

# Obliczenia naukowe

## Sprawozdanie 3

Józef Piechaczek

23 listopada 2019

# Notatka do zadań 1, 2 i 3

Do zadań 1, 2 i 3 zostały napisane funkcje testujące znajdujące się w pliku `tests.jl`. Testy sprawdzają wartości miejsc zerowych policzone za pomocą danych metod dla funkcji  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$ ,  $f_3(x) = x + 1$ ,  $f_4(x) = \sin x$ .

## 1 Zadanie 1

Zadanie 1 polega na utworzeniu funkcji rozwiązującej równanie  $f(x) = 0$  za pomocą metody bisekcji.

**Definicja funkcji:**

```
function mbisekcji(f, a::Float64, b::Float64, delta::Float64,
epsilon::Float64)
```

**Dane:**

$f$     funkcja  $f(x)$  zadana jako anonimowa funkcja  
 $a, b$     końce przedziału początkowego  
 $delta, epsilon$     dokładności obliczeń

**Wyniki:**

$(r, v, it, err)$     czwórka, gdzie  
 $r$     przybliżenie pierwiastka równania  
 $v$     wartość  $f(r)$   
 $it$     liczba iteracji  
 $err$     sygnalizacja błędu  
0 - brak błędu  
1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale  $[a, b]$

**Opis metody:**

Metoda bisekcji korzysta z twierdzenia Darboux do szacowania wartości pierwiastka funkcji. Twierdzenie to mówi, że funkcja ciągła na danym przedziale  $[a, b]$  i zmieniająca znak na tym przedziale (co opisuje nierówność  $f(a)f(b) < 0$ ) posiada miejsce zerowe w  $[a, b]$ . Metoda w pojedynczej iteracji dzieli podany przedział na połowę, obliczając środek przedziału  $c = \frac{1}{2}(b + a)$ . Następnie obliczamy wartość funkcji w punkcie  $c$ , tj.  $f(c)$ . Sprawdzamy znak wartości  $f(c)$  i rozpatrujemy nowy przedział  $(a, c)$  albo  $(c, b)$  taki, że funkcja zmienia znak w danym przedziale. Metoda kończy działanie w momencie gdy osiągamy zadaną dokładność, tj. przedział jest dostatecznie niewielki lub wartość w punkcie  $c$  jest dostatecznie bliska zeru. Metoda ma zbieżność liniową.

**Opis algorytmu:**

Aby algorytm był jak najlepszy z numerycznego punktu widzenia wprowadziłem następujące zmiany:

1. Środek przedziału liczymy za pomocą wzoru  $e = (b - a)/2, c = a + e$ . Jest to dokładniejszy sposób niż obliczanie środka klasyczną metodą  $c = (a + b)/2$ , gdyż klasyczna metoda mogła powodować, iż środek przedziału znajdował się poza przedziałem dla niektórych przypadków.
2. Wartości funkcji na krańcach przedziału porównujemy za pomocą `sign(f(c)) != sign(f(a))`, gdyż sprawdzanie tego za pomocą warunku  $f(a)f(b) < 0$  mogło powodować overflow lub underflow.

Algorytm kończy pracę na jeden z dwóch sposobów

1. Gdy zadana dokładność została osiągnięta
2. Gdy funkcja nie zmienia znaku w zadanym przedziale - error code 1

## 2 Zadanie 2

Zadanie 2 polega na utworzeniu funkcji rozwiązującej równanie  $f(x) = 0$  za pomocą metody Newtona.

**Definicja funkcji:**

```
function mstycznych(f, pf, x0::Float64, delta::Float64,
epsilon::Float64, maxit::Int)
```

**Dane:**

$f, pf$  funkcja  $f(x)$  oraz pochodna  $f'(x)$  zadane jako anonimowe funkcje

$x0$  przybliżenie początkowe

$delta, epsilon$  dokładności obliczeń

$maxit$  maksymalna liczba iteracji

**Wyniki:**

$(r, v, it, err)$  czwórka, gdzie

$r$  przybliżenie pierwiastka równania

$v$  wartość  $f(r)$

$it$  liczba iteracji

$err$  sygnalizacja błędu

0 - brak błędu

1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w  $maxit$  operacji

2 - pochodna bliska zeru

**Opis metody:**

Metoda Newtona polega na lokalnej aproksymacji liniowej za pomocą stycznych. W tej metodzie iteracyjnej  $x_{n+1}$  jest określone jako odcięta punktu przecięcia z osią x stycznej do krzywej  $y = f(x)$

w punkcie  $(x_n, f(x_n))$ . Zatem kolejne przybliżenia pierwiastka równania można określić za pomocą wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoda Newtona ma zbieżność kwadratową, zatem zbiega szybciej niż metoda bisekcji i siecznych. Wadą tej metody natomiast jest konieczność liczenia pochodnej funkcji. Inną wadą jest fakt, iż zbieżność nie zachodzi zawsze. W wielu przypadkach metoda jest rozbieżna, kiedy punkt startowy znajduje się zbyt daleko od poszukiwanego miejsca zerowego.

### Opis algorytmu:

Program może kończyć działanie na jeden z czterech sposobów:

1. Gdy spełniona jest wymagana dokładność na początku działania programu, tj.  $f(x_0) < \epsilon$
2. Gdy pochodna jest bliska zeru ( $|f'(x_0)| < \epsilon$ ) - funkcja zwraca error code 2
3. Gdy w danej iteracji spełniona jest zadana dokładność ( $|x_{n+1} - x_n| < \delta$  lub  $|f(x_{n+1})| < \epsilon$ )
4. Gdy nie osiągnięto zadanej dokładności w  $maxit$  iteracji - error code 1

## 3 Zadanie 3

Zadanie 3 polega na utworzeniu funkcji rozwiązującej równanie  $f(x) = 0$  za pomocą metody siecznych.

### Definicja funkcji:

```
function msiecznych(f, x0::Float64, x1::Float64, delta::Float64,
epsilon::Float64, maxit::Int)
```

### Dane:

$f$     funkcja  $f(x)$  zadana jako anonimowa funkcja  
 $x_0, x_1$     przybliżenia początkowe  
 $\delta, \epsilon$     dokładności obliczeń  
 $maxit$     maksymalna liczba iteracji

### Wyniki:

$(r, v, it, err)$     czwórka, gdzie  
 $r$     przybliżenie pierwiastka równania  
 $v$     wartość  $f(r)$   
 $it$     liczba iteracji  
 $err$     sygnalizacja błędu  
0 - brak błędu  
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w  $maxit$  operacji

**Opis metody:**

Metoda siecznej jest podobna do metody Newtona, jednak w tej metodzie pochodną zastępujemy ilorazem różnicowym postaci:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Otrzymujemy więc następujący wzór rekurencyjny

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, n \geq 1$$

Metoda zatem potrzebuje dwóch punktów startowych. Metoda ta ma zbieżność wynoszącą  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , zatem jest wolniejsza od metody Newtona, ale za to nie wymaga liczenia pochodnej funkcji.

**Opis algorytmu:**

Algorytm kończy działanie na jeden z dwóch sposobów:

1. Gdy spełniona jest zadana dokładność
2. Gdy zadana dokładność nie została osiągnięta w *maxit* iteracji - error code 1

## 4 Zadanie 4

Celem zadania 4 jest wyznaczenie pierwiastków równania  $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$  za pomocą zaprogramowanych wcześniej metod:

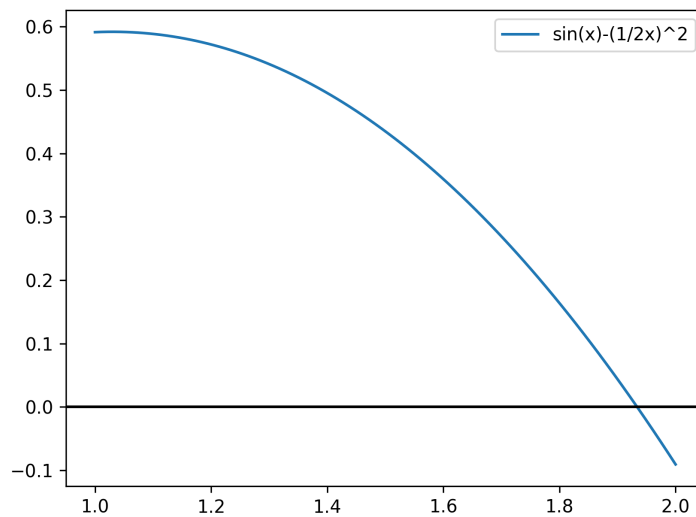
1. bisekcji z przedziałem początkowym  $[1.5, 2]$  i  $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
2. Newtona z przybliżeniem początkowym  $x_0 = 1.5$  i  $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
3. siecznych z przybliżeniami początkowymi  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  i  $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

**Wyniki:**

| Metoda    | Miejsce zerowe $x_0$ | $f(x_0)$               | Liczba iteracji | Kod błędu |
|-----------|----------------------|------------------------|-----------------|-----------|
| bisekcja  | 1.9337539672851562   | -2.7027680138402843e-7 | 16              | 0         |
| stycznych | 1.933753779789742    | -2.2423316314856834e-8 | 4               | 0         |
| siecznych | 1.933753644474301    | 1.564525129449379e-7   | 4               | 0         |

**Wnioski:**

Patrząc na wyniki możemy dostrzec iż wszystkie metody wykonały obliczenia poprawnie i nie zwróciły błędu. Najwydajniejsze okazały się metody siecznych i stycznych, co jest zgodne z oczekiwaniami. Metody te mają większą zbieżność od metody bisekcji i wykonały obliczenia w 4 razy mniejszej liczbie iteracji.



Rysunek 1: Wykres w pyplot na przedziale  $[1, 2]$

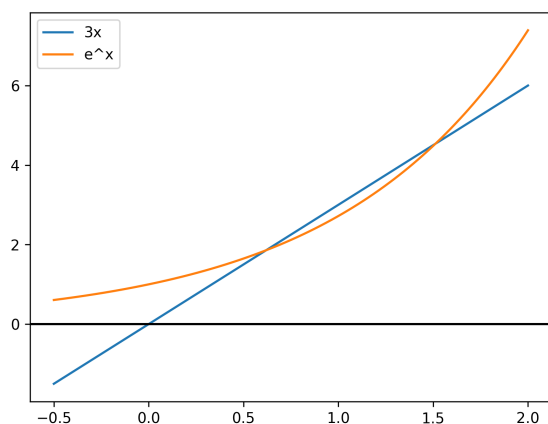
## 5 Zadanie 5

Celem zadania 5 jest znalezienie za pomocą metody bisekcji wartości zmiennej  $x$ , dla której przecinają się wykresy funkcji  $y_1 = 3x$  i  $y_2 = e^x$ . Wymagane dokładności obliczeń wynoszą:  $\delta = 10^{-4}$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$ . Aby znaleźć wartość zmiennej  $x$  porównujemy podane funkcje, dzięki czemu otrzymujemy równanie:

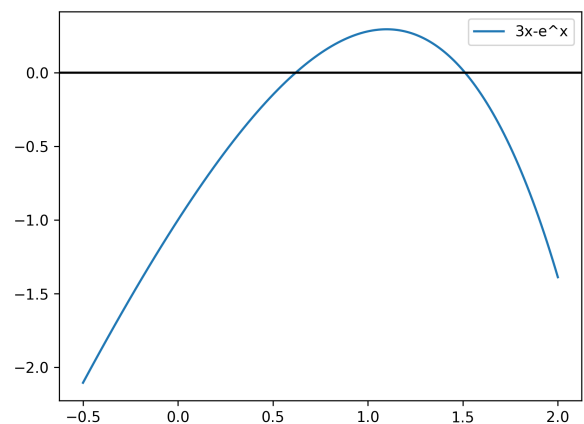
$$3x = e^x$$

Zatem będziemy szukać miejsc zerowych funkcji:

$$f(x) = 3x - e^x$$



Rysunek 2: Wykres w pyplot dla  $y_1$  i  $y_2$



Rysunek 3: Wykres w pyplot dla  $f(x)$

Po wstępnej analizie funkcji można zobaczyć, iż funkcja ma dwa miejsca zerowe. Jako przedziały

początkowe dla metody bisekcji wybrałem:  $[0.5, 1.0]$  oraz  $[1.0, 2.0]$

### Wyniki:

Wyniki przedstawia następująca tabela:

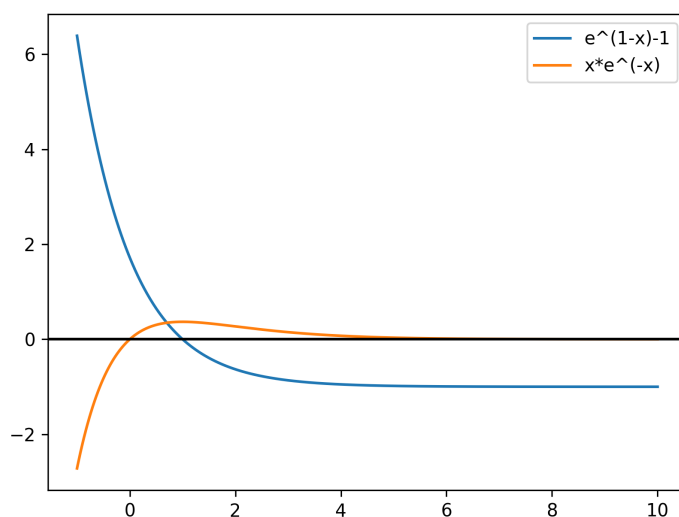
| Miejsce zerowe $x_0$ | $f(x_0)$             | Liczba iteracji | Kod błędu |
|----------------------|----------------------|-----------------|-----------|
| 0.619140625          | 9.066320343276146e-5 | 8               | 0         |
| 1.5120849609375      | 7.618578602741621e-5 | 13              | 0         |

### Wnioski:

Algorytm obliczył poszukiwane miejsca zerowe oraz nie zwrócił błędu. Oznacza to że wybraliśmy odpowiednie przedziały. W zadaniu tym główną trudność sprawiało właśnie dobranie odpowiednich przedziałów. W celu znalezienia ich posłużyłem się wykresem funkcji, jednak w przypadku braku dostępu do tego narzędzia musielibyśmy wykonać większą liczbę prób lub użyć innego algorytmu.

## 6 Zadanie 6

Zadanie 6 polega na znalezieniu miejsc zerowych funkcji  $f_1(x) = e^{1-x} - 1$  oraz  $f_2(x) = xe^{-x}$  za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych. Wymagane dokładności obliczeń wynoszą  $\delta = 10^{-4}$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$ . Należy dobrać odpowiednio przedział i przybliżenia początkowe.



Rysunek 4: Wykres w pyplot na przedziale  $[-1, 10]$

Po wstępnej analizie funkcji można w łatwy sposób dostrzec, że funkcja  $f_1$  ma miejsce zerowe w  $x_0 = 1$ , a funkcja  $f_2$  ma miejsce zerowe w  $x_0 = 0$

### Wyniki:

Wyniki przedstawia następujące tabele:

| Przedział         | Miejsce zerowe $r$  | $f(r)$                 | Liczba iteracji | Kod błędu |
|-------------------|---------------------|------------------------|-----------------|-----------|
| $f_1$             |                     |                        |                 |           |
| [0.5, 1.5]        | 1.0                 | 0.0                    | 1               | 0         |
| [-2.0, 3.0]       | 0.9999923706054688  | 7.629423635080457e-6   | 17              | 0         |
| [-20.0, 10.0]     | 0.9999942779541016  | 5.722062269342132e-6   | 20              | 0         |
| [-2000.0, 3000.0] | 1.0000094771385193  | -9.477093611320875e-6  | 27              | 0         |
| $f_2$             |                     |                        |                 |           |
| [-0.5, 0.5]       | 0.0                 | 0.0                    | 1               | 0         |
| [-2.0, 3.0]       | 7.62939453125e-6    | 7.62933632381113e-6    | 17              | 0         |
| [-20.0, 15.0]     | -9.5367431640625e-6 | -9.53683411396636e-6   | 19              | 0         |
| [-2000.0, 3000.0] | 500.0               | 3.562288203370643e-215 | 1               | 0         |

Tabela 1: Metoda bisekcji

| $x_0$  | Miejsce zerowe $r$     | $f(r)$                 | Liczba iteracji | Kod błędu |
|--------|------------------------|------------------------|-----------------|-----------|
| $f_1$  |                        |                        |                 |           |
| 1.0    | 1.0                    | 0.0                    | 0               | 0         |
| 5.0    | 0.9999996427095682     | 3.572904956339329e-7   | 54              | 0         |
| 6.0    | 0.9999999573590406     | 4.264096031825204e-8   | 147             | 0         |
| 7.5    | 0.9999994332744109     | 5.667257496622113e-7   | 662             | 0         |
| 10.0   | -                      | -                      | -               | 1         |
| 100.0  | -                      | -                      | -               | 2         |
| 1000.0 | -                      | -                      | -               | 2         |
| $f_2$  |                        |                        |                 |           |
| 0.0    | 0.0                    | 0.0                    | 0               | 0         |
| 0.5    | -3.0642493416461764e-7 | -3.0642502806087233e-7 | 5               | 0         |
| 1.0    | -                      | -                      | -               | 2         |
| 1.01   | 102.00999999999992     | 5.0846685549318855e-43 | 1               | 0         |
| 10.0   | 14.380524159896261     | 8.173205649825554e-6   | 4               | 0         |
| 100.0  | 100.0                  | 3.7200759760208363e-42 | 0               | 0         |
| 1000.0 | 1000.0                 | 0.0                    | 0               | 0         |

Tabela 2: Metoda Newtona dla  $10^5$  iteracji



| $x_0, x_1$  | Miejsce zerowe $r$   | $f(r)$                 | Liczba iteracji | Kod błędu |
|-------------|----------------------|------------------------|-----------------|-----------|
| $f_1$       |                      |                        |                 |           |
| 0.5, 1.5    | 0.9999999624498374   | 3.755016342310569e-8   | 5               | 0         |
| 0.0, 3.0    | 0.999999739048799    | 2.6095123506486573e-7  | 9               | 0         |
| -5.0, 5.0   | 4.975665372740593    | -0.9812331895845449    | 3               | 0         |
| -10.0, 10.0 | 9.99966600720658     | -0.999876548971044     | 3               | 0         |
| 0.0, 100.0  | -                    | -                      | -               | 1         |
| $f_2$       |                      |                        |                 |           |
| -0, 5, 0.5  | 5.38073548562323e-6  | 5.380706533386756e-6   | 6               | 0         |
| 0.5, 1.5    | 5.372227830220525e-6 | 5.372198969466189e-6   | 9               | 0         |
| -8.0, 7.0   | 6.999995985033118    | 0.006383195725973712   | 1               | 0         |
| -10.0, 10.0 | 9.99999958776927     | 0.0004539993144685704  | 1               | 0         |
| -1.0, 100.0 | 100.0                | 3.7200759760208363e-42 | 1               | 0         |

Tabela 3: Metoda siecznych dla  $10^5$  iteracji

### Wnioski:

W metodzie bisekcji w większości przypadków osiągnęliśmy poszukiwany wynik zadaną dokładnością, nawet mimo wybierania dużych przedziałów. Jedynym wyjątkiem było obliczanie wartości miejsca zerowego dla przedziału  $[-2000, 3000]$  dla  $f_2$ . Dla danego przedziału otrzymaliśmy wartość 500. Wynika to z faktu, iż wartość funkcji dla środka przedziału w pierwszej iteracji (czyli właśnie dla  $x = 500$ ) jest bardzo bliska zeru i spełnia warunek zakończenia obliczeń  $|f(r)| < \epsilon$ . Zatem stosując metodę bisekcji musimy wybierać przedział ostrożnie w przypadku gdy wartości funkcji są bliskie zeru.

W metodzie Newtona dla funkcji  $f_1$  dla niewielkich wartości osiągaliliśmy poprawne miejsce zerowe w stosunkowo niewielkiej liczbie operacji. Jednak wraz z wzrostem wartości  $x_0$  liczba iteracji gwałtownie wzrasta, chociaż wciąż zwraca poprawny wynik. Wynika to z faktu, iż funkcja dla coraz większych wartości wzrasta w coraz wolniejszym tempie, zbliżając się do funkcji stałej. Zatem dla niektórych wartości nie jesteśmy w stanie osiągnąć wyniku w zadanej liczbie iteracji - przykładowo dla  $x_0 = 10.0$  otrzymujemy error code 1. Dla jeszcze większych wartości  $x_0$  pochodna staje się tak bliska zeru, że otrzymujemy error code 2.

Dla funkcji  $f_2$  metoda zwraca poprawne wartości dla wartości mniejszych od 1. Dla  $x_0 = 1$  pochodna wynosi zero, więc otrzymujemy error code 2. Dla wartości większych od 1, nawet minimalnie większych, funkcja okazuje się rozbieżna. Algorytm mimo to jednak zwraca pewne wyniki. Wynika to z faktu, iż podobnie jak w metodzie bisekcji spełniony zostaje warunek zakończenia obliczeń  $|f(r)| < \epsilon$ .

Korzystając z metody Newtona musimy zatem odpowiednio dobierać wartość początkową, tak aby metoda była zbieżna. Musimy również zwrócić szczególną uwagę w przypadku gdy funkcja dąży do zera.

Metoda siecznych zachowała się podobnie do metody Newtona. Dla odpowiednio dobranych wartości początkowych zwracała poprawne miejsce zerowe. W funkcji  $f_2$  po wybraniu niektórych wartości kończyła pracę po jednej iteracji ze względu na spełnienie warunku  $|f(r)| < \epsilon$ , zwracając wartości bliskie  $x_1$ . Jedyną różnicą są rozwiązania dla przedziałów  $[-5.0, 5.0]$  i  $[-10.0, 10.0]$  w  $f_1$ . Dla podanych przykładów funkcja zwracała wartości zbliżone do  $x_1$  ponieważ krańce przedziałów przyjmowały wartości bardzo odległe od siebie, więc następne wartości  $x_n$  znajdowały się blisko wartości  $x_1$ . Algorytm kończył pracę przez spełnienie warunku  $|x_{n+1} - x_n| < \delta$ . Korzystając z metody siecznych musimy zatem uważać, gdy wybieramy wartości np. dla funkcji, która dąży do zera lub gdy wartości na krańcach przedziału znacznie się różnią.