الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — * دورة جوان 2008 *

الشعبة : العلوم التجريبية — المدة :03 ساعات و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (04,5 نقط)

1 – حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2 – المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جـ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

التمرين الثاني (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوى (P) الذي معادلته :

$$x+2y-z+7=0$$

و النقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$.

1 – تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) هي : $y+2z-2=0$

2 – أ – تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC) .

ب – احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

3 – لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,\alpha),(C,\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثالث (05 نقط)

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$

2. نعتبرفي المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين ، A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$$z_B = -2-2i \quad \text{و} \quad z_A = 2+i$$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3.لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_c حيث $z_c = \dfrac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_c على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4.أ – برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

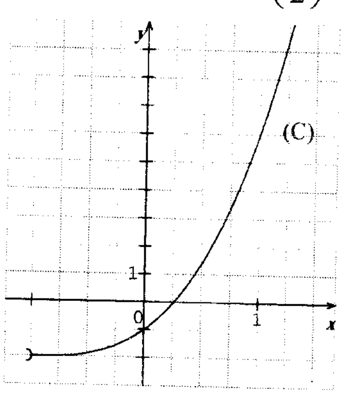
ب – تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـــ : $z' + \dfrac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \dfrac{1}{2}i\right)$.

التمرين الرابع (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1– أ) – بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g و حدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.



ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2 – f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 – نأخذ $\alpha \simeq 0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4- أ) أكتب $f(x)$على الشكل : $f(x) = x + a + \dfrac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$والتي تحقق : $F(1) = 2$

بالتوفيق

الموضوع الثاني

التمرين الأول (03 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$.

و المستوى (P) الذي معادلته: $x-3z-4=0$.

1) المستوى (P) هو: ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD).

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1) $\vec{n_1}(1,2,1)$ ، ج2) $\vec{n_2}(-2,0,6)$ ، ج3) $\vec{n_3}(2,0,-1)$

3) المسافة بين النقطة D و المستوى (P) هي :

ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثاني (05 نقط)

(u_n)متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\frac{5}{2}$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ – ارسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب – باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 وَ u_4

جـــ – ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 6$.

ب – تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـــ – هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ – اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب – أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث (04 نقط)

1) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$.

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب – بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I.

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$u_0=\frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1}=f(u_n)$$

أ – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب) عين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I – نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=(ax+b)\,e^{-x}+1$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II – نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)\,e^{-x}+1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلّم السابق.

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا.(نذكّر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u=0$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ) ارسم (C_g).

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي:

$$k(x)=g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

محاور الموضوع	الموضوع الأول عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الأعداد المركبة	**تمرين (1) (04.5 نقاط)** 1 - $\Delta = 1$ $z_1 = i$ و $z_2 = 1+i$ بيان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي	0,25×2 0,5	04,5
	2- أ – البرهان على أن $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$	0,5	
	البرهان على أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$	0,5	
	ب - $Z = \frac{i}{-1+i}$ و منه $Z = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$	0,25×2	
	و بالتالي $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$	0,25	
	جـ) الشكل المثلثي لـ Z : $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$	025	
	$\lvert Z\rvert = \frac{AC}{AB}$ و $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$	0,5+0,5	
	C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	0,5	
الهندسة الفضائية	**تمرين (2) : 04 نقاط** 1 – التحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية	0,5	04
	معادلة المستوى (ABC) : $y+2z-2=0$ **طريقة : علما أن النقط** A ، B و C ليست على استقامية يكفي إثبات أن احداثياتها تحقق المعادلة . **أو أي طريقة أخرى صحيحة.**	0,75	
	2 – أ – التحقق أن $(P) \perp (ABC)$	0,5	
	تمثيل وسيطي لـ (Δ) : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 5t-11 \\ y = -2t+2 \\ z = t \end{cases}$	0,75	
	ب- المسافة بين A ، (Δ) هي المسافة بين A ، (P)	0,25	
	المسافة بين A و (P) هي $\frac{4\sqrt{6}}{3}$	0,25	

8

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
	3 – تحليليا / إيجاد احداثيات G	0,5	
	وضع $G\in(\Delta)$ و ايجاد : $\alpha=-\frac{4}{7}$	0,5	
	تقبل أي طريقة صحيحة		
المتتاليات	**التمرين الثالث : 04 نقاط**		04
	1- أ) $f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}>0$	0,5	
	ب) $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ f \text{ متزايدة على } I \end{cases}$ اذن $f(1)\le f(x)\le f(2)$ أي أن $1\le f(x)\le 2$	0,75	
	2 – أ) $u_0\in I$	0,25	
	اعتمادا على 1-ب) $u_n\in I$ فإن $u_{n+1}\in I$	0,25×2	
	ب)	0,25	
	$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{u_n^2-3u_n+2}{-u_n+4}$	0,25	
	$u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$		
	بما أن u_n ينتمي إلى I فإن : $u_{n+1}-u_n<0$	0,25	
	نستنتج أن (u_n) متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأسفل .	0,25	
	3 – أ) التحقق + البرهان	0,75	
	ب) $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$	0,25	
	التمرين الرابع (07,5 نقط)		07,5
	$f(-1)=1$ و $f'(-1)=-e$	0,25×2	
	$a=b=-1$	0,25	
	2) أ) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$	0,25	
	المستقيم $y=1$ هو مقارب للمنحنى (C_g) عند $(+\infty)$	0,25	
	ب) g قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$	0,25	
	$g'(x)=xe^{-x}$ ، إشارة $g'(x)$	0,25×2	
	جدول التغيرات	0,5	
	ج) $g''(x)=(1-x)e^{-x}$	0,25×4	

x	-2		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
	$g(1)=1-\frac{2}{e}$ ؛ $I\left(1,1-\frac{2}{e}\right)$	0,25	
	معادلة المماس في I : $y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}$	0,5	
	هـ) الرسم		

9

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	و) تعيين α و β ، $\alpha = 1$ ، $\beta = 2$	2×0,25	
	استنتاج الدالة الأصلية للدالة g : $G(x) = (x+2)e^{-x} + x + c$ و $G(0) = 0$	0,25	
	$C = -2$	0,25	
	3) k قابلة للإشتقاق على $]-2, +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق	0,25	
	$k'(x) = 2xg'(x^2)$	0,5	

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x^2)$		+		+	
$2x$		−	0	+	
$k'(x)$		−	0	+	

(0,5)

$k(-2) = 1 - 5e^{-4}$

$k(0) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} k(x) = 1$

(0,25×3)

جدول التغيرات

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		−	0	+	
$k(x)$	k(-2)	↘	0	↗	1

(0,25)

10

محاور الموضوع	الموضوع الثاني عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الهندسة الفضائية	**التمرين الأول : 03 نقط** 1) نتحقق من انتماء النقط C,B,A إلى المستوى (P) بينما D لا ينتمي إلى (P). إذن المستوى (P) هو (ABC) 2) نبحث عن الشعاع المرتبط خطيا مع الشعاع $\vec{n'}(1,0,-3)$ $\vec{n_1}$ ليس مرتبطا خطيا مع $\vec{n'}$ ، $\vec{n_2}$ مرتبط خطيا مع $\vec{n'}$ $\vec{n_3}$ ليس مرتبطا خطيا مع $\vec{n'}$ 3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي $d=\frac{\lvert 1\times3-0\times2-3\times1-4\rvert}{\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$	5×0,25 4×0,25 0,75	03
	التمرين الثاني : (05 نقط) 1 – أ – رسم (d) و (Δ) ب– تمثيل الحدود : u_3,u_2,u_1,u_0 و u_4 جـ– وضع التخمين (u_n) متتالية متزايدة و متقاربة نحو 6. 2 –ا– البرهان بالتراجع : $u_0=\frac{1}{2}$ و منه $u_0\le 6$ نفرض $u_n\le 6$ و نثبت أن $u_{n+1}\le 6$ $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+2$ ب– (u_n) متتالية متزايدة : نحسب : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(6-u_n)\ge 0$ جـ) (u_n) متتالية متقاربة لكونها متزايدة و محدودة من الأعلى . 3- أ) $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و $v_0=-\frac{7}{2}$ ب) $v_n=-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $u_n=-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+6$ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$ (لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$)	0,25×2 0,5 0,25×2 0,25 0,50 0,25 0,25 0,25×2 0,50 0,25×2 0,25 0,25 0,25	05
المتتاليات العددية	**التمرين الثالث : 05 نقاط** 1) $\Delta=7+24i$ الجذران التربيعيان لـــ Δ هما : $\delta_2=-\delta_1$, $\delta_1=4+3i$ الحلان هما : $z_2=-2-2i$, $z_1=2+i$	0,25 0,25×3 0,25×2	

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
	2) $z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-i}{2}$	0,5	
	3) $z_C = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$	0,5	
	$C \in (\Gamma)$ لأن : $\left\Vert \overrightarrow{\omega c} \right\Vert = \lvert z_C - z_\omega \rvert = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\left\Vert \overrightarrow{AB} \right\Vert$	0,5	05
	4) أ) إثبات العبارة : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$	0,5×2	
	ب) s هو التشابه المباشر الذي مركزه $\omega\left(-\frac{1}{2}i\right)$ ، نسبته $k = 2$ و زاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$	0,25×4	

التمرين الرابع : (07 نقاط)

دراسة تغيرات دالة عددية لمتغير حقيقي

1 –أ)

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	-2	↗		$+\infty$

0,25×3

ب) g مستمرة و متزايدة تماما على $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ وَ 0,25

$g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ إذن يوجد α وحيد من $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ حيث $g(\alpha) = 0$ 0,25

جـ)

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

2) أ) $f'(x) = 1 - \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$ 0,25

$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$ 0,25

ب) $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$ وَ $f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(x+1)^3}$ و منه 0,25×3

$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$

(Γ) يقبل عند النقطة $(\alpha, f(\alpha))$ مماساً يوازي حامل محور الفواصل. 0,25

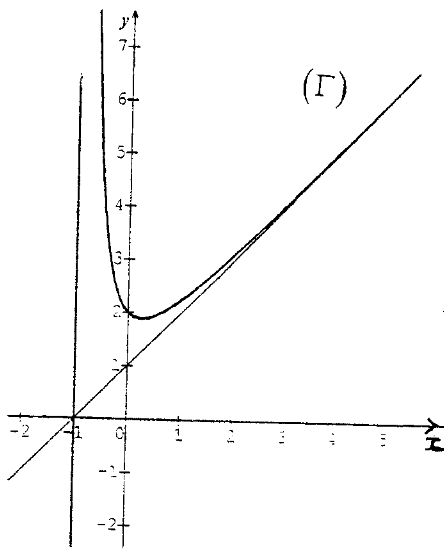
جـ) $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ ، (Γ) يقبل مستقيما مقاربا $x = -1$ 0,25×2

المجموع: 07

12

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ ، (Γ) يقبل مستقيما مقاربا $y=x+1$	0,25×2	
	د) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$		
	إشارة $f(x)$ من نفس إشارة $g(x)$	0,25×2	
	جدول التغيرات	0,5	

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$



محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	3) أ) $f(0,26)\approx 1,89$	0,25	
	ب) رسم (Γ)	0,75	
	4-أ) $f(x)=x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$	0,25	
	ب -) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{x+1}+c$	0,25	
	$F(1)=2$ معناه $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{x+1}+1$	0,25	