



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: جوان 2015

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تسيير واقتصاد

المدة: 03 سا و 30د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

يعطي الجدول التالي الاستهلاك y_i (باللتر l لكل $100 km$) من الوقود لقاطرة منجمية بدلالة سرعتها x_i مقدرة بـ km/h .

x_i مقدرة بـ (km/h)	50	60	70	80	90
y_i مقدرة بـ $(l/100km)$	3,2	3,4	3,8	4,4	5,2

(1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد.

(2) تعطى معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا لـ y بدلالة x كالآتي: $y = 0,05x + 0,5$.

باستعمال هذا التعديل، ما هو تقديرك لاستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسيير بسرعة قدرها $130 km/h$ ؟

(3) نبحث في هذا الجزء عن تعديل آخر.

(أ) أتمم الجدول التالي: (تدور كل نتائج الحسابات إلى 10^{-2} عند ملء الجدول فقط)

x_i مقدرة بـ (km/h)	50	60	70	80	90
y_i مقدرة بـ $(l/100km)$	3,2	3,4	3,8	4,4	5,2
$z_i = \ln y_i$					

(ب) عيّن $(\bar{x}; \bar{z})$ إحداثيي النقطة المتوسطة للسلسلة الإحصائية $(x_i; z_i)$.

(ج) عيّن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا لـ z بدلالة x على الشكل $z = ax + b$.

(د) عبّر عن y بدلالة x ؛ باستعمال هذا التعديل، ما هو تقديرك لاستهلاك القاطرة من الوقود عندما تسيير بسرعة قدرها $130 km/h$ ؟

(هـ) في الواقع أنّه ابتداءً من السرعة $90 km/h$ ، كلما ازدادت هذه الأخيرة بمقدار $10 km/h$ ارتفع استهلاك القاطرة للوقود بمقدار $0,75 l$.

من بين التعديلين السابقين؛ أيهما يعطي أفضل تقدير لاستهلاك القاطرة من الوقود حينما تسيير بسرعة $130 km/h$ ؟

التمرين الثاني: (06 نقاط)

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

- (1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بعدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$.
 (أ) (u_n) حسابية ، (ب) (u_n) هندسية ، (ج) (u_n) ليست هندسية ولا حسابية.
- (2) (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ قيمة n التي من أجلها يكون $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$ هي: (أ) $n = 31$ ، (ب) $n = 32$ ، (ج) $n = 33$.
- (3) منحنى الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = (x^2 - 1)^3$ ، يقبل مماسًا في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته:
 (أ) $y = \sqrt{2}x + 1$ ، (ب) $y = 6\sqrt{2}x - 11$ ، (ج) $y = 6\sqrt{2}x + 1$.
- (4) A و B حادثتان من مجموعة إمكانيات، حيث: $P(A) = 0,3$ و $P_A(B) = 0,4$
 (أ) $P(A \cap B) = 0,12$ ، (ب) $P(A \cap B) = 0,1$ ، (ج) $P(A \cap B) = 0,7$.
- (5) A و B حادثتان مستقلتان من مجموعة إمكانيات، حيث: $P(A) = 0,3$ و $P(B) = 0,4$
 (أ) $P(A \cup B) = 0,7$ ، (ب) $P(A \cup B) = 0,58$ ، (ج) $P(A \cup B) = 0,12$.
- (6) A و B حادثتان من مجموعة إمكانيات، حيث: $P_A(B) = 0,4$ ، $P(A) = 0,3$ و $P(A \cup B) = 0,68$
 (أ) $P(B) = 0,204$ ، (ب) $P(B) = 0,272$ ، (ج) $P(B) = 0,5$.

التمرين الثالث: (09 نقاط)

- f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} - 3$.
- (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = \frac{4}{e^x + 1} - 3$.
 - (ب) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ؛ ثم فسّر النتيجة هندسيًا.
 - (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (3) (أ) جد فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.
 - (ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $\Omega(0; -1)$.
 - (ج) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(-x) + f(x) = -2$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مركز تناظر.
 - (د) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم.
 - (4) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = -\ln 3$ و $y = 0$.
 - (5) h الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = f(|x|)$ ، و (C_h) منحناها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.
 - (ب) اعتمادًا على المنحنى (C_f) ، اشرح كيف يتم رسم المنحنى (C_h) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

الموضوع الثانيالتمرين الأول: (06 نقاط)

بيّنت دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنوياً وبالمقابل يُوظّف 3000 عامل سنوياً. علماً أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ : u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

(1) احسب u_1 و u_2 .

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = 60 - u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأولى.

ب) اكتب v_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

ج) قيّر عدد العمال سنة 2017.

د) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

هـ) احسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

مصنع سيارات يشتغل بوحدين A و B وينتج نوعين: سيارات تسير بالبنزين يُرمز إليها بـ E وأخرى بغير البنزين \bar{E} . زُعم إنتاج هذا المصنع تصنعه الوحدة A .

اشترى شخص سيارة من إنتاج هذا المصنع، احتمال أن تكون هذه السيارة من صنع الوحدة A وتسير بالبنزين

يساوي $\frac{1}{6}$ ، واحتمال أن تكون من صنع الوحدة B وتسير بالبنزين يساوي $\frac{3}{8}$.

(تعطى كل النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال).

(1) بيّن أنّ احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة A يساوي $\frac{2}{3}$.

(2) احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة B .

(3) أ) احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين.

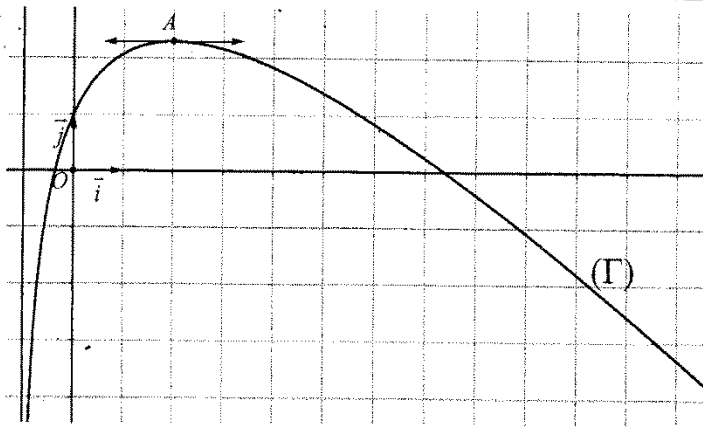
ب) علماً أنّ السيارة تسير بالبنزين ما احتمال أن تكون من صنع الوحدة A ؟

(4) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُتمذج هذه الوضعية.

التمرين الثالث: (09 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) f دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ، $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.



(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل
المقابل ، يقبل في النقطة $A(2; -1+3\ln 3)$ مماساً
موازيًا لحامل محور الفواصل.

(1) بقاء بيانية:

(أ) ضع تخميناً حول:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) باستعمال المعطيات المتوفرة، جد قيمة كل من a و b .

(II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x) = -x + 1 + 3\ln(x + 1)$.

(1) احسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر.

(2) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يُعطى $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$)

(3) (أ) عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) موازيًا للمستقيم الذي

معادلته $y = x$ ، ثم اكتب معادلة للمماس (T).

(ب) استنتج بياناً ، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماماً.

(4) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$.

(أ) احسب $g'(x)$ ؛ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل ،

بيّن أن : $\alpha \in]7,37; 7,38[$ و $\beta \in]-0,37; -0,36[$.

(ج) احسب S مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (Γ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما : $x = \alpha$ ، $x = 0$.

(د) تحقّق أن : $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right)ua$ ؛ ثم عيّن حصرًا لـ S . (وحدة مساحة)

(III) تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.

نُتمذج الكلفة الهامشية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0; 7]$ بالدالة f

المعرفة في الجزء (II) ، أي من أجل $x \in [0; 7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.

نرمز بـ $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة.

(1) عيّن عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$.

(2) قدّر قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة.

العلامة		عناصر الإجابة		(الموضوع الأول)				
مجموع	مجزأة							
05 نقاط		التمرين الأول: (05 نقاط)						
	0,5	1. تمثيل سحابة النقط						
	0,5	2. $y = 0,05 \times 130 + 0,5$ أي $y = 7$						
	1,25	x_i مقدرة بـ (km/h)	50	60	70	80	90	أ -
		y_i مقتر بـ (l / 100km)	3,2	3,4	3,8	4,4	5,2	
		$z_i = \ln y_i$	1,16	1,22	1,34	1,48	1,65	
	0,5	ب - لدينا $\bar{x} = \frac{50+60+70+80+90}{5} = 70$ و $\bar{z} = \frac{1,16+1,22+1,34+1,48+1,65}{5} = 1,37$						
	0,5	ج - $a = \frac{\frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 x_i z_i \right) - \bar{x} \bar{z}}{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}$ أي $a = 0,0124$						
	0,5	$b = 1,37 - 0,0124 \times 70$ أي $b = 0,502$ ومنه $z = 0,0124x + 0,502$						
	0,5	د - لدينا $z = \ln y$ وبالتالي $\ln y = 0,0124x + 0,502$ ومنه $y = e^{0,0124x+0,502}$						
	0,25	لما $x = 130$ فإن $y = e^{0,0124 \times 130 + 0,502} \approx 8,28$						
	0,25	هـ - الاستهلاك عند السرعة 130 km/h هو $5,2 + 4 \times 0,75 l = 8,2 l$						
0,25	لدينا التعديل الأول: $y = 7$ والتعديل الثاني: $y \approx 8,28$ وبالمقارنة نجد أنّ التعديل الثاني أفضل من الأول في تقدير الاستهلاك عند سرعة 130 km/h لأنه الأقرب إلى $8,2 l$							
ملاحظة تخص السؤال ج) : مهما كانت رتبة التدوير التي يعطيها المترشح في حسابه لاستهلاك القاطرة يعتبر مقبولا.								
04 نقاط		التمرين الثاني: (06 نقاط)						
	0,25	1. ب) (u_n) هندسية						
	0,75	$u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$ تكافئ $u_n = \frac{5}{3} \times (2 \times 3)^n$ وهو الحد العام لمتتالية هندسية أو $u_{n+1} = 6u_n$						
	0,25	2. أ) $n = 31$						
	0,75	$v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = 2n^2 + 3n = 2015$ ومنه $n = 31$						
	0,25	3. ب) $y = 6\sqrt{2}x - 11$						
	0,75	$f'(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$ ، $f(\sqrt{2}) = 1$ ، $f'(x) = 3 \times 2x(x^2 - 1) = 6x(x^2 - 1)$ ومنه $y = 6\sqrt{2}x - 11$						
	0,25	4. أ) $P(A \cap B) = 0,12$						
0,75	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,12$							

العلامة		عناصر الإجابة	تابع للموضوع الأول
مجموع	مجزأة		
02 نقاط	0,25		5. ب) $P(A \cup B) = 0,58$
	0,75		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$
	0,25		6. ج) $P(B) = 0,5$
	0,75		$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(A \cup B) + P(A) \times P_A(B) - P(A)$
09 نقاط			التمرين الثالث: (09 نقاط)
	0,5		1. أ - من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) = \frac{4}{e^x + 1} - 3$
	0,5		ب - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
	0,5		$y = -3$ و $y = 1$ معادلتا المستقيمين المقاربين
	0,75		2. $f'(x) < 0$ ؛ $f'(x) = \frac{-4e^x}{(e^x + 1)^2}$
	0,25		f متناقصة تماما على \mathbb{R}
	0,25		جدول التغيرات.
	0,5		3. أ - $f(x) = 0$ معناه $x = -\ln 3$
	0,75		ب - معادلة المماس (T) $y = -x - 1$.
	0,5		ج - من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(-x) + f(x) = -2$
	0,5		$\Omega(0; -1)$ مركز تناظر لـ (C_f)
	1,25		د - الرسم
	0,75		4. $A = - \int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = \left[4 \ln(e^{-x} + 1) + 3x \right]_{-\ln 3}^0$
	0,5		$A = (3 \ln 3 - 4 \ln 2) ua$
	0,5		5. أ - h دالة زوجية لأن \mathbb{R} متناظر بالنسبة إلى 0 و $h(-x) = h(x)$
	0,5		ب - في $[0; +\infty[$ ينطبق (C_h) على (C_f) و (C_h) متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب
	0,5		الرسم

العلامة		عناصر الإجابة	(الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة		
06 نقاط		التمرين الأول: (06 نقاط)	
	01	1. $u_2 = 0,95u_1 + 3 = 50,975$ ؛ $u_1 = 0,95u_0 + 3 = 50,5$	
	01	2. أ - $u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100}u_n + 3$ ومنه $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$	
	0,25	ب - (u_n) ليست حسابية لأن $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ أو $u_{n+1} \neq u_n + r$	
	0,25	(u_n) ليست هندسية لأن $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ أو $u_{n+1} \neq qu_n$	
	0,5×2	3. أ - $v_0 = 10$ ، $q = 0,95$ ؛ $v_{n+1} = 0,95v_n$	
	0,5×2	ب - $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$ ؛ $v_n = 10 \times 0,95^n$	
	0,5	ج - لدينا $u_5 = 60 - 10 \times 0,95^5$ إذن عدد العمال في سنة 2017 هو: 52262.	
	0,5	د - $u_{n+1} - u_n = 0,5 \times 0,95^n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما.	
	0,25	هـ - $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (60 - 10 \times 0,95^n) = 60$	
	0,25	عدد العمال في هذا القطاع الصناعي لن يصل 60000 عاملا	
05 نقاط		التمرين الثاني: (05 نقاط)	
	01	1. $P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{2}{3}$	
	01	2. $P_B(E) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{1}{2}$	
	01	3. أ - $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{13}{24}$	
	01	ب - $P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{4}{13}$	
	01	4.	

العلامة		عناصر الإجابة	تابع للموضوع الثاني
مجموع	مجزأة		
09 نقاط		التمرين الثالث: (09 نقاط)	
	0,5	1. (I) أ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$	
	0,5	ب - جدول التغيرات	
	0,5	2. $f'(x) = a + \frac{3}{x+1}$	
	0,5	من $a = -1$ نجد $f'(2) = 0$	
	0,5	من $b = 1$ نجد $f(2) = -1 + 3 \ln 3$	
	0,25	1. (II) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$	
	0,5	2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	
	0,5	3. أ. $f'(x) = 1$ نجد $x = \frac{1}{2}$ ومنه $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + 3 \ln \frac{3}{2}\right)$	
	0,5	$y = x + 3 \ln \frac{3}{2}$	
	0,75	ب - $f(x) = x + m$ تقبل حلين موجبيين تماما من أجل $1 < m < 3 \ln \frac{3}{2}$	
	0,25	4. أ. $g'(x) = \ln(x+1)$	
	0,5	F دالة أصلية لـ f على $]-1; +\infty[$: $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1)$	
	0,5	ب - $f(7,38) \approx -0,002$ ؛ $f(7,37) \approx 0,003$	
	0,5	$f(-0,36) \approx 0,02$ ؛ $f(-0,37) \approx -0,01$	
	0,5	ج - $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx$ ومنه $S = -\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 3(\alpha+1)\ln(\alpha+1) ua$	
	0,25	د - $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right) ua$	
	0,5	$11,39845 < S < 11,4922$	
	0,5	1. (III) $C_T(1) = \frac{5}{2}$ مع $C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + c$	
		$c = 5 - 6 \ln 2$ ومنه $C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + 5 - 6 \ln 2$	
	0,5	2. $C_T(7) \approx 12,247713$ أي $C_T(7) \approx 12247,713 DA$	