北京十一学校[†]数学竞赛　组合问题选讲 4　整体局部 (问题)

辩证唯物主义认为: 正确处理整体与局部的关系对科学地认识世界并改造世界具有重要意义.

- 整体即是事物的各内在要素相互联系构成的有机统一体及发展的全过程.
- 局部即是组成有机统一体的各个方面, 要素, 以及发展全过程的某一阶段.

在数学的世界里, 整体和局部也是辩证统一的.

面对数学竞赛中的组合问题, 整体分析与局部分析常常在我们的证明中扮演重要角色:

- 整体分析就是从全局考虑问题, 通过整体结构提取有价值的信息. 例如, 我们曾用整体求和的方式证明了图论领域最基本的握手定理. 在形形色色的组合数论问题中, 整合方法 (求和, 求乘积) 的身影随处可见. 在本讲中, 整体分析对问题 1, 7, 9, 11 的解决大有裨益.
- 局部分析就是从问题的一个点切入寻找信息. 例如, 解决代数问题的调整法和局部不等式的构造都能体现局部分析的思想. 在各种组合操作问题中, 我们都不可避免地局部分析每一步操作对问题造成的影响. 在本讲中, 局部分析为我们打开问题 2, 4, 5, 10 的思路.

最后, 我们特别强调几种经典的整体局部分析方法:

- 赋值法

  我们曾用染色法解决各种棋盘上的组合问题. 事实上, 如果我们对染色法推而广之就会得到赋值法. 这种方法追求从整体上分类对象并揭露内部联系, 它将于问题 1, 7 发挥作用.

- 不变量

  组合操作问题总是或多或少地依赖不变量的发掘. 操作来自生活, 我们要解决这背后的问题就要对操作适当建模并提取有价值的数学量. 不变量对本讲的问题 4, 8 而言至关重要.

- 映射法

  映射方法旨在抽象刻画问题的整体结构, 它十分灵活, 难度较大. 值得一提的是, 这类方法在加性组合问题中的应用尤其广泛. 本讲从设计上以问题 9 为引, 使人一瞥映射的奥妙.

1. 圆周上有 1000 个点, 将每个点染为红色与蓝色之一. 这些点将圆周分割为 1000 段短弧.

- 在两个端点均为红色的弧上标记 2;
- 在两个端点均为蓝色的弧上标记 $\frac{1}{2}$;
- 在两个端点颜色不同的弧上标记 1.

证明: 所标 1000 个数的总乘积与红色点与蓝色点的个数有关, 与红色蓝色点的相对顺序无关.

2. 给定正整数 $k \geq 2$. 考虑以下两种简单图:

- k-星是指共用同一个顶点的 k 条边构成的简单图;
- k-匹配即两两无公共顶点的 k 条边构成的简单图.

证明: 若简单图 G 有至少 $2(k-1)^2$ 条边, 则 G 有一个 k-星子图或一个 k-匹配子图.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $P_1, P_2, \cdots, P_{2n}$ 为单位圆上异于 $Q(1,0)$ 的 $2n$ 个不同定点, 且这 $2n$ 个点中恰有 n 个红点以及 n 个蓝点. 对 n 个红点的任一排列 $R_1, R_2, \cdots, R_n$, 定义 B_i 为从 R_i 出发沿逆时针方向第一个遇到的蓝点 $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

证明: 无论怎样选取排列 $R_1, R_2, \cdots, R_n$, 形如 $\widehat{R_iQB_i}$ 的逆时针圆弧个数均为定值.

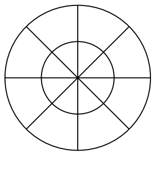
4. 在 $n \times n$ 的方格表中, 有公共边的两个小方格称为相邻的. 一开始, 每个小方格内写有 $+1$. 一次操作是指: 任取一个小方格并改变它所有相邻的小方格内数的符号 (不改变该方格内的数).

求所有正整数 $n\,(n \geq 2)$, 使得可以通过有限次操作将所有方格表中的所有数都变成 -1.

5. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}\,(A_{2^n+1} = A_1)$ 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 全体子集的排列. 求下式的最大可能值:

$$S = \sum_{i=1}^{2^n} |A_i \cap A_{i+1}| \cdot |A_i \cup A_{i+1}|.$$

6. 圆形水池被一个同心小圆和 n 条射线分割为 $2n\,(n \geq 5)$ 个格子 (下图示意 $n = 8$ 的情形). 称与一个格子有公共边或公共弧的其它格子为它的邻格, 从而每个格子恰有 3 个邻格.



水池中的格子内共有 $4n+1$ 只青蛙. 青蛙难于安静共处, 只要某个格子内有不少于 3 只青蛙, 迟早就一定会有其中 3 只同时分别跳往该格子的三个不同邻格. 证明: 经过一段时间之后, 青蛙们在水池中将会大致均匀分布, 即任取其中一个格子, 或者其中有青蛙, 或者其三个邻格内都有青蛙.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中任取 999 个整点并将它们染为红色.

证明: 可以找到 250 个红色整点, 使其中任意两点间的距离均大于 $\sqrt{2}$.

8. 对 3×3 的数表, 一次操作是指将一行或一列中的 3 个数同时加上 1 或者同时减去 1. 记

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&6\end{pmatrix}.$$

请对 A,B,C 分别回答问题: 能否经过有限次操作使其中所有数都变成 0? 证明你的结论.

9. 设 A 为正整数集的有限子集. 请通过构造映射的方式证明:

$$|A+A|^2\geq |A|\cdot|A-A|.$$

10. 一只松鼠有编号为 $1,2,\cdots,2021$ 的 2021 枚核桃, 这些核桃被任意地围绕圆周摆成一圈. 松鼠对这些核桃进行 2021 次操作: 在第 k 次操作中, 它交换与核桃 k 相邻的两枚核桃.

证明: 存在正整数 k, 使得在第 k 次操作中被松鼠交换的两枚核桃 a,b 满足 $a<k<b$.

11. 求所有正整数 n, 使得可以在一张 $n\times n$ 方格表的每个小方格中填入 I,M,O 之一, 满足:

- 在方格表的每一行以及每一列中, 填有 I,M,O 的小方格个数均相等;
- 在各条小方格个数被 3 整除的对角线上, 填入的 I,M,O 个数也相等.

注: 一张 $n\times n$ 方格表的行与列顺次标记为 $1,2,\cdots,n$, 从而每个小方格对应一正整数对 (i,j). 当 $n>1$ 时, 这张方格表一共有 $4n-2$ 对角线. 这些对角线可以分成两类, 每类 $2n-1$ 条:

- 每条第一类对角线由 $i+j$ 是某个常数的所有小方格 (i,j) 组成;
- 每条第二类对角线由 $i-j$ 是某个常数的所有小方格 (i,j) 组成.

12. 给定正整数 n. 一场快棋赛共有 $2n+3$ 位棋手参加. 已知赛程满足:

- 任意两场比赛均无时间交集, 且每位棋手所参加的任意两场比赛之间都有至少 n 场比赛.

证明: 有一位棋手既参加了第一场比赛又参加了最后一场比赛.