北京十一学校[†]数学竞赛　代数问题选讲 03　不等式 I (问题)

在数学竞赛的不等式问题中, 我们经常遇到各式各样的分式根式. 事实上, 变量任何异于 1 的指数都会使问题变得棘手. 在此类问题中, 对指数进行转换的武器至关重要. 柯西 (Cauchy) 不等式可以改变求和与乘积的运算顺序, 这一点尤其重要. 本讲中的问题 1, 4, 9, 11 都是其典型例题.

柯西 (Cauchy) 不等式通过拉格朗日 (Lagrange) 恒等式的直接证明和借助二次函数判别式的间接证明也时常发挥作用. 接下来, 我们对求和与乘积相互转换的其它工具作一概述:

- 赫尔德 (Hölder) 不等式

  定理 1. 设 $a_{i,j}\,(1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n)$ 为 mn 个非负实数, 则

  $$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{m}\right) \ge \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}\right)\right)^{m},$$

  且等号成立的充要条件是数组 $(a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,n})\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 两两对应成比例.

  这是数学竞赛中的赫尔德 (Hölder) 不等式, 也是柯西 (Cauchy) 不等式在数组个数上的推广. 代入 $m = 2$ 我们就会得到柯西 (Cauchy) 不等式. *定理 1* 能帮我们放缩根式与分式, 这一类应用柯西 (Cauchy) 不等式相近. 本讲中的问题 2, 5, 8 都能体现*定理 1* 的价值.

- 切比雪夫 (Chebyshev) 不等式

  定理 2. 已知实数 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$, 则

  $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

  且等号成立的充要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

  这是数学竞赛中的切比雪夫 (Chebyshev) 不等式, 也是排序不等式的推论. 如果题目条件中各个变量带有明显的序关系, 那么*定理 2* 很有可能是不等式证明的实用工具. 值得一提的是, 在具体问题中当我们对形如 $\sum f(a_i) \cdot \sum g(a_i)$ 的表达式作估计时, 可以考虑对 a_i 排序并应用切比雪夫 (Chebyshev) 不等式.

  注: 在高等数学中, 切比雪夫 (Chebyshev) 不等式一般指概率论中刻画方差的不等式.

- 范数不等式

定理 3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数. 若 $r, s > 0$ 使得 $r < s$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

且等号成立的充要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至多有一个正数.

这是范数不等式, 常用于边界取等条件下的指数转化. 它在问题 2, 6 中派上用场.

- 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式

定理 4. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为 $2n$ 个非负实数. 若 $p > 1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

且等号成立的充要条件是数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 对应成比例.

这是闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式, 也是绝对值不等式的推广. 它对问题 5 有帮助.

- 再谈赫尔德 (Hölder) 不等式

定理 5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为 $2n$ 个非负实数. 若 $p, q > 1$ 使得 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

这是高等数学中的赫尔德 (Hölder) 不等式, 也是柯西 (Cauchy) 不等式在求和幂次上的推广. 代入 $p = q = 2$ 我们就会得到柯西 (Cauchy) 不等式. 事实上, 定理 5 的积分形式将会被广泛应用于实变函数的研究. 在数学竞赛中很少用到定理 5, 这段讨论仅用于补全知识体系.

定理 6. 设 $x_{i,j}, \lambda_i \, (1 \leq i \leq m, \, 1 \leq j \leq n)$ 分别为 mn 个非负实数与 n 个和为 1 的正实数, 则

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\right)^{\lambda_i} \geq \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{i,j}^{\lambda_i}\right).$$

这是一般形式的赫尔德 (Hölder) 不等式, 定理 1 和定理 5 都是它的特例:

- 代入 $x_{i,j} = a_{i,j}^m$, $\lambda_i = \dfrac{1}{m}$ 我们就会得到定理 1.
- 代入 $m = 2$, $x_{i,1} = a_i^p$, $x_{i,2} = b_i^q$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{p}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{q}$ 我们就会得到定理 5.

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数. 证明: 若 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S - a_i} \geq \frac{n}{n-1}.$$

2. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为 $3n$ 个正实数, 且满足:

- 对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$, 均有 $a_i b_i > c_i^2$.

证明:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i b_i - c_i^2}\right)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2\right) \geq n^3.$$

3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个和为 1 的正实数. 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - a_i}\right)\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j\right) \leq \frac{n}{2}.$$

4. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正实数, 且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - a_i^2} \geq (n-1) + 2\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1\right) \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

5. 给定正整数 n 和非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$. 证明: 若

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (a_i + 2)^n \geq \prod_{i=1}^{2n} a_i,$$

则

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (a_i + 1)^n \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n \prod_{i=1}^{2n} a_i.$$

6. 给定正整数 $m, n > 1$ 和正实数 $r < s$. 设 $a_{i,j}\,(1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n)$ 为 mn 个不全为 0 的非负实数. 求下式的最大可能值:

$$S = \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{i,j}^{s}\right)^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^{r}\right)^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{1}{s}}}$$

7. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为 $2n\,(n\geq 2)$ 个实数, 且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=1$. 证明:

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq 2.$$

8. 设 $a_{i,j}\,(1\leq i,j\leq 2022)$ 为 2022^2 个绝对值不超过 2022 的整数. 证明:

$$\prod_{i=1}^{2022}\left(\sum_{j=1}^{2022}a_{i,j}^2\right)\geq\left(\sum_{j=1}^{2022}\left(\prod_{i=1}^{2022}a_{i,j}\right)\right)^2,$$

并确定使等号成立的矩阵 $(a_{i,j})_{2022\times 2022}$ 的个数.

9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个和为 1 的正实数. 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}^2+a_{i+1}}\right)\geq\frac{n}{n+1}.$$

这里约定 $a_{n+1}=a_1$.

10. 给定正整数 n. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正实数, 且满足:

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n,\qquad a_1\geq\frac{a_2}{2}\geq\cdots\geq\frac{a_n}{n}.$$

分别记 A_n 和 G_n 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均值和几何平均值. 求 $\dfrac{A_n}{G_n}$ 的最大可能值.

11. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正实数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{i}a_j\right)^2}{i^2}<4\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

12. 给定正整数 m,n. 设 $a_{i,j}\,(1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n)$ 为 mn 个不全为 0 的非负实数. 记

$$S=\frac{n\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i,j}\right)^2+m\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i,j}\right)^2+mn\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i,j}^2}.$$

(1) 求 S 的最大可能值.

(2) 求 S 的最小可能值.