

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03.5 نقطة)

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب v_0 و v_1 .

(2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

ج) بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$ و Z عدد مركب

(1) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $P(Z) = 0$.

(2) نضع: $Z_1 = 1 + i$ ؛ $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسّي.

ب) أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(3) أ) n عدد طبيعي. عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط : $C(2;1;3)$ ، $B(0;2;1)$ ، $A(1;0;2)$

(1) (P) مستو معادلة له من الشكل $x - z + 1 = 0$.

(أ) بيّن أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

(ب) ما طبيعة المثلث ABC .

(2) (أ) تحقّق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى (ABC) .

(ب) ما طبيعة $ABCD$.

(3) (أ) أحسب المسافة بين D و المستوي (ABC) .

(ب) أحسب حجم $ABCD$.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

(I) f دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$ بـ: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

(c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

(1) (أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

(ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

(2) g دالة معرفة المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

(c_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد وتجانس.

(أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

(ب) تحقّق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ)

عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس تغيرات g .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) (أ) أحسب $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

(3) أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمتان التي معادلاتها:

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = 0$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط:

$$A(2; 3; -1) ; B(1; -2; 4) ; C(3; 0; -2) ; D(1; -1; -2)$$

و ليكن (π) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية: $2x - y + 2z + 1 = 0$

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1. النقط A ، B ، C في استقامية.
2. (ABD) مستوي معادلة ديكارتية له: $25x - 6y - z - 33 = 0$
3. المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) .
4. المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1; 1; -1)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$1. \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } C \text{ المعادلة: } z^2 - 2z + 4 = 0$$

2. نسمي z_1 ؛ z_2 حلي هذه المعادلة.

(أ) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

(ب) A ، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}) \quad ; \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_A = 1 - i\sqrt{3}$$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2 = -1$)

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث: $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

(د) أحسب z^3 و z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1. (أ) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1 .

(ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(جـ) أحسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$S_n = 728$$

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \quad \text{و} \quad v_1 = 2$$

(أ) أحسب v_2 و v_3 .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(ج) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

h دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: لتكن f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بياناً.

(ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

(ج) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(د) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

(هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. أرسم (C_f) .

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمتان التي معادلاتها:

$$y = x - 1 \quad ; \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = 1$$

محلور الموضوع	عناصر الاجابة الموضوع الأول		العلامة
	مجزأة	المجموع	
المتتاليات	2×0.25	التمرين الأول:	03.5
	1	(1) $v_1 = \frac{7}{3}$ ، $v_0 = 1$	
	0.75	(2) $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n)$ و منه $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ إذن (v_n) م. هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	
	0.75	(3) $S_n = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]$	
	0.5	(ب) $u_n = S_n + 1$ و منه $S_n = u_n - u_0$ (ج) لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{2}$ و منه (u_n) متقاربة	
الأعداد المركبة	4×0.25	التمرين الثاني:	05
	2×0.5	(1) $\Delta = (2i\sqrt{3})^2$ و منه $z_0 = 1+i$ ، $z' = 1+\sqrt{3}i$ ، $z'' = 1-\sqrt{3}i$	
	2×0.5	(2) $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (أ)	
	2×0.5	(ب) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$ ، $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	
	0.75	(ج) $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	
هندسة فضائية	0.25	(3) (أ) $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n e^{\left(\frac{7n\pi i}{12} \right)}$ $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n \in \mathbb{R}$ معناه $n=12k$ ($k \in \mathbb{N}$) (أ)	04
	1	(ب) $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{456} = \frac{1}{2^{228}}$	
	0.5	التمرين الثالث:	
	0.5	(1) (أ) $\overline{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\overline{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، \overline{AB} و \overline{AC} غير مرتبطين خطيا و إحداثيات كل من A ، B ، C تحقق معادلة (P)	
	1	(ب) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$ و ABC قائم في A	
0.5	0.5	(2) (أ) $D \notin (ABC)$	0.5
	0.5	(ب) بما أن D لا تنتمي إلى (ABC) فإن $(ABCD)$ رباعي وجوه	
	1	(3) (أ) المسافة هي: $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	0.5	(ب) الحجم: (وحدة مكعبة) $h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC \right) h = \frac{1}{3} S$ $V = \frac{1}{3} S h$	

العلامة	مجزأة	عناصر الإجابة الموضوع الأول	معايير الموضوع												
07.5	3×0.25	التمرين الرابع: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (أ) (I	دوال												
	0.5 <div style="display: flex; align-items: center;"> <table style="margin-right: 10px;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+$</td> <td>$-$</td> <td>$-$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> (ب) </div>		x	$-\infty$	-1	0	$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	x	$-\infty$		-1	0										
	$f(x)$	$+$		$-$	$-$										
	$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$										
	0.25 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (أ) (2													
	2×0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = 0$ (ب) ومنه $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مثل لـ (c_f) بجوار $+\infty$													
	0.75 $g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ (جـ													
	0.25+0.25 $g(0) = 4$ ، إشارة $g'(x)$													
	0.5	<div style="display: flex; align-items: center;"> <table style="margin-right: 10px;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>$-$</td> <td>$+$</td> <td>$+$</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> </div>		x	0	1	$+\infty$	$g'(x)$	$-$	$+$	$+$	$g(x)$	4	3	$+\infty$
x	0	1	$+\infty$												
$g'(x)$	$-$	$+$	$+$												
$g(x)$	4	3	$+\infty$												
2×0.25 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -5$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = -3$ (أ) (II														
0.25 الدالة k لا تقبل الاشتقاق عند 0														
0.5	(ب) النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية والمنحنى (C_K) يقبل نصفين مماسين..														
0.5	(2) اكتب معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$														
1	(3) الرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_K)														
	<div style="display: flex; align-items: center;"> $A = \int_{-1/2}^0 f(x) dx + \int_0^{1/2} g(x) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4\ln(x+1) \right]_{-1/2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} + 4\ln(x+1) \right]_0^{1/2}$ (4) </div>														
1 $= \frac{1}{4} + 4\ln 3 (\mu a)$														

العلامة	مجزأة	عناصر الإجابة الموضوع الثاني	محاور الموضوع
04	01	التمرين الأول: (04 نقط) (1) جواب خاطئ لأن A, B, C ليست على استقامة.....	هندسة فضائية
	01	(2) جواب صحيح لأن إحداثيات A, B, D تحقق المعادلة.....	
	01	(3) جواب خاطئ لأن \vec{CD} ليس شعاع ناظمي لـ (π)	
	01	(4) جواب خاطئ لأن \vec{BH} ليس شعاع ناظمي لـ (π)	
04	0,75	التمرين الثاني: (04 نقط) (1) حلول المعادلة: $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ ؛ $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$	الأعداد المركبة
	0,5	(1.2) $z_1 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ ؛ $z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{3})}$	
	01	(ب) $AB = 2\sqrt{3}$ ؛ $BC = \sqrt{3}$ ؛ $AC = 3$ ؛ ABC مثلث قائم	
	0,75	(جـ) $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ؛ $ Z = \frac{1}{2}$	
	01	(د) $Z^3 = -\frac{1}{8}$ ؛ $Z^6 = \frac{1}{64}$ ؛ $Z^{3k} = \left(-\frac{1}{8}\right)^k$ و هو عدد حقيقي.....	
05	1,75 0,25 2x0,5	التمرين الثالث (05 نقط) (1.1) $u_1 = 2$ ؛ $q = 3$ ؛ $u_2 = 6$	المتتاليات
		(ب) $u_n = 2 \times 3^{n-1}$	
		(جـ) $S_n = 3^n - 1$ ؛ $n = 6$ ؛ $v_2 = 5$ (1.2)	
	0,5 $v_3 = \frac{27}{2}$	
	0,5	(ب) (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $w_1 = \frac{1}{3}$	
	2x0,5	(جـ) $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$ ؛ $w_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	

07		التمرين الرابع (07 نقط)	الدوال
	0,5	الجزء الأول: (1) $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$	
	3x0,25	(2) $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$; متزايدة على $[0; +\infty[$ ؛ جدول التغيرات	
	2x0,25	(3) $h(0) = 0$ ؛ إشارة $h(x)$	
	00,5	الجزء الثاني: (1.1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ؛ $x = -1$ معادلة لمستقيم	
		مقارب.....	
	0,5	(ب) $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e'}{t}\right)} = 0$	
	0,25	(ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	
	0,5	(د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ ؛ $y = x-1$ معادلة لمستقيم	
		مقارب.....	
	0,25	(هـ) الوضعية.....	
	0,5+0,5	(2) $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ؛ جدول التغيرات.....	
		(3) f مستمرة و متزايدة على $[3,3; 3,4]$	
	0,75	و $f(3,3) < 2 < f(3,4)$...	
	0,75	(4) رسم (C_f)	
		المساحة:	
	0,75 $A = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 u.a.$	