Obliczenia naukowe
Sprawozdanie 2

Józef Piechaczek

7 listopada 2019

1 Zadanie 1

Zadanie 1 polega na ponownym przeprowadzeniu eksperymentu z listy 1 dla zadania 5. Zadanie to polega na obliczeniu iloczynu skalarnego dwóch wektorów, przy czym obcięte są dwie ostatnie cyfry przy wartości x_4 oraz x_5. Wektory po obcięciu wyglądają następująco:

$$x = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.577215664, 0.301029995]$$
$$y = [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049]$$

Iloczyn należy policzyć za pomocą czterech algorytmów

1. w przód
2. w tył
3. od największego do najmniejszego
4. od najmniejszego do największego

Wyniki eksperymentu przedstawia poniższa tabela:

	Float32		Float64	
	$x_1 \cdot y$	$x_2 \cdot y$	$x_1 \cdot y$	$x_2 \cdot y$
1	-0.4999443	-0.4999443	1.0251881368296672e-10	-0.004296342739891585
2	-0.4543457	-0.4543457	-1.5643308870494366e-10	-0.004296342998713953
3	-0.5	-0.5	0.0	-0.004296342842280865
4	-0.5	-0.5	0.0	-0.004296342842280865

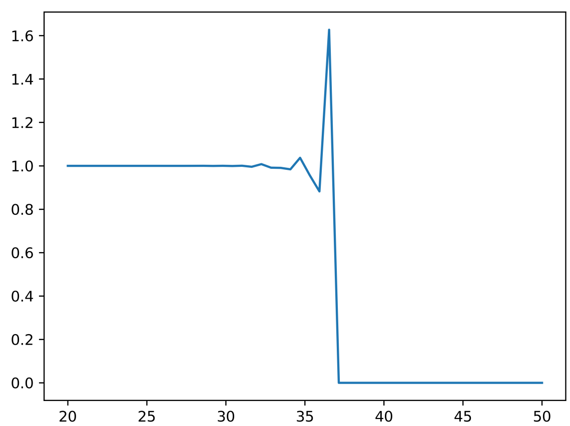
Wnioski:

Patrząc na tabelę możemy zauważyć, że wartości dla **Float32** nie uległy zmianie dla żadnego z algorytmów. Wynika to z faktu iż

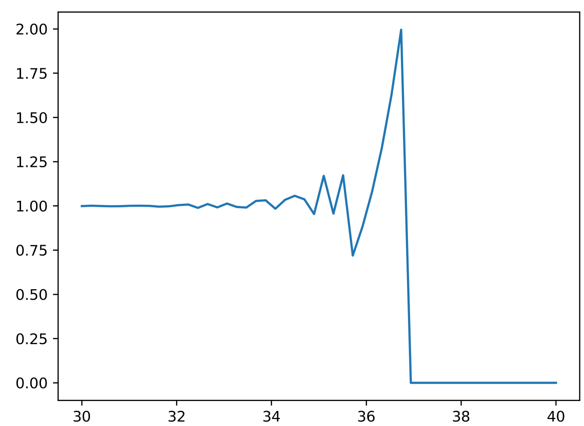
2 Zadanie 2

Zadanie 2 polega na narysowaniu wykresu funkcji $f(x) = e^x * ln(1 + e^{-x})$ w co najmniej dwóch dowolnych programach do wizualizacji oraz na policzeniu granicy $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

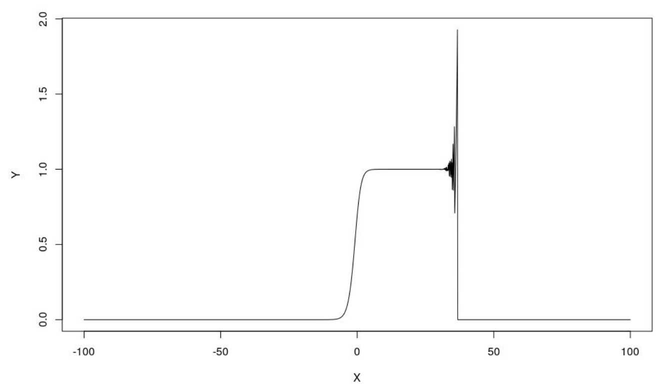
Wykresy:



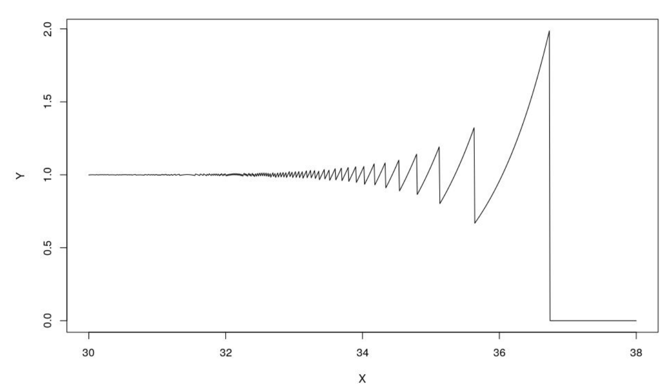
Rysunek 1: PyPlot od 20 do 50



Rysunek 2: PyPlot od 30 do 40



Rysunek 3: R od -100 do 100



Rysunek 4: R od 30 do 36

Granica:

$$lim_{x\to\infty}e^x ln(1+e^{-x}) = lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} \overset{\text{z l'Hospitala}}{=} lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{e^x+1}}{-e^{-x}}$$

$$= lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{e^x+1} = lim_{x\to\infty}e^{-x}\frac{1}{lim_{x\to\infty}(e^x+1)} = 0\cdot 0 = 0$$

Wnioski:

3 Zadanie 3

Zadanie 3 polega na rozwiązaniu układu równań liniowych $Ax = b$ dla danej macierzy współczynników $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ i wektora prawych stron $b \in \mathbf{R}^n$.

Macierz A generować w następujący sposób:

1. $A = H_n$, gdzie H_n jest macierzą Hilberta stopnia n
2. $A = R_n$, gdzie R_n jest losową macierzą stopnia n z zadanym wskaźnikiem uwarunkowania c

Wektor b zadany jest przez $b = Ax$, gdzie A jest wygenerowaną macierzą, a $x = (1, ..., 1)^T$

Układ równań należy rozwiązać za pomocą dwóch algorytmów:

1. eliminacji Gaussa $x = A \backslash b$
2. $x = A^{-1}b$

Eksperymenty należy wykonać dla macierzy Hilberta H_n z rosnącym stopniem $n > 1$ oraz dla macierzy losowej R_n,$n = 5, 10, 20$ z rosnącym wskaźnikiem uwarunkowania $c = 1, 10, 10^3, 10^7, 10^{12}, 10^{16}$. Obliczony $\dot{x}$ należy porównać z rozwiązaniem dokładnym $x = (1, ..., 1)^T$ tj. policzyć błędy względne.

Wyniki przedstawiają następujące tabele:

			Błąd względny	
Size	Rank	Cond	Gauss	Inversion
2x2	2	1.928147e+01	5.661049e-16	1.404333e-15
3x3	3	5.240568e+02	8.022594e-15	0.000000e+00
4x4	4	1.551374e+04	4.137410e-14	0.000000e+00
5x5	5	4.766073e+05	1.682843e-12	3.354436e-12
6x6	6	1.495106e+07	2.618913e-10	2.016376e-10
7x7	7	4.753674e+08	1.260687e-08	4.713280e-09
8x8	8	1.525758e+10	6.124090e-08	3.077484e-07
9x9	9	4.931538e+11	3.875163e-06	4.541268e-06
10x10	10	1.602442e+13	8.670390e-05	2.501493e-04
11x11	10	5.222678e+14	1.582781e-04	7.618304e-03
12x12	11	1.751473e+16	1.339621e-01	2.589941e-01
13x13	11	3.344143e+18	1.103970e-01	5.331276e+00
14x14	11	6.200786e+17	1.455409e+00	8.714993e+00
15x15	12	3.674393e+17	4.696668e+00	7.344641e+00
16x16	12	7.865468e+17	5.415519e+01	2.984884e+01
17x17	12	1.263684e+18	1.370724e+01	1.051694e+01
18x18	12	2.244631e+18	9.134135e+00	7.575476e+00
19x19	13	6.471954e+18	9.720590e+00	1.223376e+01
20x20	13	1.355366e+18	7.549915e+00	2.206270e+01

Tabela 1: Wartości dla macierzy Hilberta

			Błąd względny	
Size	Rank	Cond	Gauss	Inversion
5x5	5	1.000000e+00	1.719950e-16	1.216188e-16
10x10	10	1.000000e+00	1.683737e-16	2.482534e-16
20x20	20	1.000000e+00	6.030055e-16	3.358310e-16
5x5	5	1.000000e+01	7.021667e-17	2.275280e-16
10x10	10	1.000000e+01	5.790215e-16	5.135907e-16
20x20	20	1.000000e+01	7.739776e-16	5.628294e-16
5x5	5	1.000000e+03	5.248902e-15	7.399118e-15
10x10	10	1.000000e+03	2.742085e-14	2.134402e-14
20x20	20	1.000000e+03	2.057420e-14	2.385714e-14
5x5	5	1.000000e+07	4.948064e-10	2.472969e-10
10x10	10	1.000000e+07	3.051511e-10	2.871953e-10
20x20	20	1.000000e+07	2.145808e-10	2.235508e-10
5x5	5	1.000017e+12	1.729134e-05	1.722960e-05
10x10	10	1.000002e+12	3.243992e-05	3.472999e-05
20x20	20	9.999488e+11	1.166862e-06	3.780269e-06
5x5	4	7.861517e+15	2.092372e-01	2.078771e-01
10x10	9	4.124595e+16	1.228583e+00	1.310098e+00
20x20	19	8.132469e+15	4.168338e-01	4.414028e-01

Tabela 2: Wartości dla losowej macierzy

Wnioski:

4 Zadanie 4

Zadanie 4 polega na obliczeniu 20 zer wielomianu Wilkinsona $p = (x-20)(x-19)...(x-1)$ w postaci naturalnej P i sprawdzeniu otrzymanych wyników z_k obliczając wartości $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ i $|z_k - k|$ dla $1 \leqslant k \leqslant 20$. Eksperyment należy powtórzyć po zaburzeniu współczynnika -210 na $-210 - 2^{-23}$. W celu rozwiązania zadanie należy użyć pakietu **Polynomials**.

Eksperyment 1

Otrzymane wyniki:

k	z_k	$P(z_k)$	$p(z_k)$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	1.000000e+00	3.635200e+04	5.517824e+06	3.010925e-13
2	2.000000e+00	1.817600e+05	7.378698e+19	2.831824e-11
3	3.000000e+00	2.094080e+05	3.320414e+20	4.079035e-10
4	4.000000e+00	3.106816e+06	8.854437e+20	1.626247e-08
5	5.000001e+00	2.411469e+07	1.844675e+21	6.657698e-07
6	5.999989e+00	1.201521e+08	3.320395e+21	1.075418e-05
7	7.000102e+00	4.803983e+08	5.423593e+21	1.020028e-04
8	7.999356e+00	1.682691e+09	8.262050e+21	6.441704e-04
9	9.002915e+00	4.465327e+09	1.196559e+22	2.915294e-03
10	9.990413e+00	1.270713e+10	1.655260e+22	9.586958e-03
11	1.102502e+01	3.575990e+10	2.247833e+22	2.502293e-02
12	1.195328e+01	7.216772e+10	2.886945e+22	4.671675e-02
13	1.307431e+01	2.157236e+11	3.807326e+22	7.431403e-02
14	1.391476e+01	3.653833e+11	4.612720e+22	8.524441e-02
15	1.507549e+01	6.139878e+11	5.901011e+22	7.549380e-02
16	1.594629e+01	1.555028e+12	7.010874e+22	5.371328e-02
17	1.702543e+01	3.777624e+12	8.568906e+22	2.542715e-02
18	1.799092e+01	7.199555e+12	1.014480e+23	9.078647e-03
19	1.900191e+01	1.027838e+13	1.199038e+23	1.909818e-03
20	1.999981e+01	2.746295e+13	1.401912e+23	1.907088e-04

Tabela 3: Wartości dla oryginalnego wielomianu

Eksperyment 2

k	z_k	$P(z_k)$	$p(z_k)$	$\|z_k - k\|$
1	1.000000e+00 + 0.000000e+00i	2.099200e+04	3.012096e+06	1.643130e-13
2	2.000000e+00 + 0.000000e+00i	3.491840e+05	7.378698e+19	5.503731e-11
3	3.000000e+00 + 0.000000e+00i	2.221568e+06	3.320414e+20	3.396580e-09
4	4.000000e+00 + 0.000000e+00i	1.046784e+07	8.854438e+20	8.972436e-08
5	4.999999e+00 + 0.000000e+00i	3.946394e+07	1.844673e+21	1.426112e-06
6	6.000020e+00 + 0.000000e+00i	1.291484e+08	3.320450e+21	2.047667e-05
7	6.999602e+00 + 0.000000e+00i	3.881231e+08	5.422367e+21	3.979296e-04
8	8.007772e+00 + 0.000000e+00i	1.072547e+09	8.289400e+21	7.772029e-03
9	8.915816e+00 + 0.000000e+00i	3.065575e+09	1.160747e+22	8.418363e-02
10	1.009546e+01 + -6.449328e-01i	7.143114e+09	1.721289e+22	6.519587e-01
11	1.009546e+01 + 6.449328e-01i	7.143114e+09	1.721289e+22	1.110918e+00
12	1.179389e+01 + -1.652477e+00i	3.357756e+10	2.856840e+22	1.665281e+00
13	1.179389e+01 + 1.652477e+00i	3.357756e+10	2.856840e+22	2.045820e+00
14	1.399241e+01 + -2.518824e+00i	1.061206e+11	4.934647e+22	2.518836e+00
15	1.399241e+01 + 2.518824e+00i	1.061206e+11	4.934647e+22	2.712881e+00
16	1.673074e+01 + -2.812625e+00i	3.315103e+11	8.484695e+22	2.906002e+00
17	1.673074e+01 + 2.812625e+00i	3.315103e+11	8.484695e+22	2.825484e+00
18	1.950244e+01 + -1.940332e+00i	9.539425e+12	1.318195e+23	2.454021e+00
19	1.950244e+01 + 1.940332e+00i	9.539425e+12	1.318195e+23	2.004329e+00
20	2.084691e+01 + 0.000000e+00i	1.114454e+13	1.591108e+23	8.469102e-01

Tabela 4: Wartości dla zmodyfikowanego wielomianu

Wnioski:

5 Zadanie 5

W zadaniu 5 rozważamy równanie rekurencyjne przedstawiające model wzrostu populacji:

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n)$$

gdzie r jest pewną daną stałą, $r(1-p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji, a p_0 jest wielkością populacji stanowiąca procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

Należy przeprowadzić następujące eksperymenty:

1. Dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ wykonać 40 iteracji wyrażenia, a następnie wykonać ponownie 40 iteracji wyrażenia z niewielką modyfikacją tj. wykonać 10 iteracji, zatrzymać, zastosować obcięcie wyniku odrzucając cyfry po trzecim miejscu po przecinku i kontynuować dalej obliczenia. Porównać otrzymane wyniki.

2. Dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ wykonać 40 iteracji wyrażenia w arytmetyce **Float32** i **Float64**. Porównać otrzymane wyniki.

Wyniki przedstawiam w poniższych tabelach:

Powyższe dane w formie wykresów:

	p_n	
n	przed mod.	po mod.
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173
3	0.5450726	0.5450726
4	1.2889781	1.2889781
5	0.1715188	0.1715188
10	0.7229306	0.722
15	1.2704837	1.2572169
20	0.5799036	1.3096911
25	1.0070806	1.0929108
30	0.7529209	1.3191822
35	1.021099	0.034241438
36	0.95646656	0.13344833
37	1.0813814	0.48036796
38	0.81736827	1.2292118
39	1.2652004	0.3839622
40	0.25860548	1.093568

Tabela 5: Wartości dla eksperymentu 1

	p_n	
n	Float32	Float64
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173000000002
3	0.5450726	0.5450726260444213
4	1.2889781	1.2889780011888006
5	0.1715188	0.17151914210917552
10	0.7229306	0.722914301179573
15	1.2704837	1.2702617739350768
20	0.5799036	0.5965293124946907
25	1.0070806	1.315588346001072
30	0.7529209	0.37414648963928676
35	1.021099	0.9253821285571046
36	0.95646656	1.1325322626697856
37	1.0813814	0.6822410727153098
38	0.81736827	1.3326056469620293
39	1.2652004	0.0029091569028512065
40	0.25860548	0.011611238029748606

Tabela 6: Wartości dla eksperymentu 2

Wnioski:

6 Zadanie 6

W zadaniu 6 rozważamy równanie rekurencyjne:

$$x_{n+1} := x_n^2 + c$$

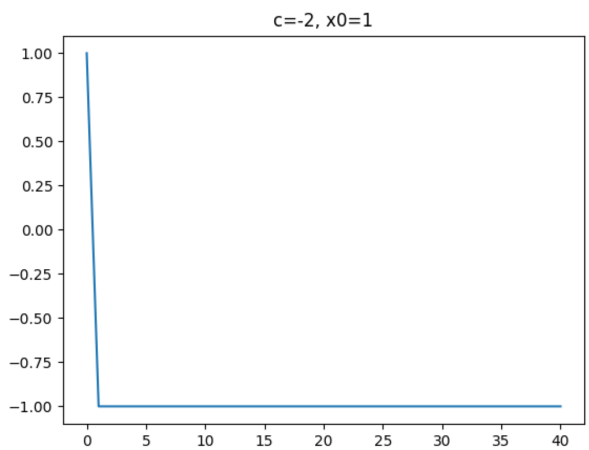
gdzie c jest pewną stałą.

Należy przeprowadzić następujące eksperymenty. Dla danych:

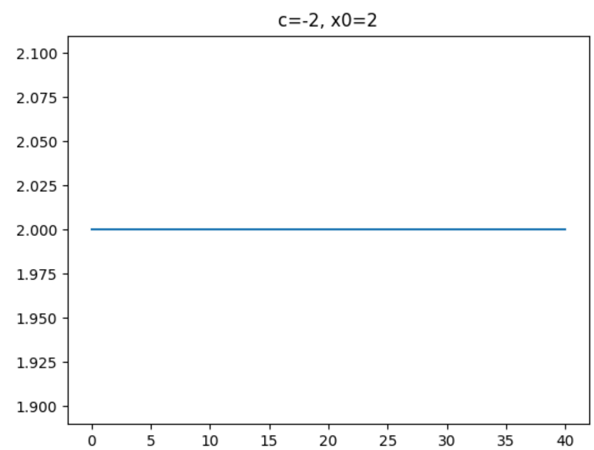
1. $c = -2$ i $x_0 = 1$
2. $c = -2$ i $x_0 = 2$
3. $c = -2$ i $x_0 = 1.99999999999999$
4. $c = -1$ i $x_0 = 1$
5. $c = -1$ i $x_0 = -1$
6. $c = -1$ i $x_0 = 0.75$
7. $c = -1$ i $x_0 = 0.25$

wykonać w języku **Julia** w arytmetyce **Float64** 40 iteracji wyrażania oraz zaobserwować zachowanie generowanych ciągów.

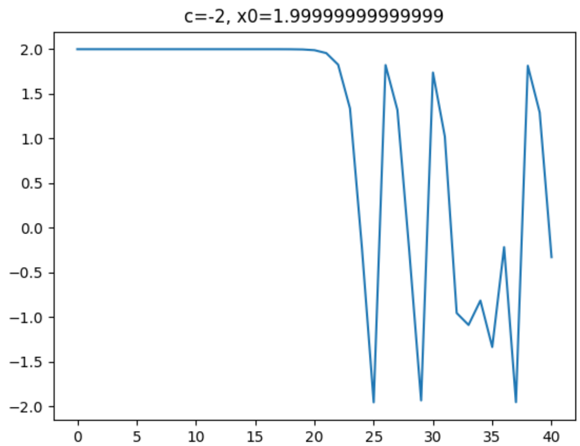
Uzyskane wartości przedstawiają następujące wykresy:



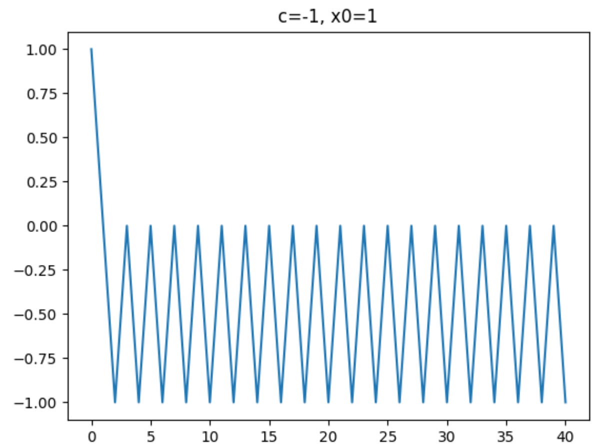
Rysunek 5: Eksperyment 1



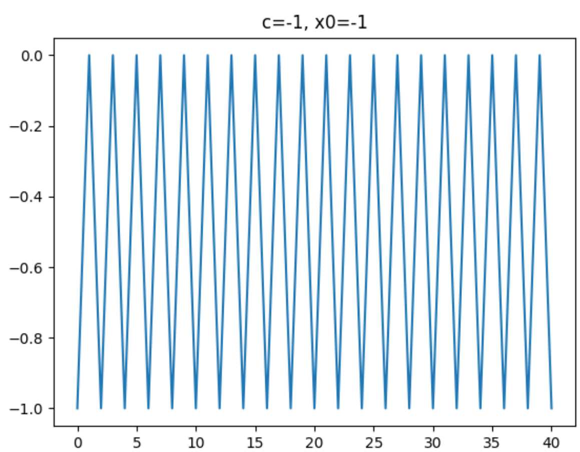
Rysunek 6: Eksperyment 2



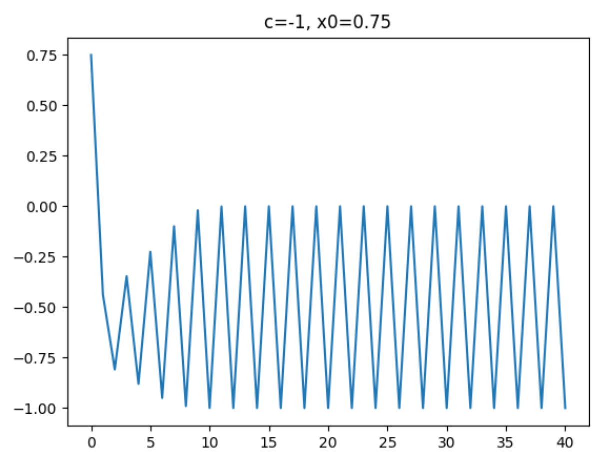
Rysunek 7: Eksperyment 3



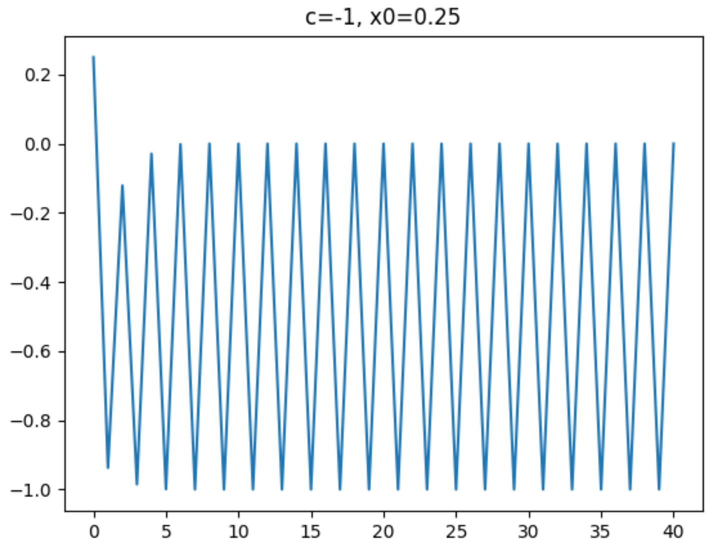
Rysunek 8: Eksperyment 4



Rysunek 9: Eksperyment 5



Rysunek 10: Eksperyment 6



Rysunek 11: Eksperyment 7

n	$c = -2$			$c = -1$			
$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 1.99[...]$	$x_0 = 1$	$x_0 = -1$	$x_0 = 0.75$	$x_0 = 0.25$	
0	1.0	2.0	2.000000e+00	1.0	-1.0	7.500000e-01	2.500000e-01
1	-1.0	2.0	2.000000e+00	0.0	0.0	-4.375000e-01	-9.375000e-01
2	-1.0	2.0	2.000000e+00	-1.0	-1.0	-8.085938e-01	-1.210938e-01
3	-1.0	2.0	2.000000e+00	0.0	0.0	-3.461761e-01	-9.853363e-01
4	-1.0	2.0	2.000000e+00	-1.0	-1.0	-8.801621e-01	-2.911237e-02
5	-1.0	2.0	2.000000e+00	0.0	0.0	-2.253147e-01	-9.991525e-01
6	-1.0	2.0	2.000000e+00	-1.0	-1.0	-9.492333e-01	-1.694342e-03
7	-1.0	2.0	2.000000e+00	0.0	0.0	-9.895619e-02	-9.999971e-01
8	-1.0	2.0	2.000000e+00	-1.0	-1.0	-9.902077e-01	-5.741579e-06
9	-1.0	2.0	2.000000e+00	0.0	0.0	-1.948876e-02	-1.000000e+00
10	-1.0	2.0	2.000000e+00	-1.0	-1.0	-9.996202e-01	-6.593148e-11
11	-1.0	2.0	2.000000e+00	0.0	0.0	-7.594796e-04	-1.000000e+00
12	-1.0	2.0	2.000000e+00	-1.0	-1.0	-9.999994e-01	0.000000e+00
13	-1.0	2.0	1.999999e+00	0.0	0.0	-1.153618e-06	-1.000000e+00
14	-1.0	2.0	1.999997e+00	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
15	-1.0	2.0	1.999989e+00	0.0	0.0	-2.661649e-12	-1.000000e+00
16	-1.0	2.0	1.999957e+00	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
17	-1.0	2.0	1.999828e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
18	-1.0	2.0	1.999313e+00	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
19	-1.0	2.0	1.997254e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
20	-1.0	2.0	1.989024e+00	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
21	-1.0	2.0	1.956215e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
22	-1.0	2.0	1.826779e+00	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
23	-1.0	2.0	1.337120e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
24	-1.0	2.0	-2.121097e-01	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
25	-1.0	2.0	-1.955009e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
26	-1.0	2.0	1.822062e+00	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
27	-1.0	2.0	1.319910e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
28	-1.0	2.0	-2.578368e-01	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
29	-1.0	2.0	-1.933520e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
30	-1.0	2.0	1.738500e+00	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
31	-1.0	2.0	1.022383e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
32	-1.0	2.0	-9.547330e-01	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
33	-1.0	2.0	-1.088485e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
34	-1.0	2.0	-8.152007e-01	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
35	-1.0	2.0	-1.335448e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
36	-1.0	2.0	-2.165791e-01	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
37	-1.0	2.0	-1.953094e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
38	-1.0	2.0	1.814574e+00	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00
39	-1.0	2.0	1.292680e+00	0.0	0.0	0.000000e+00	-1.000000e+00
40	-1.0	2.0	-3.289791e-01	-1.0	-1.0	-1.000000e+00	0.000000e+00

Tabela 7: Wartości z zadania 6

Wnioski:

blah blah