B2R3A03BAC2014

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2014

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المـــدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط : $A\left(2;1;-1\right)$ ، $B\left(-1;2;4\right)$ ، $C\left(0;-2;3\right)$ و $D\left(1;1;-2\right)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1) النقط A ، B و C تعين مستويا.
2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P)
3) $x-2y-z-1=0$ هي معادلة للمستوي (ACD)
4) $\begin{cases} x=2t \\ y=-2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$ ؛ $t\in\mathbb{R}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AC)
5) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) تساوي $\frac{3}{2}$
6) النقطة $E\left(-2;-1;1\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة C على (P)
7) سطح الكرة ذات المركز D و نصف القطر $\frac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $\left(z-1-2i\right)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$

2) A ، B ، C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$

أ) بيّن أنّ: $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC)

ب) تحقّق أنّ : $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

3) أ) بيّن أنّ: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

استنتج أن D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته وزاويته.

ب) بيّن أنّ المثلث ADB قائم وأن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

ج) استنتج إنشاء للرباعي $ABCD$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E): $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) احسب $PGCD(2013,1962)$

ب) استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا .

ج) بيّن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0[6]$

د) استنتج حلاّ خاصّا (x_0,y_0) حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E)

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x,y) حل للمعادلة (E)

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

ب) عيّن قيم العددين الطبيعيين a و b حيث: $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a,b) = 18$

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) بيّن أنّ للمعادلة: $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا .

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

5) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

أ) احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda) = \int_1^{\lambda} [f(x) - 1]\, dx$

ب) احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب: $a=-2+6i$ و $b=-1+2i$

1) اكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسي .

2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$

أ) D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d=2i$، جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S . ماذا تستنتج؟

ب) بيّن أنّ: $z'-d=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S

3) (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x+5y=11$

أ) تحقّق أنّ النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعدادا صحيحة.

ب) M_0' صورة M_0 بالتحويل S. بيّن أن المستقيمين (BM_0') و (BA) متعامدان.

4) x و y عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$.عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدين، حيث M' هي صورة M بالتحويل S

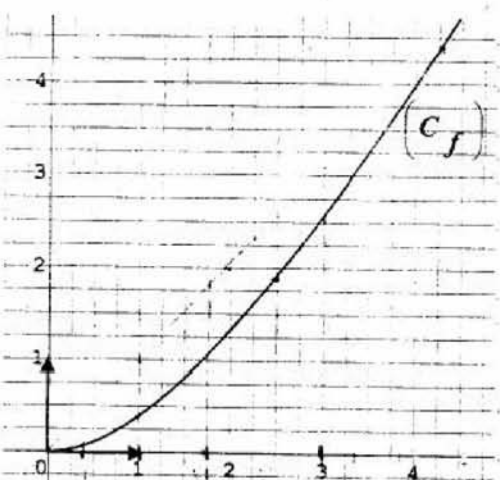
التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

1) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما.

2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $U_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n؛ $U_{n+1}=f(U_n)$

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$



أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل، على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0، U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $0\le U_n\le 3$

ب) بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة .

ج) استنتج أنّ (U_n) متقاربة.

4) أ) ادرس إشارة العدد $7U_{n+1}-6U_n$ واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $0\le U_{n+1}\le\frac{6}{7}U_n$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $0\le U_n\le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$

و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له . (Δ') المستقيم المعرف بجملة المعادلتين: $\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$

1) جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ')

2) بيّن أنّ (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

3) (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ). بيّن أن معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+2z-3=0$

4) $M(1+t;1+2t;3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ)، حيث $t\in\mathbb{R}$. احسب d المسافة بين M والمستوي (P)

5) أ) عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A' ويوازي (Δ)

ب) بيّن أنّ (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$

6) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t)=BM^2$

أ) بيّن أنّ: $f(t)=9t^2-24t+20$

ب) بيّن أنّ f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$

جـ) تحقّق أنّ $d=\sqrt{f(t_0)}$

التمرين الرابع: (05.5 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

أ) ادرس تغيرات الدالة f

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري).

جـ) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0;e^2[$

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=1-\ln x$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) ادرس تغيرات الدالة g

ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسم (C_g) على المجال $]0;e^2[$

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$

أ) احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$

ب) احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left[f(x)-g(x)\right]dx$

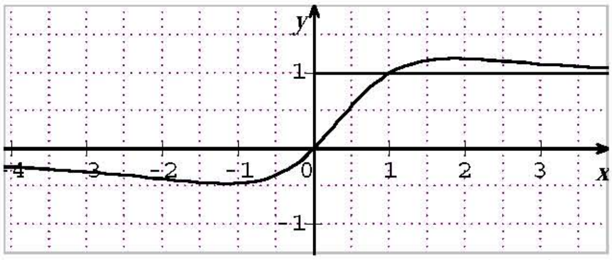
الإجابة النموذجية وسلم التنقيط لموضوع امتحان: البكالوريا — دورة: جوان 2014

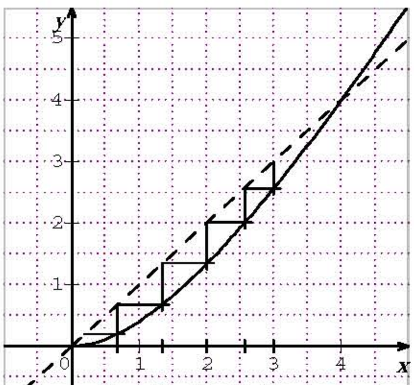
اختبار مادة: الرياضيات — الشعبة: رياضيات — المدة: 4 سا و30 د

الإجابة النموذجية

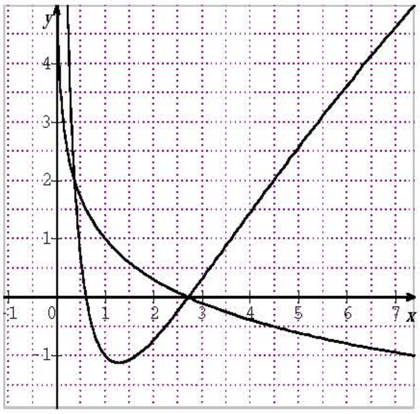
عدد الصفحات 05

عناصر الإجابة (الموضـــوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول:(05 نقاط)		05
1) صحيح لأنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا................	0.5+0.25	
2) خطأ لأنّ النقطة A لا تنتمي إلى (P)................	0,25×2	
3) صحيح لأنّ إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة................	0,5+0,25	
4) صحيح لأنّ إحداثيات A و C تحقق الجملة أو لأن $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{U}$ و إحداثيات C تحقق الجملة ، حيث $\overrightarrow{U}(2;3;-4)$................	0,75+0.25	
5) خطأ لأنّ المسافة بين D و (P) تساوي $\frac{2}{3}$................	0,5+0,25	
6) صحيح لأنّ $E\in(P)$ و $\overrightarrow{EC}$ ناظمي للمستوي (P)................	0,5+0,25	
7) خطأ لأنّ D ليست منتصف القطعة $[AC]$................	0.25 ×2	
التمرين الثاني:(05 نقاط)		05
1) $\Delta=4i^2$ ، الحلول هي $z_1=1+2i$ ، $z_2=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_3=1+\sqrt{3}-i$................	0,25×4	
2) أ) $\lvert z_B-z_A\rvert=\lvert z_D-z_C\rvert=2$ و $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}=2$ ومنه $AB=CD$ و $(BC)//(AD)$...	0,5×2	
ب) $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$ والرباعي هو شبه منحرف متساوي الساقين................	0,25×3	
3) أ) تبيان أنّ: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}\times e^{i\frac{\pi}{2}}$................	0,75	
$z_D-z_B=\sqrt{3}\times e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_B)$ ومنه D صورة A بتشابه مباشر نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ...	0,5	
ب) المثلث ADB قائم في B................	0,25	
النقط A، B، C و D تنتمي إلى الدائرة (γ) التي قطرها $[AD]$ لأن: $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=\frac{\pi}{2}$ نصف القطر $r=2$ والمركز $\Omega(1;0)$................	0.5	
جـ) إنشاء $ABCD$: نعلّم A و D ؛ B هي نقطة تقاطع (γ) والمستقيم ذي المعادلة $y=1$ و C هي تقاطع (γ) والمستقيم ذي المعادلة $y=-1$ ؛ فاصلة كل من B و C موجبة................	0.25	
التمرين الثالث:(04 نقاط)		04
1) أ) $PGCD(2013,1962)=3$................	0,5	
ب) $PGCD(2013,1962)=3$ يقسم 54 إذن للمعادلة حلولا................	0,25	
جـ) (E) تكافئ $671x=6(109y+3)$ ومنه $6/671x$ و 6 أولي مع 671 إذن $6/x$ أي $x\equiv 0[6]$ (حسب مبرهنة غوص)................	0,5	
د) $(x_0,y_0)=(78,80)$................	0,5	
حلول المعادلة هي الثنائيات (x,y) حيث $x=78+654k$ و $y=80+671k$ $(k\in\mathbb{Z})$...	1	

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
2) أ) d من قواسم 18 إذن $d\in\{1,2,3,6,9,18\}$	0.5	
ب) $a=1386+11772p$ و $b=1422+12078p$ و $(p\in\mathbb{N})$	0.75	
التمرين الرابع: (06 نقاط)		
I) 1) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$	2×0,25	
$g'(x)=(1-x)e^{x}$ ، $g'(x)\geq 0$ لما $x\leq 1$ و $g'(x)<0$ لما $x>1$	0,5	
جدول التغيرات:	0,25	
2) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty;1]$ و $g(1)>0$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-1$ ومنه للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]-\infty;1]$، بنفس الطريقة نبين للمعادلة حل وحيد β في المجال $[1;+\infty[$	0,75	06
$-1,2<\alpha<-1,1$ لأن: $g(-1,2)\simeq -0,036$ ، $g(-1,1)\simeq 0,032$ و $1,8<\beta<1,9$ لأن: $g(1,8)\simeq 0,21$ ، $g(1,9)\simeq -0,33$	0,25	
إشارة $g(x)$: $g(x)\geq 0$ لما $x\in[\alpha;\beta]$ و $g(x)<0$ لما $x\in]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$	0,25	
II) 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ مستقيمان مقاربان معادلتاهما $y=0$ و $y=1$	0,75	
2) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-x)^{2}}$	0,25	
f متناقصة تماما على كل من $]-\infty;\alpha]$ و $[\beta;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $[\alpha,\beta]$	0,25	
جدول التغيرات:	0,25	
3) $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ و $-0,48<f(\alpha)<-0,45$ و $1,11<f(\beta)<1,25$	3×0,25	
4) $f(1)=1$ رسم (C_f):	0,5	
		
5) أ) $a(\lambda)=\int_{1}^{\lambda}(f(x)-1)dx=\left[\ln(1-xe^{-x})\right]_{1}^{\lambda}$	0,25	
$=\ln(1-\lambda e^{-\lambda})-\ln(e-1)+1$	0,25	
ب) $\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda)=1-\ln(e-1)$ لأن $\lim_{\lambda\to+\infty}(-\lambda e^{-\lambda})=0$	0,25	

عناصر الإجابة (الموضــــوع الثاني)	العلامة	
	مجزأة	مجموع
التمرين الأول: (05 نقاط)		
1) $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	0,5	
2) أ) لاحقة النقطة D' هي $2i$ إذن النقطة D صامدة بالتحويل S (D مركز S)	0,25×2	
ب) تبيان أن $z'-d=\sqrt{2}\times e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$	0,5	
S تشابه مباشر مركزه D نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$	0,5	
3)أ) التحقق من أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ)	0,25	
النقط التي إحداثياتها صحيحة: $M(5k-3;-3k+4)$ / $k\in\mathbb{Z}$	0,75	05
ب) صورة $M_0(-3;4)$ هي $M'_0(-5;1)$	0,25	
المستقيمان (BM'_0) و (BA) متعامدان ($\arg(\frac{z_{M'_0}-z_B}{z_A-z_B})=\frac{\pi}{2}$ أو $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM'_0}=0$)	0,75	
4) المستقيمان (BM') و (BA) متعامدان إذن : $\begin{cases}3x+5y=11\\-5\le x\le 5\\-5\le y\le 5\end{cases}$	0,5	
النقط المطلوبة هي $M_0(-3;4)$ و $M_1(2;1)$	0,5	
التمرين الثاني: (04.5 نقاط)		
1) $f'(x)=\frac{8x}{(x+4)^2}\ge 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$	0,5	
(أو باستعمال المنحنى المرفق)		
2) أ) تمثيل الحدود:	0,5	04.5
		
ب) التخمين: (U_n) متناقصة ومتقاربة نحو الصفر	0,5	
3) أ) $0\le U_0\le 3$ محققة		
نفرض $0\le U_n\le 3$ ومنه $f(0)\le f(U_n)\le f(3)$	0,5	
ومنه $0\le U_{n+1}\le 3$ لأن: $f(0)=0$ و $f(3)=\frac{18}{7}<3$		
إذن لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $0\le U_n\le 3$		
ب): $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n(U_n-4)}{U_n+4}<0$ (لأن $0\le U_n\le 3$)	0.5	
ومنه (U_n) متناقصة.		
جـ) (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة	0.5	
4) أ) $7U_{n+1}-6U_n=\frac{8U_n(U_n-3)}{U_n+4}\le 0$ لأن $0\le U_n\le 3$ ومنه نستنتج أن :		
$0\le U_{n+1}\le\frac{6}{7}U_n$	0.5	

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
ب) البرهان بالتراجع على أن: $0 \le U_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$	0,75	
جـ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ لأن $(0<\frac{6}{7}\le 1)$ إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ حسب مبرهنة الحصر..............	0.25	
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
1) تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) هو: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=3-2t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.....................	0,5	
تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ') هو: $\begin{cases} x=-t' \\ y=3 \\ z=t' \end{cases}$ حيث $t'\in\mathbb{R}$	0,5	
2) (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي لأنهما غير متوازيين وغير متقاطعين	0.75	
3) (P) يشمل $M_0(0;3;0)$ و موجه بالشعاعين $\vec{u}(-1;2;-2)$ و $\vec{v}(-1;0;1)$ ، نعين شعاعا ناظميا $\vec{n}$ لـ (P) أو نكتب تمثيلا وسيطيا له ثم نستنتج المعادلة $2x+y+2z-3=0$ ...	0.75	05
4) المسافة بين M من (Δ) و (P) هي $d=2$	0.5	
5) أ) $A'\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$ هي نقطة تقاطع (P) مع المستقيم الذي يشمل A و يعامد (P)........	0,5	
تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ'') : $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+\lambda \\ y=\frac{1}{3}+2\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=\frac{5}{3}-2\lambda \end{cases}$	0.25	
ب) $(\Delta')\cap(\Delta'')=\{B(1,3,-1)\}$	0.5	
6) أ) $f(t)=BM^2=9t^2-24t+20$	0.25	
ب) $f'(t)=18t-24$ ومنه $t_0=\frac{4}{3}$ ، $f(t_0)=4$	0.25	
جـ) $d=2=\sqrt{f(t_0)}$	0.25	

عناصر الإجابة	العلامة	
	مجزأة	مجموع
التمرين الرابع: (05.5 نقاط)		05.5
1) أ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	0,25×2	
$f'(x) = \dfrac{-1+4\ln x}{x}$	0.5	
إشارة $f'(x)$: $0 \quad - \quad e^{\frac{1}{4}} \quad + \quad +\infty$	0.25	
جدول التغيرات :	0.25	
ب) معادلة المماس (Δ) : $y = \dfrac{3}{e}x - 3$	0.5	
جـ) $x = e$ و $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ .... 	0,25×2	
رسم (C_f):	0.50	
2) أ) تغيرات الدالة g	0,75	
ب) الوضع النسبي للمنحنيين $f(x) - g(x) = 2(\ln x - 1)(\ln x + 1)$	0,25	
الإشارة : $0 \quad + \quad e^{-1} \quad - \quad e \quad + \quad +\infty$	0,25	
(C_f) أعلى (C_g) في كل من $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$ و $[e;+\infty[$ و (C_f) أسفل (C_g) في $\left[\dfrac{1}{e};e\right]$	0,25	
رسم (C_g):	0,25	
3) أ) $h'(x) = (\ln x)^2$ ومنه h دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$	0.25	
ب) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left[f(x) - g(x)\right]dx = 2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left[(\ln x)^2 - 1\right]dx = 2\left[h(x) - x\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = -\frac{8}{e}$	0.5	

الحل المفصل لامتحان شهادة البكالوريا مادة الرياضيات شعبة الرياضيات لسنة 2014

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير

1) صحيح

التبرير: لدينا $A(2;1;-1)$ ، $B(-1;2;4)$ ، $C(0;-2;3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2;-3;-4)$
وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A ، B و C تعين مستو.

2) خطأ

التبرير: لأن $\left(A\notin(p)\right)$ وذلك لأن إحداثيات A لا تحقق معادلة (p) : $2(2)-(1)+2(-1)+1=2\neq 0$.

3) صحيح

التبرير: لدينا $A(2;1;-1)$ ، $C(0;-2;3)$ ، $D(1;1;-2)$ ومنه $\overrightarrow{AC}(-2;-3;4)$ ، $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)$
وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ ومنه النقط A ، C و D تعين مستو. هذا من جهة
ومن جهة أخرى: إحداثيات النقط A ، C و D تحقق معادلة $x-2y-z-1=0$.
$(2)-2(1)-(-1)-1=0$ ، $(0)-2(-2)-(3)-1=0$ ، $(1)-2(1)-(-2)-1=0$

4) صحيح.

التبرير: إحداثيات كل من A و C تحقق التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=2t \\ y=-2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$

$$\begin{cases} 2=2t \\ 1=-2+3t\,;\,t=1 \\ -1=3-4t \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} 0=2t \\ -2=-2+3t\,;\,t=0 \\ 3=3-4t \end{cases}$$

1) خطأ

التبرير:

$$d(D;(p))=\frac{|2(1)-(1)+2(-2)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$$

2) صحيح

التبرير: لأن $E\in(p)$ وذلك لأن إحداثياتها تحقق معادلة (p): $(2(-2)-(-1)+2(1)+1=2\neq 0)$.
و لأن $(EC)\perp(p)$ وذلك لأن $\overrightarrow{EC}(2;-1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (p).

تبرير آخر: لأن $d(C;(p))=EC$

$$d(C;(p))=\frac{|2(0)-(-2)+2(3)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3;\,EC=\sqrt{(0+2)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2}=3$$

3) **خطأ**

التبرير: لأن النقطة D ليست منتصف القطعة $[AC]$

حل التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$:

$(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$ معناه

$$\begin{cases} z-1-2i=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . e_1 \\ \text{أو} \\ z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0 \ldots e_2 \end{cases}$$

المعادلة e_1 حلها $z_0=1+2i$ و المعادلة e_2 نحلها باستعمال المميز المختصر حيث $\Delta'=-1=i^2$ وحلاها هما $z_1=1+\sqrt{3}+i$ و $z_2=1+\sqrt{3}i-1$.

ومنه حلول المعادلة هي $S=\left\{1+2i;z_1=1+\sqrt{3}+i;z_1=1+\sqrt{3}-i\right\}$

(2

أ) **تبيين أن $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC)**

$AB=|z_B-z_A|=\left|\sqrt{3}-i\right|=2\,;CD=|z_D-z_C|=\left|-\sqrt{3}-i\right|=2\,;\ AB=CD$

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=-2i\,;\ z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=-4i\,;\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}\,;(BC)\,//\,(AD)$

ب) **التحقق أن $\frac{z_B+z_D}{2}\neq\frac{z_A+z_C}{2}$ واستنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$**

$$\frac{z_B+z_D}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\,;\ \frac{z_A+z_C}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,;\ \frac{z_B+z_D}{2}\neq\frac{z_A+z_C}{2}$$

استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:

بما أن $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$ فإن قطرا الرباعي $ABCD$ ليسا متناصفين وبما أن $AB=CD$ و $(AD)\,//\,(BC)$ ف الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

3) ـ

أ) **تبيين أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$**

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}i\left(i+\sqrt{3}\right)}{-\sqrt{3}+i}=\sqrt{3}i=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

بما أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ و $BD=\sqrt{3}AB$ ومنه النقطة D صورة النقطة A بتشابه مباشر الذي مركزه B ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) تبيين أن المثلث ABD قائم

بما أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ومنه أن المثلث ABD قائم في B

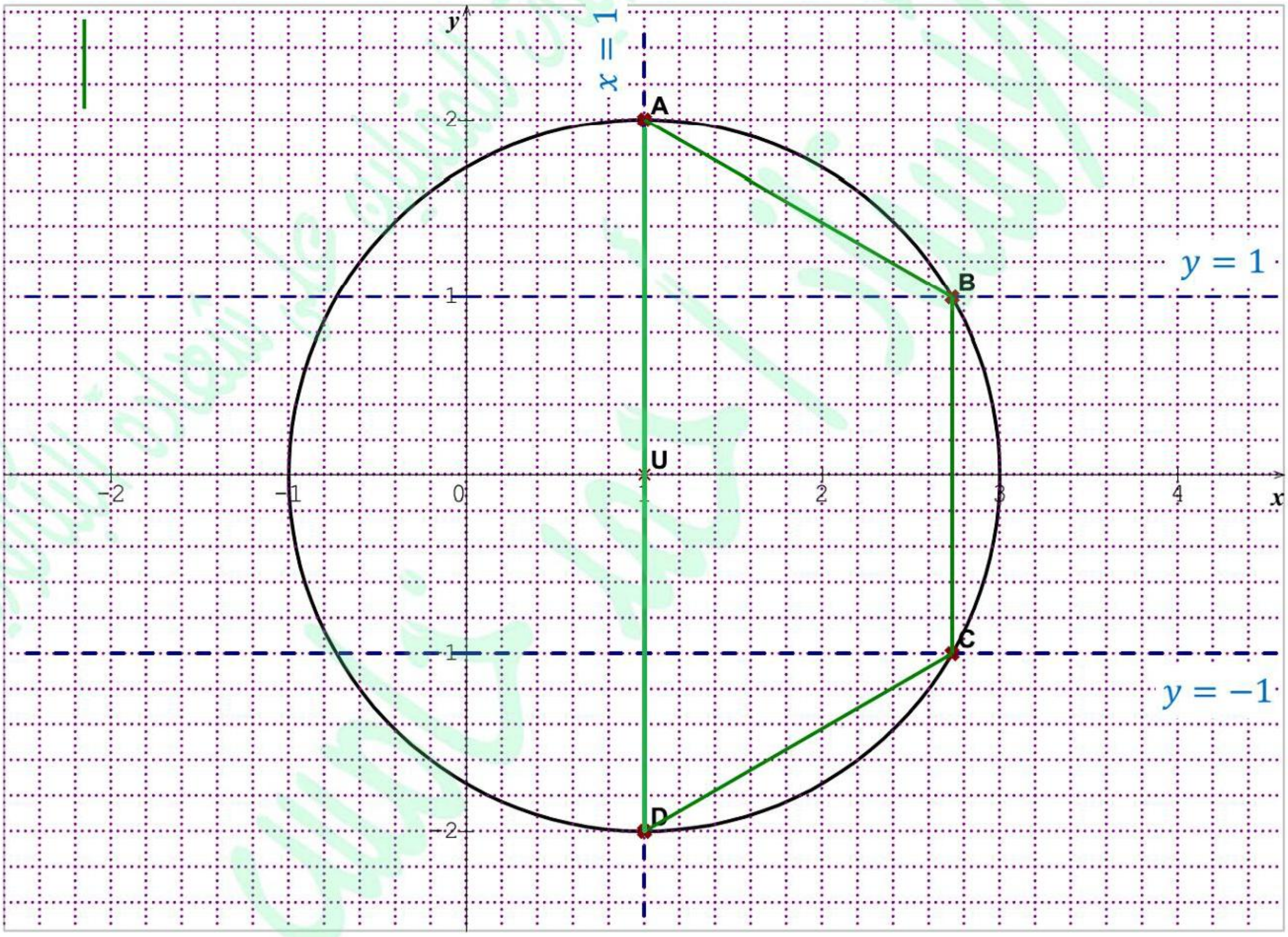
تبيين أن النقط A ،B ،C و D تنتمي الى نفس الدائرة مع تحديد مركزها و نصف قطرها

$$|z_A - 1| = |2i| = 2; |z_B - 1| = |\sqrt{3} + i| = 2; |z_C - 1| = |\sqrt{3} - i| = 2; |z_D - 1| = |-2i| = 2$$

بوضع النقطة U صورة العدد 1 نفسر ما سبق بأن: $AU = BU = CU = DU = 1$ ومنه النقط A ،B ،C و D تنتمي الى الدائرة نرمز لها (c) والتي مركزها U ونصف قطرها 2.

استنتاج إنشاء للرباعي $ABCD$

لدينا النقط A ،B ،C و D تنتمي الى الدائرة (c) التي مركزها U ونصف قطرها 2 حيث النقطتين A و D هما النقطتين من الدائرة (c) التي فاصلتيهما تساوي 1 (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $x = 1$)،النقطة B هي النقطة من الدائرة التي ترتيبها يساوي 1 وتنتمي إلى الربع الأول من الدائرة أما النقطة (c) (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ في الربع الأول منها) ، C هي النقطة من الدائرة التي ترتيبها يساوي -1 وتنتمي إلى الربع الرابع من الدائرة (c) (تقاطع الدائرة والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ في الربع الرابع منها).



حل التمرين الثالث:

1) $2013x + 1962y = 54 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$.

أ) حساب $PGCD(2013;1962)$

بما أن:

$2013 = 1962 \times 1 + 51; 1962 = 51 \times 38 + 24; 51 = 24 \times 2 + 3; 24 = 3 \times 8 + 0$

فإن:

$PGCD(2013;1962) = 3$

ب) استنتاج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

بما أن 54 يقبل القسمة على $PGCD(2013;1962)$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

ج) تبيين أنه إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0[6]$

المعادلة (E) تكافئ: $671x - 654y = 18$

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $671x - 654y = 18$ ومنه $671x = 654y + 18$ أي

$671x \equiv 654y + 18[6]$ وبما أن $671 \equiv 5[6]$ و $654 \equiv 0[6]$ و $18 \equiv 0[6]$ فإن $5x \equiv 0[6]$

وبما أن 5 و 6 أوليان فيما بينهما فانه حسب غوص منه $x \equiv 0[6]$

د) استنتاج الحل الخاص $(x_0;y_0)$ وحل المعادلة (E)

بما أن $74 < x_0 < 80$ و $x \equiv 0[6]$ فإن $x_0 = 78$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد $y_0 = 80$ أي الحل الخاص المطلوب هو $(x_0;y_0) = (78;80)$

حل المعادلة (E):

لدينا $\begin{cases} 671x - 654y = 18 \\ 671(78) - 654(80) = 18 \end{cases}$ وبالطرح: نجد $671(x-78) = 654(y-80)$ ومنه 654 يقسم $671(x-78)$ لكن 671 و 654 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص 654 يقسم $(x-78)$ أي

$x = 654k + 78$ وبالتعويض في (E) نجد $y = 671k + 80$

2)

أ) القيم الممكنة لـ d:

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $671x-654y=18$ ومنه قيم الممكنة لـ d هي قواسم العدد 18 أي

ب) تعيين العددين الطبيعيين a و b:

لدينا $671a-654b=18$ ومنه $(a;b)$ هي من شكل حلول المعادلة (E) أي $a=654k$ و

$b=671k+80$ ولدينا أيضا $PGCD(a;b)=18$ ومنه:

$\begin{cases} a\equiv 0[18] \\ b\equiv 0[18] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 654k+78\equiv 0[18] \\ 671k+80\equiv 0[18] \end{cases}$ أوبما أن $\begin{cases} 654\equiv 6[18] \\ 78\equiv 6[18] \\ 671\equiv 5[18] \\ 80\equiv 8[18] \end{cases}$ فإن:

$$\begin{cases} 6k+6\equiv 0[18] \dots\dots e_1 \\ 5k+8\equiv 0[18] \dots\dots e_2 \end{cases}$$

$e_1+(-1)\times e_2$: $k-2\equiv 0[18]$ ومنه $k\equiv 2[18]$ أي $k=18\alpha+2$ حيث α عدد طبيعي

ومنه

$$a=654(18\alpha+2)+78=11772\alpha+1386$$
$$b=671(18\alpha+2)+80=12078\alpha+1422$$

حل التمرين الرابع:

ا. $g(x)=(2-x)e^x-1;\ D_g=\mathbb{R}$

1) دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2e^x-xe^x-1=-1\ ;\ \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^x-1=-\infty$$

المشتق وإشارته:

الدالة g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$g'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$$

ومنه إشارة المشتق من إشارة $(1-x)$ وعليه $g'(x)>0$ من أجل $x\in]-\infty;1[$ و $g'(x)<0$ من أجل $x\in]1;+\infty[$ و $g'(1)=0$

اتجاه التغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

بما أن $g'(x)\geq 0$ من أجل $x\in]-\infty;1[$ فإن الدالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $g'(x)\geq 0$ من أجل $x\in[1;+\infty[$ فإن الدالة متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$e-1$	↘	$-\infty$

2) تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ وبصفة خاصة على المجال $]-1,2;-1.1[$ و لدينا $g(-1,2)\times g(-1,1)<0$ (لأن $g(-1,2)\simeq -0.03; g(-1,1)\simeq 0.03$). ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\epsilon]0,7;0,8[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ وبصفة خاصة على المجال $]1,8;1,9[$ و لدينا $g(1,8)\times g(1,9)<0$ (لأن $g(1,8)\simeq 0.2; g(1,9)\simeq -0.3$). ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد β حيث $\beta\in]1,8;1,9[$.

الخلاصة: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\epsilon]0,7;0,8[$ و $\beta\in]1,8;1,9[$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

بما أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين هما α و β مع $\alpha<\beta$ ومن دراسة تغيرات الدالة g يمكن استنتاج إشارتها والتي تكون كمايلي:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II. $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$; $D_f=\mathbb{R}$

1) حساب نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$ وتفسير النتيجتين هندسيا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=0\,;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=1$$

تفسير النتيجتين هندسيا

بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ فإن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي $\left(\boldsymbol{xx'}\right)$ بجوار $-\infty$.

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ فإن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

2) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$:

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(2-x)-1}{(e^x-x)^2}$$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\boldsymbol{f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}}$

استنتاج تغير الدالة $\boldsymbol{f}$ وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $\boldsymbol{f'(x)}$ من إشارة $\boldsymbol{g(x)}$ لأن $(e^x-x)^2>0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[\beta;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

4) تبيين أن $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

لدينا: $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha} \\ \text{و} \\ g(\alpha)=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha} \\ \text{و} \\ (2-\alpha)e^{\alpha}-1=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-x} \ldots\ldots\ldots e_1 \\ \text{و} \\ e^{\alpha}=\frac{1}{2-\alpha} \ldots\ldots\ldots e_2 \end{cases}$ بتعويض e_2 في e_1

نجد

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-x}=\frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-x}=\frac{\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}}=\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha-1}\ ;\ \boldsymbol{f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}}$$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

لدينا $-1,1>\alpha>-1,2$ ومنه $-2,1>\alpha-1>-2,2$ وبالقلب نجد $\frac{1}{-2,2}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{-2,1}$ ومنه

$$-0.48<f(\alpha)<-0.45$$

لدينا $1,8<\beta<1,9$ ومنه $0,8<\beta-1<0,9$ وبالقلب نجد $\frac{1}{0,8}>\frac{1}{\beta-1}>\frac{1}{0,9}$ ومنه

$1.11<f(\beta)<1.25$. عبارة $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ نفسها لأن كلاهما يعدمان الدالة g.

4) حساب $f(1)$ ورسم المنحني (C_f)

$$f(1)=\frac{e^1-1}{e^1-1}=1$$

5) .

أ) حساب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$

$$a(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]\,dx=\int_1^{\lambda}\frac{e^x-1}{e^x-x}-1\,dx=[\ln(e^x-x)-x]_1^{\lambda}$$
$$=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1$$

$$\boldsymbol{a(\lambda)=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1}$$

ب) حساب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda) &= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)+\ln e^{-\lambda}-\ln(e-1)+1\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left[e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-\lambda\right)\right]-\ln(e-1)+1\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(1-\lambda e^{-\lambda}\right)-\ln(e-1)+2=-\ln(e-1)+1\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda) = -\ln(e-1)+1$$