الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي **دورة: 2023**

الشعبة: تسيير واقتصاد

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 03 سا و30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5}$

1) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > -3$

2) بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 3$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = \frac{19}{2} - 3n - \frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $(1-x)(10x^2 + 9x - 1) = 0$

ب) تحقّق أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $10x^2 + 9x - 1 = (x+1)(10x-1)$

2) أ) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ مجموعة حلول المعادلة $(1-\ln x)\left(10(\ln x)^2 + 9(\ln x) - 1\right) = 0$

ب) استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $(1-e^x)(10e^{2x} + 9e^x - 1) \leq 0$

3) حلّ في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة $\ln(10x^2 + 9x) \geq 0$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1) (u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول 3 وأساسها -4 . من أجل كلّ عدد طبيعي n:

أ) $u_n = 3\times(-4)^n$ ب) $u_n = 3-4n$ جـ) $u_n = 3-4(n-1)$

2) f الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\ln(x+1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

معادلةٌ لِمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي:

أ) $y=x+1$ ب) $y=x$ جـ) $y=x-1$

3) g الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x-\dfrac{1}{x}$

دالتها الأصلية G على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 معرّفة بـ:

أ) $G(x)=x^2+1-\ln x$ ب) $G(x)=-x^2+1-\ln x$ جـ) $G(x)=x^2-1-\ln x$

4) القيمة المتوسطة للدّالة $x\mapsto 3(x+1)^2$ على المجال $[0;1]$ تساوي:

أ) 7 ب) 14 جـ) 21

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1-\dfrac{3}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$)

1) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ(C_f) عند $+\infty$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

3) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=1+\dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$

ب) استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,28<\alpha<0,29$

5) ارسم (Δ) و (C_f)

6) F الدّالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $F(x)=3x-3\ln(e^x+1)$

أ) تحقق أنّ F أصلية للدّالة $x\mapsto\dfrac{3}{e^x+1}$ على المجال $[0;+\infty[$

ب) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n < 4$

2) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = 4n + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1) مجموعة الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$ هي:

أ) $\{0\}$ **ب)** $\{1;0\}$ **جـ)** $\{-5;0\}$

2) α عدد حقيقي و (u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 5u_n - 4$

تكون المتتالية (u_n) ثابتة من أجل:

أ) $\alpha = 5$ **ب)** $\alpha = -4$ **جـ)** $\alpha = 1$

3) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$

الدّالة الأصلية F على $\mathbb{R}$ للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 معرّفة بـ:

أ) $F(x) = -2\ln\left(e^x + 1\right) + \ln 4$ **ب)** $F(x) = 2\ln\left(e^x + 1\right) - \ln 4$ **جـ)** $F(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x + 1 - e^x\right)$ تساوي:

أ) $-\infty$ **ب)** $+\infty$ **جـ)** 0

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) تحقّق أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $x^3-6x^2+11x-6=(x-2)\left(x^2-4x+3\right)$

ب) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^3-6x^2+11x-6=0$

2) أ) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ مجموعة حلول المعادلة $(\ln x)^3-6(\ln x)^2+11(\ln x)-6=0$

ب) استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المعادلة $e^{3x}-6e^{2x}+11e^{x}-6=0$

3) حلّ في المجال $]2;+\infty[$ المتراجحة $\ln\left(x^3-6x^2+11x-5\right)\geq 0$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-x-\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$

ب) استنتج أنّ الدّالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) عيّن معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2

4) احسب $f(3)$ ثمّ ارسم (T) و (C_f)

5) F الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-x\ln x$

أ) تحقّق أنّ F أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل

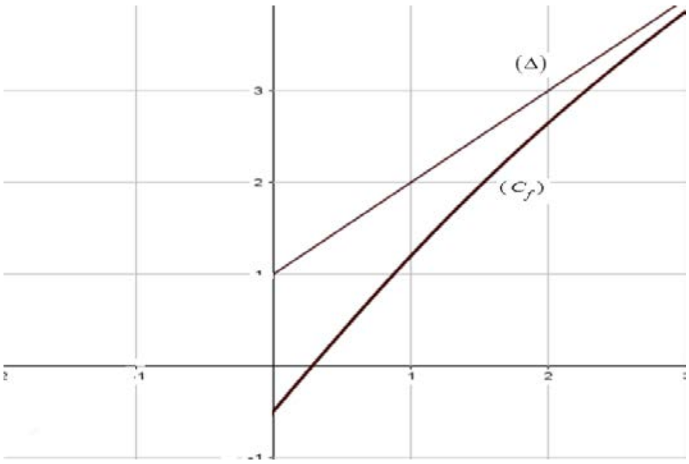
والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$

انتهى الموضوع الثاني

<table dir="rtl">
<tr><th rowspan="2" colspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأول)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموع</th></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">التمرين الأول (04 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>البرهان بالتراجع: التحقق من صحة الخاصية الابتدائية
إثبات صحّة الاستلزام (إثبات أنّ الخاصية وراثية)</td><td>0.25
0.75</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\frac{2}{5}(u_n+3)$ و $u_n+3>0$
إذن (u_n) متناقصة تماما
(u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة</td><td>0.25

0.25</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>أ) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_{n+1}=\frac{3}{5}v_n$ ، $v_0=5$</td><td>2 × 0.25</td><td rowspan="3">1.75</td></tr>
<tr><td>ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=5\left(\frac{3}{5}\right)^n$
من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=5\left(\frac{3}{5}\right)^n-3$</td><td>0.5
0.5</td></tr>
<tr><td>جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-3$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>4</td><td>من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{25}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]$
$T_n=S_n-3(n+1)=\frac{19}{2}-3n-\frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$</td><td>2 × 0.25
0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">التمرين الثاني (04 نقاط)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>أ) $\Delta=121$ ، مجموعة حلول المعادلة هي : $\left\{-1\ ;\ \frac{1}{10}\ ;\ 1\right\}$</td><td>4x0.25</td><td rowspan="2">1.75</td></tr>
<tr><td>ب) من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $10x^2+9x-1=(x+1)(10x-1)$</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>أ) مجموعة حلول المعادلة هي : $\left\{e^{-1}\ ;\ e^{\frac{1}{10}};\ e^{1}\right\}$</td><td>3x0.25</td><td rowspan="2">1.5</td></tr>
<tr><td>ب) $(1-e^x)(10e^{2x}+9e^x-1)\leq 0$ تكافئ $(1-e^x)(e^x+1)(10e^x-1)\leq 0$
إشارة $(1-e^x)(10e^x-1)$
مجموعة الحلول هي $]-\infty;-\ln 10]\cup[0;+\infty[$</td><td>0.25
0.25
0.25</td></tr>
</table>

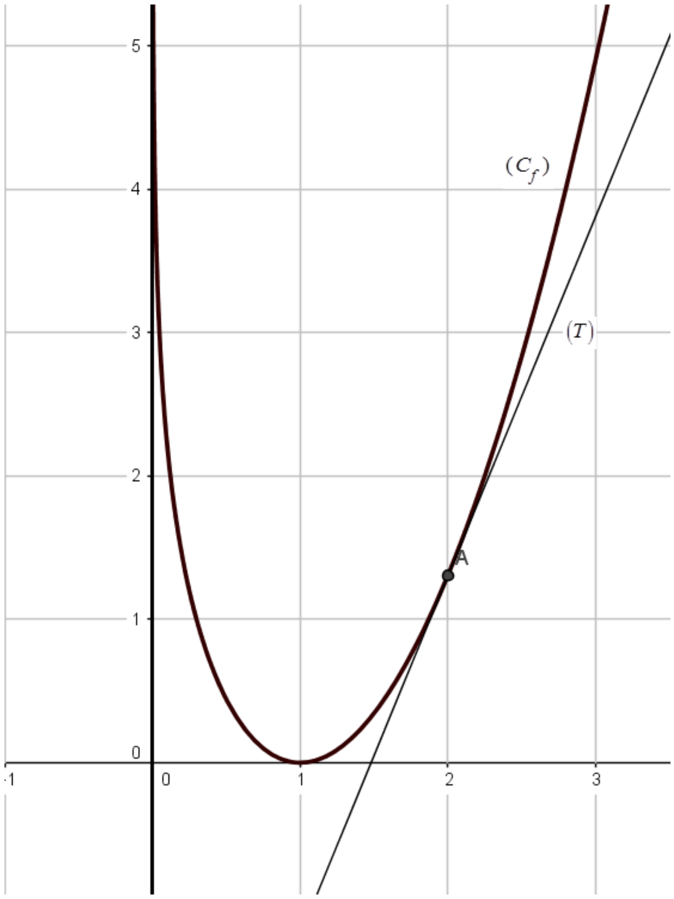
3	$\ln\left(10x^2+9x\right)\ge 0$ تكافئ $10x^2+9x-1\ge 0$ إشارة $10x^2+9x-1$ من أجل x حقيقي موجب تماما مجموعة الحلول هي $\left[\frac{1}{10};+\infty\right[$	0.25 0.25 0.25	0.75
	التمرين الثالث (04 نقاط)		
1	**الاقتراح الصحيح هو : ب)**	0.5	1
	تبرير : من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=u_n+nr$ ، $u_n=3-4n$	0.5	
2	**الاقتراح الصحيح هو : أ)**	0.5	1
	تبرير : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $y=x+1$	0.5	
3	**الاقتراح الصحيح هو : ج)**	0.5	1
	تبرير : **عبارة** الدالة الاصلية للدالة g التي تنعدم عند القيمة1 هي $G(x)=x^2-\ln x-1$	0.5	
4	**الاقتراح الصحيح هو : أ)**	0.5	1
	تبرير : $\frac{1}{1-0}\int_0^1 3(x+1)^2dx=\left[(x+1)^3\right]_0^1=7$	0.5	
	التمرين الرابع (08 نقاط)		
1	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{e^x+1}\right)=0$	0.5	0.5
2	أ) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{e^x+1}\right)=0$	0.5	1
	ب) من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $\frac{-3}{e^x+1}<0$ (C_f) يقع أسفل (Δ)	0.25 0.25	

<table dir="rtl">
<tr><td rowspan="2">3</td><td>أ) من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=1+\dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$</td><td>1</td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td>ب) من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$
الدّالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$
جدول التغيرات
<table dir="ltr"><tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\frac{1}{2}$ $\nearrow$ $+\infty$</td></tr></table></td><td>1
1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,28<\alpha<0,29$ لأن : الدّالة f
مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,28\ ;\ 0,29]$ و $f(0,29)\times f(0,28)<0$
($f(0,28)\simeq -0,001$ ، $f(0,29)\simeq 0,006$)</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>رسم (Δ)
رسم (C_f)
</td><td>0.25
0.75</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td>أ) F تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$
ومن أجل كلّ عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ ، $F'(x)=\dfrac{3}{e^x+1}$</td><td>1</td><td rowspan="2">1.5</td></tr>
<tr><td>ب) حساب المساحة $\displaystyle\int_0^{\ln 2}(x+1-f(x))\,dx=[F(x)]_0^{\ln 2}=4\ln\left(\frac{64}{27}\right)cm^2$</td><td>2×0.25</td></tr>
</table>

ملاحظة: تُقبل وتُراعى جميع الطرائق الصحيحة الأخرى مع التقيّد التام بسلم التنقيط

	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
	التمرين الأول (04 نقاط)		
1	البرهان بالتراجع: التحقق من صحة الخاصية الابتدائية	0.25	1
	إثبات صحّة الاستلزام (إثبات أنّ الخاصية وراثية)	0.75	
2	من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{-3}{4}(u_n-4)$ و $u_n-4<0$ إذن (u_n) متزايدة تماما	0.25	0.5
	(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة	0.25	
3	أ) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ و $v_0=-2$	2×0.25	1.75
	ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$	0.5	
	من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$	0.5	
	جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$	0.25	
4	من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=-\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$	0.5	0.75
	من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n=S_n+4(n+1)=4n+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$	0.25	
	التمرين الثاني (04 نقاط)		
1	**الاقتراح الصحيح هو : أ)**	0.5	1
	تبرير : $e^{2x}+4e^x-5=0$ تكافئ $(e^x+5)(e^x-1)=0$ ومنه: $x=0$	0.5	
2	**الاقتراح الصحيح هو : جـ)**	0.5	1
	تبرير : $\alpha=5\alpha-4$ تكافئ $\alpha=1$	0.5	
3	**الاقتراح الصحيح هو : ب)**	0.5	1
	تبرير : من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $F'(x)=f(x)$ و $F(0)=0$	0.5	

4	**الاقتراح الصحيح هو : أ)**	**0.5**	**1**
	تبرير : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty$	**0.5**	
	التمرين الثالث (04 نقاط)		
1	أ) من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $(x-2)\left(x^{2}-4x+3\right)=x^{3}-6x^{2}+11x-6$	**1**	**2**
	ب) $x^{3}-6x^{2}+11x-6=0$ تكافئ $(x-2)\left(x^{2}-4x+3\right)=0$ $\Delta=4$ ، مجموعة الحلول هي : $\{1;2;3\}$	**4x0.25**	
2	أ) مجموعة الحلول هي : $\{e^{1};e^{2};e^{3}\}$	**3x0.25**	**1.5**
	ب) $e^{3x}-6e^{2x}+11e^{x}-6=0$ تكافئ $\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-2\right)\left(e^{x}-3\right)=0$ مجموعة الحلول هي $\{0;\ln 2;\ln 3\}$	**3x0.25**	
3	$\ln\left(x^{3}-6x^{2}+11x-5\right)\geq 0$ تكافئ $x^{3}-6x^{2}+11x-6\geq 0$ إشارة $x^{3}-6x^{2}+11x-6$ من أجل x حقيقي من المجال $]2;+\infty[$ مجموعة الحلول هي $[3;+\infty[$	**0.25** **0.25**	**0.5**
	التمرين الرابع (08 نقاط)		
1	أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ المنحني (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقاربا له	**0.75** **0.25**	**1.75**
	ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(x-1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$	**0.75**	
2	أ) من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$	**1**	**2.75**
	ب) إشارة $f'(x)$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & - & 0 & + & \end{array}$ الدّالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ جدول التغيّرات $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & \|+\infty & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	**0.5** **0.5** **0.75**	

3	معادلة لـ (T) هي: $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{5}{2}x - 3 - \ln 2$	2×0.5	1
4	$f(3) = 6 - \ln 3$ رسم (T) رسم (C_f) 	0.25 0.25 0.5	1
5	أ) F تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومن أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $F'(x) = x^2 - x - \ln x$	1	1.5
	ب) $\int_1^3 f(x)\,dx = [F(x)]_1^3 = \left(\frac{20}{3} - 3\ln 3\right) u.a$	2×0.25	

ملاحظة: تُقبل وتُراعى جميع الطرائق الصحيحة الأخرى مع التقيّد التام بسلم التنقيط