北京十一学校[†]数学竞赛　代数问题选讲 1　基本思想 (问题)

本讲重点讨论解决数学竞赛代数问题的基本思想. 这些想法听起来虚无缥缈, 然而它们就像是为夜行人指引方向的灯火, 使我们面对新问题时不必像无头苍蝇般乱撞. 因此, 熟练掌握各种基本思想在数学竞赛的代数部分既是入门课也是必修课. 下面, 我们对这些基本想法作简要的介绍:

- 探索思想

  许多代数问题没有明确的结构特征或入手点. 为了对问题建立一个基本的感知, 我们往往从探索开始. 这可能是枚举较小的情形, 猜测取等条件等等. 通过探索, 我们常常可以找到问题关键的子结构进而确定思路. 在本讲中, 问题 2, 12 突出体现了探索思想的重要意义.

- 分析思想

  在不少结构复杂对象混乱的代数问题中, 我们往往在每一步通过局部或整体的分析进行思考. 在各类极值或不等式问题中, 我们经常借助变量的线性性质, 凹凸性质等作局部的调整分析, 探寻各个变量之间倾向于聚集还是散开. 本讲的问题 6, 11 展现了分析思想的妙用.

- 递归思想

  递归是解决许多代数问题的重要思想. 一方面, 递归可以将看上去繁琐无从下手的代数结构转化为简洁的递推结构, 例如本讲的问题 3. 另一方面, 运用归纳的方法也可以把复杂的多元问题转化为变量个数更少形式更简洁的问题乃至单变量问题, 例如本讲的问题 5.

- 转化思想

  不少代数问题的约束条件很繁琐, 这往往需要我们主动出击作转化. 在各类转化方式中, 我们特别强调考虑等价转化. 最经典的例子莫过于将关于单变量的函数在区间上的行为归约它为在端点处的行为 (例如单调函数, 二次函数, 对勾函数). 在解题过程中, 我们经常对自己提问:

  - 能否假设若干个变量的和为定值?
  - 能否假设若干个变量的积为定值?
  - 能否假设各个变量均非负?
  - 能否对各个变量大小排序?

  在本讲中, 通过适当的等价转化可以得到问题 4, 9 行云流水般的解答.

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $n\,(n \geq 2)$ 个实数. 证明: 可以选取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right)^2 \leq (n+1) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

2. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{1000}$ 为 1000 个实数, 满足: 对任意 $1 \leq i < j \leq 1000$, 均有

$$a_i + a_j \geq (-1)^{i+j}.$$

求 $\sum\limits_{i=1}^{1000} i a_i$ 的最小值.

3. 设 a 为正实数. 证明:

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} a^{2i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a^{2i-1}} \geq \frac{n+1}{n}.$$

4. 给定正整数 $k, n\,(1 \leq k \leq n-2)$. 设集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 满足: A 的任何 k 元子集中所有元素之和的绝对值都不超过 1. 证明: 对任意 $1 \leq i < j \leq n$, 均有 $|a_i| + |a_j| \leq 2$.

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正实数. 证明: 可以选取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, 使得

$$\varepsilon_1 a_1^2 + \varepsilon_2 a_2^2 + \cdots + \varepsilon_n a_n^2 \geq (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n)^2.$$

6. 给定正整数 m. 求最小的正实数 $C = C(m)$, 使得对于任意一组实数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 若

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \in \mathbb{Z},$$

则存在整数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, 满足:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| \leq C.$$

7. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $n\,(n \geq 4)$ 个非负实数. 证明:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

8. 设 $\{z_n\}$ 为复数数列, 其各奇数项均为实数, 各偶数项均为纯虚数, 且满足: 对任意正整数 k, 均有 $|z_kz_{k+1}| = 2^k$. 对任意正整数 n, 记 $f_n = |z_1 + z_2 + \cdots + z_n|$.

(1) 求 f_{2020} 的最小值.

(2) 求 $f_{2020} \cdot f_{2021}$ 的最小值.

9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n, A, B$ 均为正实数, 且满足: $a_i \leq b_i$, $a_i \leq A$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,

$$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{B}{A}.$$

证明:

$$\frac{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)} \leq \frac{B+1}{A+1}.$$

10. 求最大的实数 C, 使得对任意 $b > a > 0$, 若区间 $[a, b]$ 内无整数, 则存在正整数 N, 满足:

- $N(b-a) \geq C$, 且
- $[Na, Nb]$ 内无整数.

11. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}, b_1, b_2, \cdots, b_{2n}$ 为 $4n\,(n \geq 3)$ 为个非负实数, 满足:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} > 0,$$

且对任意 $i = 1, 2, \cdots, 2n$, 均有 $a_ia_{i+2} \geq b_i + b_{i+1}$. 这里约定 $a_{2n+1} = a_1$, $a_{2n+2} = a_2$, $b_{2n+1} = b_1$.

求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$ 的最小值.

12. 给定正整数 $n \geq 3$. 求最小的正实数 $c = c(n)$, 使得对任意 n 个和为 1 的非负实数, 总可以将它们以某种顺序排列在圆周上, 满足: 任意两个相邻数的乘积都不超过 c.