الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2011

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 4 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1-i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=\sqrt{3}(1+i)$

1/ اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B ، z_C.

2/ أ/ احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها.

ب/ حدّد طبيعة المثلث ABC.

3/ عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا.

4/ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(-1+i)z+1-3i$

أ/ عين طبيعة التحول T وعناصره المميزة.

ب/ استنتج طبيعة التحول ToT وعناصره المميزة.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1/ نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ ، $C(-1;1;1)$

أ/ أثبت أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب/ بيّن أن الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث: $(P_1): 3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2): 2x-2y-z-1=0$.

أ/ بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

ب/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2).

جـ/ تحقّق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ).

د/ احسب المسافتين $d(O;(P_1))$ و $d(O;(P_2))$ واستنتج المسافة $d(O;(\Delta))$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث:} \quad \begin{cases} m = PPCM\,(U_3, U_5) \\ d = PGCD\,(U_3, U_5) \end{cases}$$

1/ عيّن الحدين U_3 و U_5 ثم استنتج U_0

2/ اكتب U_n بدلالة n، ثم بيّن أن: 2010 حد من حدود (U_n) وعين رتبته.

3/ عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (U_n) يساوي 10080

4/ n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{2n}$

ب) استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + ... + U_{2n}$

و $S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + ... + U_{2n-1}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (3x+4)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ أ) احسب f'، f'' ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:

$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$ حيث: f'، f''، ....، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f

ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية : $y'' = (3x+16)e^x$

2/ أ) بيّن أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ أ) اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $\frac{-10}{3}$.

ب) بين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

ج) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

4/ أ) x عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t\,dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = -\frac{4}{3}$ و $x = \lambda$، ثم جد $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

الموضـــوع الثانـــي

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة : (E) ... $13x-7y=-1$ حيث: x و y عددان صحيحان.

حل المعادلة (E).

2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases}$

3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13.

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب، في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$

حيث: α و β عددان طبيعيان ؛ $\alpha\neq 0$.

عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما.

2- بين أن: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G؟

3- عين شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة له.

4- احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC).

5- H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D).

أ) جد إحداثيات النقطة H.

ب) استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ أ) الشكل المثلثي للعدد المركب $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

ب) $a^{2011}+\bar{a}=0$ حيث: $\bar{a}$ مرافق a

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أ) التحويل T الذي كتابته المركبة: $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم

ب) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z-i)=\frac{-\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$.

3/ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0=\frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$

أ) $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ب) (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

ج) (u_n) متباعدة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x^2+\ln x^2-1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$

2/ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(1-\frac{1}{x^2})\ln x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ/ بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x$ ، ماذا تستنتج ؟
- ارسم (δ) و (C_f).

3/ أ/ x عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$

- تحقق أن: $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]1;+\infty[$.
- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب/ α عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=\alpha$ ، ثم احسب $\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2011

المادة : الرياضيات الشعبة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
أعداد مركبة وتطبيقاتها الهندسية التشابه	<u>التمرين الأول</u> : (04.5 نقطة)		04.5
	1) $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_C = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$	0.5×3	
	2) أ- $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\left\lvert\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right\rvert = 1$ و $\arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$	0.25×3	
	التفسير الهندسي : $AB = AC$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$	0.25×2	
	ب) ABC مثلث متقايس الأضلاع	0.25	
	3) $z_D = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$	0.25	
	4) أ- T تشابه مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$	0.25×3	
	ب- $T o T$ تشابه مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{3\pi}{2}$	0.5	
المستقيمات والمستويات في الفضاء تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء	<u>التمرين الثاني</u> (04.5 نقطة)		04.5
	1)-أ- $\overline{AB}$ لا يوازي $\overline{AC}$ ومنه النقط A ، B و C تعيّن مستويا......	0.75	
	ب- $\vec{n}.\overline{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overline{AC} = 0$ ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظمي لــ (ABC)	0.25×2	
	$3x + 4y - 2z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).........	0.5	
	2)-أ- $\vec{n}$ شعاع ناظمي لــ (P_1) و $\overrightarrow{n'}(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي لــ (P_2) و $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$ ومنه (P_1) و (P_2) متعامدان.	0.25×2	
	ب- $\begin{cases} x = \frac{4}{7}t + \frac{1}{7} \\ y = \frac{1}{14}t - \frac{5}{14} \\ z = t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ وكذلك $\begin{cases} x = 8t \\ y = t - \frac{3}{8} \\ z = 14t - \frac{1}{4} \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)	0.25×3	
	ج- التحقق $O \notin (\Delta)$	0.25×2	
	د- $d(O;(P_1)) = \frac{\sqrt{29}}{29}$ ، $d(O;(P_2)) = \frac{1}{3}$	0.25×2	
	$d(O;(\Delta)) = \sqrt{\frac{38}{261}}$	0.25×2	

140

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
المتتاليات الحسابية	**التمرين الثالث: (04 نقاط)**		
	1) $d=6$ ، $U_3=12$ و $U_5=18$ ، $U_0=3$	0.25×3+0.5	
	2) $U_n=3+3n$ و $2010=3+3\times 669$ ورتبته 670	0.75	
	3) $\frac{5}{2}(u_N+u_{N+4})=10080$ ومنه $u_N=2010=u_{669}$	0.5	4
	4) أ) $S=3(n+1)(2n+1)$	0.5	
	ب) $S_1=3(n+1)^2$ و $S_2=3n(n+1)$	0.5×2	
دراسة دالة أسية البرهان بالتراجع معادلة المماس حساب المساحات	**التمرين الرابع: (07 نقاط)**		
	1)أ) $f'(x)=(3x+7)e^x$	0.25	
	$f''(x)=(3x+10)e^x$	0.25	
	البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن: $f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$	0.75	
	ب) $y=(3x+10)e^x+c_1x+c_2$ حيث : $(c_1;c_2)\in\mathbb{R}^2$	0.25	
	2)-أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x+4\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$	0.25	
	$y=0$ معادلة المستقيم المقارب لـ (C_f) عند $-\infty$	0.25	
	ب- إشارة f' ، f متزايدة تماما على $\left[\frac{-7}{3};+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{-7}{3}\right]$	0.25×3	
	جدول التغيرات	0.5	07
	3)-أ) معادلة (Δ) : $y=-(3x+16)e^{-\frac{10}{3}}$	0.5	
	ب) إشارة $f''(x)$ ، $\omega\left(-\frac{10}{3};f(-\frac{10}{3})\right)$ نقطة انعطاف	0.25×2	
	جـ) رسم (c_f) و (Δ)	0.75	
	4)-أ- $\int_{-1}^{x} te^t dt=(x-1)e^x+\frac{2}{e}$	0.75	
	F دالة أصلية لـ f : $F(x)=(3x+1)e^x+c$	0.5	
	ب- $A(\lambda)=-\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}}f(x)dx=(3\lambda+1)e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}(ua)$	0.5	
	$\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=3e^{-\frac{4}{3}}(ua)$	0.25	

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
الموافقات، نظام التعداد، القسمة الاقليدية	**التمرين الأول: (04 نقاط)**		04
	1) $(x,y)=(7k+1,13k+2)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$	0.75	
	2) $a=91k+13$ ، $k\in\mathbb{Z}$	0.75	
	3) بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7	0.75	
	بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13	0.75	
	4) $b=6+8\times9+\beta\times9^3+\alpha\times9^6$ مع $0<\alpha<9$ و $0\le\beta<9$	0.25	
	$b\equiv0[7]$ تكافئ: $\alpha+\beta\equiv-1[7]$	0.25	
	$b\equiv0[13]$ تكافئ: $\alpha+\beta\equiv0[13]$	0.25	
	ومنه $\alpha+\beta=13$ وعليه: $(\alpha,\beta)\in\{(5,8),(8,5),(6,7),(7,6)\}$	0.25	

بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7:

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي القسمة	1	2	4

بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13:

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي القسمة	1	9	3

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
التمثيل الوسيطي لمستقيم، معادلة مستو، مركز ثقل مثلث، بعد نقطة عن مستقيم	**التمرين الثاني: (05 نقاط)**		05
	1) $(D):\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=\frac{3}{2}t\end{cases}$ ، $t\in\mathbb{R}$ ؛ $(\Delta):\begin{cases}x=\frac{1}{2}\lambda\\y=\lambda\\z=3-3\lambda\end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$	0.5×2	
	(D) و (Δ) متقاطعان في النقطة $G(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1)$	0.5	
	2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$	0.5	
	G مركز ثقل المثلث ABC	0.25	
	3) $\vec{n}\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ أو $\vec{n}(6;3;2)$	0.5	
	$x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$ معادلة للمستوى (ABC)	0.5	
	4) المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) تساوي: $\frac{6}{7}$	0.5	
	5) أ- $H(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17})$	0.75	
	ب- المسافة بين B و (D) تساوي: $BH=\frac{\sqrt{833}}{17}=\frac{7}{\sqrt{17}}$	0.5	

142

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الأعداد المركبة المتتاليات	التمرين الثالث: (04 نقاط)		
	1/ أ) خطأ، لأن $a=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$	0.5	
	ب) صحيح لأن: $a^{2011}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\bar{a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
	2/ أ- خطأ لأن زاويته هي $\frac{3\pi}{4}$	0.5	
	ب- خطأ لأنه مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه: A	0.5	04
	3/ أ) صحيح لأن: $\frac{3}{4}\left[-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\right]+\frac{1}{6}=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$	0.5	
	ب) خطأ لأن: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n>0$	0.5	
	جـ) خطأ لأن: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac{2}{3}$	0.5	
دالة لوغاريتمية دوال أصلية وحساب المساحات الوضع النسبي	التمرين الرابع: (07 نقاط)		
	1)-أ- $g'(x)=2x+\frac{2}{x}>0$ ، g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$	0.25×2	
	$\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0}g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ، جدول التغيرات............................	0.25×3	
	ب- $g(1)=0$	0.25	
	إشارة $g(x)$: $g(x)>0$ من أجل $x>1$ و $g(x)<0$ من أجل $0<x<1$	0.5	
	2)-أ- f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتن للاشتقاق	0.25	
	$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$	0.5	
	f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;1]$	0.25	
	$\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، جدول التغيرات	0.25×3	07
	ب- $f(x)-\ln x=\frac{-\ln x}{x^2}$ ومنه (C_f) فوق (δ) من أجل $0<x<1$ و (C_f) تحت (δ) من أجل $x>1$	0.25×2	
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x=0$	0.25	
	نستنتج أن (δ) منحنى مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$	0.25	
	رسم (C_f) و (δ)	0.75	
	3)-أ- $\int_1^x\frac{1}{t^2}\ln t\,dt=-\frac{1}{x}(1+\ln x)+1$	0.5	
	$x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto\ln x$ على $[1;+\infty[$	0.25	
	F دالة أصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$ $F(x)=\frac{(x^2+1)\ln x-x^2+1}{x}$	0.25	
	ب- $A(\alpha)=\int_1^\alpha(\ln x-f(x))dx=1-\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}(ua)$	0.25	
	$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=1\,(ua)$	0.25	