北京十一学校[†]数学竞赛　组合问题选讲 3　递归方法 (问题)

只要我们试图证明一个关于正整数参数 n 的命题 $P(n)$, 尝试数学归纳法就是一条自然的道路. 一般来说, 如果我们在探索和分析中感觉到 $P(n)$ 内部蕴藏着较为复杂的规律, 那么递归很可能是一个突破口, 这是因为归纳过渡可以帮我们把目光聚焦于 $n \to n+1$ 局部的变化规律从而不受整体结构迷惑. 递归方法在组合问题, 数论问题, 以及各种数列与不等式问题中都有广泛的应用.

- 直接归纳

  顾名思义, 本方法就是将要证明的结论直接作为归纳命题而后入手分析递归步骤. 在本讲中, 问题 1, 9, 12 都可以用直接归纳的想法解决. 值得一提的是, 该思路常因直截了当而被忽视. 最经典的例子莫过于本讲的问题 12, 它是国际数学奥林匹克 (IMO) 历史上著名的难题. 当年几乎所有考生仅仅经过简单尝试就放弃了直接归纳的思路, 这导致他们无法解决这道题.

- 跳跃归纳

  在一些问题中, 参数得奇偶性可能对我们关注的结构产生重要影响. 在这类问题中如果我们尝试 $n \to n+1$ 的归纳过渡很可能遇到本质的困难. 一旦我们想清楚问题的结构特征, 就可能通过微小的变通解决问题: 将 $n \to n+1$ 的归纳过渡改成 $n \to n+2$ 的归纳过渡. 这个递归技巧说出来不值一提, 却经常被忽视. 本讲中的问题 3, 5, 7 都涉及跳跃归纳法的应用.

- 加强归纳

  回忆 $1^{-2}+2^{-2}+\cdots+n^{-2}<2$ 这一经典的数列不等式. 如果我们尝试归纳法, 容易看出直接归纳的方式不奏效. 但是, 我们可以通过归纳证明 $1^{-2}+2^{-2}+\cdots+n^{-2}\le 2-n^{-1}$ 解决问题. 在许多有难度的组合问题中, 这类通过**巧搭台阶**加强命题来实现归纳的例子不胜枚举. 例如, 我们需要将命题一般化才能解决问题 4; 我们需要提炼合适的加强命题才能解决问题 11.

- 归纳对象

  在很多问题中, 我们不能轻而易举地从归纳假设出发实现归纳过渡. 在此时**妄自菲薄**轻率地放弃递归思路常常是不理性的, 我们应进一步尝试能否将目光聚焦于某一对象完成归纳过渡. 例如, 视问题结构引入极端元素是常见的非平凡归纳对象 (请回忆极值图论中 Mantel 定理的归纳证明方法). 讲义中的问题 2, 9, 10 都可以体现**精挑细选**归纳对象对递归方法的价值.

1. 在 $2n-1$ 颗星球上各有一个观测站, 每个观测站观测与它最近的另一颗星球.

证明: 如果这些星球之间的距离互不相等, 则至少有一颗星球未被 (任何观测站) 观测.

2. 已知 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的互异非空子集族 $\mathcal{F}$ 满足:

- 对任意 $A,B\in\mathcal{F}$, 均有 $A\cap B=\varnothing$ 或 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$.

求 $|\mathcal{F}|$ 的最大可能值.

3. 在 999 名科学家当中, 任何两人之间进行过若干次 (至少零次) 通话. 若这些科学家中任何三人之间的通话总次数均不小于 2, 求 999 名科学家之间通话总次数的最小可能值.

4. 在 10×10 方格表中, 每个小方格内均有一个正整数, 这 100 个正整数互不相同.

- 先将每行中最大的 3 个数染为红色,
- 再将每列中最大的 3 个数染为蓝色.

证明: 当染色结束时, 方格表中至少有 9 个紫色 (既是红色又是蓝色) 的数.

5. 已知 M 是平面上有限多个整点构成的集合. 证明: 可以将 M 中的每个点染为红色或蓝色, 使得在每一条与坐标轴平行的直线上红色点与蓝色点个数之差 (大减小) 均不超过 1.

6. 设 $n=2^m-1$, 且 $P_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 为数轴上 n 个整点构成的集合. 一只蚱蜢在 P_n 内的各点跳跃, 它每步从一点 $k\in P_n$ 跳到与之相邻的另一点 $k\pm 1\in P_n$. 求最大的正整数 m, 满足:

- 对任意 $x,y\in P_n$, 从 x 出发经 2012 步跳到 y (允许重复经过 x,y) 的方式个数为偶数.

7. 已知正整数 $n > 5$. 证明: 可以将任何正方形切分为 n 个 (大小未必相同的) 正方形.

8. 求满足以下性质最小正整数 k:

- 对 $S = \{1, 2, \cdots, 2012\}$ 的任一 k 元子集 A, 均存在 $\{a, b, c\} \subseteq S$ 使 $\{a+b, b+c, c+a\} \subseteq A$.

9. 给定正整数 $n \geq 2$. 一张矩形桌子上有若干张各边均与桌边平行且大小相同的正方形纸片. 每张纸片被染为 n 种颜色之一, 且任意 n 张颜色互不相同的纸片中总有两张可以被一枚钉子固定.

证明: 可以用 $2n-2$ 枚钉子将某一种颜色的所有纸片全部固定在桌面上.

10. 给定凸 20 边形 $\mathcal{P}$. 用 $\mathcal{P}$ 的 17 条内部互不相交的对角线将 $\mathcal{P}$ 分割成 18 个三角形, 所得图形称为 $\mathcal{P}$ 的一个*三角剖分图*. 对 $\mathcal{P}$ 的任何三角剖分图 $\mathcal{T}$, 将 $\mathcal{P}$ 原有的 20 条边和新添加的 17 条对角线统称为 $\mathcal{P}$ 的边; 称由 $\mathcal{T}$ 的 10 条两两无公共端点的边构成的集合为 $\mathcal{T}$ 的一个*完美匹配*.

当 $\mathcal{T}$ 取遍 $\mathcal{P}$ 的所有三角剖分图时, 求 $\mathcal{T}$ 所含完美匹配个数的最大可能值.

11. 已知正整数 $n, k\,(k \leq 2n-1)$. 一届 k 轮的乒乓球锦标赛共有 $2n$ 名选手参加. 在每一轮中, 所有选手被分成 n 对, 每对选手进行一场比赛, 且任意两名选手在不同轮次中可以进行多场比赛.

求最大的正整数 $m = m(n, k)$, 使得无论赛程如何, 赛后总有 m 名选手两两未进行过比赛.

12. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个互不相同的正整数. 已知正整数集合 M 满足: $|M| = n-1$, 且

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \notin M.$$

一只蚱蜢沿着数轴从原点开始向右跳跃 n 步, 它的各步跳跃距离构成 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列.

证明: 存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的排列 (作为跳跃距离) 使该蚱蜢各步的落脚点都不属于 M.