北京十一学校[†]数学竞赛　代数问题选讲 4　不等式 II (问题)

本讲围绕不等式证明的经典技术展开. 在分析方法和调整思想的指导下, 使用经典不等式以及使用经典技术是我们解决不等式问题的两套并行方案. 在数学竞赛中, 某些不等式或是具有特殊的约束条件, 或是形式奇特, 或是取等条件不常规. 这些都导致经典不等式捉襟见肘. 面对此类问题, 根据特征有的放矢地应用经典技术往往对问题的解决大有裨益. 下面对这些技术进行简要梳理:

- 递归方法

  数学归纳法是经典的不等式证明方法. 这类方法对于无约束条件的 n 元整式不等式通常效果非常显著. 当约束条件相对简洁 (例如整式型的求和或者乘积条件) 时, 我们有时能借助一些巧思选取合适的对象来实现归纳过渡. 本讲中的问题 1, 5, 7 都可以体现递归方法的价值.

- 分部求和

  阿贝尔 (Abel) 变换, 也可以称作*分部求和*, 就是定积分理论中分部积分公式的离散版本:

  $$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=A_1(b_1-b_2)+A_2(b_2-b_3)+\cdots+A_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+A_nb_n.$$

  这里的 $A_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$. 以上等式可以从直观上理解为 "对 $\{a_n\}$ **积分**, 对 $\{b_n\}$ **求导**". 在不等式问题中, 如果我们需要研究 a_ib_i 的求和, 又适逢一个数列单调另一个数列部分和有所控制的情形, 那么阿贝尔 (Abel) 变换就很可能是解决问题的不二选择. 这是因为该恒等式使我们能够精准聚焦两组重要条件. 在这一讲问题 3, 6, 8 都是阿贝尔 (Abel) 变换的应用.

- 局部不等式

  某些数学竞赛中的不等式问题可能形式奇特, 条件诡异, 取等不存在或是算不出来. 在这样的问题中, 常规思路往往无从入手, 构造局部不等式或许就是我们最后的一线生机. 数列中的裂项求和或者估计技术都可以看作局部不等式的特例. 基于巧思设计局部不等式可以将问题中繁复的代数结构迅速化简. 借助局部不等式我们能行云流水般解决本讲的问题 2, 4, 9, 10.

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $n\,(n \geq 2)$ 个闭区间 $[0,1]$ 上的实数. 证明:

$$\sum_{1 \leq k < l \leq n} k a_k a_l \leq \frac{n-1}{3} \sum_{k=1}^{n} k a_k.$$

2. 给定正实数 $a < b$. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2022}$ 为 2022 个区间 $[a,b]$ 上的实数, 求下式的最大值:

$$S = \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \cdots + |x_{2022} - x_{2023}|}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022}}.$$

这里约定 $x_{2023} = x_1$.

3. 给定正整数 n, k. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为 $2n$ 个非负实数, 且满足:

- $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$;
- 对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 均有 $c_1 + c_2 + \cdots + c_i \leq i^k$.

求 $c_1 a_1^k + c_2 a_2^k + \cdots + c_n a_n^k$ 的最大值.

4. 给定正整数 n. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个实数, 且使 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$. 求 $\sum_{i=1}^{n} a_i^3$ 的最小值.

5. 已知实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} i a_i = 0$. 证明: 对任意实数 x, 均有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lfloor ix \rfloor \geq 0.$$

6. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为 $2n\,(n > 3)$ 个正实数, 且满足:

- $1 > a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 且 $\max\{b_1, b_2, \cdots, b_n\} < 1$;
- 对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$ 均有 $a_1 a_2 \cdots a_i \leq b_1 b_2 \cdots b_i$.

证明:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - b_i).$$

7. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $n\,(n \geq 2)$ 个积为 1 的正实数, 证明:

$$\{a_1\} + \{a_2\} + \cdots + \{a_n\} < n - \frac{1}{2}.$$

8. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为 $n+1$ 个实数. 证明: 存在 $0 \leq k \leq n$, 使得对任意 $x \in [0,1]$, 均有

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \leq \sum_{i=0}^{k} a_i.$$

9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $n\,(n \geq 2)$ 个和为 1 的正实数. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k} \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}.$$

10. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个和为 n 的正实数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{1 + a_i + \cdots + a_i^{i-1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{1 + a_i + \cdots + a_i^{i}}.$$

11. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为 $2n$ 个正实数, 且满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, \qquad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n, \qquad \frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{b_n}.$$

证明:

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2.$$

12. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为区间 $(0,1)$ 上的 $2n$ 个实数, 且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i} a_{\sigma(j)}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i} b_{\sigma(j)}\right)$$

对 $1, 2, \cdots, n$ 的某个排列 $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ 成立.