Obliczenia naukowe
Sprawozdanie 4

Józef Piechaczek

7 grudnia 2019

1 Zadanie 1

Celem zadania 1 jest napisanie funkcji obliczającej ilorazy różnicowe.
Definicja funkcji:

`function ilorazyRoznicowe (x::Vector{Float64}, f::Vector{Float64})`

Dane:

- x wektor długości $n+1$ zawierający węzły $x_0, ..., x_n$ `x[1]`$=x_0$,...,`x[n+1]`$=x_n$
- f wektor długości $n+1$ zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach $f(x_0), ..., f(x_n)$

Wyniki:

- fx wektor długości $n+1$ zawierający obliczone ilorazy różnicowe
  `fx[1]`$=f[x_0]$
  `fx[2]`$=f[x_0, x_1]$,...,`fx[n+1]`$=f[x_0, ..., x_n]$

Funkcję należy zaprojektować bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

Opis algorytmu:
W celu obliczenia ilorazów korzystamy z następujących zależności:

I. $f[x_i] = f(x_i)$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$

II. $f[x_i, \ldots, x_{i+j+1}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j+1}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j}]}{x_{i+j+1} - x_i}$

Ilorazy różnicowe możemy łatwo policzyć korzystając z tablicy trójkątnej tworzonej w następujący sposób:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & \ldots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_2, x_3] & f[x_2, x_3, x_4] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
x_{n-2} & f[x_{n-2}] & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}$$

Do przechowywania wartości ilorazów wystarczy zwykła tabela, której początkowymi wartościami, będą wartości funkcji w interpolowanych węzłach. W i-tej iteracji zewnętrznej pętli algorytmu będziemy modyfikować wartości w tablicy od n do i.

Algorytm:

```
l <- length(x)
fx <- f
for j=2 to l do
  for i=l downto j do
    fx[i] <- (fx[i] - fx[i - 1])/(x[i] - x[i - j + 1])
return fx
```

2 Zadanie 2

Napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie $x = t$ za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera, w czasie $O(n)$.
Definicja funkcji:

```
function warNewton (x::Vector{Float64}, fx::Vector{Float64}, t::Float64)
```

Dane:

x wektor długości $n+1$ zawierający węzły $x_0, ..., x_n$ `x[1]`$=x_0$,...,`x[n+1]`$=x_n$

fx wektor długości $n+1$ zawierający ilorazy różnicowe
`fx[1]`$=f[x_0]$
`fx[2]`$=f[x_0, x_1]$,...,`fx[n+1]`$=f[x_0, ..., x_n]$

Wyniki:

nt wartość wielomianu w punkcie t

Opis algorytmu:
W celu obliczenia wartości wielomianu interpolacyjnego w punkcie użyjemy uogólnionego algorytmu Hornera.

$$\begin{aligned} &w_n(x) := f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\ &w_k(x) := f[x_0, \ldots, x_k] + (x - x_k)w_{k+1}(x) \qquad (k = n-1, \ldots, 0) \\ &N_n(x) := w_0(x) \end{aligned}$$

Podane wzory wynikają z następującej postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} c_j q_j(x) \\ c_j &= f[x_0, \ldots, x_j] \\ q_j &= \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \end{aligned}$$

Algorytm działa w czasie $O(n)$.
Algorytm:

```
l <- length(x)
nt = fx[l]
for i=l-1 downto 1
  nt = fx[i] + (t - x[i]) * nt
return nt
```

3 Zadanie 3

Znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0, x_1], c_2 = f[x_0, x_1, x_2], \ldots, c_n = f[x_0, \ldots, x_n]$(ilorazy różnicowe) oraz węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$ napisać funkcję obliczającą, w czasie $O(n^2)$, współczynniki jego postaci naturalnej $a_0, \ldots, a_n$ tzn. $a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.
Definicja funkcji:

```
function naturalna (x::Vector{Float64}, fx::Vector{Float64})
```

Dane:

x wektor długości $n+1$ zawierający węzły $x_0, ..., x_n$ `x[1]`$=x_0$,...,`x[n+1]`$=x_n$

fx wektor długości $n+1$ zawierający ilorazy różnicowe
`fx[1]`$=f[x_0]$
`fx[2]`$=f[x_0, x_1]$,...,`fx[n+1]`$=f[x_0, ..., x_n]$

Wyniki:

a wektor długości $n+1$ zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej
`a[1]` $= a_0$
`a[2]` $= a_1$, ..., `a[n]`$=a_{n-1}$, `a[n+1]`$=a_n$

Opis algorytmu:
Algorytm korzysta z uogólnionego algorytmu Hornera z poprzedniego zadania. Jako a_n przyjmujemy wartość $f[x_0, \ldots, x_n]$, co da się łatwo wykazać. Następnie w każdej iteracji zewnętrznej pętli obliczamy częściową wartość dla wielomianu, podobnie jak w zadaniu 2, a w wewnętrznej pętli aktualizujemy wartości współczynników tak, aby częściowy wielomian w_k był w postaci naturalnej. Algorytm działa w czasie $O(n^2)$.
Algorytm:

```
l <- length(x)
a[l] <- fx[l]
for i = (l-1) downto 1
  a[i] = fx[i] - a[i+1] * x[i]
  for j = (i+1) to (l-1)
    a[j] = a[j] - a[j+1] * x[i]
return a
```

4 Zadanie 4

Napisać funkcję, która zinterpoluje zadaną funkcję $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie narysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję. W interpolacji użyć węzłów równoodległych, tj. $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1, \ldots, n$. Nie wyznaczać wielomianu interpolacyjnego w jawnej postaci. Należy skorzystać z funkcji `ilorazyRoznicowe` i `warNewton`.
Definicja funkcji:

```
function rysujNnfx(f,a::Float64,b::Float64,n::Int)
```

Dane:

f	funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja
a, b	przedział interpolacji
n	stopień wielomianu interpolacyjnego

Wyniki:

wykres funkcji interpolowanej i wielomianu interpolacyjnego na przedziale $[a, b]$

Opis rozwiązania:
Algorytm dzieli przedział $[a, b]$ na $n + 1$ równo odległych punktów i oblicza wartość funkcji w tych punktach. Następnie korzysta z funkcji `ilorazyRoznicowe` w celu obliczenia ilorazów różnicowych. Następnie program dzieli zadany przedział na równo odległe punkty z większym zagęszczeniem (w celu większej dokładności wykresu) i oblicza wartości funkcji interpolowanej i wielomianu interpolującego (za pomocą `warNewton`) w tych punktach. Wykresy są tworzone za pomocą biblioteki **Plots** i zapisywane do pliku.

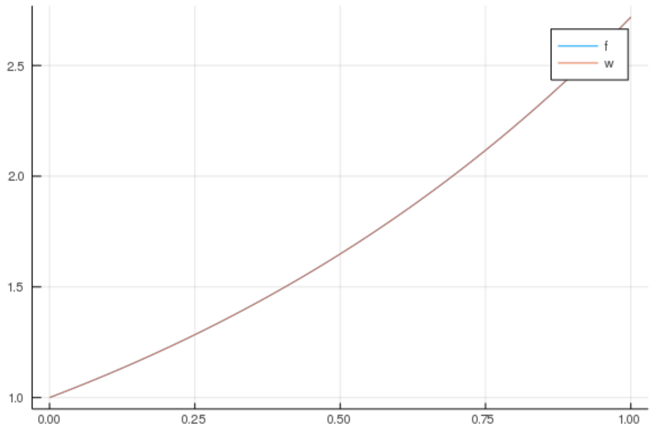
5 Zadanie 5

Przetestować funkcję `rysujNnfx(f,a,b,n)` na następujących przykładach:

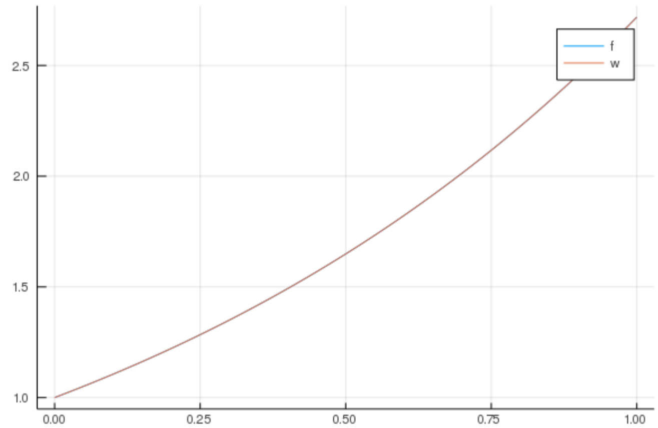
(a) $e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15$

(b) $x^2 sinx, [-1, 1], n = 5, 10, 15$

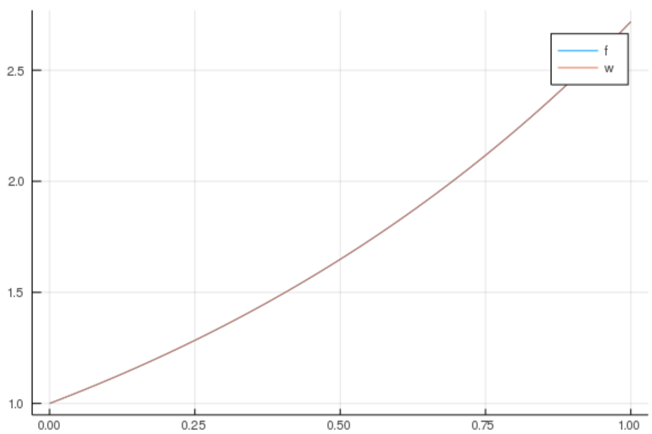
Rozwiązania:



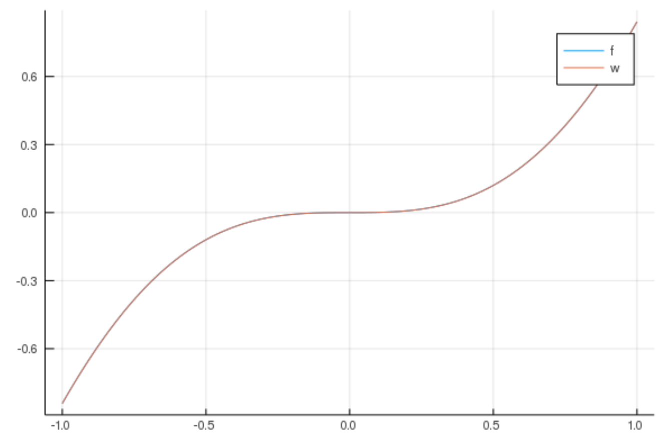
Rysunek 1: $e^x, n = 5$



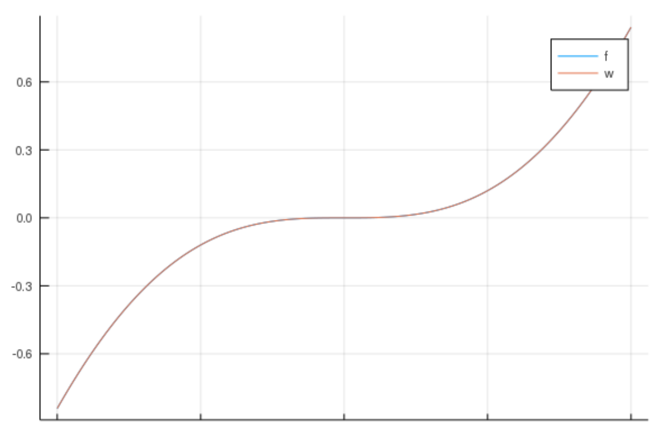
Rysunek 2: $e^x, n = 10$



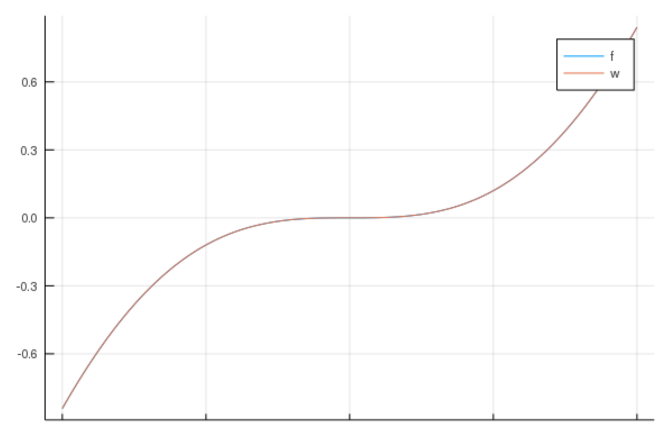
Rysunek 3: $e^x, n = 15$



Rysunek 4: $x^2 sinx, n = 5$



Rysunek 5: $x^2 sinx, n = 10$



Rysunek 6: $x^2 sinx, n = 15$

Wnioski:
Patrząc na wykresy funkcji można zauważyć że zadane wielomiany bardzo dobrze interpolują podane funkcje. Nawet dla wielomianu stopnia $n = 5$ nie da się zobaczyć rozbieżności na wykresach.

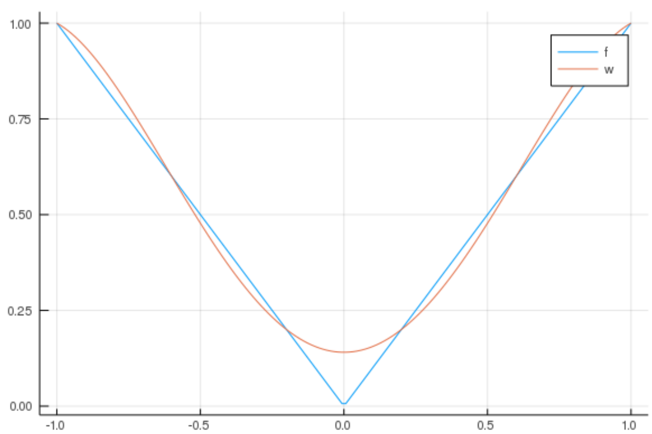
6 Zadanie 6

Przetestować funkcję `rysujNnfx(f,a,b,n)` na następujących przykładach:

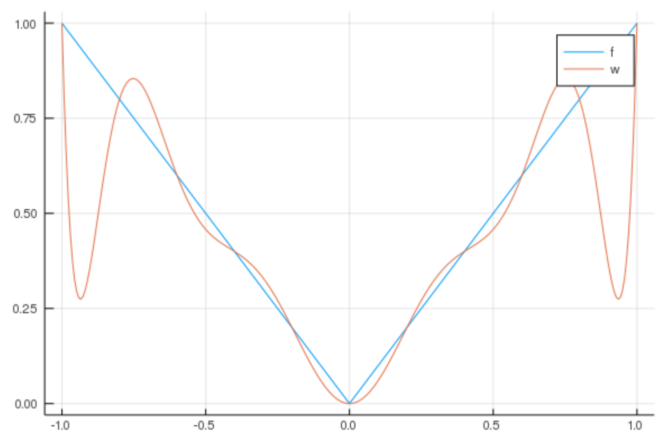
(a) $|x|, [-1, 1], n = 5, 10, 15$

(b) $\frac{1}{1+x^2}, [-5, 5], n = 5, 10, 15$

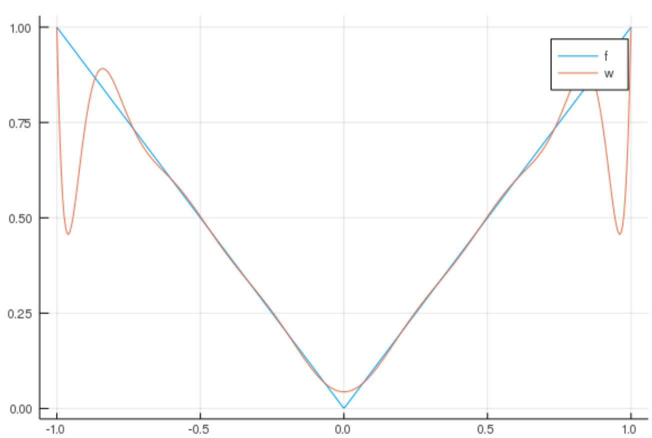
Rozwiązania:



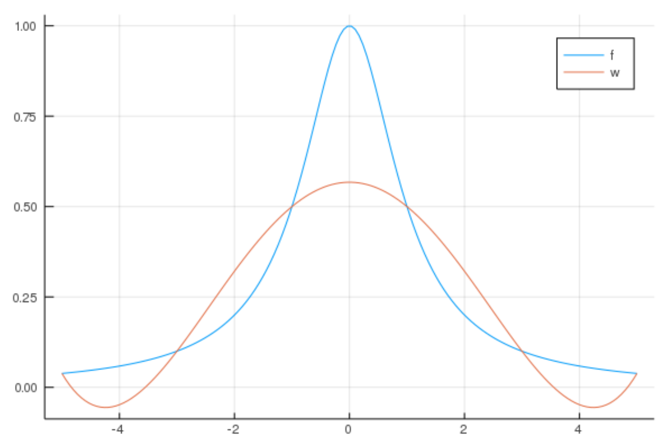
Rysunek 7: $|x|, n = 5$



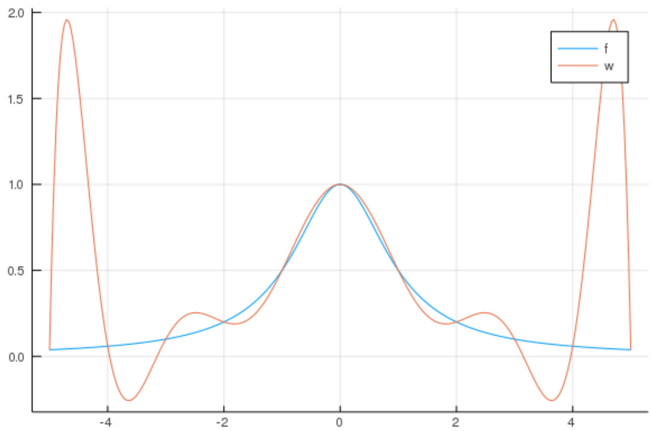
Rysunek 8: $|x|, n = 10$



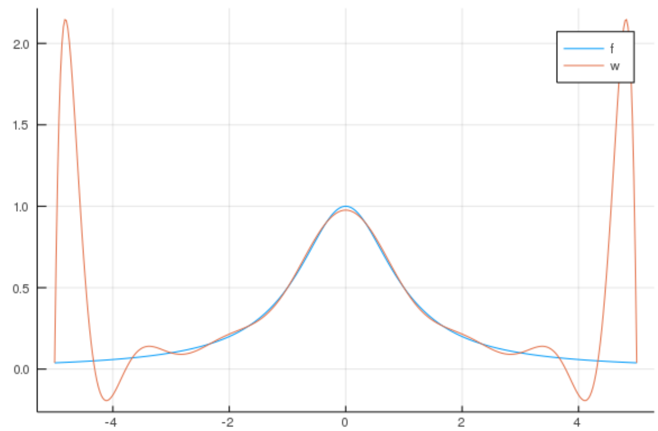
Rysunek 9: $|x|, n = 15$



Rysunek 10: $\frac{1}{1+x^2}, n = 5$



Rysunek 11: $\frac{1}{1+x^2}, n = 10$



Rysunek 12: $\frac{1}{1+x^2}, n = 15$

Wnioski:
W przypadku wielomianów interpolujących w zadaniu 6 możemy zauważyć, że wraz ze wzrostem stopnia wielomianu jakość interpolacji ulega pogorszeniu. Jest to szczególnie widoczne na końcach przedziałów. W wypadku pierwszym wynika to z faktu, że funkcja znacząco odbiega od funkcji gładkiej. W drugim przykładzie możemy zaobserwować efekt Rungego, który jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów. Aby uniknąć tego efektu, możemy stosować interpolację z węzłami upakowanymi gęściej na krańcach przedziału interpolacji.