北京十一学校[†]数学竞赛　组合问题选讲 2　分析方法 (问题)

分析方法是指基于问题本身的特征进行特异化的思考, 以便有针对性地解决问题. 一般来说, 我们仅仅通过探索方法可能面临找不出规律或者规律多且杂的困境. 这时候解题就容易陷入僵局. 那么怎样克服山重水复迎来柳暗花明呢? 这往往需要综合评估问题本身的特征, 并就此对解法作出一定的预判, 同时重新审视种种探索得到的结果. 分析的想法多种多样, 这里我们做个简单的梳理:

- 化归已知问题

  面对一道新题我们有时感到无从下手, 不知所措. 但是当我们反复读题后, 又会感到这个问题似曾相识. 这时, 我们就应该积极地尝试将新问题化归为已知的经典问题. 经典问题中的思路手法总是值得我们反复玩味. 事实上, 许多新问题都来自命题者对经典问题的改编思考. 因此理解并模仿经典问题的手法在解题中尤为重要. 本讲中的问题 1, 8 都体现了化归的思想.

- 分析数值特征

  一些问题的叙述相对抽象, 而所需证明的结论又让我们感到莫名其妙, 束手无策. 这时, 我们需要关注题目中的具体 (特别是与众不同的) 特征. 这样的特征很可能有助于我们打开思路, 找到突破口. 事实上, 很多特异性的数值会给予我们启发. 在本讲中, 问题 9 的条件所涉 k 与结论中要证明的下界 $\dfrac{n}{k}$ 提示我们证明的核心很可能是简单的计数或抽屉原理.

- 分析取等条件

  在形形色色的组合极值与代数不等式问题中, 如果我们能够搞清楚或刻画取等条件, 那么取等条件往往对我们的证明至关重要. 毕竟, 看到了取等条件, 就有了证明的方向, 且我们要时刻关注自己设计的各步放缩是否完美契合所有的取等条件. 基于取等条件的分析总能为我们的解题带来本质的进展. 本讲中的问题 4, 5, 6 都表明取等条件在解题过程中不可或缺.

- 分析证明策略

  我们解决问题的策略往往是因题而异的, 通过一些探索, 在我们对题目结构有一些了解之后, 应该积极主动并有针对性地预判证明的方向. 例如, 在问题 5 中, 由于我们发现取等条件多种多样, 因此考虑证明方案为归纳或宏观计数; 又如, 问题 7 的背景是将无穷集合划分为若干个无穷集合, 而题目条件又指向等差数列, 这就预示着我们需要借助密度估计解决问题.

1. 平面上有 100 个不同点. 在以这些点为端点的所有线段中, 求不同中点个数的最小值.

2. 求所有正整数对 (n, d), 使得有可能存在 n 名学生, 其中每人恰认识 d 名男生和 d 名女生.

注: 认识关系是相互的.

3. 在 7×8 的方格表中, 每个小方格的中心都有一枚棋子. 若两枚棋子所在的小方格有公共边或公共顶点, 则称它们相连. 现在从这 56 枚棋子中取出 m 枚, 使得方格表剩下的棋子不存在 5 枚在一条直线 (横, 竖, 斜方向) 上依次相连. 求正整数 m 的最小可能值.

4. 给定正整数 $m \geq n \geq 2$. 有 n 名学生参加一次共有 m 道试题的考试. 每道题的得分规则是: 若该题恰有 x 名学生未答对, 则每个答对该题的学生得 x 分, 每个未答对该题的学生得 0 分. 每名学生的总分即其 m 道题得分的总和. 将所有学生的总分从高到低排列为 $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$.

求 $p_1 + p_n$ 的最大可能值.

5. 考虑点集

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}_+^3 \mid 1 \leq x, y, z \leq n\}.$$

将 T 中 $3n^2 - 3n + k + 1$ $(k \in \mathbb{N}_+)$ 个点染为红色, 且对任意被染红的两点 P, Q, 若线段 PQ 平行于坐标轴, 则将线段 PQ 上的点全部染红. 证明: 存在至少 k 个单位正方体, 其 8 个顶点均被染红.

6. 一条直线上有 n 个不同点, 其中任意两点间的距离构成可重集合 $\boldsymbol{D}$. 若任何一个数在 $\boldsymbol{D}$ 中至多出现两次, 求 $\boldsymbol{D}$ 中出现一次的所有数个数的最小可能值.

7. 求所有正实数 a, 使得存在正整数 n 以及 n 个互不相交的无穷集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 满足:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \mathbb{Z},$$

且对每个 A_i 中的任意两数 $b \neq c$ 均有 $|b-c| \geq a^i$.

8. 一位棋手参加 11 周 (共 77 天) 的集训. 他每天至少下 1 盘棋, 每周至多下 12 盘棋. 证明: 在集训期间存在连续的若干天, 使得该棋手在这些天内恰好下了 21 盘棋.

9. 已知 $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, 其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $n \geq 2$ 个互不相同的有限集合, 且满足: 对任意 $A_i, A_j \in \mathcal{S}$, 均有 $A_i \cup A_j \in \mathcal{S}$. 证明: 若 $k = \min\limits_{1 \leq i \leq n} |A_i| \geq 2$, 则存在 $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 使得

$$\Big|\big\{i \in \{1, 2, \cdots, n\} \mid x \in A_i\big\}\Big| \geq \frac{n}{k}.$$

10. 设正整数 $n \geq 4$. 求闭区间 $[0, n]$ 的所有 n 元子集 S, 使得 $\{0, n\} \subseteq S$ 且 $|S+S| = 2n$.

11. 对每个正整数 n, 银行都发行面值为 $\dfrac{1}{n}$ 的硬币. 现有总额不超过 $99 + \dfrac{1}{2}$ 的有限多枚硬币 (面值不必两两不同). 证明: 可以把它们分成至多 100 组, 使得每组中各硬币面值之和都不超过 1.

12. 现有 $2n$ 个不同的小球被放在一个正 $2n$ 边形的各顶点上. 一次操作是指选取正 $2n$ 边形的一条边, 并交换这条边两个端点处的小球. 已知经有限次操作后每对小球恰好相互交换过一次.

证明: 正 $2n$ 边形的某条边从未在任何一次操作中被选取过.