الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية　　　　　　　　الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي　　　　　　　　دورة: جوان 2010

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات　　　　　　　　المدة: 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

1/ حلّ، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $(z-3+2i)\left(z^2+6z+10\right)=0$.

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

2/ علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النّقط A، C، D و I ذات اللاحقات: $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب.

3/ z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases} arg(z-3+2i)=arg(z-1)+\frac{\pi}{2} \\ |z-3+2i|=|z-1| \end{cases}$

أ- بين أن الجملة تكافئ : $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ ثم عين قيمة z.

ب- B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$، تحقق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$؟

جـ- لتكن J النّقطة التي لاحقتها z_J حيث: $z_J=1-2i$.

اكتب على الشكل الأسي العدد المركّب Z حيث: $Z=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_J}$.

تحقّق أنّ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النّقطتين $A(3;-1;2)$ و $B(1;2;1)$ و المستوي (P) الذي معادلته $x-2y+3z-7=0$.

1/ عيّن إحداثيات النقطة G مرجح النّقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب.

2/ عيّن طبيعة وعناصر (Γ)مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=4$.

3/ أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النّقطة G ويعامد المستوي (P) .

ب- عيّن إحداثيات H نقطة تقاطع (P) و (Δ) .

جـ - احسب المسافة بين G و المستوي (P).

4/ نعرّف المستوي (P') بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t+2\lambda \\ z=2-t+2\lambda \end{cases}$ حيث t و λ عددان حقيقيان

أثبت أنّ (P) و (P') متقاطعان واكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

ليكن (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$
2. احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجالات تعريفها.
3. بيّن أنّ f متزايدة تماما على كلّ مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكل جدول تغيراتها.
4. أ - (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+\frac{4}{3}$.

   بيّن أنّ (D) و (D') مقاربان للمنحنى (C_f) ، ثمّ حدّد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

   ب - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,9<x_0<0,91$

   و $-1,66<x_1<-1,65$

   جـ - احسب من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم $f(x)+f(-x)$.

   فسّر النتيجة هندسيا.

   د - ارسم (D) و (D') و (C_f).

   هـ - m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x+m$.

   ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$
5. نعتبر الدّالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=[f(x)]^2$

   ادرس تغيّرات الدّالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x.

التمرين الرابع: (03 نقاط)

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي:

$n=\overline{11\alpha00}$ حيث α عدد طبيعي.

1- عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3- نأخذ $\alpha=4$ اكتب العدد n في النظام العشري.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) أ – اكتب على الشكل الأسي العدد المركّب a حيث: $a=-2+2i\sqrt{3}$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

ب– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $Z^2=-2+2i\sqrt{3}$

2) ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A و B و C النقط التي لاحقاتها $Z_A=-2$ و $Z_B=-1-\sqrt{3}\,i$ و $Z_C=1+\sqrt{3}\,i$ على الترتيب.

أ– احسب طويلة العدد المركّب $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ وعمدة له.

ب– استنتج طبيعة المثلّث ABC .

3) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $arg(\bar{z}+2)=\frac{\pi}{3}$.

أ– تحقق أن B تنتمي إلى (E).

ب– عين المجموعة (E).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1– عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13 .

2– تحقق أن: $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]$.

3– عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $10^{2n}+10^n+1\equiv 0[13]$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطتين:

$A(3;-2;2)$ ، $B(0;4;-1)$.

1) اكتب معادلة للمستوي (p_1) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1\,;0\,;-1)$ شعاع ناظمي له.

2) (p_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (p_1).

أ– بيّن أن $\vec{v}(1\,;1\,;1)$ شعاع ناظمي لـ (p_2).

ب– اكتب معادلة لـ (p_2).

3) نعتبر النقطتين C و D حيث $C(6;1;5)$ و D معرفة بـ: $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$.

أ– بين أن المثلث ACD قائم في A واحسب مساحته.

ب– بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD).

جـ– احسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- أثبت أن الدالة f فردية.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

جـ- ادرس تغيرات الدالة f .

2) أ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

جـ- بيّن أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$، ثم استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر.

د- ارسم (d) و (d') و (C_f) في المعلم السابق.

3) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

أ- بيّن أن الدالة g زوجية.

ب- انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

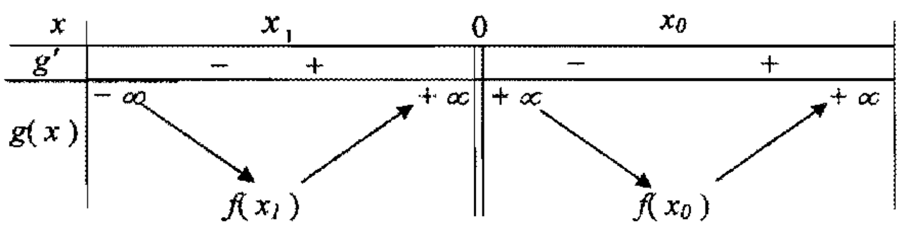
الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2010

اختبار مادة : الرياضيات الشعب(ة): تقني رياضي

<table>
<tr><th rowspan="2">محاور الموضوع</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموع</th></tr>
<tr><td rowspan="11">أعداد مركبة و تحويلات نقطية</td><td>الموضوع الأول
تمرين 1: (5 نقاط)
1/ حلول المعادلة $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$</td><td></td><td rowspan="11">05</td></tr>
<tr><td>$\Delta'=i^2$ ....</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>$z_0=3-2i$ ، $z_1=-3+i$ ، $z_2=-3-i$ ....</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>2/ تعليم النقط A، C، D في المستوي ....</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>3/ أ- الجملة تكافئ $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>$Z=3$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>ب- التحقق من أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>4/ الكتابتان الجبرية والأسّية للعدد Z : $Z=-i$ ، $Z=e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>التحقق أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$ وطبيعة الرباعي $ABIJ$ مربع ....</td><td>0.5+0.5</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="9">هندسة فضائية</td><td>تمرين 2: (5 نقاط)</td><td></td><td rowspan="9">05</td></tr>
<tr><td>1 / $G(\frac{10}{4},-\frac{1}{4},\frac{7}{4})$ ....</td><td>01</td></tr>
<tr><td>2/ المجموعة (Γ) هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 1 ....</td><td>01</td></tr>
<tr><td>3/ أ – تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x=\frac{10}{4}+u \\ y=-\frac{1}{4}-2u \\ z=\frac{7}{4}+3u \end{cases}$ $u\in\mathbb{R}$ ....</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>ب – إحداثيات H $H(\frac{135}{56},-\frac{4}{56},\frac{83}{56})$ ....</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>جـ – $d(G,p)=\frac{5}{4\sqrt{14}}$ ....</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>4/ بحل الجملة المشكلة من معادلة (P) وتمثيل وسيطي (P') نجد:
$\lambda=2t$ $\begin{cases} x=1+t \\ y=5t \\ z=2+3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$</td><td>0.5
+</td></tr>
<tr><td>أو
إيجاد شعاع ناظمي لـ (P') : $\vec{n}_{P'}(2;-1;1)$ وتبيان $\vec{n}_{P'}$ لا يوازي $\vec{n}_P$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>إيجاد التمثيل الوسيطي (غير وحيد)</td><td></td></tr>
</table>

191

مجموع	مجزأة	عناصر الإجابة	محاور الموضوع
		تمرين 3: (7 نقاط)	الدوال العددية
	0.25	.1 $f(x)=x+\frac{-4}{3(e^x-1)}$ ، $(a,b)=(1,-4)$	
	4×0.25	.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$	
	0.25+0.5	.3 $f'(x)=1+\frac{4e^x}{3(e^x-1)^2}$ ، $f'(x)>0$	
	0.25	جدول التغيرات	
	0.25	.4 أ- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ، $y=x$ م.م.م	
	0.25	(C_f) أسفل (D) في جوار $+\infty$	
07	0.25	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+\frac{4}{3})\right]=0$ ، $y=x+\frac{4}{3}$ (D') م.م.م	
	0.25	(C_f) فوق (D') في جوار $-\infty$	
	2×0.5	$f(x_0)=0$ و $0,9<x_0<0,91$	
		$f(x_1)=0$ و $-1,66<x_1<-1,65$ نظرية القيم المتوسطة	
	2×0.25	جـ - $f(x)+f(-x)=\frac{4}{3}$ $\omega\left(0,\frac{2}{3}\right)$ مركز تناظر (C_f)	
	0.5+0.25	د- رسم (D) و (D') و C_f	
	0.25	هـ- $m<0$ أو $m>\frac{4}{3}$ حل وحيد	
	0.25	$0\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$ لا توجد حلول	
		.5 g مركب الدالتين f والدالة مربع ($g'(x)=2f(x)f'(x)$).	
	1		

192

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
	تمرين 4: (3 نقط)		
	$n=\overline{11\alpha 00}$		
	$0\le\alpha\le 6\ ,n=49\alpha+2744$	0.5	
	/1 لدينا $n\equiv 0[3]$ معناه $\alpha+2\equiv 0[3]$ أي $\alpha\equiv 1[3]$		
	ومنه $\alpha\in\{1,4\}$	0.75	03
	/2 $n\equiv 0[5]$ معناه $4\alpha+4\equiv 0[5]$ أي $\alpha+1\equiv 0[5]$		
	ومنه $\alpha\equiv 4[5]$ إذن $\alpha=4$	0.75	
	n يقبل القسمة على 15 إذا وفقط إذا كان $\alpha=4$	0.5	
	/3 من أجل $\alpha=4$ نجد : $n=2940$	0.5	

193

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
	الموضوع الثاني		
الأعداد المركبة	**التمرين الأول : (05 ن)**		05
	1) أ – $a = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$	0.75	
	ب – بوضع $Z = re^{i\theta}$ ينتج $r^2e^{i2\theta} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	0.5	
	ومنه $Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ أو $Z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$	2×0.5	
	2) أ– $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\sqrt{3}$ ؛ $\left\lvert\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = \sqrt{3}$ ؛ $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	3×0.5	
	ب– المثلث ABC قائم في A	0.25	
	3) أ– $\bar{Z}_B + 2 = 1 + \sqrt{3}i$, $\arg(\bar{Z} + 2) = \frac{\pi}{3}$, $(B \in E)$	0.5	
	ب– $\arg(Z + 2) = -\arg(\overline{Z + 2}) = -\frac{\pi}{3}$		
	$E = [AB) - \{A\}$	0.5	
الموافقات	**التمرين الثاني : (04 ن)**		04
	1) $n = 6k$ الباقي 1 ، $n = 6k + 3$ الباقي 12 $n = 6k + 1$ الباقي 10 ، $n = 6k + 4$ الباقي 3 .... $n = 6k + 2$ الباقي 9 ، $n = 6k + 5$ الباقي 4	6×0.25	
	2) $2008 \equiv 4[6]$ و $10^{2008} \equiv 3[6]$ ومنه $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$	1	
	3) $n = 6k + 2$ أو $n = 6k + 4$ حيث $k \in \mathbb{N}$	6×0.25	
تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء -	**التمرين الثالث: (05 ن)**		05
	1/ $(p_1): x - z - 1 = 0$	0.5	
	2/ أ– $\vec{v}.\overrightarrow{AB} = 0$, $\vec{v}.\vec{u} = 0$ ومنه $\vec{v}$ ناظمي لــ (P_2).	2×0.5	
	ب– معادلة (P_2) : $x + y + z - 3 = 0$	0.5	
	3/ أ) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 0$ المثلث ACD قائم في A ، مساحته: $S = \frac{9\sqrt{6}}{2}ua$	2×0.5	
	ب) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$	2×0.5	
	جـ) $v = \frac{1}{3}S \times AB = 27uv$	2×0.5	

194

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
الدوال الصماء	التمرين الرابع: (06 نقاط)		06
	1/ أ) f دالة فردية	0.25	
	ب) $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$	0.5	
	جـ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	2×0.25	
	f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. $(f'(x)>0)$	0.5	
	جدول تغيراتها	0.25	
	2/ أ) $(T): \; y=2x$	0.5	
	ب) إشارة $f(x)-2x$ و (C_f) يخترق (T) في المبدأ O	0.5	
	المبدأ O نقطة انعطاف لـ (C_f)	0.25	
	جـ) (d) مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+1$ في جوار $+\infty$	0.5	
	$(d'): \; y=x-1$ مقارب (C_f) في جوار $-\infty$	0.5	
	جـ) رسم $(d),(d'),(C_f)$	1	
	3/ أ- g دالة زوجية	0.25	
	ب- رسم (C_g)	0.5	

195