北京十一学校[†]数学竞赛　代数问题选讲 2　基本方法 (问题)

本讲进一步讨论解决数学竞赛代数问题的基本方法. 基本方法是基本思想在实践中最直接的应用, 也是面对许多代数问题最基本最通用的武器. 因此, 融会贯通这些思想方法并在实际解题中熟练应用对每一位参加数学竞赛的同学而言都是至关重要的. 下面我们简要梳理这些方法:

- 均值方法

  均值不等式, 又被称为基本不等式, 可以说是不等式问题的基石. 均值不等式常常被用来

  - 转化求和式与乘积式,
  - 转化轮换式与对称式,
  - 灵活调整不等式次数.

  在本讲中, 问题 1, 4, 6, 7, 9 的解法都属于均值方法的典型应用.

- 主元方法

  不等式问题和极值问题总能互相转换, 而人们经常使用主元方法分析多元函数的极值. 如果一个多元函数是某个变量的**简单**函数 (例如一次函数, 二次函数, 对勾函数, 等等), 那么我们可以应用主元法消去该变量化简问题. 在本讲中, 问题 2, 8 都是主元方法的典型例题.

- 调整方法

  调整方法可以看作主元方法的延伸. 在具体问题中, 有时变量间的约束关系可能没办法完全理清, 因而我们无法直接应用主元方法考虑单变量函数. 此时可以退而求其次地分析在仅有少量 (往往是两个) 变量变动时函数的变化. 本讲中的问题 3, 11 都是调整方法的直接应用.

1. 设 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 为 $n-1\,(n \geq 3)$ 个正实数, 满足 $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. 证明:

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n.$$

2. 设 a, b, c 为 3 个实数, 满足 $a+b+c=1$, $abc>0$. 证明:

$$ab+bc+ca < \frac{\sqrt{abc}}{2} + \frac{1}{4}.$$

3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 为 10 个区间 $[-1,1]$ 上实数, 满足它们的和为 0. 求 $\sum\limits_{i=1}^{10} a_i^3$ 的最大值.

4. 已知单调不减的数列 $\{a_i\}$ 满足 $a_0=0$. 证明: 对任意正整数 p, 均有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})a_i^p \leq \frac{(n+1)^p}{p+1}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})^{p+1}.$$

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{40}$ 为 40 个和为 0 的实数, 满足: 对任意 $i=1,2,\cdots,40$, 均有 $|a_i-a_{i+1}| \leq 1$. 这里约定 $a_{40+k}=a_k$. 记 $a=a_{10}$, $b=a_{20}$, $c=a_{30}$, $d=a_{40}$.

(1) 求 $S=a+b+c+d$ 的最大值.

(2) 求 $T=ab+cd$ 的最大值.

6. 给定正整数 n. 求最大的正实数 $C=C(n)$, 使得对任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 均有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq C\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}.$$

7. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2016}$ 为 2016 个实数, 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2\,(i = 1, 2, \cdots, 2015)$. 求

$$S = (a_1 - a_2^2)(a_2 - a_3^2) \cdots (a_{2015} - a_{2016}^2)(a_{2016} - a_1^2)$$

的最大值.

8. 设 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ 为 8 个实数, 满足 $a_2, a_3 \in [a_1, a_4]$, 且 $b_2, b_3 \in [b_1, b_4]$. 记

$$A = \big(a_1(1-p)^2 + (a_2 + a_3)p(1-p) + a_4p^2\big)\big(b_1(1-p)^2 + (b_2 + b_3)p(1-p) + b_4p^2\big),$$
$$B = a_1b_1(1-p)^2 + (a_2b_2 + a_3b_3)p(1-p) + a_4b_4p^2.$$

证明: 若 $0 \le p \le 1$, 则 $A \le B$.

9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正实数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{i-1}{i}} < \left(1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

10. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$ 为 2019 个整数, 满足 $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{2019} = 99$. 记

$$f = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2019}^2) - (a_1a_3 + a_2a_4 + a_3a_5 + \cdots + a_{2017}a_{2019}).$$

求 f 的最小值 f_0, 并确定使得 $f = f_0$ 成立的数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2019})$ 的个数.

11. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为 $2n\,(n \ge 2)$ 个非负实数. 证明:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \ge \prod_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)^{\frac{1}{n}}.$$

12. 给定正整数 $n, k\,(n > k)$ 与 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in (k-1, k)$. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数, 满足: 对任意集合 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$, 若 $|I| = k$, 则

$$\sum_{i \in I} x_i \le \sum_{i \in I} a_i,$$

求 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值.