B6R11A11BAC2014

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2014

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n+4$.

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل.

2) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;-1;1)$، $B(-1;2;1)$، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط A، B و C تُعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) احسب إحداثيات G.

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

بيّن أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ) أثبت أنّ معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2z+3=0$.

3) بيّن أنّ المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \dfrac{z_C}{2}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

ب) احسب $\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ) بيّن أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

د) احسب $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أنّ النقط C ، A و C' في استقامية.

جـ) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ؛ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$.

(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري) .

1) بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

1) عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2) أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$.

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$.

1) أ) برهن أن A، B و C ليست في استقامية .

ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

جـ) تحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرّفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P): x - y - 2z + 5 = 0$ و $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$.

برهن أنّ (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي: $(t \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = t-3 \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases}$.

3) عيّن تقاطع المستويات (ABC)، (P) و (Q).

4) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M و المستوي (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M و المستوي (Q)، عيّن المجموعة (Γ) للنقط M بحيث:

$\sqrt{6} \times d(M,(P)) = \sqrt{14} \times d(M,(Q))$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث:

$$(z-i)(z^2-2z+5)=0$$

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)، تعطى النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$ و $z_C = 1-2i$ على الترتيب .

أ) أنشئ النقط A، B و C.

ب) جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

جـ) احسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه S.

ب) بيّن أنّ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

4) M نقطة لاحقتها z، عيّن مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz + 1 + 2i|$

<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)

I) – لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) – نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \dfrac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ)

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f. (نأخذ $f(\alpha) \approx -0{,}1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$.

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$. إذن (v_n) متتالية هندسية	0,50	04
أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدّها الأوّل $v_0=5$.	0,50	
2) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $u_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n-4$.	$0,50\times 2$	
3) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right)$ و منه $u_{n+1}-u_n<0$. إذن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.	0,50	
4) $S_n=15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)-4(n+1)$.	0,50	
5) أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $w_{n+1}-w_n>0$ إذن (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.	0,50	
ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)=0$ (لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$) .	0,50	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		
1) أ) $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ ؛ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا إذن A ، B وC تعيّن مستويا (ABC) .	0,75	05
ب) $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ إذن $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ و منه $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).	01	
جـ) $(ABC): x+y+z+d=0$ $A\in(ABC)$ و منه: $d=-2$ أي: $(ABC): x+y+z-2=0$	0,50	
2) أ) $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}{2}$ إذن $G\left(-\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$.	01	
ب) $M\in(\Gamma)$ معناه $MG=MD$ إذن (Γ) هو المستوي المحوري للقطعة $[GD]$.	0,50	
جـ) $(\Gamma): 6x-4y+2z+3=0$.	0,50	
3) ليكن $\vec{u}(6;-4;2)$ شعاع ناظمي لــ(Γ). $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC). $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا. إذن (ABC) و (Γ) متقاطعان وفق مستقيم (Δ).	0,25	

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
$\begin{cases} x=3t+\dfrac{1}{2} \\ y=2t+\dfrac{3}{2} \\ z=-5t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ أو أي تمثيل آخر	0,50	
التمرين الثالث: (05 نقاط) 1) $\Delta=\left(6\sqrt{2}\,i\right)^2$ ؛ $z'=3\sqrt{2}(1+i)$ و $z''=3\sqrt{2}(1-i)=\overline{z'}$.	0,75	05
2) أ) $z_A=z'=6e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=z''=6e^{-i\frac{\pi}{4}}$. $(1+i)z_A=6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.	0,75	
ب) $\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=e^{i1007\pi}=-1$.	0,50	
جـ) $DO=DA=DC=DB=3\sqrt{2}$ إذن النقط O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها $3\sqrt{2}$.	01	
د) $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i$ ، $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. المثلث ACB قائم في C و متساوي الساقين $CA=CB$ والنقطة D منتصف القطعة $[AB]$ لأنّ $z_D=\dfrac{z_A+z_B}{2}$ و كذلك منتصف القطعة $[OC]$ لأنّ $z_D=\dfrac{z_C}{2}$. إذن الرباعي $OACB$ مربع.	0,75	
3) أ) العبارة المركبة للدوران R : $z'=iz$.	0,25	
ب) $z_{C'}=6\sqrt{2}\,i$ ؛ $z_{\overrightarrow{AC}}=3\sqrt{2}(1-i)=z_{\overrightarrow{C'A}}$ ، ومنه $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{C'A}$ مرتبطان خطيا	0,50	
جـ) $z_{A'}=3\sqrt{2}(-1+i)$ صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هو الرباعي (المربع) $OAC'A'$ لأنّ : $R(O)=O$ ، $R(A)=A'$ ، $R(C)=C'$ و $R(B)=A$.	0,50	
التمرين الرابع: (06 نقاط) 1) أ) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=-\infty$ ؛ المستقيم ذو المعادلة $x=0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ؛المستقيم ذو المعادلة $y=1$ هو مستقيم مقارب لـــ (C_f) .	0,25 × 4	02,75
ب) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{2}{x^2}(1-\ln x)$. إشارة $f'(x)$: $0 \quad + \quad e\ (0) \quad - \quad +\infty$ f متزايدة تماما على $]0;e]$ و متناقصة تماما على $[e;+\infty[$. – جدول تغيّرات الدالة f .	0,50 0,25 0,25 0,25	
2) أ) $f(x)-1=\dfrac{2\ln x}{x}$ و منه إشارة $f(x)-1$ هي: $0 \quad - \quad 1\ (0) \quad + \quad +\infty$	0,50	

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
من أجل x من $]0;1[$ (C_f) أسفل (Δ)، من أجل x من $]1;+\infty[$ (C_f) أعلى (Δ) و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$.	0,25	03,25
ب) $(T): y=2x-1$	0,25	
ج) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ، و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = -\infty$ و $f(1)=1>0$ ؛ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;1[$. $f(e^{-0,3}) \simeq +0,2$ ، $f(e^{-0,4}) \simeq -0,2$ أي: $f(e^{-0,4}) \times f(e^{-0,3}) < 0$. إذن $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$	0,75	
3) إنشاء المماس (T) و المنحنى (C_f).	0,50	
4) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{0\}$ ، $h(x)-h(-x)=0$ ، و منه h دالة زوجية أو ((yy') محور تناظر لـ (C_h)).	0,50	
ب) في المجال $]0;+\infty[$، $h(x)=f(x)$ و منه (C_h) ينطبق على (C_f) وفي المجال $]-\infty;0[$ (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى (yy') - إنشاء (C_h)	0,50	
جـ) $\ln x^2 = (m-1)\lvert x \rvert$ معناه $h(x)=m$ و بالتالي حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_h) و المستقيم ذي المعادلة $y=m$ مع $(m \in \mathbb{R})$. إذا كان $m \leq 0$ للمعادلة حلّين. إذا كان $0 < m < 1+\frac{2}{e}$ للمعادلة 4 حلول. إذا كان $m = 1+\frac{2}{e}$ للمعادلة حلّين (مضاعفين). إذا كان $m > 1+\frac{2}{e}$ ، المعادلة ليس لها أي حل.	0,50	

العلامة: مجموع	العلامة: مجزأة	(الموضوع الثاني) عناصر الإجابة
04		**التمرين الأول: (04 نقاط)**
	0,75	I) 1) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=e^{-1}.u_n$. إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-1}$ و حدّها الأوّل $u_0=\sqrt{e}$.
	0,75	2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ نستنتج أنّ (u_n) متتالية متقاربة.
	0,50	3) $S_n=\sqrt{e}\left(\dfrac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}\right)$.
	0,50	II) 1) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n=\dfrac{1}{2}-n$ ؛ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=v_n-1$.
	0,50	إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-1$ و حدّها الأوّل $v_0=\dfrac{1}{2}$.
	0,50	2) أ) $P_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n=\dfrac{(n+1)}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-n\right)$ أي $P_n=\dfrac{1-n^2}{2}$.
	0,50	ب) $P_n+4n>0$ أي $-n^2+8n+1>0$ و $n\in\mathbb{N}$. و بالتالي: $n\in[0;8]$ و $n\in\mathbb{N}$ أي $n\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
05		**التمرين الثاني: (05 نقاط)**
	0,75	1) أ) $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;1;2)$ ؛ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا إذن A ، B و C ليست في إستقامية.
	0,75	ب) تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) هو: $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$; $\begin{cases}x=1+\beta\\ y=-1-\alpha+\beta\\ z=-2-\alpha+2\beta\end{cases}$ أو أي تمثيل
	0,75	جـ) التحقق أنّ معدلة للمستوي (ABC) هي: $x+y-z-2=0$.
	0,25	2) $\overrightarrow{u_1}(1;-1;-2)$ شعاع ناظمي لـــ (P) و $\overrightarrow{u_2}(3;2;-1)$ شعاع ناظمي لـــ (Q) . $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطيا إذن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .
	0,75	– إثبات أنّ تمثيلا وسيطيا لـــ (Δ) هو: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=t-3\\ y=-t\\ z=1+t\end{cases}$.
	0,75	3) تقاطع المستويات : $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=\{E(-9;6;-5)\}$ ؛ ($t=-6$) .
	0,50	4) $\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$ أي $\lvert x-y-2z+5\rvert=\lvert 3x+2y-z+10\rvert$ حيث: $(\Gamma)=(P_1)\cup(P_2)$
	0,50	$(P_1):2x+3y+z+5=0$ و $(P_2):4x+y-3z+15=0$.

(الموضوع الثاني) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
<u>التمرين الثالث:</u> (04 نقاط)		04
1) المعادلة تعني $(z-i)=0$ أو $\left(z^2-2z+5=0\right)$...و منه $z=i$	0,25	
$\Delta=(4i)^2$ ؛ $z'=1+2i$ ، $z''=1-2i$	0,75	
2) أ) إنشاء النقط A ، B و C	0,75	
ب) $z_H=1+i$	0,25	
جـ) مساحة المثلث ABC هي: $\mathscr{A}=2\,cm^2$	0,50	
3) أ) الكتابة المركبة لــ S هي: $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}+i$	0,50	
ب) مساحة صورة ABC بالتشابه S هي: $\mathscr{A}'=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}cm^2$	0,50	
4) $\lvert z\rvert=\lvert iz+1+2i\rvert$ أي $\lvert z\rvert=\lvert z+2-i\rvert$ ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة $[OD]$ حيث $D(-2;1)$	0,50	
<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)		02
I) 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.	0,50	
ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=6x^2-8x+7$. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$ و بالتالي g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. جدول تغيّرات الدالة g .	0,75	
2) أ) g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، $g(0,7)\simeq-0,37$ و $g(0,8)\simeq0,06$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,7<\alpha<0,8$.	0,50	
ب) إشارة $g(x)$: $-\infty$ $-$ α (0) $+$ $+\infty$	0,25	
II) 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.	0,50	05
2) أ) برهان أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$.	0,50	
ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=0$. إذن المنحى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) : $y=\frac{1}{2}(x+1)$.	0,50	
جـ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$. إشارة $f(x)-\frac{1}{2}(x+1)$: $-\infty$ $+$ $\frac{1}{3}$ (0) $-$ $+\infty$. إذا كان x ينتمي إلى $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ فإنّ (C_f) أعلى (Δ) و إذا كان x ينتمي إلى $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ فإنّ (C_f) أسفل (Δ) و (C_f) يقطع (Δ) في $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.	0,50	

<table>
<tr><td></td><td>0,50</td><td>3) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$.</td></tr>
<tr><td></td><td>0,25</td><td>ب) إشارة $f'(x)$: $-\infty \quad + \quad 0 \quad - \quad \alpha \quad + \quad +\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td>0,25</td><td>جدول تغيّرات الدالة f :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 α $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$ 0 $-$ 0 $+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty \nearrow 1 \searrow f(\alpha) \nearrow +\infty$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>0,25

0,50</td><td>4) $f(1)=0$.
$f(x)=0$ تعني $\dfrac{(x-1)\left(x^2+x-1\right)}{2x^2-2x+1}=0$ أي $(x-1)\left(x^2+x-1\right)=0$
و بالتالي $x-1=0$ أو $x^2+x-1=0$ حلول المعادلة هي:
$x_0=1$ ، $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ، $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>0,50</td><td>5) إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى $\left(C_f\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td>0,25</td><td>6) أ) التحقق من: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)=f(x)-2$</td></tr>
<tr><td></td><td>0,25
0,25</td><td>ب) $\left(C_h\right)$ هو صورة $\left(C_f\right)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$
إنشاء $\left(C_h\right)$ في المعلم السابق.</td></tr>
</table>

الحل المفصل لامتحان شهادة البكالوريا مادة الرياضيات شعبة العلوم التجريبية لسنة 2014

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

1) تبيين أن (v_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا $v_n = u_n + 4$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} + 4$ وبما أن $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ فإن
$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4$ أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + 4)$ وعليه $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$
وحدها الأول $v_0 = 5$ $\quad (v_0 = u_0 + 4 = 1 + 4 = 5)$.

2) كتابة v_n و u_n بدلالة n:

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q = \frac{2}{3}\right)$ وحدها الأول $(v_0 = 5)$ فإن $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

وبما أن $v_n = u_n + 4$ فإن $u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$.

3) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

طريقة (1): بما أن $v_n = u_n + 4$ فإن (v_n) و (u_n) لهما نفس اتجاه التغير ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$
لأن (v_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ وذلك لأن: $0 < q = \frac{2}{3} < 1$ و $v_0 = 5 > 0$.

طريقة (2): ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \left(5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\right) - \left(5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right) = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0$$

ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

4) حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - 4(n+1)$$

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q = \frac{2}{3}\right)$ وحدها الأول $(v_0 = 5)$

فإن: $S_n = 5\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} - 4n - 4 = 15\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - 4n - 4$

$$S_n = -15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4n + 11$$

5) أ) تبيين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

(v_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ لأن $0 < q = \frac{2}{3} < 1$ و $v_0 = 5 > 0$ أي $v_{n+1} > v_n$ وبإضافة 5 نجد
$v_{n+1} + 5 > v_n + 5$ ثم بالقلب نجد $\frac{1}{v_{n+1}+5} < \frac{1}{v_n+5}$ بإضافة (-1) نجد : $\frac{1}{v_{n+1}+5} - 1 < \frac{1}{v_n+5} - 1$ بالضرب
في 5 نجد: $5\left(\frac{1}{v_{n+1}+5} - 1\right) < 5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right)$ أي $w_{n+1} > w_n$ ومنه (w_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) حساب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n) = \lim_{n\to+\infty}(v_n - 4) - 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right) = 4 - 4 = 0$$

لأن $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ $\left(-1 < q = \frac{2}{3} < 1\right)$

حل التمرين الثاني:

1) أ) التحقق أن النقط A ، B و C تعين مستو

لدينا $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A ، B و C تعين مستو.

ب) تبيين أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC):

بما أن $\vec{n}(1;1;1).\overrightarrow{AC}(-1;0;1) = 0$ و $\vec{n}(1;1;1).\overrightarrow{AB}(-3;3;0) = 0$ فإن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

بما أن $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) فإن معادلة (ABC) من الشكل $x + y + z + d = 0$ وبما أن $C \in (ABC)$ فإن $d = -2$

$$(ABC): x + y + z - 2 = 0$$

2) أ) حساب احداثيات النقطة G:

بما أن G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$ فإن
$G\left(\frac{1\times2+2\times(-1)-1\times1}{2};\frac{1\times(-1)+2\times2-1\times(-1)}{2};\frac{1\times1+2\times1-1\times2}{2}\right)$ أي $G\left(\frac{-1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$

ت) تبيين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[GD]$:

بما أن G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$ فإن $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ تكافئ:
$\left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ أي $MD = MG$ ومنه (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[GD]$.

ج) إثبات أن $6x - 4y + 2z + 3 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (Γ):

بما أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[GD]$ فإن $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ شعاع ناظمي له و يشمل النقطة G. ومنه $6x - 4y + 2z + 3 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (Γ) لأن $\overrightarrow{GD}$ مرتبط خطيا مع الشعاع الذي مركباته $(6;-4;2)$ وإحداثيات منتصف $[GD]$: $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$ تحقق المعادلة $6x - 4y + 2z + 3 = 0$.

3) تبيين أن المستويين (ABC) و (Γ) متقاطعين في مستقيم (Δ) وتعيين تمثيل وسيطي له

$$(ABC) \cap (\Gamma): \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \ldots\ldots\ldots e_1 \\ 6x - 4y + 2z + 3 = 0 \ldots\ldots e_2 \end{cases}; -2e_1 + e_2: 4x - 6y + 7 = 0 \ldots\ e_3$$

من e_3 وبوضع $x = 3t$ ونجد $y = 2t + \frac{7}{6}$ ومن e_1 نجد $z = -5t + \frac{5}{6}$

ومنه المستويان (ABC) و (Γ) متقاطعان في مستقيم (Δ) حيث $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t + \frac{7}{6} \\ z = -5t + \frac{5}{6} \end{cases}$ تمثيل وسيطي له مع $t \in \mathbb{R}$

حل التمرين الثالث:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$:

$$\Delta = -2 \times 36 = \left(6i\sqrt{2}\right)^2 ; S = \left\{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}; 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}\right\}$$

2) أ) كتابة z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي:

$z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 3 \times 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$; $\mathbf{z_A = 6e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$

$z_B = \overline{z_A} = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$; $\mathbf{z_B = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}$

$(1+i)z_A = 6\sqrt{2}i = 6\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$; $\mathbf{(1+i)z_A = 6\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$

ب) حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{2014} = e^{i(1007\pi)} = e^{i(\pi)} = -1$; $\mathbf{\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = -1}$

جـ) تبيين أن النقط O ، A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D وتحديد نصف قطرها:

$$DO = |z_O - z_D| = \left|-3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}.$$
$$DA = |z_A - z_D| = \left|3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$
$$DB = |z_A - z_D| = \left|3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$
$$DA = |z_A - z_D| = \left|3\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$

بما أن $DO = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$ فإن O ، A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D وطول نصف قطرها يساوي $3\sqrt{2}$.

د) حساب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ وإيجاد قيس للزاوية $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right)$ وتحديد طبيعة الرباعي $OACB$:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = \frac{i\left(3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right)}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = i; \left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right) = \arg\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2}$$

تحديد طبيعة الرباعي $OACB$

لدينا: $\begin{cases} \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i \\ z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BC}} = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} CB = CA \\ \left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$ ومنه الرباعي $OACB$ مربع.

3) أ) كتابة العبارة المركبة للدوران R:

بما أن R دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن عبارته المركبة هي: $\mathbf{z' = iz}$

ب) تعيين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R والتحقق أن النقط C، A و C' في استقامية

بما أن C' صورة C بالدوران R فإن $z_{C'} = iz_C = 6i\sqrt{2}$ ، $\boldsymbol{z_{C'} = 6i\sqrt{2}}$

بما أن:

$$\frac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}} = \frac{2\left(-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}\right)}{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{R}$$

فإن النقط C، A و C' في استقامية.

تعيين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R ثم تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R:

بما أن A' صورة A بالدوران R فإن $z_{A'} = iz_A = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$ ، $\boldsymbol{z_{A'} = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}$

تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

لدينا A' صورة A بالدوران R، C' صورة C بالدوران R والنقطة O نقطة صامدة أما A فصورة B بالدوران R (لأن الرباعي $OACB$ مربع) ومنه صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هو الرباعي $\boldsymbol{OA'C'A}$.

حل التمرين الرابع:

$$f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x} \quad D_f =]0; +\infty[$$

1) أ) حساب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسير النتيجتين هندسيا:

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 + \frac{2\ln x}{x} = -\infty$ لأن: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0^+$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2\ln x}{x} = 1$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نهايات التزايد المقارن.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ لأنها دالة ناتجة عن عمليات على دوال قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث:

$$f'(x) = 2\frac{1 - \ln x}{x^2}$$

إشارة المشتق من إشارة $1 - \ln x$ لأن $\frac{2}{x^2} > 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$.

$1 - \ln x \geq 0$ من أجل $x \in]0; e]$ أي $f'(x) \geq 0$ من أجل $x \in]0; e]$ ومنه الدالة متزايدة تماما على المجال $]0; e]$.

$1 - \ln x \leq 0$ من أجل $x \in [e; +\infty[$ أي $f'(x) \leq 0$ من أجل $x \in [e; +\infty[$ ومنه الدالة متزايدة تماما على المجال $[e; +\infty[$. $f'(e) = 0$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{2}{e}$	$\searrow$	1

2) أ) دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-1$

لدينا $f(x)-1=2\frac{\ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\frac{2}{x}>0$ من أجل $x\in]0;+\infty[$.

$\ln x<0$ من أجل $x\in]0;1[$ أي $f(x)-1<0$ من أجل $x\in]0;1]$ ومنه المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $]0;1[$

$\ln x>0$ من أجل $x\in]1;+\infty[$ أي $f(x)-1>0$ من أجل $x\in]1;+\infty[$ ومنه المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) في المجال$]1;+\infty[$.

$\ln x=0$ من أجل $x=1$ أي $f(x)-1=0$ من أجل $x=1$ ومنه المنحني (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(1;1)$.

ب) معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)\ ;\begin{cases} f'(1)=2 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{(T): y=2x-1}$$

جـ) تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;1[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)\times f(0)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;1[$.

وبما أن $]e^{-0,4};e^{0,3}[\subset]0;1[$ و $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,3})<0$ (لأن $f(e^{-0,3})\simeq 0.19$; $f(e^{-0,4})\simeq -0.19$)

3) إنشاء (T) و (C_f): (الإنشاء في نهاية حل التمرين)

4) $h(x)=\ D_h=\mathbb{R}^*$

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$

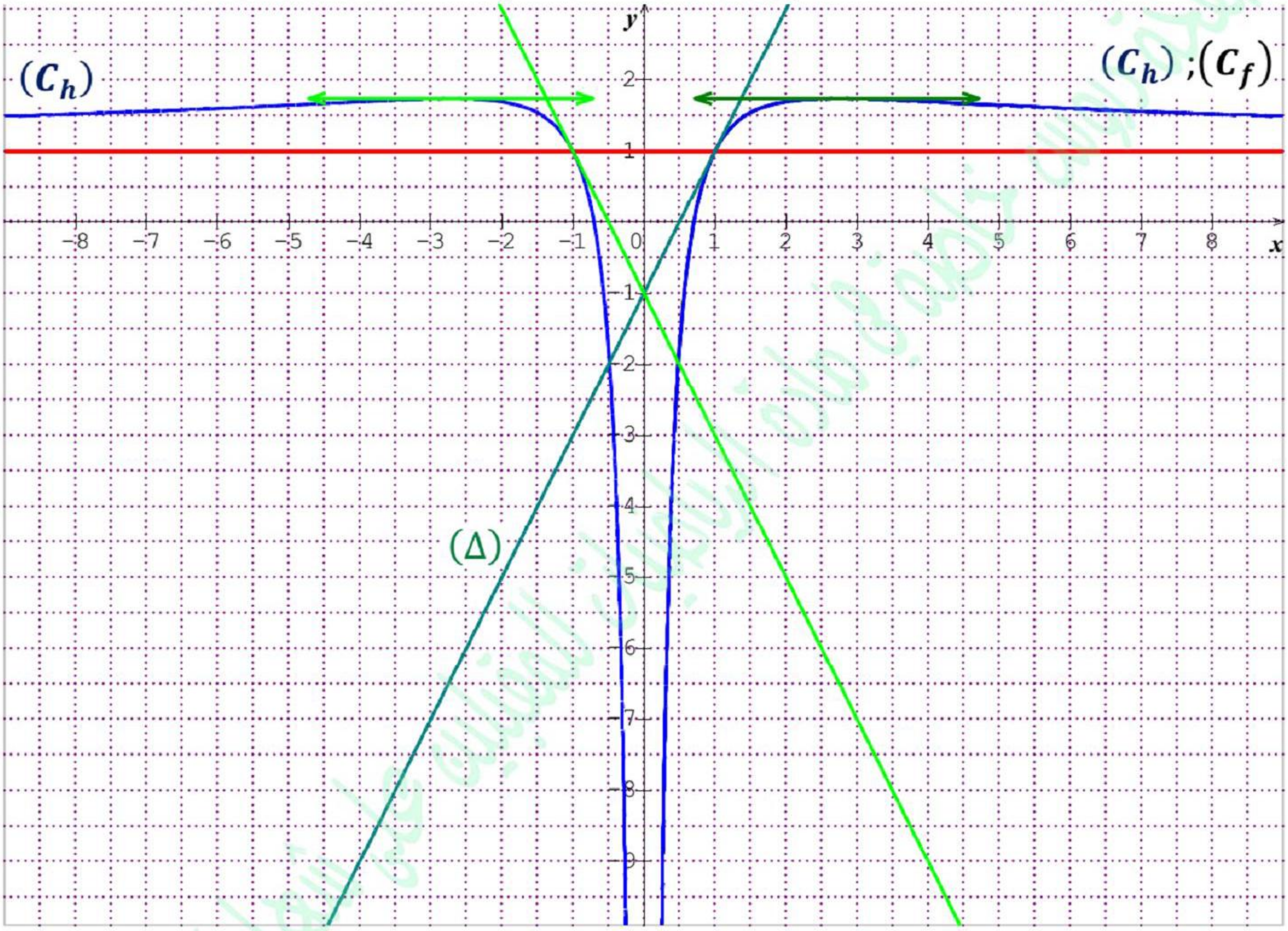
$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=\frac{2\ln|x|}{|x|}-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

الاستنتاج:

بما أنه من أجل كل $x \in D_h$ يكون $-x \in D_h$ و $h(x) - h(-x) = 0$ فإن الدالة h دالة زوجية

ب) إنشاء المنحني (C_h)

لدينا من أجل $x \in]0; +\infty[$ يكون $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في هذا المجال ويناظر هذا الجزء بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة h دالة زوجية.



ج) مناقشة حلول المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $\ln x^2 = (m-1)|x|$ ومنه $2ln|x| = (m-1)|x|$ أي $\frac{2ln|x|}{|x|} = m - 1$ ومنه المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$ تكافئ $h(x) = m$ وبالتالي حلولها هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم المتحرك الأفقي (Δ_m) حيث $y = m$ معادلة له.

وعليه: من أجل $m \in]-\infty; 1]$ المعادلة تقبل حلين متمايزين .من أجل $m \in \left]1; 1 + \frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربع حلول متمايزة.من أجل $m = 1 + \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين مضاعفين. من أجل $m \in \left]1 + \frac{2}{e}; +\infty\right[$ المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول:

I. $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}\ ; n \in \mathbb{N}$

1) تبيين أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ ومنه:

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{-1} \times e^{\frac{1}{2}-n} = \frac{1}{e}u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول $u_0 = \sqrt{e}$ $\quad \left(u_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}\right)$.

2) حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = 0\ ;\ \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

الاستنتاج: بما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ فإن (u_n) متتالية متقاربة.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n:

بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q = \frac{1}{e}\right)$ وحدها الأول $\left(u_0 = \sqrt{e}\right)$ فإن:

$$S_n = \sqrt{e}\,\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)\ ;\ \boldsymbol{S_n = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)}$$

II. $v_n = \ln u_n\ \ ; n \in \mathbb{N}$

1) التعبير عن v_n بدلالة n واستنتاج طبيعة (v_n)

لدينا $v_n = \ln u_n$ ومنه:

$$v_n = \ln e^{\frac{1}{2}-n} = \frac{1}{2} - n\ ;\ \boldsymbol{v_n = \frac{1}{2} - n}$$

استنتاج طبيعة (v_n)

بما أن $v_n = \frac{1}{2} - n$ فإن $v_{n+1} - v_n = -1$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ و $v_0 = \frac{1}{2}$

2)

أ) حساب بدلالة n العدد P_n

لدينا $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$ وبما أن حدود المتتالية (u_n) موجبة فإن:

$$P_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \cdots + \ln u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

و بما أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\left(r = \frac{1}{e}\right)$ وحدها الأول $\left(v_0 = \frac{1}{2}\right)$ فإن:

$$P_n = \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right) = \frac{-n^2+1}{2}\ \ ;\ \boldsymbol{P_n = \frac{-n^2+1}{2}}$$

ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

$P_n + 4n > 0$ معناه $-n^2 + 4n + 1 > 0$ بحساب المميز ودراسة إشارة $-n^2 + 8n + 1$ نجد أن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المتراجحة السابقة هي القيم التي تنتمي إلى المجال $]4 - \sqrt{17}; 4 + \sqrt{17}[$ أي:

$n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

حل التمرين الثاني:

1)

أ) البرهان أن A ، B و C ليست في استقامية:

لدينا $A(1; -1; -2)$ ، $B(1; -2; -3)$ ، $C(2; 0; 0)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(0; -1; -1)$ ، $\overrightarrow{AC}(1; 1; 2)$ وعليه فإنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A ،B و C ليست في استقامية.

ب) كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (ABC):

بما أن النقط A ،B و C ليست في استقامية فإن $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ أساس للمستوي (ABC) فإن

$$\begin{cases} x = \beta + 2 \\ y = -\alpha + \beta \\ z = -\alpha + 2\beta \end{cases} ; (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$ تمثيل وسيطي للمستوي (ABC)

جـ) التحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

بما أن $(\beta + 2) + (-\alpha + \beta) - (-\alpha + 2\beta) + 2 = 0$ فإن $x + y - z - 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) البرهان أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ):

$$(\Delta): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$ ، $(P): x - y - 2z + 5 = 0$ ، $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$

بما أن: $(t - 3) - (-t) - 2(t + 1) + 5 = 0$ و $3(t - 3) + 2(-t) - (t + 1) + 10 = 0$ والمستويان (P) و (Q) غير متطابقان فإن: $(P) \cap (Q) = (\Delta)$. (التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) يحقق المعادلة الديكارتية لكل من (P) و (Q)).

3) تعيين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q):

$$(P)\cap(Q)\cap(ABC)=(\Delta)\cap(ABC):\begin{cases}\begin{cases}x=t-3\\ y=-t\\ z=t+1\end{cases}\\ x+y-z-2=0\end{cases};t-4=0;t=4\ (x;y;z)=(-7;4;-3)$$

$\boldsymbol{(P)\cap(Q)\cap(ABC)=\{I(-7;4;-3)\}}$

4) تعيين مجموعة النقط (Γ)

$\sqrt{6}d\big(M;(P)\big)=\sqrt{14}\big(M;(Q)\big)$ معناه: $|3x+2y-z+10|=|x-y-2z+5|$ وهذا يعني:

$$\begin{cases}x-y-2z+5=3x+2y-z+10\\ \text{أو}\\ x-y-2z+5=-3x-2y+z-10\end{cases}\text{بالتبسيط نجد}\begin{cases}-2x-3y-z-5=0\\ \text{أو}\\ 4x+y-3z+15=0\end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي اتحاد المستويين المعرفين بالمعادلتين الديكارتيتين: $-2x-3y-z-5=0$ و
$4x+y-3z+15=0$

حل التمرين الثالث:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$:

$\boldsymbol{(z-i)(z^2-2z+5)=0}$ معناه

$$\begin{cases}z-i=0;\ z_0=i\\ \text{أو}\\ z^2-2z+5=0\ ;\ \Delta=-16=(4i)^2;z_1=1+2i;z_2=1+2i\end{cases}$$

$\boldsymbol{S=\left\{3\sqrt{2}+3i\sqrt{2};3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}\right\}}$

2)

أ) الإنشاء (بسيط)

ب) إيجاد z_H لاحقة H:

بما أن H هي المسقط العمودي للنقطة A ذات اللاحقة $z_A=i$ على المستقيم (BC) العمودي ذي المعادلة $x=1$ لأنه يشمل نقطتين لاحقتيهما مترافقين جزؤهما الحقيقي يساوي 1 فإن $Re\ (z_H)=1$ و $Im\ (z_H)=Im\ (z_A)=1$ أي:
$\boldsymbol{z_H=1+i}$

جـ) حساب مساحة المثلث ABC

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AH+\frac{1}{2}\times|z_C-z_B|\times|z_H-z_A|=\frac{1}{2}\times4\times1=2\ ;\ \boldsymbol{S_{ABC}=2cm^2}$

3)

أ) **كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S:**

بما أن S تشابه مباشر مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ زاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن: $(z' - z_A) = \frac{1}{2}i(z - z_A)$

ومنه عبارته المركبة هي: $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2} + i$.

ب) **تبيين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$**

بما أن مساحة المثلث ABC تساوي $2cm^2$ فإن مساحة صورته بالتشابه المباشر S الذي نسبته $\frac{1}{2}$ تساوي $\frac{1}{2}cm^2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2}$$

4) **تعيين مجموعة النقط M**

$$|z| = |iz + 1 + 2i| \; ; \; |z| = \left|i\big(z - (i-2)\big)\right| \; ; \; |z| = |i||z - (i-2)| \; ; \; |z| = |z - z_D|$$

حيث z_D لاحقة النقطة D ومنه $|z| = |iz + 1 + 2i|$ تعني $OM = DM$ أي مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة $[OD]$.

طريقة: يمكن ايجاد معادلة ديكارتية للمجموعة بوضع $z = x + iy$ ومنها نستنتج طبيعة المجموعة M.

من الممكن أن يكون واضع التمرين يقصد $|z| = |iz + 2 - i|$ وليس $|z| = |iz + 1 + 2i|$ حتى نجد مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة $[OB]$ باعتبار B مذكورة في التمرين بالعكس بالنسبة لـ D قمنا بإضافتها لعدم وجود نقطة ذات اللاحقة $(i-2)$.

حل التمرين الرابع:

I. $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4; \;\; D_g = \mathbb{R}$

1) أ) **حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty \text{ ، } \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

ب) **دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:**

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود حيث:

$$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7 \; ; \; \Delta < 0 \; ; \; g'(x) > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2

أ) <u>تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال حيث $0,7 < \alpha < 0,8$</u>

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على المجال $]0,7;0,8[$ و لدينا $g(0,7) \times g(0,8) < 0$ (لأن $g(0,8) \simeq 1.73$;$g(0,7) \simeq -0.71$). ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in]0,7;0,8[$.

ب) <u>إشارة الدالة g</u>

بما أن الدالة g ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α فإن:

$g(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x) > 0$ من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$ و $g(\alpha) = 0$

.II $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1};\ D_f = \mathbb{R}$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$$

2).

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$= \frac{2(x^2-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)} = f(x)$$

ب) <u>استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) وتحديد معادلة له:</u>

بما أن $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ و $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = 0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) حيث $y = \frac{1}{2}(x+1)$ معادلة له.

جـ) <u>دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) و (Δ):</u>

ندرس إشارة الفرق $f(x) - \frac{1}{2}(x+1)$ أي إشارة $\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

إشارة $\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ من إشارة $1-3x$ لأن $2(2x^2-2x+1) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x (لأن مميزه سالب وإشارته من إشارة معامل x^2).

ومنه المنحني (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ و تحته في المجال $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$ ويقطعه في النقطة التي احداثياتها $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

<u>3).</u>

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \frac{x\text{g}(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x-1)^2}$$
$$= \frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x-1)^2} = \frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x-1)^2} = \frac{x\text{g}(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ب) إستنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم عدد حقيقي x وتشكيل جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x\text{g}(x)$ لأن $(2x^2-2x+1)^2>0$ من أجل كل عدد حقيقيx

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\text{g}(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) حساب $f(1)$ وحل المعادلة $f(x)=0$

لدينا $f(1)=0$ ومنه بتحليل البسط نجد $f(x)=\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1}$ ومنه حل المعادلة $f(x)=0$ تكافئ

$(x-1)(x^2+x-1)=0$ ومنه $\begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$ حلا المعادلة $x^2+x-1=0$ باستعمال المميز هما

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول هي $\left\{1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

5) الانشاء في نهاية حل التمرين

6) $h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1};\ D_h = \mathbb{R}$

أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\boldsymbol{h(x) = f(x) - 2}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

الاستنتاج:

(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; -2)$

إنشاء (Δ)، (C_f) و (C_h)