Ramsey 理论 1

0 引子

定理. (Dirichlet) 对任意实数 α 与正整数 N, 均存在整数 p, q, 使 $q \in [N]$ 且满足

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{Nq}.$$

注: 记号 $[n]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$.

定理. (Erdős–Szekeres) 给定 $m, n \in \mathbb{N}_+$. 设 P 是直角坐标平面上由若干个点组成的集合, 其中各点的横坐标互不相同且纵坐标互不相同. 若 $|P| > mn$, 则点集 P 中

- 或者存在至少 $m+1$ 个点落在某条单调递增曲线上,
- 或者存在至少 $n+1$ 个点落在某条单调递减曲线上.

1. 用抽屉原理证明组合数论的 Dirichlet 定理和组合几何的 Erdős–Szekeres 定理.

2. 用数学归纳法证明 Erdős–Szekeres 定理, 并说明其约束 "$|P| > mn$" 是最优的.

1 Ramsey 定理

定义. 设 k, ℓ 为正整数, *Ramsey* 数 $R(k, \ell)$ 是满足以下性质的最小正整数 N:

- 完全图 K_N 的所有边的任一红蓝二染色下均有一个红色团 K_k 或蓝色团 K_ℓ.

定理. (Ramsey) 对任意正整数 k, ℓ, 均有 $R(k, \ell) < \infty$.

例子. 任何 6 个人当中总有 3 个人互相认识或互相不认识. 进一步地, $R(3, 3) = 6$.

观察. 对任意正整数 k, ℓ, 均有 $R(k, \ell) = R(\ell, k)$ 以及 $R(1, k) = 1$, $R(2, k) = k$.

3. 证明: 对任意正整数 $k, \ell \ge 2$, 均有

$$R(k, \ell) \le R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1).$$

事实上, 这蕴含了 Ramsey 定理以及对角 *Ramsey* 数 $R(n) \stackrel{\text{def}}{=} R(n, n) \le \binom{2n-2}{n-1}$.

4. 叙述多颜色 Ramsey 数 $R(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ 的合理定义, 并证明 $R(n_1, n_2, \ldots, n_m) < \infty$.

2 Ramsey 数

定义. (量级记号) 设 $f, g\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}_{>0}$ 为两个正实数数列.

- 若存在 $M > 0$ 使得 $f(n) \le M \cdot g(n)$ 对任意正整数 n 成立, 则记 $f = O(g)$.
- 若存在 $m > 0$ 使得 $f(n) \ge m \cdot g(n)$ 对任意正整数 n 成立, 则记 $f = \Omega(g)$.
- 若 $f = O(g)$ 以及 $f = \Omega(g)$ 同时成立, 则记 $f = \Theta(g)$.
- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, 则记 $f = \omega(g)$.
- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, 则记 $f = o(g)$.
- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, 则记 $f \sim g$.

定理. 对角 Ramsey 数 $R(n)$ 大致介于 $\big(\sqrt{2}\big)^n$ 与 4^n 之间. 准确地说, 我们有

$$\Omega\Big(n \cdot \big(\sqrt{2}\big)^n\Big) \le R(n) \le O\Big(n^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^n\Big).$$

命题. (Stirling 公式) 对正整数的阶乘有以下估计:

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

命题. (Boole 不等式) 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是离散概率空间 $(\Omega, \mathbb{P})$ 上的一列事件, 则

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \le \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).$$

5. 用积分估计证明 $\mathrm{e} \cdot \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \le n! \le \frac{\mathrm{e}^2(n+1)}{4} \cdot \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

6. 用数学归纳法证明 Boole 不等式.

7. 分别用 Stirling 公式和 Boole 不等式证明对角 Ramsey 数的上界和下界.

3 超图 Ramsey 定理

定义. (幂集记号) 对有限集合 S, 记 2^S 为 S 的全体子集构成的集合, 并且记 $\binom{S}{k}$ 为 S 的全体 k 元子集构成的集合. 不难看出 $\binom{S}{k} = \big\{A \in 2^S \mid |A| = k\big\}$ 以及 $|2^S| = 2^{|S|}$, $\left|\binom{S}{k}\right| = \binom{|S|}{k}$.

定义. 一个超图 $\mathcal{H}$ 即一对满足 $E \subseteq 2^V$ 的集合 (V, E). 一个 k-一致超图 $\mathcal{H} = (V, E)$ 是指一个满足 $|e| = k$ 对任意 $e \in E$ 均成立的超图. 超图本身和熟悉的集合族概念并无区别.

定义. 设 $m,n,k\in\mathbb{N}_+$. 超图 *Ramsey* 数 $R^{(k)}(m,n)$ 是满足以下性质的最小正整数 N:

- 完全 k-一致超图 $K_N^{(k)}$ 的所有边的任一红蓝二染色下均有一个红色 m-一致超团 $K_m^{(k)}$ 或蓝色 k-一致超团 $K_n^{(k)}$. 这里的完全超图记号 $K_t^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \left([t],\binom{[t]}{k}\right)$.

定理. (超图 Ramsey) 对任意正整数 k,m,n, 均有 $R^{(k)}(m,n)<\infty$.

8. 证明: 对任意满足 $\min\{m,n\}\geq k$ 的正整数 m,n,k, 均有

$$R^{(k)}(m,n)\leq R^{(k-1)}\big(R^{(k)}(m-1,n),R^{(k)}(m,n-1)\big)+1.$$

这蕴含了超图 Ramsey 定理.

4 思考题

1. [😉] 某国家共有 1000 座城市 $c_0,c_1,\cdots,c_{999}$, 满足:

   - 对任何 $i<j$, 从城市 c_i 到 c_j 有且仅有一条单向航线.

   已知任一条上述航线恰归属于 X,Y,Z 三家航空公司中的一家. 求最大的正整数 n, 使得无论航线的归属关系如何, 一名旅客总能找到一列非负整数 $i_0<i_1<\cdots<i_n$, 使他能从城市 c_{i_0} 出发, 依次飞往 $c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_n}$, 并且所乘的航班都归属于同一家航空公司.

2. [🙁] 记 $[n]$ 中最大 Sidon 子集所含的元素个数为 $s(n)$. 这里称 S 为 *Sidon* 集, 是指:

   - 对任意互不相同的正整数 $a,b,c,d\in S$, 均有 $a+b\neq c+d$.

   证明: $s(n)=\Theta\big(\sqrt{n}\big)$. 提示: 考虑形如 $kp+(k^2 \bmod p)$ 的构造, 其中 p 是素数.

3. [😠] 给定正整数 $k>r$. 考虑齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

   其中诸 $a_{i,j}\in\mathbb{Z}$ 且 $|a_{i,j}|\leq N$. 证明: 存在与 N 无关的常数 C, 使方程组总有一组解

$$(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{Z}^k\setminus\{(0,0,\ldots,0)\},$$

   满足 $|x_t|\leq C\cdot N^{\frac{r}{k-r}}$ 对 $t=1,\ldots,k$ 均成立.

4. [😡] 设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是等边 $\triangle ABC$ 内部的 n 个点, 且满足 $A, B, C, P_1, \dots, P_n$ 当中任何三点不共线. 考虑将 $\triangle ABC$ 基于 $P_1, \dots, P_n$ 剖分为 $2n+1$ 个小三角形的方案 Δ:

   - 对任一剖分 Δ, 用 $N(\Delta)$ 表示至少有一个顶点是 A, B, C 之一的小三角形个数.

   定义 $T(n)$ 为当 Δ 变动时 $N(\Delta)$ 的最大可能值. 证明: $T(n) = n + \Theta\big(\sqrt{n}\big)$.

5. [😉] 给定正整数 r, b. 记 $R(K_r, P_\ell)$ 是满足以下性质的最小正整数 N:

   - 完全图 K_N 的所有边的任一红蓝二染色下均有一个红色团 K_r 或蓝色路 P_ℓ.

   (1) 用 Ramsey 定理证明 $R(K_r, P_b) < \infty$.

   (2) 求 $R(K_r, P_b)$ 的值.

6. [😠] 求 $R(3,4)$ 与 $R(4,4)$ 的值. 提示: 在 $R(4,4)$ 的下界构造中考虑平方剩余.

7. [😕] 设函数 $f_1, f_2, \dots, f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 均有界. 已知函数 $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足: 存在 $\varepsilon, \delta > 0$, 使得

   - 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 若 $|f(x) - f(y)| > \delta$, 则 $\max\limits_{i \in [k]} |g_i(x) - g_i(y)| > \varepsilon$.

   证明: 函数 g 也有界.

8. [😄] 某人接连抛掷一枚均匀骰子共 $6n$ 次, 其中 n 是正整数.

   (1) 请建立适当的概率空间 $(\Omega, \mathbb{P})$ 描述这一随机试验.

   (2) 请描述事件 $A_n =$ “六种点数分别出现 n 次”.

   (3) 求一组正实数 α, β, 使得 $\mathbb{P}(A_n) \sim \alpha n^\beta$.

9. [😕] 证明: $R(5,k) = \Omega\big(\frac{k}{\log k}\big)^2$. 提示: 使用不等式 $1 - p \le \mathrm{e}^{-p}$.

10. [😡] 将每个正整数染为 c_1, c_2, c_3, c_4 四种不同颜色之一, 记 $C_i = \{a \in \mathbb{N}_+ \mid a \text{ 的颜色是 } c_i\}$, 其中 $i \in [4]$. 对任意正整数 a, 定义 $D(a) \overset{\text{def}}{=} \{a \text{ 的全体正约数}\}$.

    (1) 证明: 存在正整数 n 以及 $i, j \in [4]$, 使得 $|D(n) \cap C_i| \ge |D(n) \cap C_j| + 3$.

    (2) 证明: 对任意正整数 A, 均存在正整数 n 以及 $i, j \in [4]$, 使得

    $$|D(n) \cap C_i| \ge |D(n) \cap C_j| + A.$$

    (3) 如果只有三种颜色, 那么以上结论是否仍然成立?