Ramsey 理论 2

1 Erdős–Szekeres 凸多边形问题

定义. (凸集与凸包) 对任意正整数 d 以及 $\mathbb{R}^d$ 中的任意有限个点 $p_1, p_2, \ldots, p_d$ (不区分点和向量), 称点 p 为它们的凸组合, 是指存在和为 1 的非负实数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$, 满足

$$p = c_1 p_1 + c_2 p_2 + \cdots + c_n p_n.$$

称 $\mathbb{R}^d$ 中的点集 C 为凸集, 是指其中任意有限多个点所成任意凸组合都落入 C, 这等价于其中任意两点形成的线段都被 C 包含. 点集 P 的凸包 $\mathrm{conv}(P)$ 是指 $\mathbb{R}^d$ 中包含 P 的最小凸集, 这等价于所有包含 P 的凸集之交, 也等价于 P 的全体有限子集之所有可能凸组合构成的集合.

定义. 对任意正整数 $n \geq 2$, 定义 $\mathrm{ES}(n)$ 为具有以下性质的最小的正整数 N:

- 在平面上任取 N 个点 (要求任意三点不共线) 中均存在 n 个点构成凸 n 边形.

称上述 $\mathrm{ES}(n)$ 为凸 n 边形的 *Ramsey* 数. 不难验证 $\mathrm{ES}(2) = 2$, $\mathrm{ES}(3) = 3$, $\mathrm{ES}(4) = 5$.

定理. (Carathéodory) 对 $\mathbb{R}^d$ 中的点集, 其凸包中的点总是其中至多 $d+1$ 个点的凸组合.

1. 在 $d = 2$ 的前提下证明 Carathéodory 定理.

2. 证明 $\mathrm{ES}(n) \leq R^{(4)}(5, n)$, 从而 $\mathrm{ES}(n) < \infty$.

2 Erdős–Szekeres 凸多边形猜想

定义. (杯和帽) 在这里我们总是讨论任意三点不共线任意两点横坐标不相同的平面点集. 对平面上满足 $x_1 < x_2 < \cdots < x_t$ 的点集 $P = \big\{p_1(x_1, y_1),\ p_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ p_t(x_t, y_t)\big\}$,

- 称 P 为 t-杯, 是指 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} < \cdots < \frac{y_t - y_{t-1}}{x_t - x_{t-1}}$;
- 称 P 为 t-帽, 是指 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} < \cdots < \frac{y_t - y_{t-1}}{x_t - x_{t-1}}$.

对正整数 k, ℓ, 定义杯帽 *Ramsey* 数 $\mathrm{CC}(k, \ell)$ 为具有以下性质的最小正整数 N:

- 平面上的任意 N 元点集中均存在 k-杯或者 ℓ-帽.

定理. (Erdős–Szekeres) 对任意正整数 k, ℓ, 均有 $\mathrm{CC}(k,\ell) = \binom{k+\ell-4}{k-2} + 1$.

猜想. (Erdős–Szekeres) 对任意正整数 n, 均有 $\mathrm{ES}(n) = 2^{n-2} + 1$.

3. 用数学归纳法证明杯帽 Ramsey 数的上界 $\mathrm{CC}(k,\ell) \le \binom{k+\ell-4}{k-2} + 1$.

4. 归纳构造点集证明杯帽 Ramsey 数的下界 $\mathrm{CC}(k,\ell) \ge \binom{k+\ell-4}{k-2} + 1$.

5. 用杯帽的 Ramsey 数证明凸 n 边形的 Ramsey 数 $\mathrm{ES}(n) = o(4^n)$.

3 Erdős 凸多边形洞

在这个部分讨论的平面点集均要求任意三点不共线.

定义. (洞) 对平面上的点集 P, 称其凸 k 边形子集 Q 为 k-洞, 是指 $\mathrm{conv}(Q) \cap P = Q$.

问题. (Erdős) 充分大的平面有限点是否一定有 k-洞? 当 $k = 3$ 时答案显然是肯定的.

定义. 对平面上的有限点集 A, B, 称 A 远高于 B (亦称 B 远低于 A), 是指:

- 不存在一条经过 $A \cup B$ 中两点的竖直线 (即垂直于 x 轴);
- 任何一条经过 A 中两点的直线都位于 B 中每一点的上方;
- 任何一条经过 B 中两点的直线都位于 A 中每一点的下方.

定义. 对平面上满足 $x_1 < x_2 < \cdots < x_t$ 的点集 $P = \big\{p_1(x_1,y_1),\, p_2(x_2,y_2),\, \ldots,\, p_t(x_t,y_t)\big\}$, 记 $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{p_1, p_3, \ldots\}$, $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{p_2, p_4, \ldots\}$. 递归定义 *Horton* 点集:

- 若 $t = 1$, 则 P 一定是 *Horton* 点集.
- 若 $t > 1$, 则 P 为 *Horton* 点集是指
  - 其两个子集 P_1, P_2 都是 Horton 点集, 且 P_1 远高于或远低于 P_2.

定理. (Horton) 任何 Horton 点集都没有 7-洞.

6. 证明 Horton 点集总是不含空 4-杯和空 4-帽. 这蕴含了 Horton 定理.

注: 这里的空 4-杯 (4-帽) 是指上方 (下方) 与原点集无交的 4-杯 (4-帽).

7. 从高维立方体出发构造任意大的 Horton 点集. 这解答了 Erdős 问题.

4 思考题

1. [😉] 验证凸集与凸包中的若干条等价定义.

2. [😠] 从线性方程组的角度入手证明 Carathéodory 定理.

3. [😠] 设 C 为平面格点集 $[n]\times[n]$ 的凸子集 (要求任意三点不共线). 证明: $|C| \le O\big(n^{\frac{2}{3}}\big)$.

4. [😉] 对任意正整数 $n \ge 2$, 定义 $\mathrm{ES}_3(n)$ 为具有以下性质的最小的正整数 N:

- 在空间中任取 N 个点 (要求任意四点不共面) 中均存在 n 个点构成凸多面体.

称上述 $\mathrm{ES}_3(n)$ 为*凸多面体的 Ramsey 数*. 证明: $\mathrm{ES}_3(n) \le \mathrm{ES}(n)$, 从而 $\mathrm{ES}_3(n) < \infty$.

5. (敬请期待)

6. [😡] 基于已知的结论 $\mathrm{CC}(k,\ell) > \binom{k+\ell-4}{k-2}$ 构造点集证明 $\mathrm{ES}(n) \ge 2^{n-2}+1$.

7. [😉] 构造一个 9 元平面点集 (要求任意三点不共线), 使它没有 5-洞.

8. [😠] 证明充分大的平面有限点集 (要求任意三点不共线) 一定有 5-洞.

9. [😉] 设 P 是 n 元平面 Horton 点集, 且 C 是 P 的凸子集. 证明: $|C| = O(\log n)$.

10. [😕] 平面点集 P 恰含 n 个红点和 n 个蓝点, 其中任意三点不共线. 形如 RRR 的 3-洞即 P 内由三个红点构成的 3-洞, 形如 R+B 的 3-洞即 P 内至少含一个红点和一个蓝点的 3-洞.

(1) 证明或证否: 形如 RRR 的 3-洞总有 $\Omega(n^2)$ 个.

(2) 证明或证否: 形如 R+B 的 3-洞总有 $\Omega(n^2)$ 个.