北京十一学校[†]数学竞赛　组合问题选讲 1　探索方法 (问题)

探索方法是组合数学, 乃至数学竞赛中的各个分支, 抑或是数学研究中最基本, 最重要的方法. 最常见的探索即是考虑一般问题中参数较小的情形或特殊情形, 投石问路, 从而获得解题的启发. 在实际的数学竞赛问题中, 探索的形式也可能是多种多样的, 这里我们做个简单的梳理:

- 探索初始情形

  这是最基本最原始的探索. 此类方法是将一般 n 的命题中取 $n=1,2,3$ 等等最小的数字挖掘规律, 或者在看到年份, 日期一类的不重要的数值时自动它们改成 $1,2,3$ 等等最小的数字探索问题的结构特征. 探索初始情形不仅在组合的解题中极为常用, 在形形色色的不等式, 数列, 以及数列型数论问题中也有广泛的应用. 本讲中的问题 1, 4, 8 都是这类方法的典型应用.

- 探索次生情形

  有些组合问题中涉及的结构规律会稍显复杂, 这可能会导致: 当我们仅对 $n=1,2,3$ 等等初始情形进行探索时无法窥探到问题的本质. 造成问题的原因是有价值的规律在初始情形下未必成立, 而在较小的次生情形下才会发生. 因此, 我们有时需要耐下心来, 在探索初始情形之后还要探索更多的次生情形以便找到结构规律. 本讲中的问题 2 是这类方法的典型应用.

- 探索特殊情形

  一些组合问题的情景设定不依赖于具体的数字, 那么此时我们就不得不去思考: 在此问题中什么是初始情形和次生情形? 换句话说, 这时我们需要根据问题本身的结构特征摸索适当的特殊情形, 把它们看作所谓的初始情形和次生情形并进行探索, 从而找到解决问题的突破口. 这对 “具体问题具体分析” 提出了较高要求. 本讲中的问题 10 较好地体现了这种思想方法.

- 探索极端情形

  在一些组合问题中, 我们如果不能从初始情形和次生情形获得启示, 那么考虑极端情形或许会有帮助. 例如, 在思考部分组合几何问题以及某些特定的平面几何问题中, 我们可能会将动点一类的元素置于极端位置 (即线段的端点, 无穷远点等等), 来试图启发我们进一步地思考以及摸索题目特征. 本讲中的问题 6 较好地体现了这种思想方法.

1. 证明: 可以在 $m \times n$ 的矩形方格表中填入 mn 个互不相同的完全平方数, 使得表中每一行, 每一列所填各数之和均为完全平方数.

2. 求所有 100 元非负整数数组 $(x_0, x_1, \cdots, x_{99})$, 使得 x_i 恰是 i 在数组中出现的次数.

3. 设 n 为正整数. 求最大的正整数 m, 使得可以从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中选出 m 个互不相交的二元子集, 满足: 每个集合所含两数之和互不相同, 且均不超过 n.

4. 求所有正整数 n, 满足: 正 n 边形存在一个三角剖分使其中每个小三角形均为等腰三角形.

5. 给定一个 $n \times n$ 的方格表, 每个格子填入一个整数. 一次操作是指: 选择一个方格, 并将与其同行或同列的 $2n-1$ 个数同时加 1. 求最大的正整数 N, 使得无论开始时方格表中的数如何填写, 均可以通过有限次操作使得方格表内有 N 个偶数.

6. 证明: 长度为 $4r$ 的闭曲线总可以被半径为 r 的圆盘 (含边界圆周) 覆盖.

7. 证明: 可以将 $X=\{1^2,2^2,\cdots,10000^2\}$ 划分为两个 5000 元子集, 使它们的元素之和相等.

8. 甲乙二人进行如下游戏: 在桌子上放着一堆石子, 二人轮流执步, 甲先行. 执步者每步必须将每堆颗数多于 1 的石子同时分成两个较小的堆, 在某次执步后使得每堆石子都仅有 1 颗者获胜. 若一开始有 100 颗石子, 问谁有必胜策略.

9. 平面直角坐标系中的所有整点均被染为红蓝二色之一.

证明: 存在一个中心对称的无限整点集合, 其中所有点的颜色都相同.

10. 某人用三种颜色的丝线将若干个多边形缝合得到一个多面体 P, 满足: P 的各顶点处均有三条颜色互不相同的棱. 证明: 可以在 P 的每个顶点处放置一个不等于 1 的复数, 使得每个面上 (该面的各顶点处) 所放复数的乘积为 1.

11. 证明: 存在无穷多个正整数 n, 满足: 可以将集合 $\{1,2,\cdots,3n\}$ 划分为 n 个三元子集, 使其中每个子集所含较小的两个数之和等于最大数.

12. 在平面上有 $n\geq 2$ 条线段, 其中任意两条线段内部相交, 且没有三条线段交于同一点.

Geoff 对每条线段选取一个端点并在该处放置一只青蛙, 青蛙面向另一个端点. 接下来 Geoff 会拍 $n-1$ 次手. 每当他拍一次手时, 每只青蛙都立即向前跳到它所在线段上的下一个交点处. 已知每只青蛙自始至终不改变跳跃的方向. Geoff 的愿望是能够适当地放置青蛙, 使得在任何时刻永远不会有两只青蛙发生碰撞 (即落在同一个交点上).

(1) 证明: 若 n 是奇数, 则 Geoff 总是能实现他的愿望.

(2) 证明: 若 n 是偶数, 则 Geoff 总不能实现他的愿望.