

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :  
الموضوع الأول

**تمرين 1: (4 نقاط)**

- $x$  عدد طبيعي أكبر من 1 و  $y$  عدد طبيعي.
- $A$  عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس  $x$  بالشكل  $A = 5566$
- (1) أ- أنشر العبارة  $(x+1)(5x^2+6)$  ثم أوجد علاقة تربط بين  $x$  و  $y$  إذا علمت أن
- $$A = (5x^2+6)(2+2y).$$
- ب- احسب  $x$  و  $y$  إذا علمت أن  $x$  عدد أولي أصغر من 12 ، ثم اكتب تبعا لذلك العدد  $A$  في نظام التعداد العشري.
- (2) أ- عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.
- ب- عيّن الأعداد الطبيعية  $a$  و  $b$  حيث  $a > b$  التي تحقق:
- $$\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$$

**تمرين 2: (5 نقاط)**

- كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.
- (1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد.
- أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.
- ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.
- (2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.
- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  واحسب أمله الرياضي  $E(X)$ .
- (3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع).
- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

### تمرين 3: (5 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
نعتبر النقطتين  $A(2,1,2)$  و  $B(0,2,-1)$  والمستقيم  $(D)$  ذو التمثيل الوسيط

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$$

- (1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(AB)$ .
- اثبت أن  $(D)$  و  $(AB)$  لا ينتميان إلى نفس المستوي.
- (2) نعتبر المستوي  $(P)$  الذي يشمل المستقيم  $(AB)$  ويوازي المستقيم  $(D)$ .
  - أ - بين أن الشعاع  $\vec{n}(1,5,1)$  عمودي على المستوي  $(P)$ .
  - ب - اكتب معادلة للمستوي  $(P)$ .
  - ج - بين أن المسافة بين نقطة  $M$  من  $(D)$  والمستوي  $(P)$  مستقلة عن موضع  $M$ .
  - د - عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي  $(P)$  مع المستوي  $(yoz)$ .

### تمرين 4: (6 نقاط)

- (1) نعرف الدالة العددية  $f$  على المجال  $[1,5]$  بالعلاقة:  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{5}{x} \right)$ .
- ليكن  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  الوحدة على المحورين  $3cm$ .
  - أ - ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  - ب - أنشئ المنحنى البياني  $(C)$  والمستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  في نفس المعلم.
- (2) نعتبر المتتالية العددية  $(U_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها الأول  $U_0 = 5$  وبالعلاقة:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} \left( U_n + \frac{5}{U_n} \right)$$

- أ - أحسب  $U_1, U_2$ .
- ب - استعمل المنحنى  $(C)$  والمستقيم  $(\Delta)$  لتمثيل الحدود  $U_0, U_1, U_2$  على محور الفواصل.
- (3) أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n: U_n \geq \sqrt{5}$ .
- ب - بين أن المتتالية  $(U_n)$  متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب  $(U_n)$ ؟
- (4) أ - برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن:  $(U_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{5})$ .
- ب - استنتج أن  $(U_n - \sqrt{5}) \leq \left( \frac{1}{2} \right)^n (U_0 - \sqrt{5})$ . ما هي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ؟

## الموضوع الثاني

### تمرين 1: (4 نقاط)

نرفق بكل عدد مركب  $z$  يختلف عن 1 العدد المركب  $f(z)$  حيث:  $f(z) = \frac{z-i}{z-1}$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(45+45i)f(z) = 23+45i-2z$

(2) لتكن  $M$  صورة العدد المركب  $z$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$   
أ- عين مجموعة النقط  $M$  بحيث يكون  $f(z)$  عددا حقيقيا سالبا تماما.

ب- احسب العدد المركب  $z_0$  بحيث:  $|f(z_0)|=1$  و  $\arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$ .

(3) في المستوي المركب نعتبر النقط  $A, B$  و  $C$  صور الأعداد المركبة 1،  $i$  و  $z_0$  على الترتيب.  
أ- ما نوع المثلث  $ABC$ ؟

ب- عين النقطة  $D$  نظيرة  $C$  بالنسبة إلى المستقيم  $(AB)$  و استنتج طبيعة الرباعي  $ACBD$ .

### تمرين 2: (5 نقاط)

( $U_n$ ) المتتالية المعرفة بحدّها الأول  $U_0 = 0$  و من أجل كلّ عدد طبيعي  $n$  :  $U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1$ .

( $V_n$ ) المتتالية المعرفة من أجل كلّ عدد طبيعي  $n$  كما يلي :  $V_n = U_n + \alpha n + \beta$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان

(1) عين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون المتتالية ( $V_n$ ) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأول.

(2) احسب كلا من  $U_n$  و  $V_n$  بدلالة  $n$ .

(3) احسب المجموعين  $S$  و  $S'$  حيث:  $S = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$  و  $S' = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .

(4) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $3^n$  على 5.

ب- عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها  $U_n$  مضاعفا للعدد 5.

### تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  حيث

$$x + 2y - z - 2 = 0 \text{ معادلة للمستوي } (P_1)$$

$$\text{و } \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي للمستوي } (P_2).$$

(1) اكتب معادلة للمستوي  $(P_2)$ .

(2) عين شعاعا ناظميا  $\vec{n}_1$  للمستوي  $(P_1)$  وشعاعا ناظميا  $\vec{n}_2$  للمستوي  $(P_2)$ .

(3) بين أن المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متعامدان.

(4) أ-  $A(3,1,1)$  نقطة من الفضاء، عين المسافة  $d_1$  بين النقطة  $A$  والمستوي  $(P_1)$  ثم المسافة

$d_2$  بين  $A$  و  $(P_2)$ .

ب- استنتج المسافة  $d_3$  بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$  تقاطع المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$ .

(5) أ- عين تمثيلا وسيطيا بدلالة  $\lambda$  للمستقيم  $(\Delta)$  حيث  $\lambda$  عدد حقيقي.

ب-  $M$  نقطة كيفية من  $(\Delta)$  ، احسب  $MA^2$  بدلالة  $\lambda$  مستنتجا ثانية المسافة بين  $A$  و  $(\Delta)$ .

**تمرين 4: (7 نقاط)**

$f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يأتي :  $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ .

1)  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

(2) أ- بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما  $(D)$  معادلته:  $y = x$ .

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  و  $(D)$ .

(3) أ- بين أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $x_0$  حيث:  $1,3 < x_0 < 1,4$ .

ب- عين معادلة  $(\Delta)$  مماسا للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب.

ج- ارسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  في نفس المعلم.

(4) أوجد الدالة الأصلية للدالة  $f$  والتي تتعدم من أجل القيمة 0 للمتغير  $x$ .

(5)  $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $g(x) = |f(x)|$ .

$(C_g)$  منحنى الدالة  $g$  في المعلم السابق.

- بين كيف يمكن إنشاء  $(C_g)$  انطلاقا من  $(C_f)$ ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x$ :  $g(x) = m^2$ .

### الموضوع الأول

العلامة		عناصر الإجابة	محااور الموضوع										
المجموع	مجزأة												
4		<b>تمرين 1: ( 4 نقاط )</b>	التعداد القواسم والمضاعفات										
	0.25	1. أ- نشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$											
	0.5+0.25	العلاقة بين $x$ و $y$ هي: $x = 2y + 1$											
	0.25×2	ب- $(x, y) = (7, 3)$ أو $(x, y) = (11, 5)$											
	0.25	من أجل $(x, y) = (7, 3)$ لدينا $A = 2008$											
	0.25	من أجل $(x, y) = (11, 5)$ لدينا $A = 7332$											
	0.5×2	2. أ- القواسم المطلوبة هي 1 و 2 .											
0.5×2	ب- تعيين الأعداد الطبيعية $a$ و $b$ : $(a, b) = (11, 5)$												
5		<b>تمرين 2: ( 5 نقاط )</b>	حساب الاحتمال، تغير العشوائي، الأميل الرياضي										
	01	..... $P = \frac{1}{30}$ (أ-1)											
	01	..... $P' = 1 - P = \frac{29}{30}$ (ب)											
	0.25×5	..... <table><tr><td><math>x_i</math></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td><math>P_i</math></td><td><math>\frac{1}{6}</math></td><td><math>\frac{1}{2}</math></td><td><math>\frac{3}{10}</math></td><td><math>\frac{1}{30}</math></td></tr></table>		$x_i$	0	1	2	3	$P_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$
	$x_i$	0		1	2	3							
	$P_i$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$							
0.75	..... $E(X) = \frac{6}{5}$												
1	..... $P(Y = 2) = C_5^2 \left(\frac{1}{30}\right)^2 \left(\frac{29}{30}\right)^3 \approx 0.01$ (3)												

العلامة		عناصر الإجابة		محاوَر الموضوع													
المجموع	مجزأة																
05	0.75	<b>تمرين 3: (5 نقاط)</b> (1) التمثيل الوسيطى للمستقيم $(AB)$ $\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-3\lambda \end{cases}$															
	0.5 + 0.25	* إثبات أن $(D)$ والمستقيم $(AB)$ لا ينتميان إلى نفس المستوي لدينا $\overline{AB}$ لا يوازي $\overline{V_D}$ $(3,-1,2)$ والمستقيمان غير متقاطعين															
	0.5 + 0.5	(2) أ- لإثبات أن الشعاع $\vec{n}$ عمودي على المستوي $(P)$ يكفي إثبات أنه عمودي على الشعاعين $\overline{AB}$ و $\overline{V_D}$ باعتبارهما شعاعي توجيه للمستوي $(P)$															
	0.5	ب- المستوى $(P)$ يشمل النقطة $A$ وعمودي على $\vec{n}$ منه معادلته هي $(P): x+5y+z-9=0$															
	0.25 + 0.75	ج - المسافة بين $M$ و $(P)$ هي $d(M,(p))=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ - هي مستقلة عن موضع $M$															
	0.75 + 0.25	د - معادلة $(yoz)$ - التمثيل وسيطي لمستقيم تقاطع $(P)$ مع $(yoz)$ $\begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=9-5\alpha \end{cases}$															
06	0.25+ 0.5	<b>تمرين 4: (6 نقاط)</b> (1) أ - دراسة التغيرات $f'(x)=\frac{x^2-5}{2x^2}$ - إشارة $f'(x)$ واتجاه التغير -															
	0.25	جدول التغيرات <table><tr><td><math>x</math></td><td>1</td><td><math>\sqrt{5}</math></td><td>5</td></tr><tr><td><math>f'(x)</math></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td>3</td><td><math>\sqrt{5}</math></td><td>3</td></tr></table>				$x$	1	$\sqrt{5}$	5	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	3	$\sqrt{5}$	3
	$x$	1	$\sqrt{5}$	5													
	$f'(x)$	-	0	+													
	$f(x)$	3	$\sqrt{5}$	3													
	0.25+ 0.5	ب - إنشاء المنحني $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$															
	0.25	(2) أ- حساب $U_1$ و $U_2$															
	0.75	ب - تمثيل الحدود $U_2, U_1, U_0$															
	0.75	(3) أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n \geq \sqrt{5}$															
	0.25+ 0.75	ب - إثبات أن المتتالية متناقصة تماما واستنتاج أنها متقاربة															
0.5	(4) أ- إثبات صحة $(U_{n+1}-\sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(U_n-\sqrt{5})$																
0.75	ب - استنتاج أن: $(U_n-\sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0-\sqrt{5})$																
0.25	$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{5}$																

العلامة		عناصر الإجابة	محاوَر الموضوع
المجموع	مجزأة		
4		<b>الموضوع الثاني</b>	الأعداد المركبة والهندسة
	0.5	<b>التمرين الأول: 04 ن</b>	
	0.25×4	(1) المعادلة تكافئ: $z^2 + 10z + 34 = 0$ .....	
	1	(2) أ - مجموعة النقط $M$ بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقياً سالباً تماماً هي القطعة المستقيمة المفتوحة $AB$ حيث $A(0,1)$ ; $B(1,0)$ .....	
	0.25×2	ب- من المعطيات ينتج $f(z_0) = -i$ فومنه نجد $z_0 = 1+i$ .....	
	0.5	(3) أ- المثلث $ABC$ قائم ومتساوي الساقين .....	
5	0.25×2+0.75	<b>التمرين الثاني: 05 ن</b>	المتتاليات و الموافات
	0.25×2	1- $\alpha = \beta = 1$ ، الأساس: $q = 3$ ، الحد الأول : $V_0 = 1$ .....	
	0.75+0.5	2- $U_n = 3^n - n - 1$ ; $V_n = 3^n$ .....	
	1	3- $S' = \frac{1}{2}[3^{n+1} - (n+1)(n+2) - 1]$ ; $S = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$ .....	
	1	4- أ بواقي القسمة الإقليدية متتالية دورية دورها 4 والبواقي هي : 1، 3، 4، 2 ..	
	1	ب - $k \in \mathbb{N} / n = 20k + 11$ ; $n = 20k + 18$ ; $n = 20k + 17$ ; $n = 20k$ .....	
4	0.5	<b>التمرين الثالث : 04 ن</b>	هندسة
	0.25×2	(1) معادلة $(P_2)$ : $x - y - z + 5 = 0$ .....	
	0.25	(2) $\vec{n}_2(1, -1, -1)$ ; $\vec{n}_1(1, 2, -1)$ .....	
	0.5×2	(3) $(P_2) \perp (P_1)$ .....	
	0.5	(4) أ- $d_2 = 2\sqrt{3}$ ; $d_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .....	
	0.5	ب- $d_3 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \frac{\sqrt{114}}{3}$ .....	
	0.5	(5) أ- $\begin{cases} x = \lambda - \frac{8}{3} \\ y = \frac{7}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$ ; $\lambda \in \mathbb{R}$ .....	فضاء
	0.5	ب- $MA^2 = 2(\lambda - \frac{10}{3})^2 + \frac{114}{9}$ .....	
	0.25	$d(A, \Delta) = \frac{\sqrt{114}}{3} = d_3$ .....	

