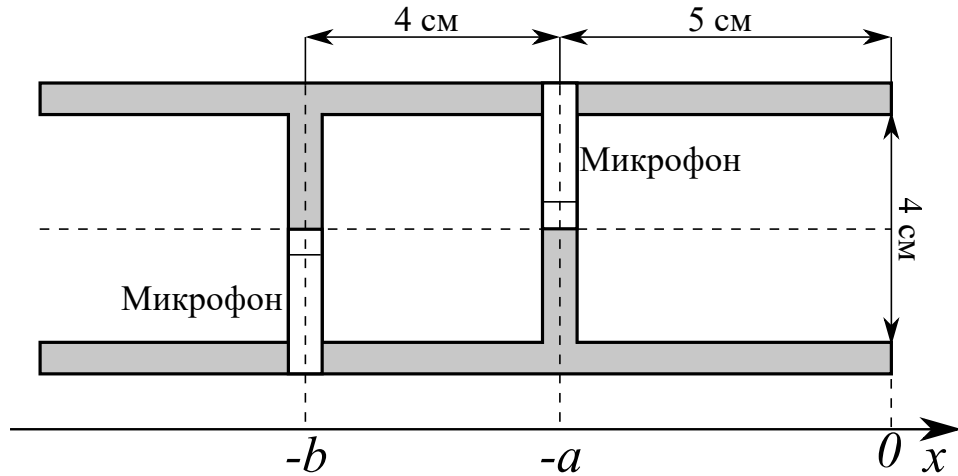


Рисунок 2.3 — Схема адаптера для измерения объемной скорости источника.

Пусть при подаче на вход системы М-последовательности  $\{S_k^{\text{in}}\}$  с микрофонов адаптера после усиления и ЦАП приходят сигналы  $\{S_k^{\text{out}, 1}\}$  и  $\{S_k^{\text{out}, 2}\}$ . Пусть  $\{H_k^{1, 2}\}$  — взаимные корреляции этих сигналов с входным сигналом  $\{S_k^{\text{in}}\}$ . Обозначим через  $p_{1,2}$  начальные части (первые 50 м) сигналов  $H^{1,2}$ .

Для вычисления объемной скорости предположим, что внутри адаптера распространяются только поршневые моды. Обоснованность этого предположения обсуждается ниже. При таком предположении для каждой частоты  $\omega$  давление в трубке может быть представлено в следующем виде:

$$p_\omega(x) = A^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad (2.12)$$

где  $A$  и  $B$  — амплитуды волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлении оси  $x$  соответственно. Здесь предполагается гармоническая зависимость от времени вида  $e^{i\omega t}$ . Измеряются давления  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  в точках  $x = -b$  и  $x = -a$  соответственно. Для их Фурье-образов можно записать:

$$p_{1\omega} = Ae^{ikb} + Be^{-ikb}, \quad (2.13)$$

$$p_{2\omega} = Ae^{ika} + Be^{-ika}, \quad (2.14)$$

откуда:

$$A = \frac{-p_{1\omega}e^{ikb} + p_{2\omega}e^{ika}}{e^{2ika} - e^{2ikb}}, \quad B = \frac{-p_{1\omega}e^{ik(2a+b)} - p_{2\omega}e^{ik(a+2b)}}{e^{2ika} - e^{2ikb}}. \quad (2.15)$$

Пользуясь уравнением Эйлера, для производной колебательной скорости  $v$  получим:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\omega} = \frac{ik}{\rho_0}(Ae^{-ikx} - Be^{ikx}). \quad (2.16)$$

Для производной по времени объемной скорости источника имеем:

$$W_{\omega} = i\omega \frac{\pi r^2}{\rho_0 c}(A - B), \quad (2.17)$$

где  $r$  — радиус трубки адаптера. Полученная формула дает относительно неплохие результаты, однако вносит заметные фазовые искажения. Причиной этих искажений служит то, что трубка не является достаточно тонкой, а значит, ее конец нельзя считать точечным источником. Используя теорию Вайнштейна об излучении волн из открытого конца волновода [Weinstein1966], можно получить формулу, подходящую для данного случая. Для этого в (2.16) надо заменить  $B$  на  $-A$ , то есть

$$W_{\omega} = i\omega \frac{2\pi r^2 A}{\rho_0 c}. \quad (2.18)$$

Вычисленная таким образом объемная скорость будет содержать в себе также АЧХ приемных трактов адаптера. В действительности микрофоны в адаптере близки по своим характеристикам к микрофону, используемому для регистрации поля вблизи рассеивателя, а АЧХ усилителей в приемных трактах

близки к идеальным в интересующем нас диапазоне частот (можно считать, что  $H_{\omega}^{\text{recv}} = 1$ ). Формула (2.11) может быть переписана следующим образом:

$$H_{\omega} = W_{\omega} H_{\omega}^{\text{prop}}. \quad (2.19)$$

Рассмотрим ограничения предлагаемого метода. Очевидной трудностью является то, что формулы имеют смысл только для частот  $f < f_c$ , где граничная частота  $f_c$  определяется расстоянием между микрофонами:  $f_c = c_0/(2(b - a))$ . Это частота, при которой знаменатель обращается в нуль. В нашем случае  $f_c = 8.57$  кГц. Таким образом, все сигналы при обработке должны быть пропущены через ФНЧ.

Другие трудности связаны с модами высших порядков, распространяющимися в трубке адаптера. Эти моды могут влиять на результат двумя способами. Во-первых, они могут излучать звук вовне. Во-вторых, они могут создавать сигнал на микрофонах адаптера, внося ошибки в измерение объемной скорости. Моды высших порядков имеют следующую структуру:

$$p(x, \xi, \varphi) = \exp\{\pm i\gamma x\} \begin{Bmatrix} \sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{Bmatrix} J_n(k_{m,n}\xi), \quad (2.20)$$

где  $(x, \xi, \varphi)$  — цилиндрические координаты с осью, совпадающей с осью трубки адаптера,  $J_n$  — функции Бесселя,  $k_{m,n}$  — корни уравнения  $J'_n(k_{m,n}r) = 0$ , а  $\gamma = \sqrt{\omega^2/c_0^2 - k_{m,n}^2}$ . Если точка наблюдения расположена вблизи оси системы, что соответствует нашему случаю, то, в силу ортогональности, моды высших порядков не будут давать вклада в излучаемое поле. Все моды, кроме поршневой, имеют свои частоты отсечки, что позволяет оценить их постоянные затухания. Моды с номером  $n \neq 0$  не будут влиять на сигналы микрофонов адаптера, поскольку микрофоны расположены на оси трубки,  $J_n(0) = 0$  при  $n \neq 0$ . Поэтому наиболее «опасной» модой будет мода с  $J_0(k_{1,0}\xi)$ . Простой анализ показывает, что частота отсечки этой моды близка к 11.1 кГц. Для частоты сигнала 5 кГц это соответствует чисто мнимому значению  $\gamma = 180i \text{ м}^{-1}$ . При такой постоянной распространения волна быстро затухает. Таким образом, для частот ниже 5 кГц моды высших порядков можно не рассматривать.



## 2.6 Фильтрация

Все представленные ниже дифракционные импульсные отклики подвергались фильтрации. Использовалась комбинация фильтров высоких и низких частот со следующими частотными характеристиками. Для ФНЧ:

$$K_{LPF}(f) = \frac{K_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{th} \left( \frac{|f| - f_0}{\Delta f} \right) \right]; \quad (2.21)$$

Для ФВЧ:

$$K_{HPF}(f) = K_0 - K_{LPF}(f). \quad (2.22)$$

При этом для фильтра низких частот параметры  $f_0$  и  $\Delta f$  имели значения  $f_0 = 4000$  Гц,  $\Delta f = 1000$  Гц, а для фильтра высоких частот  $f_0 = 50$  Гц,  $\Delta f = 10$  Гц. Нормировочный коэффициент  $K_0$  выбирался таким образом, чтобы значение импульсной характеристики результирующего фильтра в нуле было единицей.

Импульсная характеристика фильтра представлена на Рис. 2.4.

## 2.7 Измерения в пустом полупространстве

Простейшим акустическим окружением, легко реализуемым в эксперименте, является пустое полупространство с жесткой границей. Давление в точке наблюдения в этом случае создается прямой полной и волной, отраженной от границы полупространства. Импульсный отклик  $H^{\text{rpor}}$  имеет вид

$$H^{\text{rpor}} = \frac{\delta(t - R/c)}{R} + \frac{\delta(t - \bar{R}/c)}{\bar{R}}, \quad (2.23)$$

где  $R$  и  $\bar{R}$  — расстояния от точки наблюдения до источника и до отражения источника в границе полупространства соответственно.

Для проверки работоспособности методики был проведен эксперимент, схема которого показана на (Рис. 2.5).

Все окружающие предметы были удалены на такое расстояние, чтобы отраженные от них волны приходили на микрофон позже прямой и отраженной

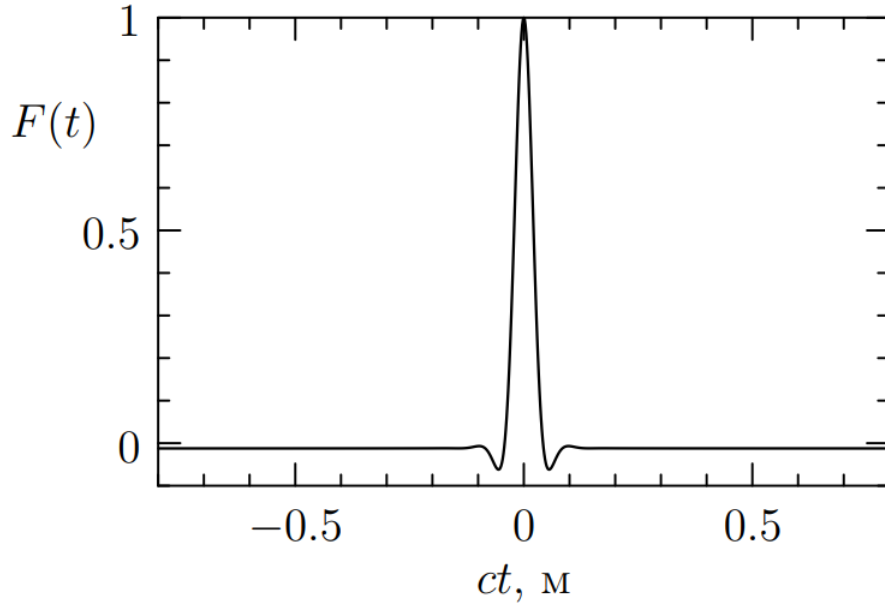


Рисунок 2.4 — Импульсная характеристика используемого фильтра.

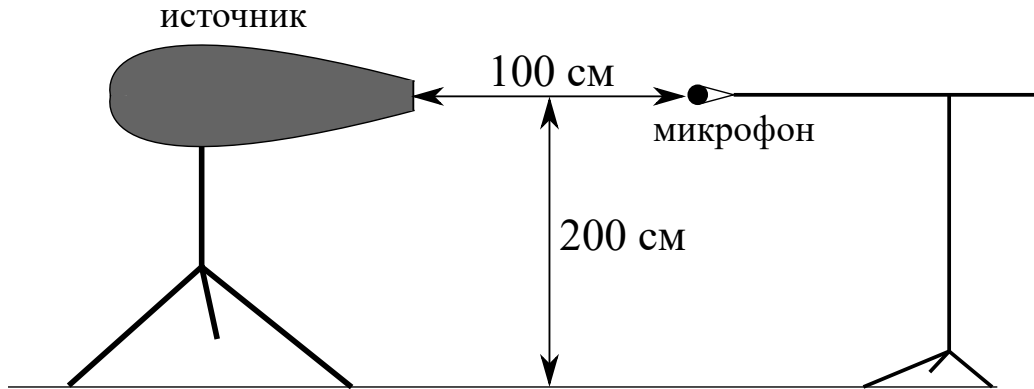


Рисунок 2.5 — Схема измерений в пустом полупространстве.

от пола волн. Указанное на (Рис. 2.5) расположение источника и микрофона соответствует значениям  $R = 1$  м и  $\bar{R} \approx 4.5$  м.

В соответствии с (2.23) в импульсном отклике мы должны увидеть две копии импульсной характеристики использованного фильтра (Рис. 2.4), сдвинутые в положения  $ct = 1$  м и  $ct = 4.5$  м. При этом амплитуда первого пика должна быть равна единице, а второго  $1/4.5 \approx 0.22$ . На (Рис. 2.6) показан наблюдаемый в эксперименте импульсный отклик пустого полупространства.

Хорошо видно, что пики имеют правильные положения и что высота первого пика также верна. Высота второго пика несколько ниже предсказанной теоретически, что, по видимому, объясняется неравномерностью диаграммы направленности использованного источника.

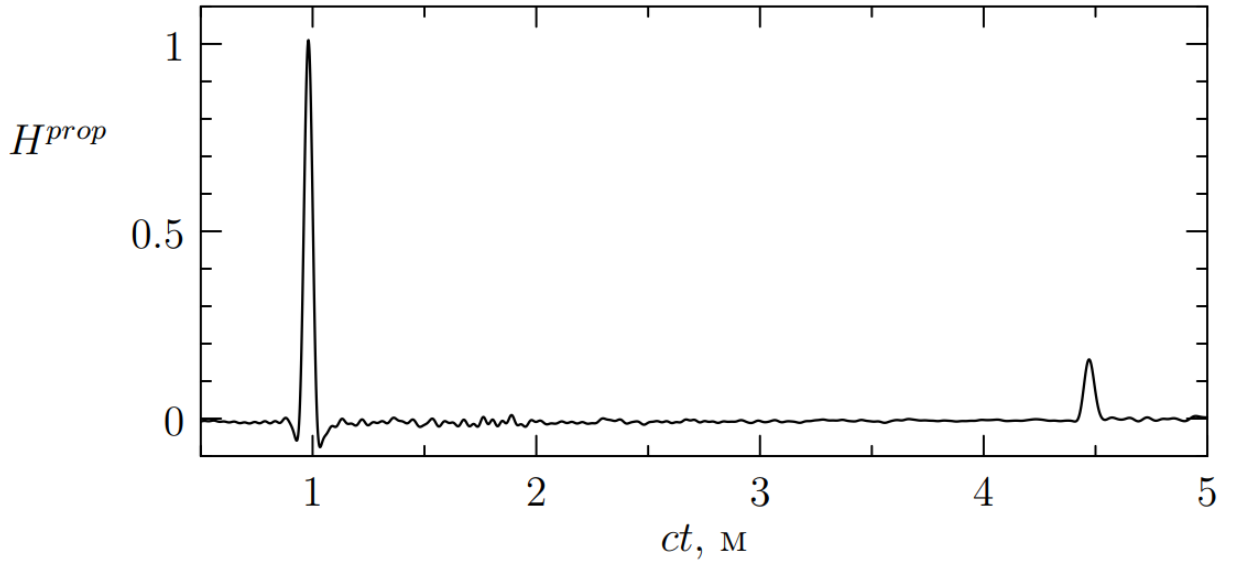


Рисунок 2.6 — Измеренный импульсный отклик пустого полупространства.

Для иллюстрации роли всех этапов обработки сигнала рассмотрим показанный на (Рис. 2.7) импульсный отклик  $H^{\text{prop}}$ , восстановленный без использования вайнштейновской поправки (2.17) и импульсный отклик всей системы  $H$  (Рис. 2.8).

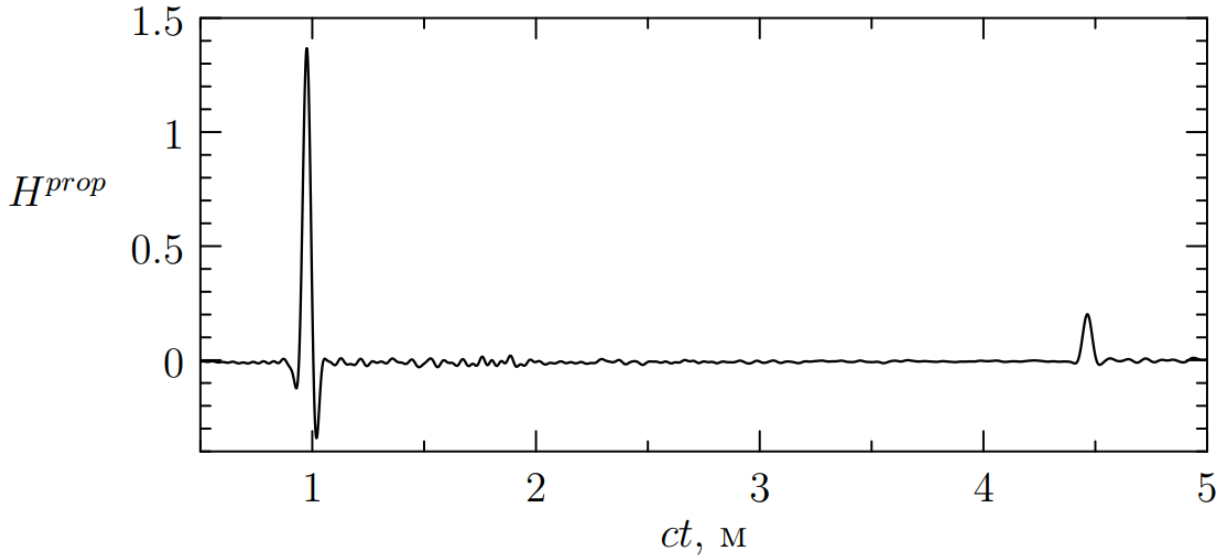


Рисунок 2.7 — Отклик, восстановленный без использования вайнштейновской поправки.

Хорошо видно, что без использования вайнштейновской поправки в восстанавливаемый импульсный отклик вносятся заметные амплитудные и фазовые искажения. В полном импульсном отклике  $H$  видны многократные переотражения внутри источника, делающие сигнал непригодным для анализа.

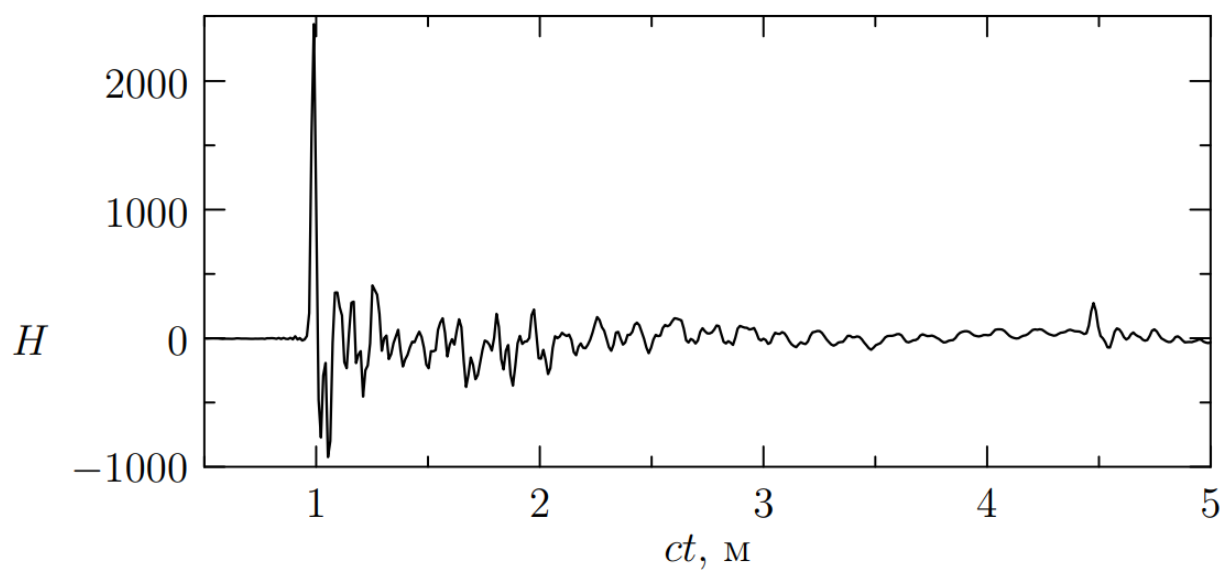


Рисунок 2.8 — Импульсный отклик всей системы при измерении в пустом полупространстве.

## Глава 3. Экспериментальная оценка частотной зависимости коэффициента отражения звукопоглощающего материала при наклонном падении

### 3.1 Введение

Задача экспериментального измерения коэффициента отражения (поглощения) материалов является одной из важнейших в архитектурной акустике. Классическим методом измерения звукопоглощения является метод, основанный на измерении времени реверберации в реверберационной камере [Blauert] с помещенным в нее исследуемым материалом. Форма камеры подбирается таким образом, чтобы звуковое поле в ней имело диффузный характер. На основе формулы Сэбина вычисляется интегральная оценка коэффициента отражения исследуемого материала. Результатом становится оценка частотной зависимости коэффициента отражения в диффузном поле. Данный метод требует постройки дорогих сооружений и принципиально неточен, поскольку предположения, сделанные при получении реверберационной формулы, недостижимы на практике [Kosten]. Другим классическим методом является метод импедансной трубы, также называемой акустическим интерферометром. Метод импедансной трубы вариативен: в качестве входного сигнала можно использовать монохроматический [Beranek] или широкополосный [ASTM] сигнал; один [Fahy1984], два [Seybert] или более [Chung1980I; Chung1980II] микрофонов для измерения давления в трубе; также существует множество техник обработки результатов эксперимента [Chu1991]. Но результатом измерения может стать только частотная зависимость коэффициента отражения при нормальном падении.

Эти методы годятся для исследования свойств материала, но их нельзя использовать на месте при натурных измерениях, например, в помещении, где материалы уже смонтированы. Настоящие натурные измерения возможны только при исследовании амплитуды акустического поля, отраженного от уже смонтированного материала. Подробный обзор методов измерения коэффициента поглощения и импеданса при этих измерениях приведен в [Brandao2015]. Первыми такую технику применили Ингард и Болт [Ingard1951] и Андо

[Ando1968] с монохроматическим сигналом в заглушенной камере. Наиболее простые подобные техники не позволяют измерить угловую зависимость коэффициента отражения и используют монохроматические сигналы, что увеличивает время измерения [Yuzawa1975]. В процессе развития техники начали использоваться импульсные сигналы [Davies1979; Kintzl]. Их использование позволило лучше разрешить отраженный сигнал от падающего по времени. Создание стабильного импульсного во времени источника с идеальной повторяемостью, а также защита микрофона от повреждения импульсным сигналом представляют сложную техническую проблему. Холлин и Джонс использовали корреляцию между шумовым сигналом, излучаемым источником, и сигналом, принимаемым микрофоном, чтобы избавиться от паразитных шумов [Hollin1977].

В работе [Garai1993] отмечены недостатки использования импульсных источников звука (плохая повторяемость, нелинейность и сложность обработки экспериментальных данных). В [Garai1993] измеряется импульсный отклик исследуемого материала при помощи метода последовательностей максимальной длины только при нормальном падении. Прямой и отраженный сигнал в импульсном отклике вырезались с помощью гладкой оконной функции, исследовалось влияние формы оконной функции. Затем получалась частотная зависимость коэффициента отражения с помощью Фурье-преобразования от вырезанного фрагмента.

В [Garai1993] в качестве источника используется маленький динамик. Использование такого источника приводит к необходимости подбирать динамик с ровной в широком диапазоне частотной характеристикой, чтобы импульсный отклик был узким во временной области, и было возможно разрешить часть импульсного отклика, соответствующую отражению от исследуемого материала. Динамик кроме ровной частотной характеристики должен иметь небольшие размеры, чтобы он мог считаться точечным источником. Кроме того, он должен иметь мощность, достаточную для того, чтобы сигнал не затух по пути до приемника. А для справедливости оценки коэффициента отражения как отношения отраженного поля к падающему нужно считать падающее поле полем плоской волны. Для чего следует располагать точечный источник на значительном расстоянии от исследуемого материала. Поэтому такой подбор может быть сложным. Данная работа лишена такого недостатка, поскольку используется монополярный источник на основе мощного динамика большого диаметра, а

объемная скорость на выходе из источника измеряется при помощи метода двух микрофонов, и частотная характеристика динамика не влияет на результат.

Техника, описанная в [Garai1993], была развита и использована для измерения коэффициента поглощения при наклонном падении [Mommertz1995]. Существует также техника измерения коэффициентов отражения при наклонном падении, основанная на двумерном пространственном Фурье-преобразовании сигналов, измеренных в двух параллельных плоскостях, лежащих близко к поверхности испытываемого материала [Tamura1990I; Tamura1990II].

В настоящей работе предлагается техника экспериментального определения частотной зависимости коэффициента отражения при падении под углом, основанная на анализе импульсного отклика исследуемого материала. Измерения ведутся с помощью монопольного источника, выполненного из динамика и конусовидного концентратора. Восстановление угловой зависимости производится посредством обращения интеграла Фурье-Бесселя. Исследовано отличие коэффициента отражения, вычисленного при помощи деления спектра отраженного поля на спектр падающего поля, с коэффициентом отражения, вычисленным при помощи обращения этого интеграла. Проверка новой техники производится на хорошо исследованном звукопоглощающем материале – вспененном меламине. Этот материал представляет собой вспененный пластик на основе полимера меламин-формальдегидной смолы и описывается известной математической моделью Био [Biot1956\_I; Biot1956\_II]. Материал используется для тепло- и звукоизоляции. Свойства вспененного меламина хорошо известны и измерены в ряде работ [Geebelen2007; Cuenca2014]. В данной работе используется псевдощумовой сигнал, что позволяет получить импульсный отклик, не сталкиваясь с техническими проблемами, связанными с использованием импульсного источника. Отраженный сигнал выделяется из импульсного отклика при помощи умножения отклика на гладкую оконную функцию, аналогично [Garai1993]. Главным недостатком предлагаемой в данной работе техники можно считать необходимость тщательной сравнительной калибровки используемых микрофонов. Эта сложность может быть преодолена, если вместо трех микрофонов использовать один микрофон, повторяя эксперимент для каждого его расположения (два положения в адаптере измерения объемной скорости и одно в точке наблюдения).

### 3.2 Постановка задачи

Исследуемый материал занимает область  $-H < z < 0$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$ . Область  $z > 0$  занята воздухом, на  $z = -H$  находится акустически твердая стенка (Рис. 3.1).

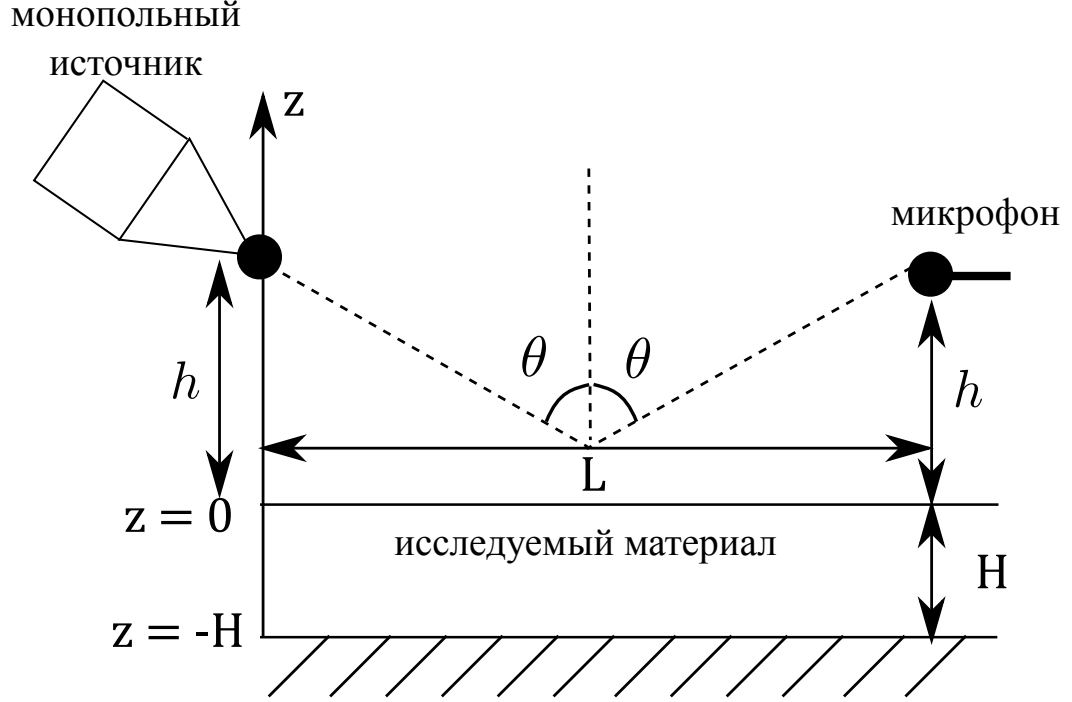


Рисунок 3.1 — Схема эксперимента.

Акустические волны в среде возбуждает монополярный источник, находящийся в точке  $(0, 0, h)$ ,  $h > 0$ . Приемник расположен в точке  $(L, 0, h)$ .

Поле точечного источника опишем неоднородным волновым уравнением

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \rho_0 \frac{\partial W(t)}{\partial t} \delta(x) \delta(y) \delta(z - h), \quad (3.1)$$

где  $W(t)$  — объем воздуха, производимого в единицу времени источником, измеряется в  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $c$  — скорость звука в воздухе.

В эксперименте измеряется набор импульсных откликов для углов падения  $\theta_n$ . Из каждого импульсного отклика при помощи преобразования Фурье вычисляется частотная характеристика  $P_n(\omega)$  отраженного от образца поля для каждого угла падения  $\theta_n$ . При обработке из частотных характеристик получается частотная зависимость коэффициента отражения от образца при данном угле падения.



### 3.3 Описание поля сферической волны. Интеграл Фурье-Бесселя

Рассмотрим стационарную задачу распространения гармонической волны с частотой  $f$ . В этом случае  $W(t) = Be^{-i\omega t}$ ,  $\omega = 2\pi f$ . Экспоненциальная зависимость всех величин от времени будет далее опущена. Решение стационарной задачи будет представлять собой сумму прямого и отраженного поля:

$$P = P_d + P_r. \quad (3.2)$$

Прямое поле  $P_d$  на приемнике вычисляется по формуле монопольного источника [Isakovich1973]:

$$P_d(\omega, r) = -\frac{i\omega\rho_0 \exp ik_0 L}{4\pi r} w(\omega), \quad (3.3)$$

где  $w(\omega)$  - Фурье-образ  $W(t)$ ,  $k_0 = \omega/c_0$ ,  $\omega = 2\pi f$ .

Отраженное поле дается интегралом Фурье-Бесселя [Biot1956\_I; Biot1956\_II]:

$$P_r(\omega, 2h, L) = w(\omega) \frac{\omega\rho_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{k_{||} R(\omega, \arcsin(k_{||}/k_0)) J_0(k_{||} L)}{\sqrt{k_0^2 - k_{||}^2}} \exp(i\sqrt{k_0^2 - k_{||}^2} 2h) dk_{||}, \quad (3.4)$$

где  $k_{||} = k_0 \sin \varphi$  - величина проекции волнового вектора на плоскость  $Oxy$ ,  $\varphi = \arcsin\left(\frac{k_{||}}{k_0}\right)$ ,  $R$  - коэффициент отражения плоской волны, падающей под углом к нормали  $\varphi = \arcsin(k_{||}/k_0)$ . Коэффициент отражения определяется свойствами материала и его толщиной. В настоящей работе исследуется вспененный меламин, который описывается моделью Био для пористых сред [Biot1956\_I; Biot1956\_II]. Для материалов, которые описываются этой моделью, было получено аналитическое выражение для коэффициента отражения в [Allard2009].

В эксперименте непосредственно измеряется полное поле  $P = P_r + P_d$  для разных положений источника и приемника. Затем путем обработки из него выделяется величина  $P_r$ , из нее строится оценка для коэффициента отражения. Простейшая оценка коэффициента отражения может быть получена путем деления  $P_r$  на поле монопольного источника (3.3). Такая оценка, очевидно, будет

справедлива только в том случае, когда источник находится достаточно далеко от поверхности исследуемого материала. Действительно, в этом случае поле излучаемое источником близко к полю плоской волны, которое отражается с коэффициентом, близким к  $R$ . Оценим с помощью формулы (3.4) точность такой оценки для случая нормального падения. Учитывая, что  $J_0(0) = 1$ , и оценивая оставшийся интеграл с помощью метода перевала, получим:

$$P_r(\omega, 2h, 0) = R(\omega, 0)P_d(\omega, 2h) + P_d(\omega, 2h)R'(\omega, 0)\sqrt{\frac{\pi i}{2k_0(2h)}} + O([k_0(2h)]^{-2}), \quad (3.5)$$

где штрих обозначает частную производную по второму аргументу. В эксперименте  $2h \sim 1$  м, следовательно, оценка коэффициента отражения по первому члену в (3.5) будет справедлива на частотах выше 500 Гц. Кроме того, второй член в (3.5) позволяет апостериорно оценить корректность аппроксимации путем вычисления производной  $R'$ .

### 3.4 Отыскание коэффициента отражения с помощью обращения интеграла Фурье-Бесселя

Более точная оценка для коэффициента отражения может быть построена с помощью приближенного обращения интеграла Фурье-Бесселя. Переходя от переменной  $k_{||}$  к переменной  $\varphi = \arcsin\left(\frac{k_{||}}{k_0}\right)$  в (3.4), получим:

$$\tilde{P}_r(\omega, \theta, h) = w(\omega) \frac{\omega \rho_0}{4\pi} \int_{\Gamma} k_0 \sin \varphi R(\omega, \varphi) J_0\left(\frac{2k_0 h \sin \varphi}{\operatorname{tg} \theta}\right) e^{2ik_0 h \cos \varphi} d\varphi, \quad (3.6)$$

где  $\tilde{P}_r(\omega, \theta, h) = P_r(\omega, 2h, \frac{2h}{\operatorname{tg} \theta})$ , а контур  $\Gamma$  изображен на (Рис. 3.2). Пусть из эксперимента известен набор функций  $P_n = \tilde{P}_r(\omega, \theta_n, h)$  при заданных  $\theta_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ . В интеграле (3.6) заменим  $R(\varphi)$  на некоторую интерполяцию

$$\tilde{R}(\omega, \varphi) = \sum_{m=1}^N R_m(\omega) E_m(\varphi), \quad (3.7)$$

где  $E_m$  – интерполяционные функции, а  $R_m(\omega)$  – функции, подлежащие определению. Подставляя (3.7) в (3.6) и проводя интегрирование, получим следующее матричное уравнение:

$$P_n = M_{nm} R_m, \quad (3.8)$$

где

$$M_{nm} = w(\omega) \frac{\omega \rho_0}{4\pi} \int_{\Gamma} k_0 \sin \varphi E_m(\varphi) J_0 \left( \frac{2k_0 h \sin \varphi}{\operatorname{tg} \theta_n} \right) e^{2ik_0 h \cos \varphi} d\varphi. \quad (3.9)$$

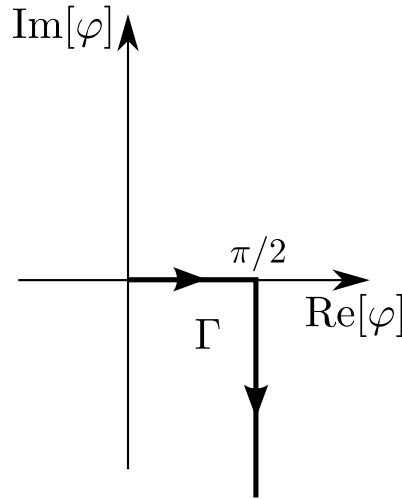


Рисунок 3.2 — Контур интегрирования.

Решая уравнение (3.8), определим неизвестные коэффициенты  $R_m$  и, пользуясь формулой (3.7), получим оценку для коэффициента отражения. Корректность построенной оценки сильно зависит от выбранных интерполяционных функций. Если на заданном наборе  $\theta_n$  коэффициент отражения меняется плавно, то на участке  $[0; \pi/2]$  функции  $E_n$  могут быть выбраны кусочно-линейными:

$$E_n(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \leq \theta_{n-1}, \varphi \geq \theta_{n+1} \\ \frac{\theta_{n+1} - \varphi}{\theta_{n+1} - \theta_n}, & \theta_n < \varphi < \theta_{n+1} \\ \frac{\varphi - \theta_n}{\theta_{n+1} - \theta_n}, & \theta_{n-1} < \varphi < \theta_n \end{cases} \quad (3.10)$$

Отметим, что если  $E_n$  выбраны в соответствии с (3.10), то коэффициенты  $R_m(\omega)$  являются приближением к коэффициенту отражения  $R(\omega, \theta_m)$ .

Остановимся на деталях численной реализации.

Важной задачей является выбор последней функции  $E_n(\varphi)$  при мнимых  $\varphi$ . В данной работе  $E_n(\varphi) = 1, \text{Im}[\varphi] < 0$ . Данный выбор был обусловлен следующими соображениями. При  $h \neq 0$  такой выбор слабо влияет на результат ввиду экспоненциального затухания подынтегрального выражения в (3.9). Однако при  $h = 0$ , когда быстрого затухания нет, получается постоянный коэффициент отражения при мнимых углах, что соответствует модели Био (при касательном падении меламина ведет себя как граница Дирихле).

Хорошо известно, что задача решения уравнения

$$R_m = M_{nm}^{-1} P_n \quad (3.11)$$

является некорректно поставленной, так как матрица  $M_{nm}$  плохо обусловлена, и непосредственное ее численное обращение может вести к значительным численным ошибкам. Поэтому при решении уравнения (3.8) применялась регуляризация Тихонова

$$R_m = (M_{nm}^T M_{nm} + \lambda I)^{-1} M_{nm}^{-1} P_n, \quad (3.12)$$

где  $I$  - единичная матрица, а параметр  $\lambda$  выбирался исходя из численных экспериментов. На частотах от 500 до 2000 Гц выбиралось значение  $\lambda = 0.2$ , на более высоких частотах регуляризация не требовалась.

### 3.5 Описание эксперимента

Геометрия эксперимента соответствует Рис. 3.1. Параметры  $h$  и  $L$  подбирались таким образом, чтобы расстояние, проходимое отраженным сигналом, было порядка 1 метра.

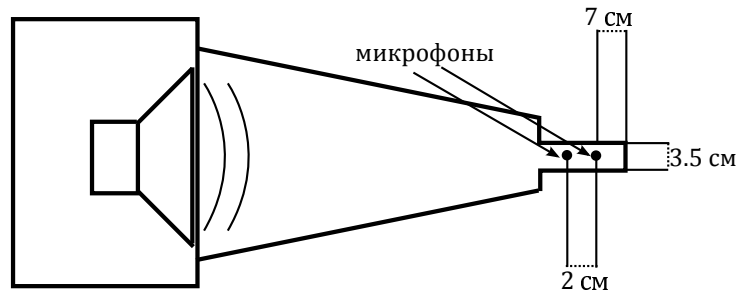


Рисунок 3.3 — Схема монопольного источника.

В качестве монопольного источника использовался аналог Brüel & Kjær 4295 Omnisource, выполненный из фанерного короба с клиновидным концентратором (Рис. 3.3). К источнику крепится адаптер для измерения объемной скорости. Адаптер представляет собой отрезок металлической трубы диаметром 3,5 см с двумя отверстиями для микрофонов, расстояние между которыми 2 см. Это расстояние определяет наивысшую частоту, для которой возможно определение колебательной скорости (8,5 кГц). Это ограничение следует из метода двух микрофонов [ASTM]. Для регистрации поля и измерения объемной скорости использовались 6 мм микрофоны Audix TM1, обладающие достаточно ровной частотной характеристикой в широком диапазоне частот.

Импульсный отклик определялся с помощью метода  $M$ -последовательности. Подробно данная техника описана в [ValyaevMLS]. Остановимся здесь лишь на основных моментах.  $M$ -последовательность – это двухуровневый квази-шумовой сигнал с количеством отсчетов  $2^M - 1$ , где для данной работы  $M = 19$  (длительность около 11 секунд с частотой дискретизации 48 кГц).  $M$ -последовательность подается на ЦАП и воспроизводится источником. Затем принимаются сигнал с микрофона, расположенного в точке приема и пара сигналов с двух микрофонов, помещенных в адаптер объемной скорости. Вычисляется кросс-корреляция каждого из сигналов с исходной  $M$ -последовательностью. На корреляционные функции накладывается временное окно, чтобы выделить первые несколько метров принятого сигнала и отрезать весь остальной сигнал. Затем с каждым из сигналов производится преобразование Фурье. Из сигналов, полученных с микрофонов в адаптере, вычисляется Фурье-спектр объемной скорости при помощи формулы двух микрофонов с учетом поправки Вайнштейна, описывающей отражение от открытого конца волновода [Weinstein1966]. Отношение спектра давления в точке приема к спектру объемной скорости источника дает частотный отклик всего акустического тракта.

Далее выполняется фильтрация фильтром низких частот с частотой отсечки 4500 Гц и шириной 500 Гц. Фильтрация позволяет избежать импульсов с большими пиковыми величинами. Для удобства результат нормируется таким образом, чтобы амплитуда пика от прямого сигнала была единичной при расстоянии от источника до микрофона 1 м. После фильтрации к полученному сигналу применяется обратное преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье дает профильтрованный импульсный отклик.

Поскольку эксперимент имел хорошую повторяемость, была возможность улучшить соотношение сигнал/шум, вычитая из отклика, полученного при наличии отражения от исследуемого материала, отклик свободного поля без материала. Сначала проводился эксперимент с отражением от исследуемого материала Рис. 3.5, линия из точек. Затем исследуемый материал и жесткая подложка убирались, и импульсный отклик измерялся снова. Так получался отклик свободного поля, который вычитался из отклика, полученного с отражением от материала, и так повышалось отношение амплитуд сигнала и шума в отклике Рис. 3.5, сплошная линия. Из полученного таким образом импульсного отклика при помощи гладкой маски (Рис. 3.5, пунктирная линия) вырезается часть, соответствующая отраженному сигналу. Фурье-образ вырезанной части представляет собой отраженное поле  $P_r$ .

Проводится серия таких экспериментов для разных углов падения  $\theta$ . С помощью методов, описанных в предыдущем разделе, строится оценка для коэффициента отражения.

### 3.6 Экспериментальные результаты

Для проверки работоспособности предлагаемой методики и построенной экспериментальной установки были проведены эксперименты по измерению импульсного отклика исследуемого материала с углами  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  (см. Рис. 3.1). Из модели Био известно, что с изменением угла  $\theta$  величина коэффициента отражения меняется плавно, поэтому такого небольшого набора углов должно быть достаточно. К сожалению, измерения для больших углов  $\theta$  были затруднены ввиду наложения прямого и отраженного сигнала в импульсном отклике. К тому же, имелись проблемы, связанные с конечным размером образца: на низких частотах образец оказывается меньше размера первой зоны Френеля, и тогда, если расстояние от источника до образца около 0,5 м, сторона образца должна быть около 1,5 м.

После окончания измерений получается набор частотных характеристик  $P_n = \tilde{P}_r(\omega, \theta_n, h)$  для каждого угла падения  $\theta_n$ . После того, как по формулам (3.5) и (3.7), (3.8) были получены оценки для коэффициента отражения, они сравнивались с такой же зависимостью, вычисленной по модели Био с учетом

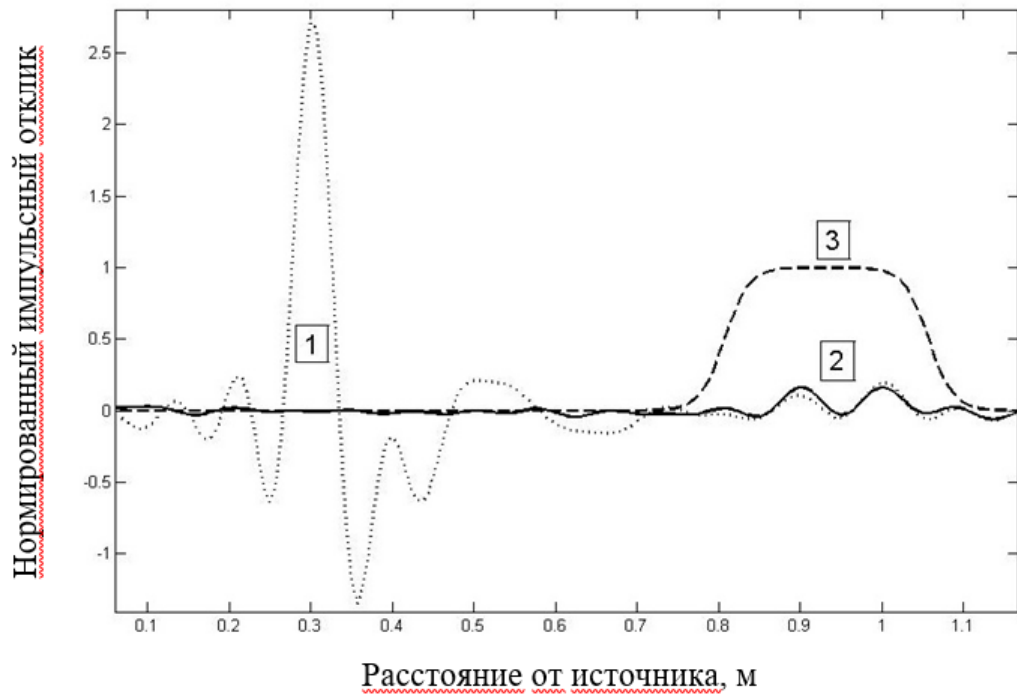


Рисунок 3.4 — Пример импульсного отклика. По горизонтальной оси отложено расстояние от источника, по вертикальной оси отложена амплитуда импульсного отклика. Линия из точек соответствует сигналу до вычитания отклика свободного поля; сплошная линия — сигналу после вычитания; пунктирная линия — маске, необходимой для выделения участка, соответствующего отражению от меламина. Пик 1 соответствует прямому сигналу от источника; пара пиков 2 соответствует сигналу, отраженному от меламина (один пик от поверхности меламина, другой от подложки, на которую он наклеен); маска 3 предназначена для выделения отраженного сигнала.

толщины образца при помощи переходной матрицы. Метод вычисления теоретической зависимости описан в [Allard2009].

Результаты сравнения действительных частей коэффициентов отражения для нескольких частот представлены на Рис. (3.6), (3.6), (3.6). Пунктирной линией обозначен результат, полученный с помощью формулы (3.5), точками — с помощью формул (3.7), с кусочно-линейными интерполяционными функциями (3.10), сплошной линией — результат теоретического расчета на основе модели Био [Biot1956\_I; Biot1956\_II]. В качестве параметров модели Био использовались параметры, измеренные экспериментально в работе [Geebelen2007] (см. таблицу).

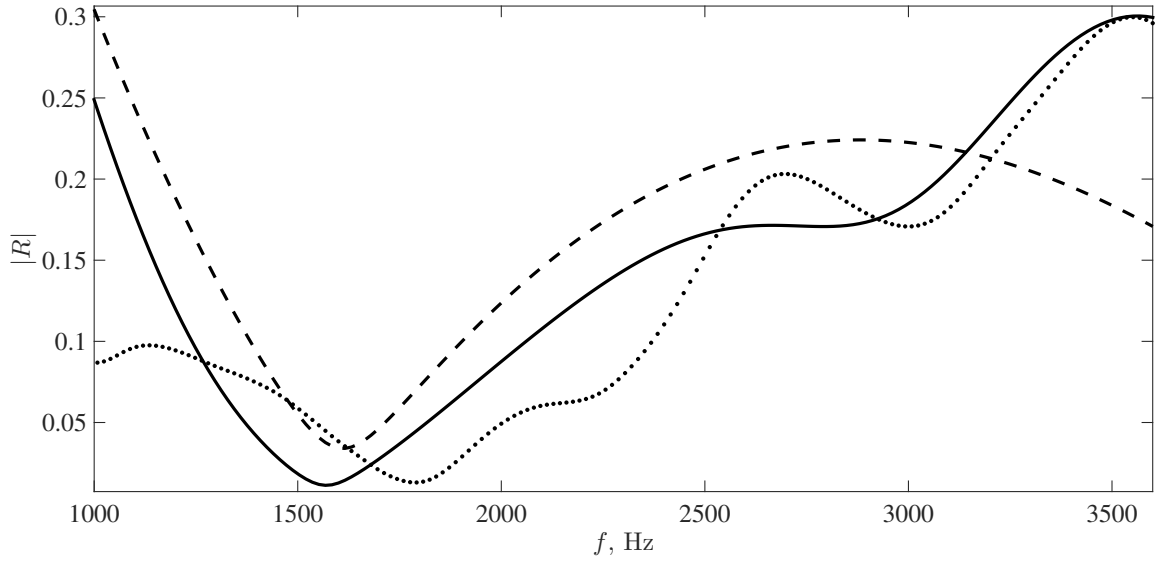


Рисунок 3.5 — График зависимости модуля коэффициента отражения  $|R|$  при угле падения равном  $0^\circ$ . Пунктирной линией обозначен результат, полученный с помощью формулы (3.5), точками — с помощью формул (3.7), (3.8), сплошной линией — результат теоретического расчета на основе модели Био.

Пористость ( <i>англ.</i> porosity) $[1]$ $\Phi$	0.99
Сопротивление потоку ( <i>англ.</i> flow resistivity) $\sigma$ $[\text{Нм}^{-4}]$	12000
Термическая проницаемость ( <i>англ.</i> thermal permeability) $k'_0$ $[1]$	$1.5 \times 10^{-9}$
Масштаб вязкости ( <i>англ.</i> viscous dimension) $\Lambda$ $[\text{м}]$	$100 \times 10^{-6}$
Тепловой масштаб ( <i>англ.</i> thermal dimension) $\Lambda'$ $[\text{м}]$	$400 \times 10^{-6}$
Плотность материала $\rho_s$ $[\text{кг/м}^3]$	9
Сдвиговый модуль $N$ $[\text{кПа}]$	$86(1 + 0.05i)$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0.276

Таблица 1 — Параметры пористого меламина.

Как видно из Рис. (3.6), (3.6), (3.6), при углах падения, для которых проводился эксперимент, описанная техника дает удовлетворительное соответствие с теорией Био и может быть использована для измерения угловых зависимостей коэффициентов отражения для имеющихся и новых звукопоглощающих материалов. Некоторое несоответствие экспериментальных и теоретических результатов авторы объясняют внутренними шумами экспериментальной установки, ошибками в измерении геометрии эксперимента и тем, что образец исследуемого материала был собран из различных прямоугольных кусков, слегка отличающихся по форме и свойствам.



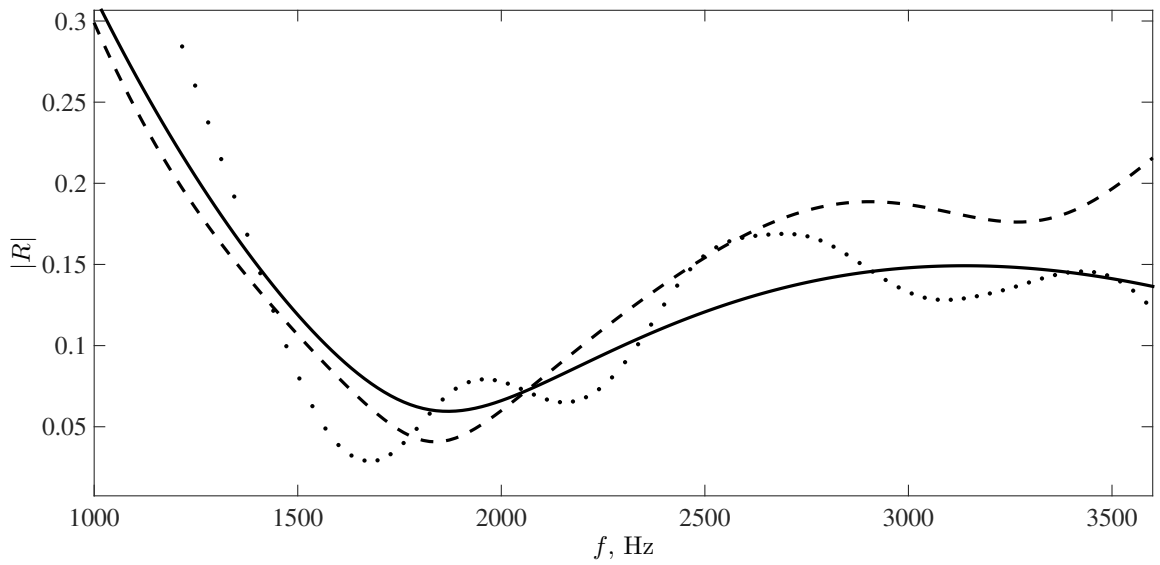


Рисунок 3.6 — График зависимости модуля коэффициента отражения  $|R|$  при угле падения равном  $30^\circ$ . Пунктирной линией обозначен результат, полученный с помощью формулы (3.5), точками — с помощью формул (3.7), (3.8), сплошной линией — результат теоретического расчета на основе модели Био.

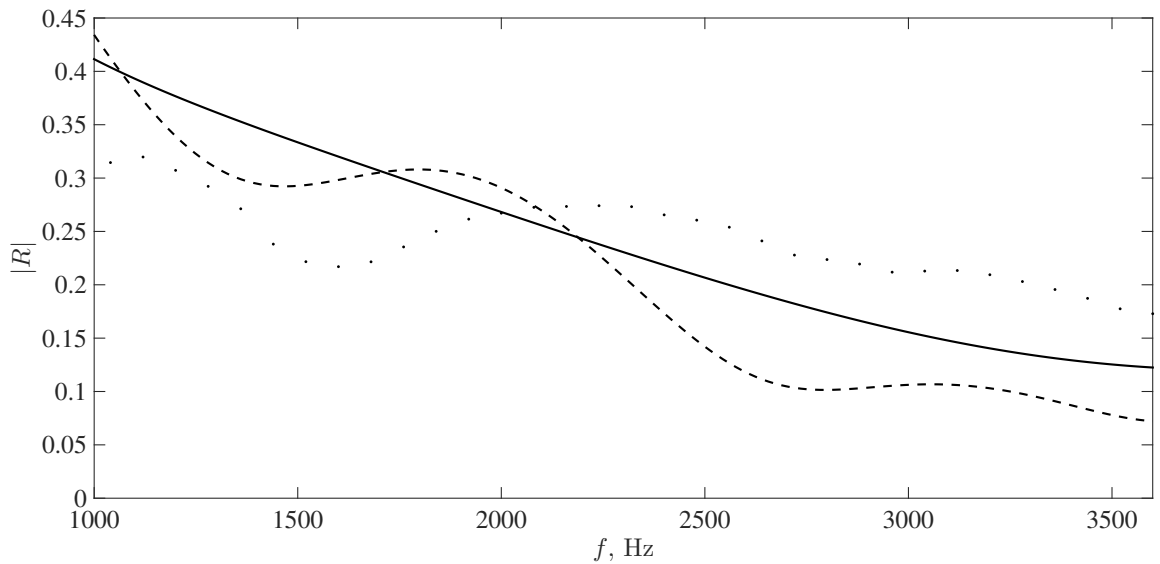


Рисунок 3.7 — График зависимости модуля коэффициента отражения  $|R|$  при угле падения равном  $60^\circ$ . Пунктирной линией обозначен результат, полученный с помощью формулы (3.5), точками — с помощью формул (3.7), (3.8), сплошной линией — результат теоретического расчета на основе модели Био.

## Глава 4. Измерение импульсного отклика акустического MLS-сигнала в среде с потоком

### 4.1 Введение

В данное время широко используемым методом измерения импульсных откликов и частотных характеристик различных акустических рассеивателей является техника измерения импульсного отклика с помощью псевдослучайной последовательности максимальной длины (Maximum Length Sequence) [ValyaevMLS; ValyaevRoad; Denisov2017]. Суть техники заключается в зондировании испытуемой системы квазишумовой посылкой, автокорреляционная функция которой близка к дельта-функции, и последующей корреляционной обработке полученных данных.

Ценность дифракционного MLS-эксперимента состоит в возможности непосредственного наблюдения полей, дифрагированных на различных, в том числе и сложных, объектах. В данной работе ставится практически важная задача применить технику MLS-эксперимента в случае прохождения акустического сигнала через воздушную струю.

Эксперименты по изучению воздушных струй акустическими методами уже проводились и описаны в существующих работах. В [Candel1976] изучается экранирование струей монохроматического сигнала в зависимости от взаимных ориентаций струи и источника сигнала. Аналитическая модель этого процесса предложена в [Gerhold1983]. Вопрос о поведении фазы акустической волны при прохождении через турбулентный поток численно рассмотрен в [Karweit1991]. Экспериментальное изучение случайных характеристик струи на основе поведения монохроматической акустической волны, проходящей через струю перпендикулярно направлению потока, проведено в [HoChi].

Имеются и работы по изучению влияния акустических волн на потоки воздуха с небольшими скоростями [Golovanov2006; Vlasov1971]. В данной работе такое влияние не рассматривается.

Кроме того, имеется множество работ, посвященных отражению и прохождению акустических волн через тангенциальный разрыв на плоской гра-

нице двух движущихся жидкостей [Friedland1969; Godin1988; Jones1973; Gottlieb1960].

В [Ahuja1981] описаны эксперименты по корреляционному детектированию широкополосного сигнала, проходящего через воздушную струю. В первом из них точечный источник помещался на оси потока, рядом с ним располагался контрольный микрофон, а снаружи потока размещался измерительный микрофон. По корреляции между сигналами с микрофонов определялась задержка прохождения сигнала и, соответственно, угол рефракции на границе потока. Во втором эксперименте источник с контрольным микрофоном также находится на оси потока, а два измерительных располагаются вне потока и на оси потока ниже по течению. Рассматривая поток, как отличную от воздуха среду, авторы измеряют и моделируют углы преломления и отражения на границе поток-пространство.

В данной работе с помощью монопольного источника и MLS-техники [ValyaevMLS; ValyaevRoad; Denisov2017] производится экспериментальное измерение импульсного отклика при наличии потока на акустической трассе. Изучаются явления сноса сигнала потоком и фокусировки сигнала цилиндрической струей. Проводится математическое моделирование этого процесса путем решения уравнения для распространения звука в постоянном потоке [Blokhitsev1981] методом конечных разностей.

## 4.2 Описание эксперимента

Эксперименты проводились в заглушенной камере с потоком АК-2 ЦА-ГИ. Схема эксперимента показана на (Рис. 4.1). На рисунке показана система координат  $(x, y, z)$ , используемая ниже для задания положений микрофонов и источника.

Поток воздуха со скоростями 20, 40, 60, 80 м/с создавался соплом круглого сечения диаметром 40 см. На некотором расстоянии от сопла были расположены 3 микрофона и источник звука, так чтобы акустическая трасса проходила через струю (Рис. 4.1). Была проведена серия экспериментов, в которых акустическая трасса была как перпендикулярна (Рис. 4.2), так и неперпендикулярна оси потока (Рис. 4.3).

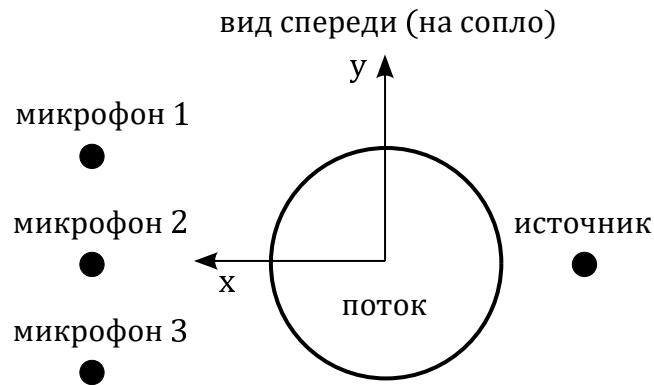


Рисунок 4.1 — Схема эксперимента с потоком.

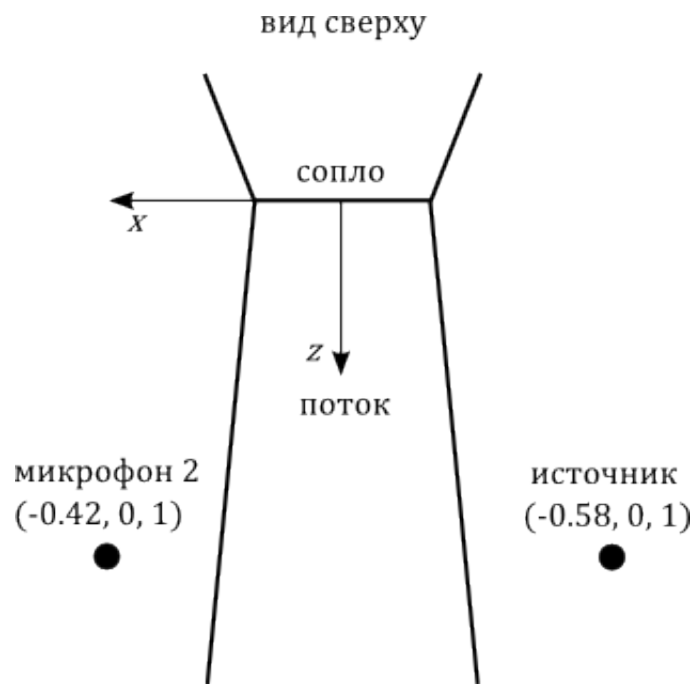


Рисунок 4.2 — Геометрия эксперимента. Акустическая трасса перпендикулярна оси потока.

Экспериментальное оборудование и алгоритм корреляционной обработки данных были аналогичны таковым, описанным в [ValyaevMLS; ValyaevRoad; Denisov2017]. В качестве источника использовался всенаправленный излучатель Omnisource тип 4295 фирмы Bruel & Kjaer с датчиком объемной скорости, в качестве микрофонов применялись  $\frac{1}{4}$ -дюймовые микрофоны типа 4935 фирмы Bruel & Kjaer.

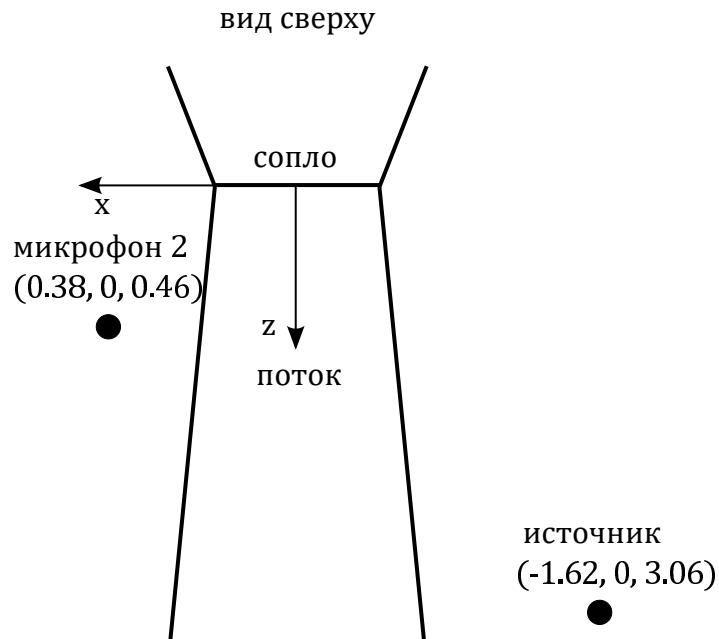


Рисунок 4.3 — Геометрия эксперимента. Акустическая трасса перпендикулярна оси потока.

### 4.3 Теоретическое описание

Полноценное описание волновых процессов в среде с потоком было дано в [Blokhitsev1981]. В данной монографии указывается, что скорость потока может быть представлена в виде средней скорости и флуктуации. Средняя скорость обуславливает снос и фокусировку звуковой волны, а переменная часть скорости ведет к рассеянию звука на флуктуациях. Для описания эффектов, связанных с переменной составляющей потока, необходимы данные о масштабах флуктуаций его скорости. Измерения этих масштабов в настоящей работе не производились. Ниже будет дано теоретическое описание эффектов, обусловленных постоянной составляющей потока.

#### 4.3.1 Расчет сноса звукового поля

Для оценки сноса акустического сигнала будем рассматривать упрощенную двумерную (в координатах  $x, z$ ) модель (Рис. 4.4). Будем считать, что

скорость потока постоянна внутри струи и равна нулю за её пределами. Тогда, акустический потенциал  $\Phi$  удовлетворяет уравнению [Blokhitsev1981]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = \left( M \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Phi, \quad (4.1)$$

где  $M = V/c$  – число Маха, а  $V$  – скорость потока. Здесь подразумевается, что  $M$  постоянно внутри потока и равно нулю снаружи. Для корректной постановки задачи накладываются условия непрерывности давления и нормальной компоненты скорости на границе. Используя принцип локальности [Keller1962], выпишем представление акустического потенциала звукового поля на приемнике в виде фазового интеграла, полученного в [Mironov1975]:

$$\Phi = \int \int A(\omega) \exp(i f(\omega, k_z)) d\omega dk_z, \quad (4.2)$$

$$f(\omega, k_z) = -\omega t + k_z(z_2 - z_1) + (x_2 - x_1 - H) \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} + H \sqrt{\left( \frac{\omega}{c} - M k_z \right)^2 - k_z^2} \quad (4.3)$$

Этот интеграл получен в результате применения преобразования Фурье к уравнению (4.1) по времени и по координате  $z$ , направленной вдоль потока. В функции  $f$  (4.3) третий член описывает распространение вдоль оси  $x$  в пространстве без потока, а четвертый член описывает распространение в пространстве с потоком.

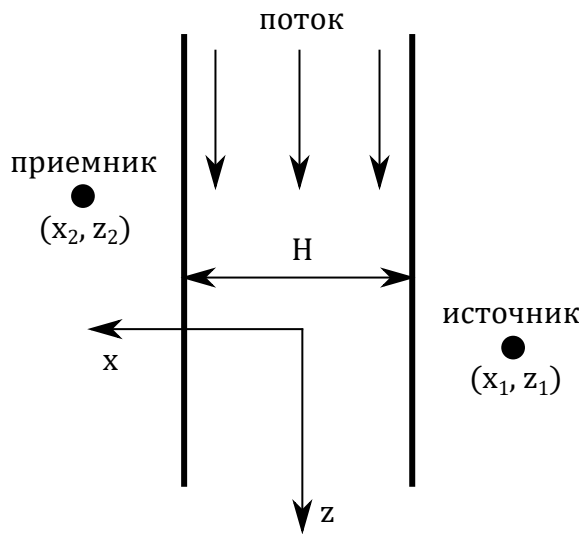


Рисунок 4.4 — Двухмерная модель.

В случаях, когда длины волн меньше характерных масштабов неоднородностей, для анализа фазовых интегралов обычно применяют метод

стационарной фазы или метод перевала [SveshnikovTFKP]. В рассматриваемом случае интеграла (4.2) необходимо применять метод стационарной фазы для двух комплексных переменных, для чего в комплексной плоскости переменных  $(\omega, k_z)$  необходимо отыскать стационарные точки, в которых для подынтегральной функции выполняются условия.

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial k_z} = 0. \quad (4.4)$$

В окрестностях стационарных точек осцилляции подынтегральной функции замедляются, и поэтому эти точки дают существенный вклад в интеграл, а в окрестности остальных точек подынтегральная функция быстро осциллирует, и поэтому такие окрестности не дают существенного вклада в интеграл.

Введем переменную  $\gamma = k_z/(\omega/c)$  и перепишем (4.3) в виде:

$$f(\omega, \gamma) = \omega \left[ -t + \frac{\gamma(z_2 - z_1)}{c} + \frac{x_2 - x_1 - H}{c} \sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{H}{c} \sqrt{(1 - M\gamma)^2 - \gamma^2} \right] \quad (4.5)$$

Условия (4.4) перепишутся как

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0, \quad (4.6)$$

т.е.

$$t = \frac{\gamma_*(z_2 - z_1)}{c} + \frac{x_2 - x_1 - H}{c} \sqrt{1 - \gamma_*^2} + \frac{H}{z} \sqrt{(1 - M\gamma_*)^2 - \gamma_*^2} \quad (4.7)$$

где  $\gamma_*$  - корень уравнения

$$(z_2 - z_1) - (x_2 - x_1 - H) \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} - H \frac{\gamma + M(1 - M\gamma)}{\sqrt{(1 - M\gamma)^2 - \gamma^2}} = 0. \quad (4.8)$$

Решения уравнений (4.7) и (4.8) дают оценку времени прихода сигнала.

В общем случае время прихода сигнала  $t$  для случая с потоком будет отличаться от времени распространения сигнала при отсутствии потока. Причина этого физически очевидна – часть времени сигнал распространяется против потока, что уменьшает фазовую скорость сигнала. В случае распространения звука по потоку время прохождения сигнала уменьшится. В данной работе случай ускорения звука не рассматривается, и соответствующий эксперимент проведен не был.

### 4.3.2 Расчет фокусировки звукового поля

Если проекция единичного вектора вдоль звукового луча на скорость потока отрицательна, то фазовая скорость сигнала, распространяющегося вдоль такого луча, уменьшается, и, тем самым, поток может рассматриваться как акустически менее плотная среда. В этом случае цилиндрический поток выступает как собирающая линза. Схема фокусировки показана на (Рис. 4.5).

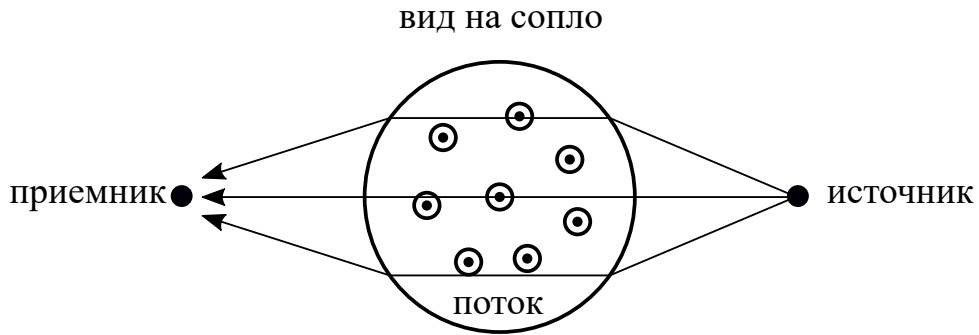


Рисунок 4.5 — Фокусировка звука потоком

Для расчета эффекта фокусировки необходимо рассматривать трехмерную модель. Таким образом, следует решать уравнение:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = \left( M + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Phi, \quad (4.9)$$

где  $M$  отлично от нуля внутри потока, и равно нулю снаружи. Как и ранее, предполагается, что на границе потока выполнены стандартные условия непрерывности.

В простейшем случае можно предположить, что поток имеет цилиндрическую форму и число Маха в любой его точке постоянно. Однако такое представление не описывает реальной физической картины уже на расстояниях порядка одного калибра от сопла. Ниже предлагается более «реалистичная» форма потока.

Как известно, поток состоит из начального участка, переходного и основного участков [Abramovitz]. Для простоты будем полагать, что длина переходного участка равна нулю. В начальном участке струя имеет потенциальное ядро течения конусовидной формы. Скорость в этом ядре постоянна. Убывание скорости вне ядра может быть описано следующим Гауссовым законом [Tam]:



$$V = \begin{cases} V_0, & (r < h) \\ V_0 \exp \left( -\ln 2 \left[ \frac{r-h(z)}{b(z)} \right]^2 \right), & (r \geq h). \end{cases} \quad (4.10)$$

Здесь  $h(z)$  – радиус ядра,  $b(z)$  – полуширина слоя смешения,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $V_0$  – скорость потока в ядре. Аналогичным образом скорость потока может быть рассчитана и на основном участке:

$$V = V_c \left[ -\ln 2 \left( \frac{r}{b(z)} \right)^2 \right], \quad (4.11)$$

где  $V_c$  – скорость на оси потока. Мы предполагаем, что скорость на оси потока спадает обратно пропорционально расстоянию от сопла. Здесь  $b(z)$  – расстояние от оси ядра до окружности, на которой скорость ядра спадает вдвое. Параметры  $h(z), b(z)$  оценивались на основе данных анемометрии для сопла диаметром 0.6 м, на скоростях 50, 45 и 35 м/с. Пример экспериментальных данных для начального участка струи и расчета по формуле (4.10) приведен на (Рис. 4.6).

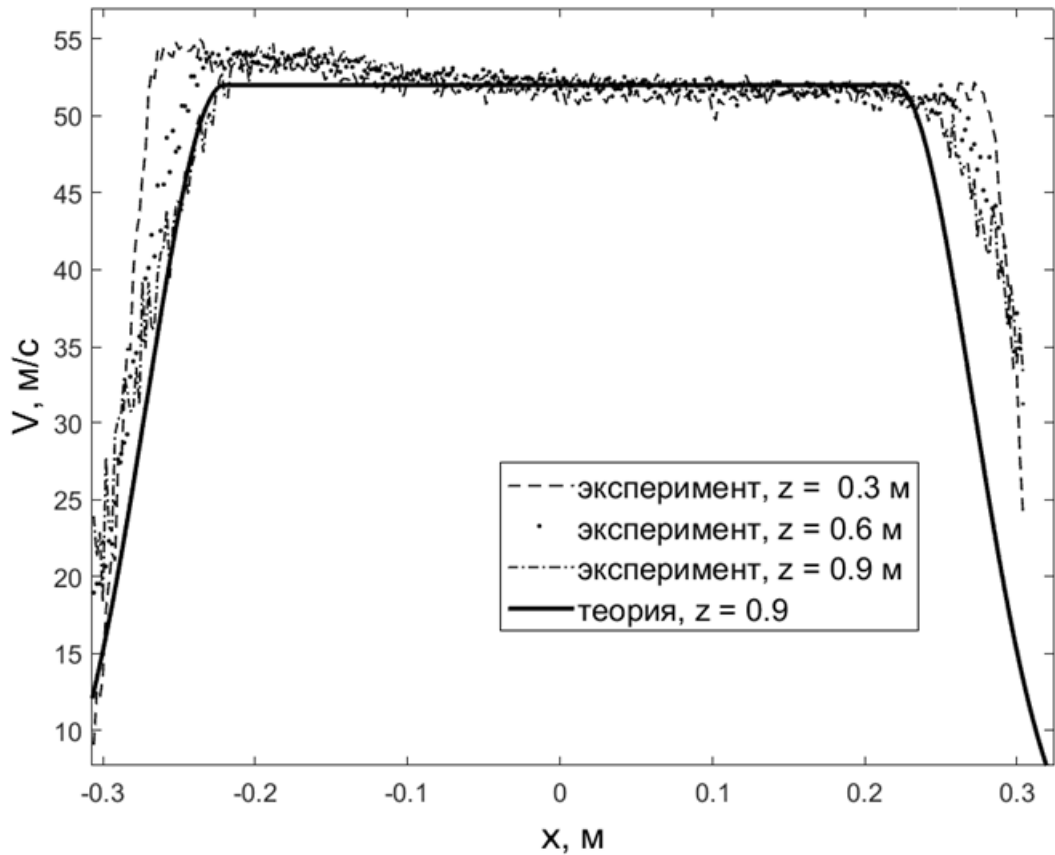


Рисунок 4.6 — Данные термоанемометрии потока для скорости 55 м/с и сравнение с теоретическим расчетом по формуле (4.10).

В общем случае для потенциального неоднородного потока решается уравнение Блохинцева, а для неоднородного потока с завихрениями – уравнение Блохинцева-Хоу [Munin1981], стр. 22. В данной работе рассматриваемый поток неоднороден и завихрен в слое смешения, однако при малых числах Маха уравнение Блохинцева-Хоу переходит в уравнение (4.1). Поэтому для расчета амплитуды сфокусированного сигнала численно решалось уравнение (4.1) с помощью метода конечных разностей. Производные по пространственным координатам заменялись симметричными конечно-разностными аппроксимациями первого порядка, интегрирование по времени осуществлялось с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка. Для подавления волн, отраженных от границ сетки использовался метод полностью согласованного слоя (PML) [Grothe2010]. Шаг сетки выбирался равным 2 см. Такой выбор позволил корректно описывать распространение волн в частотном диапазоне до 2 кГц.

#### 4.4 Экспериментальные результаты и моделирование

Сигналы, полученные в эксперименте, подвергались корреляционной обработке, алгоритм которой подробно изложен в [ValyaevMLS; ValyaevRoad; Denisov2017]. Коротко говоря, в обработку входит вычисление корреляции с эталонным MLS-сигналом, вычисление объемной скорости источника по методу двух микрофонов и фильтрация в частотной области. В результате получается импульсный отклик акустического тракта. Нормировка амплитуды для простоты выбирается таким образом, чтобы максимальное значение сигнала было равно единице на расстоянии 1 м от источника. Сигналы подвергаются полосовой фильтрации в диапазоне 500 – 4000 Гц.

Результаты корреляционной обработки сигнала на микрофоне 2 для случая перпендикулярной и неперпендикулярной трасс распространения представлены на (Рис. 4.7 и 4.7 соответственно).

Из представленных результатов следует, что влияние потока в случае перпендикулярной трассы распространения незначительно. Отсутствие сноса сигнала и фокусировки объясняется тем фактом, что проекция луча на поток ( $z$ -компонента волнового вектора) в данном случае равна нулю. В случае неперпендикулярной трассы распространения, увеличение средней скорости потока

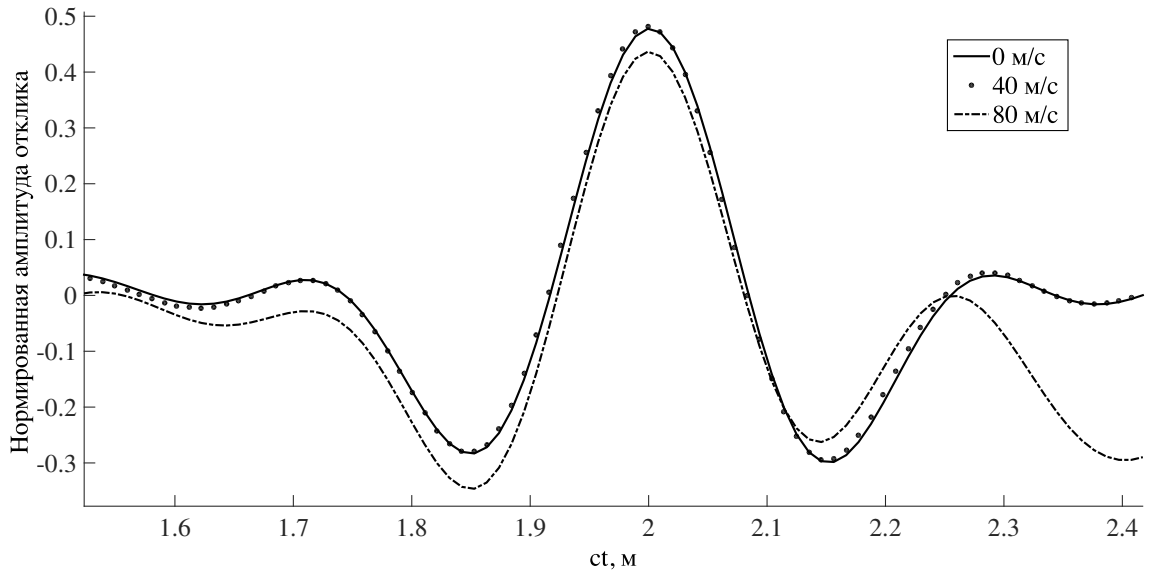


Рисунок 4.7 — Отклики на микрофоне 2 в случае, когда акустическая трасса перпендикулярна оси потока.

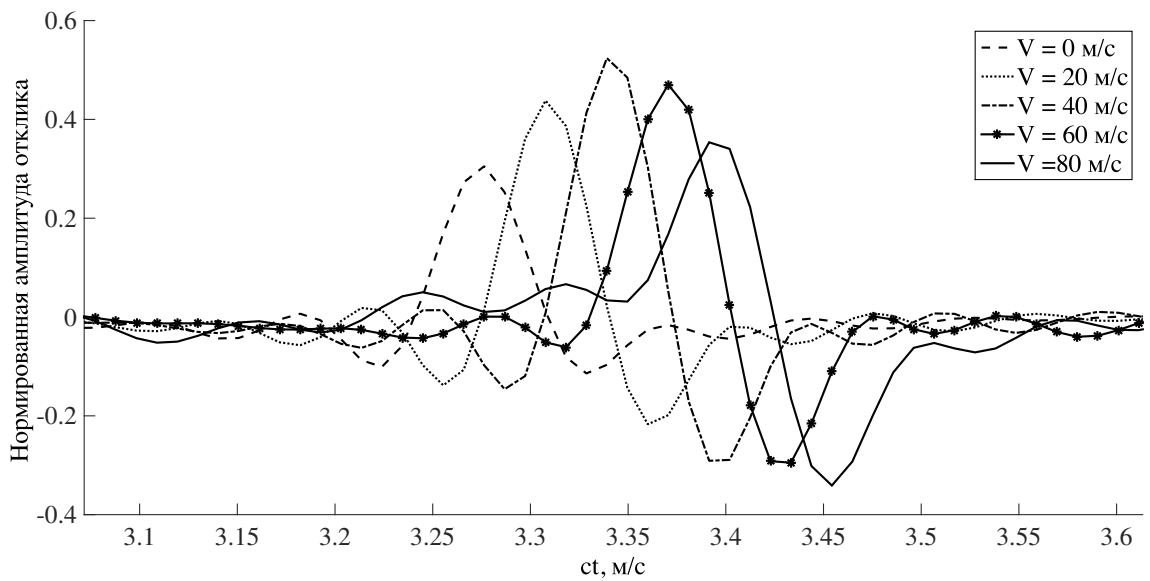


Рисунок 4.8 — Отклики на микрофоне 2 в случае, когда акустическая трасса неперпендикулярна оси потока.

приводит к увеличению задержки сигнала. Кроме того, для потоков 0, 20 и 40 м/с наблюдается рост амплитуды с ростом скорости потока. Наиболее вероятная причина этого роста – фокусировка сигнала. Также наблюдается падение амплитуды на скоростях 60 м/с и 80 м/с.

Моделирование уравнений (4.7), (4.8) для координат микрофона 2 для случая неперпендикулярной трассы распространения, дает следующие

Поток	Расчет	Эксперимент
$V = 0$ м/с	$ct = 3.280$ м	$ct = 3.280$ м
$V = 20$ м/с	$ct = 3.310$ м	$ct = 3.312$ м
$V = 40$ м/с	$ct = 3.339$ м	$ct = 3.343$ м
$V = 60$ м/с	$ct = 3.366$ м	$ct = 3.375$ м
$V = 80$ м/с	$ct = 3.394$ м	$ct = 3.395$ м

Таблица 2 — Задержки сигналов, вычисленные с помощью (4.7), (4.8) в сравнении с результатами эксперимента

значения времени задержки (4.4). Данные оценки неплохо согласуются с экспериментом.

На (Рис. 4.9) приводятся результаты численного моделирования сигналов методом конечных разностей для потока, скорость струи в котором рассчитывалась с помощью (4.10) и (4.11). Отметим, что результаты численного моделирования фильтруются в диапазоне 500 – 2000 Гц в соответствии с пространственным разрешением сетки.

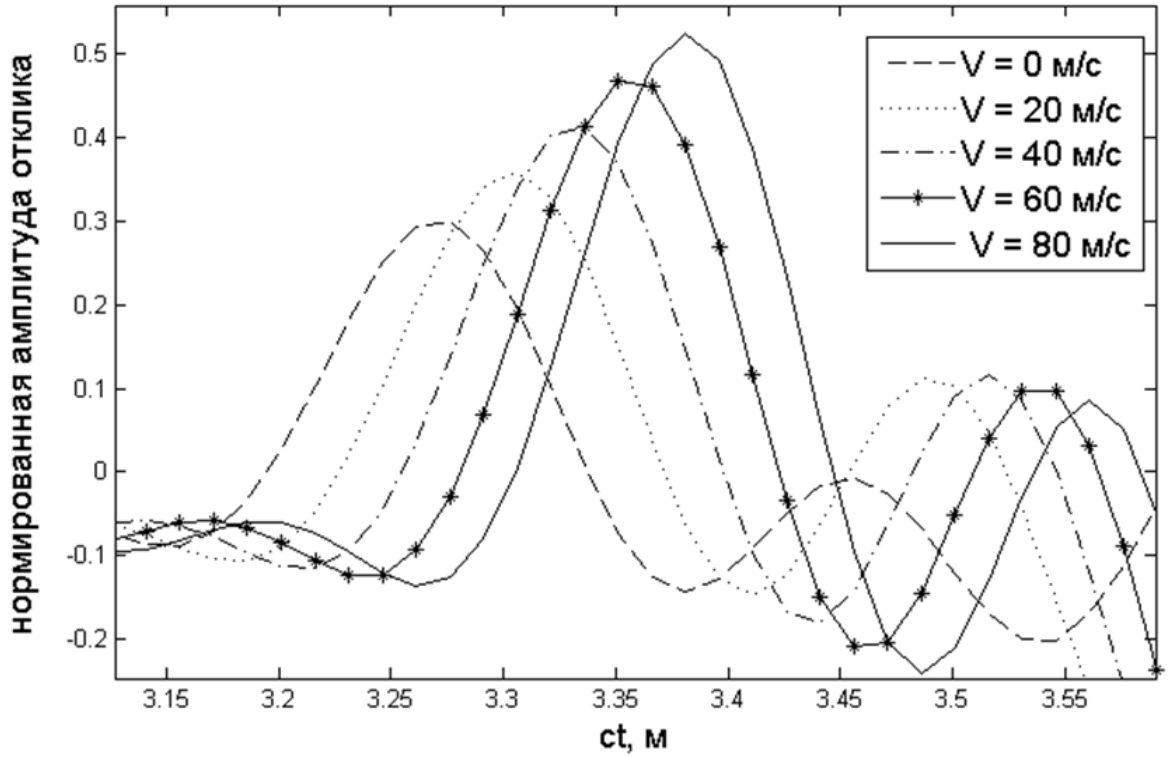


Рисунок 4.9 — Результат моделирования сигнала на микрофоне 2.

Для наглядности на Рис. 4.10, Рис. 4.11 совместно приведены результаты численного моделирования и эксперимента для скоростей потока 20 и 60 м/с. Кроме струи "реалистичной формы", скорость которой рассчитывалась по формулам (4.10) и (4.11), также представлены результаты моделирования для потока цилиндрической формы с постоянной по сечению скоростью.

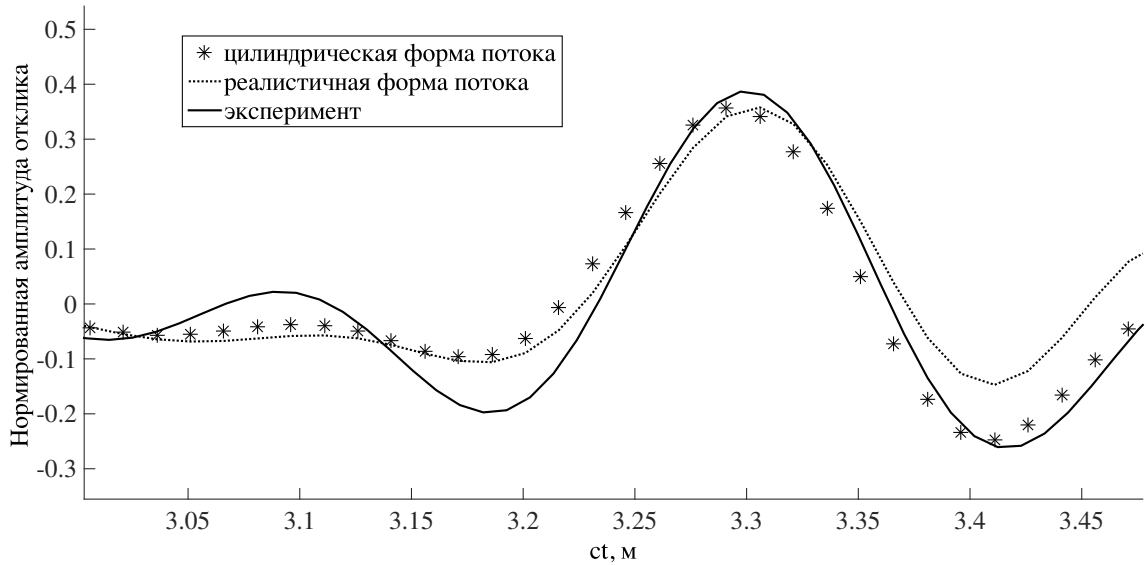


Рисунок 4.10 — Сравнение моделирования и эксперимента для микрофона 2,  
 $V = 20$  м/с.

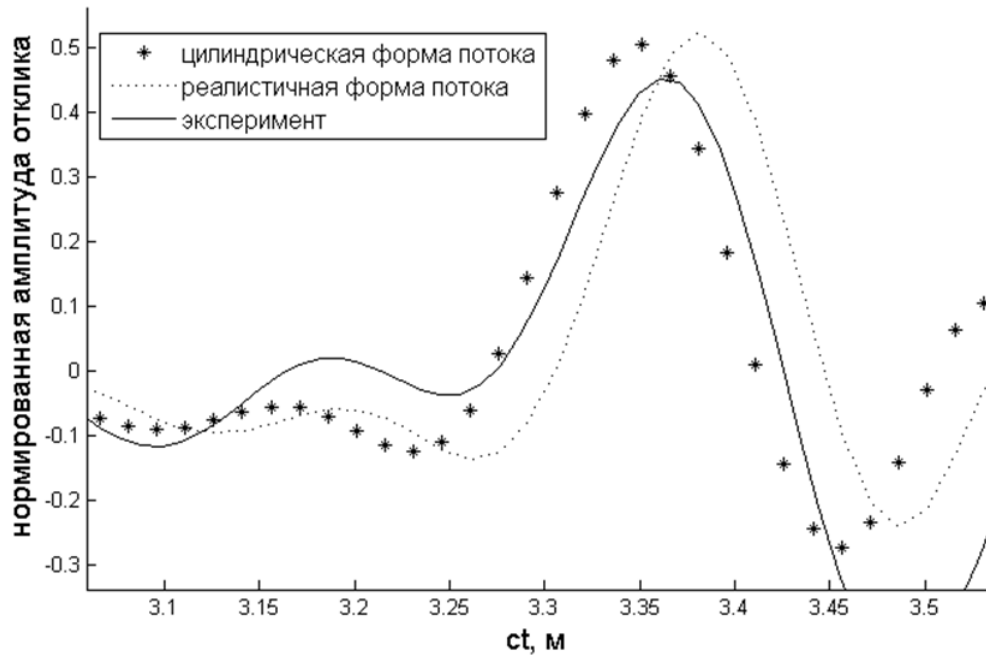


Рисунок 4.11 — Сравнение моделирования и эксперимента для микрофона 2,  
 $V = 60$  м/с.

Как видно из графиков, теоретические результаты неплохо согласуются с экспериментальными данными. Также стоит отметить, что моделирование не описывает падение амплитуды сигнала на скоростях 60 и 80 м/с. Это косвенно свидетельствует о том, что падение амплитуды обусловлено флуктуациями в потоке, которые здесь не учитываются.

Сигналы на микрофонах 1 и 3 (выше и ниже микрофона 2, см. Рис. 4.1) слабо отличаются от сигналов на микрофоне 2. На этих микрофонах снос выражен слабее, а фокусировка приводит не к усилению, а ослаблению амплитуды.

## 4.5 Шумы и время накопления

Стоит отметить, что "сырой" сигнал на приемном микрофоне сильно зашумлен, особенно при большой скорости потока. Использование MLS техники в данном случае может рассматриваться как эффективная противозумовая мера. А именно, квазишумовые сигналы до корреляционной обработки выглядят, как показано на (Рис. 4.12, 4.13). Полезный сигнал составляет примерно 0.1 Па, он теряется на фоне шумов уже при скорости потока 20 м/с (шум на микрофоне составляет 1 Па), и совсем теряется при скорости потока 80 м/с (шум составляет 10 Па). Корреляционная обработка позволяет выделить импульсный отклик весьма хорошо до 60 м/с (Рис. 4.12).

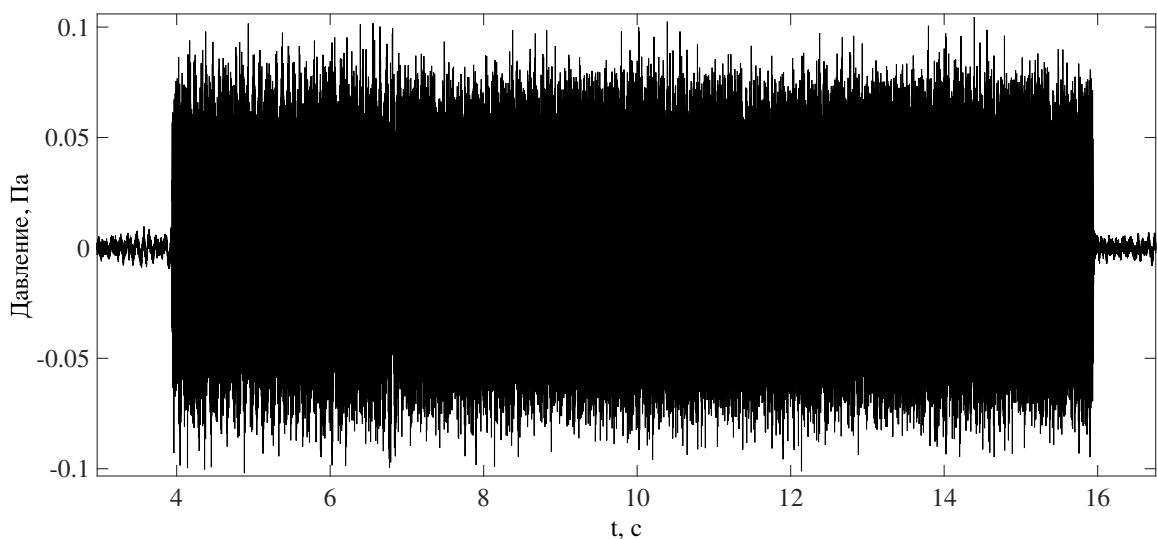


Рисунок 4.12 — Сигнал до обработки при скорости потока  $V = 0$  м/с.

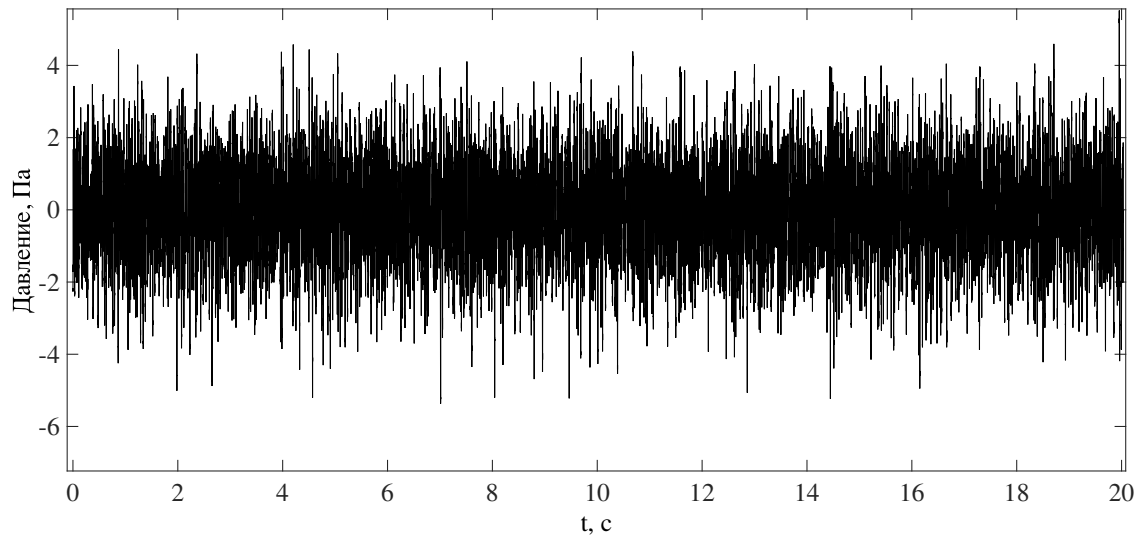


Рисунок 4.13 — Сигнал до обработки при скорости потока  $V = 60$  м/с.

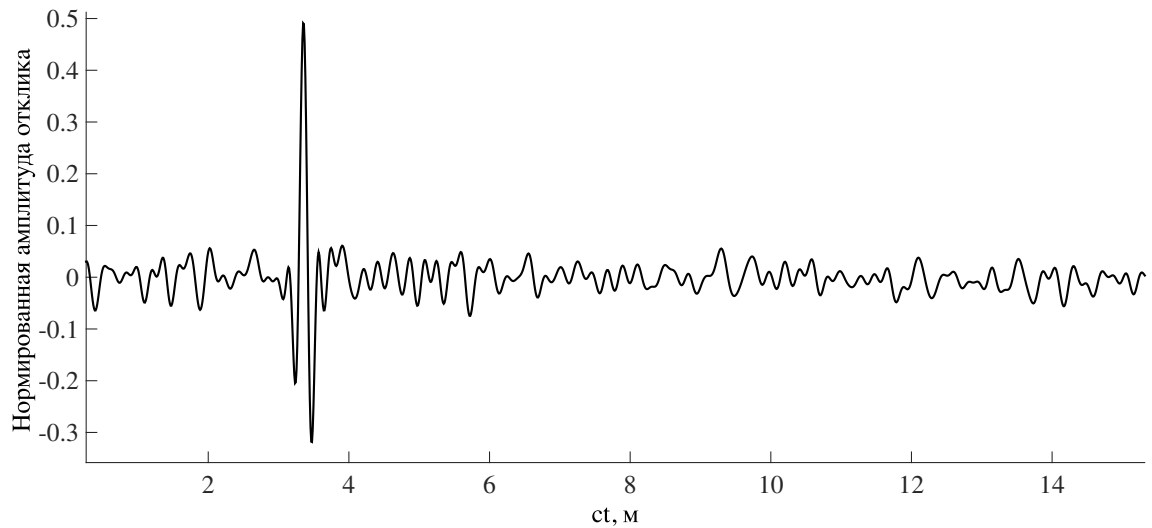


Рисунок 4.14 — Восстановленный импульсный отклик при скорости потока  $V = 60$  м/с.

Дальнейшее снижение шума возможно за счет увеличения времени накопления сигнала. Был проведен эксперимент по увеличению времени накопления в 3 раза. При этом средний квадрат шума снижался в 3 раза в полном соответствии с теоретическими представлениями. При работе в сильных потоках авторы предлагают увеличивать время накопления еще существеннее.

## 4.6 Заключение

В данной работе представлены результаты проведения прямого дифракционного эксперимента в присутствии воздушной струи. Проверялась возможность проведения измерений с использованием MLS-техники на фоне струи, создающей значительный шум. В рамках данного подхода удалось восстановить импульсный отклик, а также пронаблюдать основные эффекты, оказываемые потоком на звук: фокусировку и снос сигнала. Кроме того, был произведен теоретический расчет этих эффектов в предположении небольших чисел Маха и двух различных форм потока: цилиндрической и реалистичной, основанной на данных. Результаты расчета показали хорошее согласование с экспериментом.



## Глава 5. Дифракция на вытянутом теле вращения с импедансными границами. Метод граничного интегрального параболического уравнения

В данной главе изучается задача дифракции на вытянутом теле вращения с импедансными граничными условиями. Рассматривается случай приосевого падения высокочастотной волны. Дифракционный процесс описывается с помощью метода параболического уравнения. С помощью теоремы Грина выводится граничное интегральное уравнения типа Вольтерра. Для задачи дифракции на тонком конусе с постоянным импедансом строится итерационное численное решение. Также, численные результаты сравниваются с результатами прямого дифракционного акустического эксперимента, выполненного с использованием метода М-последовательности

### 5.1 Введение

В этой главе рассматривается задача дифракции на вытянутом теле вращения. Иными словами, предполагается, что продольные размеры тела значительно превышают его поперечные размеры. Поле на поверхности удовлетворяет импедансным граничным условиям. Рассматривается случай приосевого падения. Также предполагается, что длины волн значительно меньше продольных размеров препятствия. При таких предположениях дифракционная задача значительно упрощается и может быть решена в рамках метода параболического уравнения.

Задачи дифракции на вытянутых телах привлекают значительное внимание исследователей. В частности, хорошо изучен случай идеальных граничных условий [Andronov2011; Andronov2012; Andronov2012\_2; Kirpichnikova2013; Popov2014; Engineer1998; Smyshlyaev1990; Felsen1957]. Этот случай также рассматривался авторами [Shanin2011; Shanin2017]. Подробный обзор существующих методов может быть найден в [Shanin2017]. К сожалению, задачи дифракции на телах вращения с импедансными граничными условиями практически не изучены. Авторам известны лишь

работы, посвященные импедансному конусу [Lyalinov2003; Bernard2004; Antipov2003]. В данных работах с помощью интегрального представления Конторовича-Лебедева задачу удастся свести интегральному уравнению типа Фредгольма. Для случая тонкого конуса строится диаграмма направленности. В [Lyalinov2009] исследовано дальнее поле вблизи поверхности конуса.

Настоящая работа является обобщением результатов, полученных в [Shanin2017], на случай импедансных граничных условий. А именно, выводится граничное интегральное уравнение в параболической постановке. Полученное уравнение относится к классу Вольтерра, что позволяет его решить с помощью метода итераций.

В работе выводятся интегральные уравнения двух типов. Уравнение первого типа, более общее, является двумерным и имеет ядро, зависящее от четырех переменных: двух координат источника и двух координат приемника на поверхности препятствия. Данное уравнение формулируется для произвольного вытянутого тела. Путем учета угловой симметрии выводится ряд одномерных уравнений для угловых мод. Эти уравнения, соответственно, справедливы только для тел вращения. При осевом падении остается только уравнение для нулевой моды, которое решается методом итераций для задачи дифракции на конусе с постоянным импедансом.

Кроме того, полученные численные и аналитические результаты сравниваются с результатами прямого акустического дифракционного эксперимента, выполненного с применением метода М-последовательности. Сравнение проводится для случая идеальных граничных условий Неймана.

## 5.2 Постановка задачи

### 5.2.1 Постановка задачи для уравнения Гельмгольца

Рассмотрим трехмерное пространство, описываемое цилиндрическими координатами  $(x, r, \varphi)$ . Будем считать, что  $x$  — продольная координата в том смысле, что все волновые процессы происходят под малым углом к оси  $x$ . Пусть везде вне тела выполняется уравнение Гельмгольца:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\perp} + k^2\right) \tilde{u}(x, r, \varphi) = 0, \quad (5.1)$$

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (5.2)$$

Временная зависимость имеет форму  $\exp(-i\omega t)$  и далее не выписывается. Тело вращения занимает симметричную относительно оси  $x$  область  $r < f(x)$ . Будем обозначать поверхность тела символом  $\Gamma$ . Тело может быть как компактным ( $X_1 \leq x \leq X_2$ ), так и полубесконечным ( $x \geq X_1$ ). Примером тела вращения является конус:

$$r = f(x) = \alpha x, x \geq 0. \quad (5.3)$$

Падающая волна имеет вид:

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{ik(x \cos \theta + r \cos \varphi \sin \theta)\}, \quad (5.4)$$

где угол падения  $\theta$  предполагается малым.

Полное поле  $\tilde{u}$  представляется в следующем виде:

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{\text{in}} + \tilde{u}^{\text{sc}}. \quad (5.5)$$

Здесь  $\tilde{u}^{\text{sc}}$  — рассеянное поле, удовлетворяющее условиям излучения. Условия излучения формулируются в виде принципа предельного поглощения. А именно, предполагается, что волновое число  $k$  имеет малую положительную мнимую часть. Следовательно, рассеянное поле затухает при  $|x| \rightarrow \infty$  или  $|r| \rightarrow \infty$ .

На поверхности тела должны выполняться импедансные граничные условия:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} = \eta \tilde{u}, \quad (5.6)$$

где  $\eta$  — импеданс,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности тела. На импеданс накладывается условие неизлучения энергии

$$\text{Im} [\eta] \leq 0. \quad (5.7)$$

Если на поверхности тела имеются конические точки (такие, как вершина конуса), то в них должны удовлетворяться условия Мейкснера, заключающиеся в интегрируемости «энергии»  $|\nabla \tilde{u}|^2 + |\tilde{u}|^2$  вблизи конической точки.

### 5.2.2 Постановка задачи для параболического уравнения

Предполагается, что тело вращения вытянуто в том смысле, в котором это понятие было введено в [Shanin2017]. А именно, предполагается, что дифракционный процесс носит приосевой характер, т. е. выполнены следующие условия:

- Угол падения мал:  $\theta \ll 1$ .
- Наклон поверхности меняется плавно:  $\dot{f} \ll 1$ . Здесь  $\dot{f}$  - производная  $df/dx$ .
- Угол дифракции мал:  $(\ddot{f}/k)^{1/3} \ll 1$ . Здесь  $\ddot{f}$  - производная  $d^2f/dx^2$ .

Поясним последнее условие. Продольный размер зоны Френеля определяется выражением [Fok1970]:

$$\Delta x = \left(\ddot{f}\right)^{-2/3} k^{-1/3}. \quad (5.8)$$

Угол дифракции может быть оценен как изменение наклона поверхности на  $\Delta x$ , т.е. как  $\Delta x \ddot{f} = \left(\ddot{f}/k\right)^{1/3}$ .

В соответствии с методом параболического уравнения, представим полное поле в виде

$$\tilde{u}(x, r, \varphi) = e^{ikx} u(x, r, \varphi), \quad (5.9)$$

где  $u(x, r, \varphi)$  является медленной функцией  $x$  по сравнению с экспоненциальным множителем. Подставляя (5.9) в (5.1) и пренебрегая членом с второй производной по  $x$ , получаем параболическое уравнение теории дифракции (ПУТД):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_{\perp}\right) u = 0. \quad (5.10)$$

Падающая волна (5.4) в параболическом приближении принимает вид

$$u^{\text{in}}(x, r, \varphi) = \exp\{ik(\theta r \cos \varphi - x\theta^2/2)\}, \quad (5.11)$$

где учтено, что  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ . Легко проверить, что (5.11) удовлетворяет (5.10). В случае осевого падения  $\theta = 0$  имеем

$$u^{\text{in}} = 1. \quad (5.12)$$

Импедансные граничные условия (5.6) переходят в

$$N[u](x, f(x), \varphi) = \eta u, \quad N \equiv \frac{\partial}{\partial r} - ik\dot{f}. \quad (5.13)$$

Переход от  $\partial/\partial n$  к  $N$  подробно обсуждается в [Shanin2017]. А именно, непосредственно вычисляя производную от (5.9), и пренебрегая членами порядка  $(\dot{f})^2$ , получим (5.13).

Как известно, наличие импедансных граничных условий может приводить к появлению поверхностных волн. Если их скорость существенно меньше скорости волн в среде, параболическое приближение не будет справедливым. Потребуем выполнения следующего условия

$$\eta/k \ll 1. \quad (5.14)$$

Тогда скорость распространения поверхностных волн будет близка к скорости звука [Korolkov2016], и, следовательно, они будут хорошо описываться параболическим приближением. Также предполагается выполнение условия неизлучения энергии (5.7).

Постановка задачи для ПУТД должна быть дополнена начальным условием

$$u^{\text{sc}} = 0, \quad \text{при } x < X_1, \quad (5.15)$$

отражающим тот факт, что ПУТД описывает только волны, распространяющиеся в положительном направлении.

Кроме того, должны выполняться условия излучения, накладываемые в виде принципа предельного поглощения.

Наконец, требуется выполнение условий Мейкснера. А именно, вблизи конечной точки требуется локальная интегрируемость следующего выражения [Shanin2017]:

$$|\Delta_{\perp} u|^2 + |u|^2. \quad (5.16)$$

### 5.3 Вывод граничного интегрального уравнения

#### 5.3.1 Теорема Грина для параболического уравнения

Введем векторные обозначения для точек пространства  $\mathbf{r} = (x, r, \varphi)$ . Определим функцию Грина как решение неоднородного параболического уравнения с источником в точке  $\mathbf{r}_s = (x_s, r_s, \varphi_s)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_{\perp} \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s), \quad (5.17)$$

где оператор в левой части действует на компоненты вектора  $\mathbf{r}$ , а  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Решение уравнения должно удовлетворять начальному условию, то есть должно обращаться в ноль при  $x < x_s$ . При помощи непосредственной подстановки в (5.17) можно убедиться, что функция Грина при  $x > x_s$  имеет следующий вид:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{k}{2\pi i(x - x_s)} \exp\left\{ \frac{ik}{2} \frac{(\Delta r)^2}{x - x_s} \right\}, \quad (5.18)$$

где  $\Delta r$  - расстояние между проекциями векторов в поперечной плоскости:

$$(\Delta r)^2 = r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos(\varphi - \varphi_s). \quad (5.19)$$

Сформулируем теорему Грина для параболического уравнения. Пусть  $\Omega$  - конечная связная область с гладкой границей  $\partial\Omega$  и внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . Рассмотрим пару неоднородных параболических уравнений

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_{\perp} \right) v(x, r, \varphi) = q(x, r, \varphi), \quad (5.20)$$

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \Delta_{\perp} \right) w(x, r, \varphi) = h(x, r, \varphi) \quad (5.21)$$

для некоторых  $v, q, w, h$ . Отметим, что второе уравнение является комплексно сопряженным к первому, то есть описывает распространение волн в отрицательном направлении.

Введем векторные функции:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left( ikv, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad \mathbf{w}(x, y, z) = \left( -ikw, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \quad (5.22)$$

Наконец, сформулируем теорему Грина [Shanin2017]:

$$\int_{\partial\Omega} [(\mathbf{v}\mathbf{n})w - (\mathbf{w}\mathbf{n})v]dS = 2ik \int_{\Omega} [qw - hv]dV. \quad (5.23)$$

### 5.3.2 Граничное интегральное уравнения для полного поля

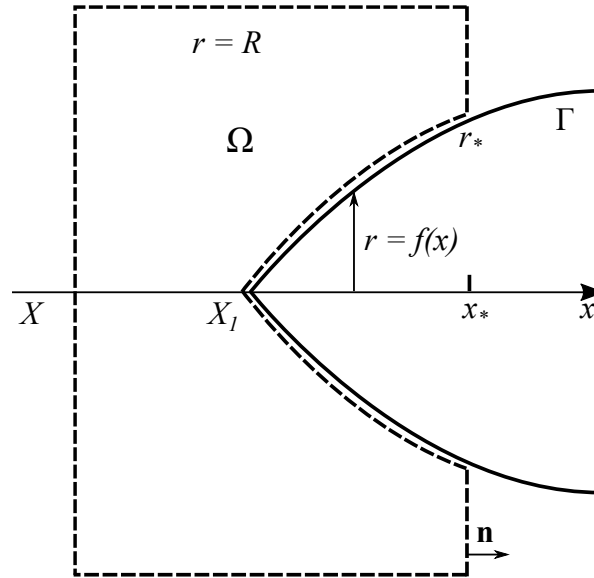


Рисунок 5.1 — Сечение области для теоремы Грина.

Применим теорему Грина к области  $\Omega$ , сечение которой изображено на Рис. 5.1. Область ограничена плоскостью  $x = X$ , где  $X < X_1$ , плоскостью  $x = x_*$  для некоторого  $x_*$ , цилиндром  $r = R$ , где  $R \rightarrow \infty$ , и поверхностью тела вращения  $\Gamma$ . Область  $\Omega$  обладает осевой симметрией относительно оси  $x$ . В качестве  $v$  подставим в (5.20) рассеянное поле  $u^{\text{sc}}$ , а в качестве  $w$  подставим  $g(\mathbf{r}_*, \mathbf{r})$ , где

$$r_* = (x_* + \varepsilon, f(x_* + \varepsilon), \varphi_*). \quad (5.24)$$

Здесь  $\varphi_*$  предполагается произвольным,  $\varepsilon$  — малым (ниже рассматривается предел  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Проводя выкладки, аналогичные таковым в [Shanin2017], получаем следующее интегральное уравнение:

$$U^{\text{sc}}(x_*, \varphi_*) = \frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} U^{\text{sc}}(x, \varphi) \{ \bar{N} [W] (x, \varphi) - \eta W(x, \varphi) \} f(x) dx d\varphi + \\ \frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} W(x, \varphi) \{ N [U^{\text{in}}] (x, \varphi) - \eta U^{\text{in}}(x, \varphi) \} f(x) dx d\varphi, \quad (5.25)$$

где были введены следующие обозначения:

$$\bar{N} \equiv \frac{\partial}{\partial r} - ik \frac{df}{dx}, \quad (5.26)$$

$$U^{\text{sc}}(x, \varphi) \equiv u^{\text{sc}}(x, f(x), \varphi), \quad (5.27)$$

$$U^{\text{in}}(x, \varphi) \equiv u^{\text{in}}(x, f(x), \varphi), \quad (5.28)$$

$$W(x, \varphi) \equiv w(x, f(x), \varphi). \quad (5.29)$$

Введем обозначение для ядра уравнения (5.25):

$$K(x_*, \varphi_*, x, \varphi) \equiv \frac{if(x)}{k} (\bar{N} [W] (x, \varphi) - \eta W(x, \varphi)). \quad (5.30)$$

Уравнение (5.25) может быть упрощено. А именно, применяя теорему Грина к области  $\Omega$  с функциями

$$v(r) = u^{\text{in}}(r), \quad w(r) = g(r_*, r),$$

получим интегральное соотношение:

$$U^{\text{in}}(x_*, \varphi_*) = \frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} U^{\text{in}}(x, \varphi) \{ \bar{N} [W] (x, \varphi) - \eta W(x, \varphi) \} f(x) dx d\varphi + \\ \frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} W(x, \varphi) \{ N [U^{\text{in}}] (x, \varphi) - \eta U^{\text{in}}(x, \varphi) \} f(x) dx d\varphi + 2U^{\text{in}}(x_*, \varphi_*), \quad (5.31)$$

Складывая (5.25) и (5.31), получим уравнение для полного поля  $U = U^{\text{sc}} + U^{\text{in}}$  на поверхности тела:

$$U(x_*, \varphi_*) = \int_0^{2\pi} \int_{X_1}^{x_*} K(x_*, \varphi_*, x, \varphi) U(x, \varphi) dx d\varphi + 2U^{\text{in}}(x_*, \varphi_*). \quad (5.32)$$

Ядро (5.25) дается следующим выражением:



$$K(x_*, \varphi_*, x, \varphi) = \frac{ikf(x)}{2\pi} \left( \frac{1}{ik} \frac{ik\dot{f}(x) - \eta}{x_* - x} + \frac{f(x) - f(x_*) \cos(\varphi - \varphi_*)}{(x_* - x)^2} \right) \times \exp\left\{ \frac{ik}{2} \frac{f(x)}{x_* - x} \right\} \quad (5.33)$$

Уравнение (5.32) является уравнением Вольтерра по переменной  $x$  и уравнением с разностным ядром по переменной  $\varphi$ .

### 5.3.3 Граничное интегральное уравнение для угловых мод

Воспользуемся осевой симметрией задачи. Представим падающее и полное поля на поверхности тела в виде рядов Фурье:

$$U^{\text{in}}(x, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n^{\text{in}}(x) e^{in\varphi}, \quad U(x, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(x) e^{in\varphi}. \quad (5.34)$$

Функции  $U_n$  удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$U_n(x_*) = \int_{X_1}^{x_*} K_n(x_*, x) U_n(x) dx + 2U_n^{\text{in}}(x_*), \quad (5.35)$$

где

$$K_n(x_*, x) = \int_0^{2\pi} K(x_*, \varphi, x, 0) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (5.36)$$

Используя (5.33), можно получить явное выражение для  $K_n(x_*, x)$ :

$$K_n(x) = \frac{-(-i)^{n+1}}{(x_* - x)^2} \exp\left\{ \frac{ik}{2} \frac{r_*^2 + r^2}{x_* - x} \right\} \left[ \left( r + (x_* - x) \left( \frac{df}{dx} - \frac{\eta}{ik} \right) \right) J_n\left( \frac{kr_*r}{x_* - x} \right) - \frac{ir_*}{2} \left( J_n \right. \right. \quad (5.37)$$

где  $r = f(x)$ ,  $r_* = f(x_*)$ ,  $J_n$  - функция Бесселя первого рода. Стоит отметить, что по аналогии с [Shanin2017] для конечного тела вращения может быть получено выражение для диаграммы направленности и доказана оптическая теорема.

## 5.4 Дифракция на импедансном конусе при осевом падении

### 5.4.1 Граничное интегральное уравнение для конической задачи при осевом падении

Рассмотрим конус, для которого  $X_1 = 0$ , т. е. вершина конуса находится в начале координат, как показано на Рис. 5.2. Профиль конуса представляет собой прямую линию (5.3), где  $\alpha$  является тангенсом угла между осью конуса и его образующей. Предполагается, что  $\alpha \ll 1$ .

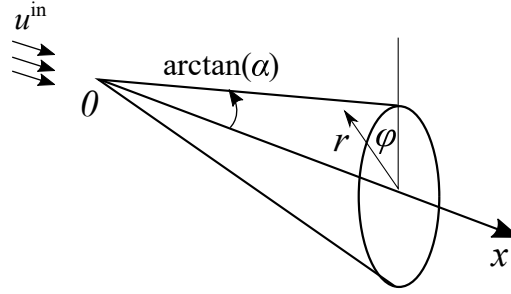


Рисунок 5.2 — Геометрия задачи дифракции на конусе.

Пусть падающая волна распространяется вдоль оси  $x$ , то есть имеет вид (5.10). В этом случае полное поле обладает осевой симметрией и описывается нулевой компонентой ряда (5.34):

$$U(x, \varphi) = U_0(x) = U(x).$$

Тогда задача сводится к одномерному интегральному уравнению:

$$U(x_*) = \int_0^{x_*} K_0(x_*, x) U(x) dx + 2 \quad (5.38)$$

с ядром

$$K_0 = \frac{ik\alpha^2 x_* x}{(x_* - x)^2} \exp\left\{\frac{ik\alpha^2}{2} \frac{x_*^2 + x^2}{x_* - x}\right\} \times \left[ J_0\left(k\alpha^2 \frac{xx_*}{x_* - x}\right) + iJ_1\left(k\alpha^2 \frac{xx_*}{x_* - x}\right) - \frac{\eta(x_* - x)}{ikx_*\alpha} \right] \quad (5.39)$$

### 5.4.2 Случай разделяющихся переменных

Пусть импеданс меняется обратно пропорционально  $x$ :

$$\eta = \frac{\tilde{\eta}}{x}. \quad (5.40)$$

Тогда задача для параболического уравнения может быть решена с помощью метода разделения переменных. Перейдем в систему координат  $(x, \rho, \varphi)$  с

$$\rho = r/x, \quad (5.41)$$

и введем новую полевую переменную  $\hat{u}$ :

$$u(x, \rho x, \varphi) = \Xi^{-1}(x, \rho) \hat{u}(x, \rho, \varphi), \quad \Xi(x, \rho) \equiv kx \exp\{-ikx\rho^2/2\}. \quad (5.42)$$

Уравнение (5.10) переходит в

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ikx^2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right) \hat{u} = 0, \quad (5.43)$$

а граничное условие (5.6) переходит в

$$\frac{1}{x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho}(x, \alpha, \varphi) = \eta \hat{u}. \quad (5.44)$$

При выполнении (5.40) условие (5.44) переходит в

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho}(x, \alpha, \varphi) = \tilde{\eta} \hat{u} \quad (5.45)$$

и, следовательно, переменные разделяются.

Представим полное поле в виде

$$\hat{u} = \hat{u}^{\text{sc}} + \hat{u}^{\text{in}}, \quad \hat{u}^{\text{in}} = \Xi(x, \rho).$$

Разделяя переменные в (5.43), получим следующее представление для рассеянного поля:

$$\hat{u}^{\text{sc}} = \int C(\lambda) H_0^1(\sqrt{\lambda}\rho) \exp\left(i \frac{\lambda}{2kx}\right) d\lambda, \quad (5.46)$$

где  $H_0^1$  — функция Ханкеля 1-го рода, а  $C(\lambda)$  и контур интегрирования подлежат определению. Для определения  $C(\lambda)$  подставим (5.46) в (5.44), и воспользуемся известным соотношением из теории Бесселевых функций [Gradstein1963]:

$$kx \exp\left\{\frac{-ikx\rho^2}{2}\right\} = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{i\lambda}{2kx}\right\} J_0(\sqrt{\lambda}\rho) d\lambda \quad (5.47)$$

и получим:

$$C(\lambda) = \frac{i}{2} \frac{\eta J_0(\sqrt{\lambda}\alpha) - \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\alpha)\sqrt{\lambda}}{\eta H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\alpha) - \dot{H}_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\alpha)\sqrt{\lambda}}, \quad (5.48)$$

где были введены следующие обозначения:

$$\frac{dJ_0(\sqrt{\lambda}\rho)}{d(\sqrt{\lambda}\rho)} \equiv \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\rho), \quad \frac{dH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)}{d(\sqrt{\lambda}\rho)} \equiv \dot{H}_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho). \quad (5.49)$$

Таким образом, рассеянное поле дается следующим выражением:

$$\hat{u}^{\text{sc}} = \frac{i}{2kx} \exp\left(\frac{ik\rho^2 x}{2}\right) \int_0^\infty \frac{\eta J_0(\sqrt{\lambda}\alpha) - \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\alpha)}{\eta H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\alpha) - \dot{H}_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\alpha)} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho) \exp\left(i\frac{\lambda}{2kx}\right) d\lambda. \quad (5.50)$$

Данный ответ можно получить и непосредственно из (32). Действительно, интегральное уравнение в данном случае сводится к уравнению с разностным ядром при помощи замены  $x \rightarrow 1/\tau$ . Решение, соответственно, строится с помощью интегрального преобразования Фурье. Аналогичные выкладки были проделаны авторами в [Shanin2017].

Стоит заметить, что импеданс в данном случае достигает больших значений при малых  $x$  и, следовательно, условие (5.14) нарушается вблизи носика. Таким образом, формула (5.50) является только модельным решением для параболического уравнения. Ниже формула (5.50) будет использована для верификации метода численного интегрирования уравнения (5.38).

Также стоит отметить, что аналогичный случай разделяющихся переменных для уравнения Гельмгольца рассмотрен в [Felsen].

### 5.4.3 Численное решение уравнения (5.38)

#### Случай переменного импеданса (5.40)

При малых  $x$  граничные условия в уравнении (5.38) близки к идеальным условиям Дирихле. Можно показать, что граничное интегральное уравнение для задачи Дирихле является уравнением Вольтерра 1-го рода, а такое уравнение, как известно, не может быть решено методом итераций. Следовательно, метод итераций не может быть применен и к уравнению (5.38).

Будем решать (5.38), заменяя интеграл в правой части его дискретным аналогом и сводя интегральное уравнение к системе линейных уравнений. А именно, будем искать решение, аппроксимируя  $U$  кусочно-линейными функциями [Zenkevitz]:

$$N_i(x) = \begin{cases} 0, & x_{i-1} > x, \\ (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}), & x_i > x > x_{i-1}, \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i), & x_{i+1} > x > x_i, \\ 0, & x > x_{i+1}. \end{cases} \quad (5.51)$$

Индекс  $i$  пробегает значения от 1 до  $M$ , где  $M$  - число базисных функций. Поле  $U$  ищется в виде:

$$U(x) \approx \sum_{i=1}^M U_i N_i(x), \quad (5.52)$$

где  $U_i$  - неизвестные числа подлежащие определению. Подставляя (46) в (32), получим следующую систему линейных уравнений:

$$U_i = \sum_{j=1}^M K_{ij} U_j + 2, \quad \text{где} \quad K_{ij} = \int_0^{x_i} K_0(x_i, x) N_j(x) dx. \quad (5.53)$$

Для корректного вычисления матричных элементов  $K_{ij}$  необходимо учитывать поведение ядра  $K_0(x_*, x)$  вблизи особой точки  $x_* = x$ . Используя асимптотические формулы для функций Бесселя большого аргумента, можно

показать, что ядро имеет особенности двух типов. Первая особенность имеет осциллирующий характер:

$$K_0^\alpha(x_*, x) \sim \sqrt{\frac{xx_*}{(x_* - x)^3}} \left(1 + \frac{i(x - x_*)}{8k\alpha^2 xx_*}\right) \exp\left\{\frac{ik\alpha^2}{2} \frac{(x_* - x)^2}{x_* - x}\right\} \quad (5.54)$$

Вторая особенность является интегрируемой:

$$K_0^b(x_*, x) \sim \sqrt{\frac{1}{xx_*(x_* - x)}} \exp\left\{\frac{ik\alpha^2}{2}(x_* - x)\right\}. \quad (5.55)$$

Для вычисления интеграла от  $K_0^a(x_*, x)$  контур интегрирования деформировался в верхнюю полуплоскость. Для вычисления  $K_0^b(x_*, x)$  применялся метод вычитания сингулярности [20]. После регуляризации матричные элементы  $K_{ij}$  вычислялись с помощью метода трапеций. На (Рис. 5.3) представлен результат решения системы (5.53) и приведено точное решение (5.50).

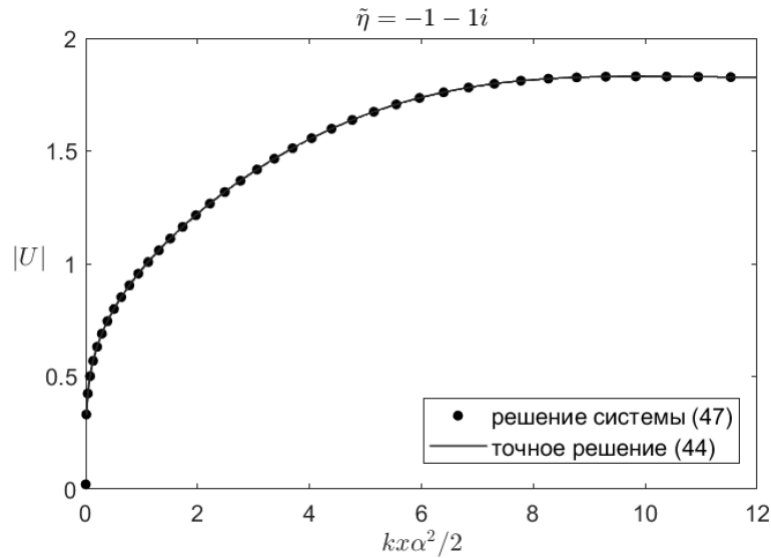


Рисунок 5.3 — Численное решение для случая переменного импеданса.

### Случай постоянного импеданса

При постоянном импедансе уравнение (5.38) может быть решено методом итераций. А именно, будем решать следующую итерационную задачу:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(x), \quad (5.56)$$

$$U^{(0)}(x) = 2U^{\text{in}}(x) = 2, \quad (5.57)$$

$$U^{(n+1)}(x_*) = \int_0^{x_*} K_0(x_*, x) U^{(n)}(x) dx, \quad n > 0. \quad (5.58)$$

Результат итерационного решения приведен на (Рис. 5.4). Как можно видеть из графиков, для достижения приемлемой точности достаточно совершить 10-15 итераций.

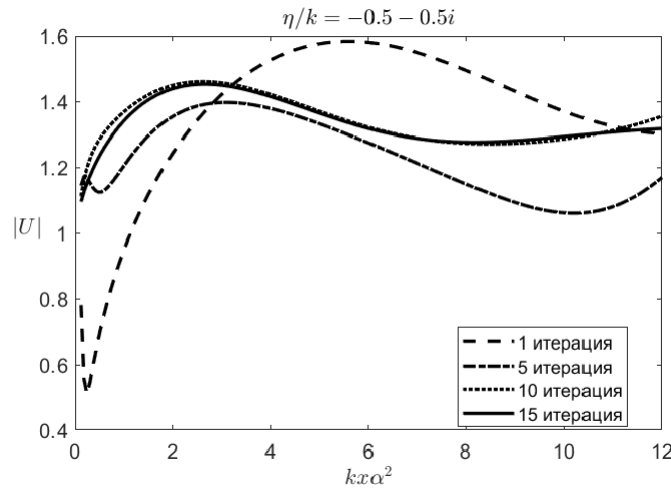


Рисунок 5.4 — Итерационное решение для случая постоянного импеданса.

## 5.5 Прямой дифракционный эксперимент на идеально жестком конусе

Для случая идеально жесткого конуса, т. е. при  $\eta = 0$ , уравнение (26) было проверено экспериментально. Узкий (угол при вершине  $2\alpha = 5.5$  градусов) цельный дюралюминиевый конус круглого сечения длиной 1 метр был подвешен в воздухе. Маленький (характерный размер около 1 см) микрофон был помещен на его поверхности. Конус облучался при помощи точечного по сравнению с длиной волны источника (использовался арматурный источник Knowles RAB-32257 с характерным размером около 1 см) с разных сторон так, чтобы микрофон попадал в освещенную источником или затененную конусом область Рис. 5.5.

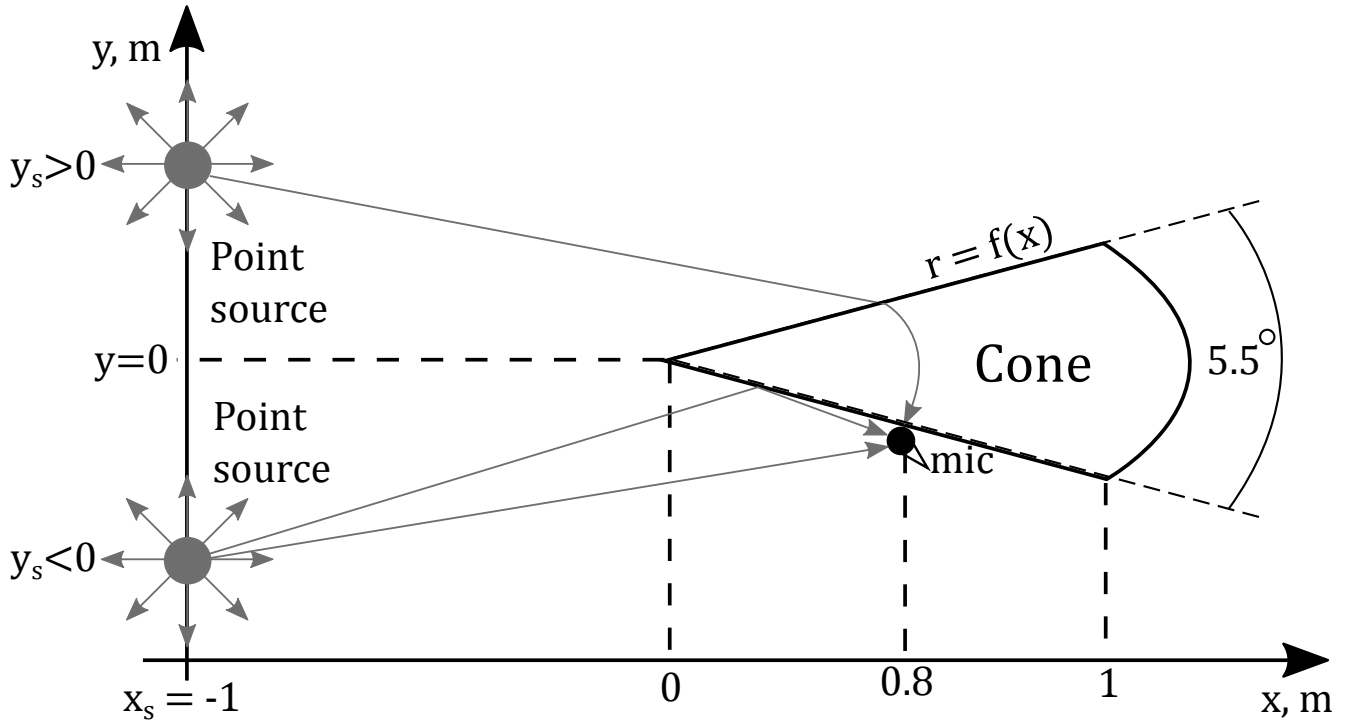


Рисунок 5.5 — Схема эксперимента.

Эксперимент проводился при помощи метода М-последовательности: конус облучался псевдослучайным сигналом с частотами 1 кГц – 10 кГц, и из корреляции между псевдослучайным сигналом и выходным сигналом с микрофона вычислялся импульсный отклик системы [ValyaevMLS]. После наложения маски во временной области при помощи преобразования Фурье вычислялся частотный отклик.

### 5.5.1 Численное решение уравнения (5.30)

После аппроксимации поля на поверхности  $U$  кусочно-линейными функциями (45), оно представляется в виде:

$$U(x, \varphi) \approx \sum_{i=1}^M U_i(\varphi) N_i(x), \quad (5.59)$$

где  $U_i(\varphi)$  - неизвестные искомые функции, имеющие угловую зависимость. Подставив (5.59) в 26, получим систему интегральных уравнений:



$$U_i(\varphi_*) = \sum_{j=1}^M \int_0^{2\pi} K_{ij}(\varphi_*, \varphi) U_j(\varphi) d\varphi + 2U_i^{\text{in}}(\varphi_*), \quad (5.60)$$

где индекс  $i = 1, \dots, M$ ,

$$U_i^{\text{in}}(\varphi_*) = U^{\text{in}}(x_i, \varphi_*), \quad (5.61)$$

$$K_{ij}(\varphi_*, \varphi) = \int_0^{x_i} K(x_i, \varphi_*, x, \varphi) N_j(x) dx. \quad (5.62)$$

Подынтегральное выражение в (54) осциллирует около точки  $x = x_i$ , что может вызвать численную ошибку. Как и в случае вычисления интеграла от (46), сместим контур интегрирования в верхнюю полуплоскость так, чтобы ядро  $K$  экспоненциально спадало. Затем дискретизируем систему (52) конечными разностями и решим ее методом итераций.

### 5.5.2 Результаты эксперимента и сравнение с решением (54)

#### Осевое падение

В случае осевого падения ( $r_s = 0$ ) дифрагированное поле практически отсутствовало. Поле, измеренное на поверхности конуса, было близко к полю, измеренному на аналогичном расстоянии от источника в отсутствие конуса. Этот результат можно качественно объяснить с помощью метода зон Френеля для заданного источника и приемника [Kravtsov]. Дифракция предполагается значительной, если препятствие покрывается несколькими зонами Френеля по отношению к координатам источника и приемника. Оценим разность прямого пути от источника к приемнику и пути луча, дифрагированного на конусе Рис. 5.6:

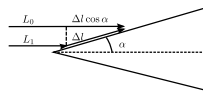


Рисунок 5.6 — Иллюстрация к оценке размера зоны Френеля.

$$L_1 - L_0 = \Delta l(1 - \cos \alpha) \approx \Delta \alpha^2/2. \quad (5.63)$$

Размер первой зоны Френеля  $\Delta l$  можно найти, приравняв разность путей к половине длины волны:

$$\Delta l = \lambda/\alpha^2. \quad (5.64)$$

В эксперименте использовались частоты 1-10 кГц. Соответственно, размер зоны Френеля будет минимален на высоких частотах. Для конуса, исследуемого в эксперименте с углом  $\alpha$  равным 2.75 градуса, минимальное значение величины  $\Delta l$  может быть оценено как  $(330/10^4)/(2.75 \times \pi/180)^2 \approx 14$ , что в 14 раз больше длины конуса. Следовательно, при осевом падении на конусе укладывается меньше одной зоны Френеля. Иными словами, при осевом падении данный конус представляет собой препятствие малых размеров, слабо возмущающее волновое поле.

Отметим, что аналогичный результат можно получить, непосредственно решая уравнение (32).

### Неосевое падение

Используя оценку, аналогичную (58), можно показать, что дифракционный процесс становится более заметным, когда источник смещается с оси конуса. В данном разделе предоставляется экспериментальное подтверждение этому факту. Результаты эксперимента для шести положений источника  $y_s = \pm 0.5, \pm 0.3, \pm 0.1$  м,  $x_s = -1$  м в сравнении с численным решением уравнения (54) показаны на **Рис. 7, 8, 9**. Микрофон был размещен на поверхности конуса в точке с продольной координатой  $x = 0.8$  м, как показано на **Рис. 5**. На графиках представлены модули величины  $|U/U^{\text{in}}|$ , чтобы исключить геометрическое затухание поля.

Из эксперимента можно сделать следующие выводы: 1) модуль поля в освещенной части конуса ( $y_s < 0$ ) больше, чем в теневой области ( $y_s > 0$ ); 2) Величина  $|U/U^{\text{in}}|$  стремится к 2 в освещенной зоне с ростом частоты (это соответствует случаю отражения от абсолютно жесткой стенки) и стремится к нулю в тени.

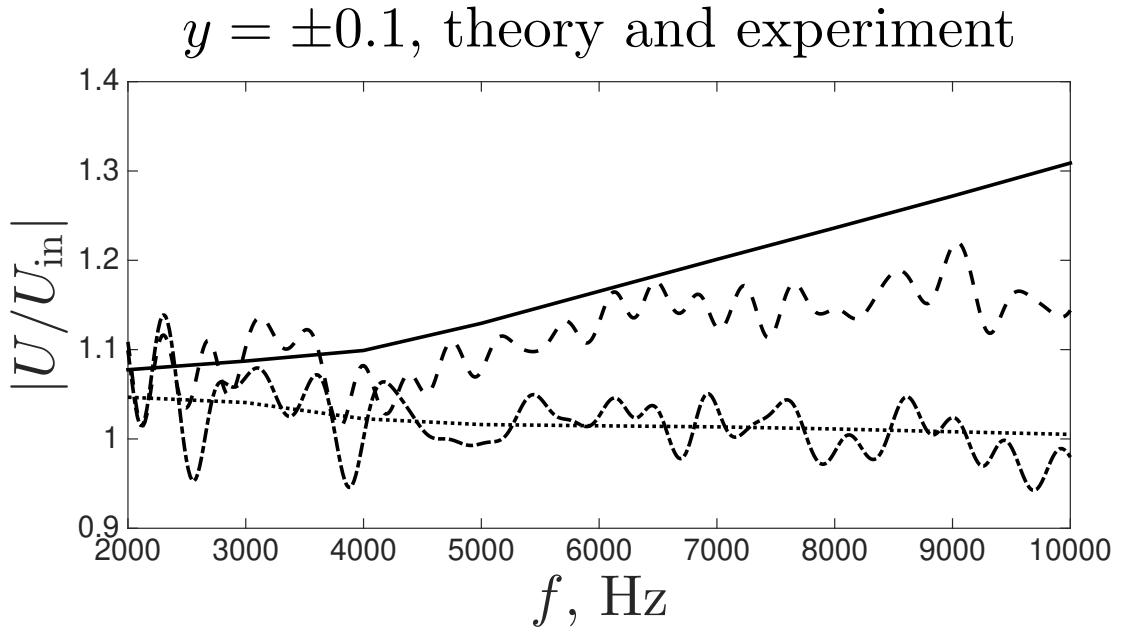


Рисунок 5.7 — Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для  $y = \pm 0.1$  м: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для  $y = -0.1$  м, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для  $y = 0.1$  м.

Расхождения в теории и эксперименте авторы связывают с ошибками измерения расстояний, электрическими шумами и несовершенством источника и микрофона. Также отметим, что точность параболического приближения уменьшается с ростом  $y$ , поскольку дифракционный процесс перестает быть приосевым.

## 5.6 Заключение

В данной работе с помощью метода параболического уравнения была рассмотрена дифракция на вытянутом теле вращения с импедансными граничными условиями в случае приосевого падения. С помощью теоремы Грина выведено граничное интегральное уравнение типа Вольтерра. Для случая осевого падения на конус с переменным импедансом (34) строится точное решение данного уравнения. Для случая постоянного импеданса интегральное уравнение решается численно с помощью метода итераций.

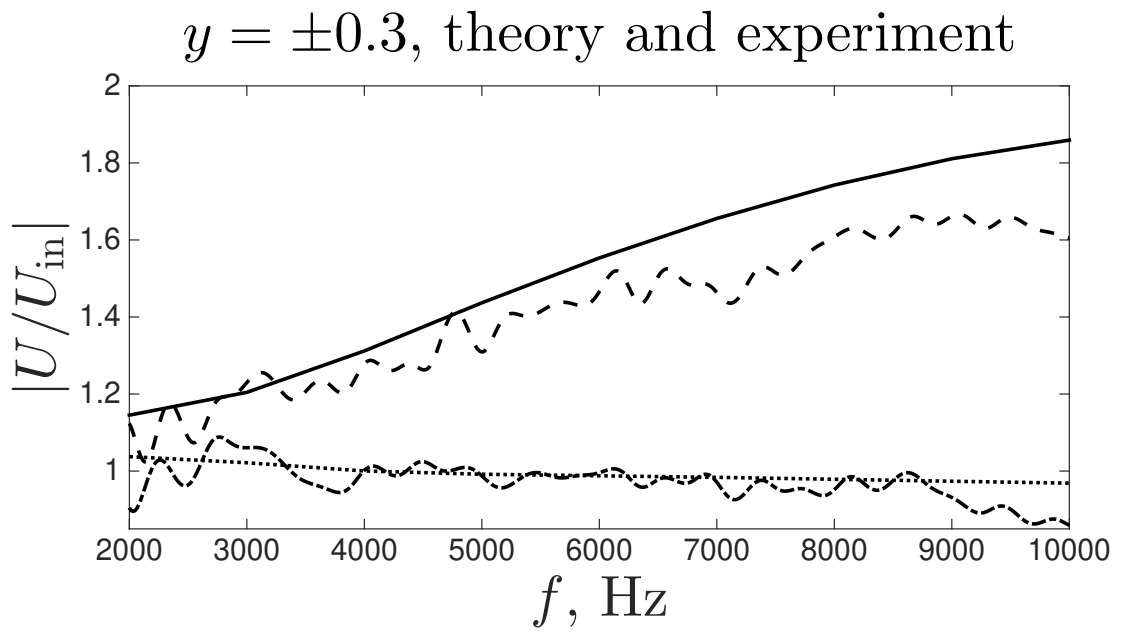


Рисунок 5.8 — Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для  $y = \pm 0.3$  м: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для  $y = -0.3$  м, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для  $y = 0.3$  м.

Полученные результаты подтверждается экспериментально для случая дифракции на идеальном жестком конусе с помощью прямого акустического дифракционного эксперимента с использованием метода М-последовательности.

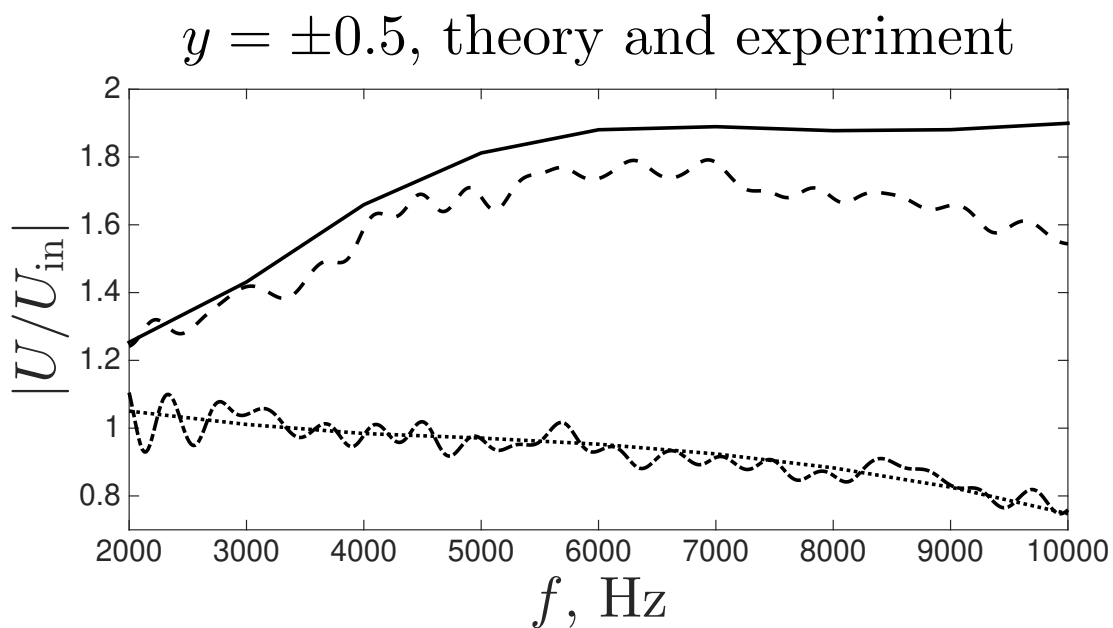


Рисунок 5.9 — Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для  $y = \pm 0.5$  м: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для  $y = -0.5$  м, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для  $y = 0.5$  м.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

Описан метод проведения прямого дифракционного эксперимента на основе М-последовательности. Частью методики является восстановление объемной скорости монопольного источника акустических волн с помощью метода двух микрофонов. Скорость восстанавливается с помощью теории Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода. С помощью описанной методики:

1. был проведен эксперимент по измерению угловой зависимости коэффициента отражения от звукопоглощающего материала, который позволит получить исчерпывающую информацию о звукоотражающих свойствах строительных материалов;
2. было проведено исследование прохождения звука через воздушную струю со сравнением результатов с численной моделью;
3. был проведен эксперимент по рассеянию акустических волн на узком конусе со сравнением результатов эксперимента с численной моделью на основе параболического уравнения теории дифракции.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Шанину А.В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Королькова А.И. за помощь в теоретических расчетах и плодотворные дискуссии.

## Список рисунков

2.1	Схема эксперимента. . . . .	12
2.2	Схема источника с адаптером для измерения объемной скорости. . .	13
2.3	Схема адаптера для измерения объемной скорости источника. . . .	15
2.4	Импульсная характеристика используемого фильтра. . . . .	19
2.5	Схема измерений в пустом полупространстве. . . . .	20
2.6	Измеренный импульсный отклик пустого полупространства. . . . .	20
2.7	Отклик, восстановленный без использования вайнштейновской поправки. . . . .	21
2.8	Импульсный отклик всей системы при измерении в пустом полупространстве. . . . .	21
3.1	Схема эксперимента. . . . .	25
3.2	Контур интегрирования. . . . .	28
3.3	Схема монопольного источника. . . . .	30
3.4	Пример импульсного отклика. По горизонтальной оси отложено расстояние от источника, по вертикальной оси отложена амплитуда импульсного отклика. Линия из точек соответствует сигналу до вычитания отклика свободного поля; сплошная линия – сигналу после вычитания; пунктирная линия – маске, необходимой для выделения участка, соответствующего отражению от меламина. Пик 1 соответствует прямому сигналу от источника; пара пиков 2 соответствует сигналу, отраженному от меламина (один пик от поверхности меламина, другой от подложки, на которую он наклеен); маска 3 предназначена для выделения отраженного сигнала.	32
3.5	График зависимости модуля коэффициента отражения $ R $ при угле падения равном $0^\circ$ . Пунктирной линией обозначен результат, полученный с помощью формулы (3.5), точками – с помощью формул (3.7), (3.8), сплошной линией – результат теоретического расчета на основе модели Био. . . . .	33

3.6	График зависимости модуля коэффициента отражения $ R $ при угле падения равном $30^\circ$ . Пунктирной линией обозначен результат, полученный с помощью формулы (3.5), точками – с помощью формул (3.7), (3.8), сплошной линией – результат теоретического расчета на основе модели Био. . . . .	34
3.7	График зависимости модуля коэффициента отражения $ R $ при угле падения равном $60^\circ$ . Пунктирной линией обозначен результат, полученный с помощью формулы (3.5), точками – с помощью формул (3.7), (3.8), сплошной линией – результат теоретического расчета на основе модели Био. . . . .	35
4.1	Схема эксперимента с потоком. . . . .	38
4.2	Геометрия эксперимента. Акустическая трасса перпендикулярна оси потока. . . . .	38
4.3	Геометрия эксперимента. Акустическая трасса неперпендикулярна оси потока. . . . .	39
4.4	Двухмерная модель. . . . .	41
4.5	Фокусировка звука потоком . . . . .	42
4.6	Данные термоанемометрии потока для скорости 55 м/с и сравнение с теоретическим расчетом по формуле (4.10). . . . .	44
4.7	Отклики на микрофоне 2 в случае, когда акустическая трасса перпендикулярна оси потока. . . . .	45
4.8	Отклики на микрофоне 2 в случае, когда акустическая трасса неперпендикулярна оси потока. . . . .	45
4.9	Результат моделирования сигнала на микрофоне 2. . . . .	47
4.10	Сравнение моделирования и эксперимента для микрофона 2, $V = 20$ м/с. . . . .	48
4.11	Сравнение моделирования и эксперимента для микрофона 2, $V = 60$ м/с. . . . .	48
4.12	Сигнал до обработки при скорости потока $V = 0$ м/с. . . . .	49
4.13	Сигнал до обработки при скорости потока $V = 60$ м/с. . . . .	49
4.14	Восстановленный импульсный отклик при скорости потока $V = 60$ м/с. . . . .	50
5.1	Сечение области для теоремы Грина. . . . .	57
5.2	Геометрия задачи дифракции на конусе. . . . .	60



5.3	Численное решение для случая переменного импеданса. . . . .	65
5.4	Итерационное решение для случая постоянного импеданса. . . . .	66
5.5	Схема эксперимента. . . . .	67
5.6	Иллюстрация к оценке размера зоны Френеля. . . . .	68
5.7	Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для $y = \pm 0.1$ м: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для $y = -0.1$ м, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для $y = 0.1$ м. . . . .	70
5.8	Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для $y = \pm 0.3$ м: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для $y = -0.3$ м, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для $y = 0.3$ м. . . . .	71
5.9	Сравнение результатов эксперимента с теоретическими для $y = \pm 0.5$ м: теоретическая зависимость (сплошная линия) и эксперимент (прерывистая линия) для $y = -0.5$ м, теоретическая зависимость (точечно-пунктирная линия) и экспериментальная (штрихпунктирная линия) для $y = 0.5$ м. . . . .	71

## Список таблиц

1	Параметры пористого меламина. . . . .	34
2	Задержки сигналов, вычисленные с помощью (4.7), (4.8) в сравнении с результатами эксперимента . . . . .	46