Ramsey 理论 3

1 Schur 对 Fermat 大定理的探究

定理. (Fermat) 对任意正整数 $n \geq 3$, 均不存在正整数 x, y, z, 使得 $x^n + y^n = z^n$.

注: 这一结果被称为 Fermat 大定理, 因 Fermat 于 1637 年左右在一本书中写下 "我对此有一个绝妙的证明, 但书页边缘的空白太小写不下". 数学界普遍认为 Fermat 无法实现证明. 经过许多代人的努力, 该结果最终由 Andrew Wiles 于 1994 年完成证明.

定义. (Schur) 对任意正整数 r, 定义 $S(r)$ 为具有以下性质的最小正整数 N:

- 无论怎样对 $[N]$ 进行 r 染色, 总能找到颜色相同的整数 x, y, z, 使得 $x + y = z$.

定理. (Schur) 对任意正整数 n 以及任意 (相对 n) 充分大的素数 p, 均存在不被 p 整除的正整数 x, y, z, 使得 $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$.

1. 证明 $S(r) \leq R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r})$. 这蕴含了 $S(r) < \infty$.

2. 基于已知的结论 $S(n) < \infty$ 证明 Schur 定理.

2 同色等差数列

定义. 对任意正整数 r 以及正整数 k, 定义 $W_r(k)$ 为具有以下性质的最小正整数 N:

- 无论怎样对 $[N]$ 进行 r 染色, 总能找到 k 个不同正整数构成同色等差数列.

定理. (van der Waerden) 对任意正整数 r 以及正整数 k, 均有 $W_r(k) < \infty$.

定理. (van der Waerden 的变式) 对任意正整数 r, k, 均存在正整数 $N_1, \ldots, N_k$, 满足:

- 无论怎样对 $[N_1] \times \cdots \times [N_k]$ 进行 r 染色, 总能找到 k 个不同点构成同色等差点列.

3. 对任意正整数 r, k 确定 $W_1(k)$, $W_r(1)$, $W_r(2)$ 的值.

4. 证明 van der Waerden 定理与 van der Waerden 定理的变式等价.

5. 借助变式证明 $W_2(3) < \infty$, 从而确认 van der Waerden 定理最小的非平凡情形.

3 回避等差数列

定义. 将 k 项等差数列简记作 k-AP. 对任意正整数 k 和任意正整数 N, 记 $r_k(N)$ 为 $[N]$ 之不含 k-AP 子集所含元素个数的最大可能值.

定理. (Roth) 对任意 $\varepsilon > 0$, 均存在充分大的正整数 n, 使得对任意 $A \subseteq [n]$,

- 若 $|A| > \varepsilon n$, 则集合 A 包含一个 3-AP 子集.

定理. (Szemerédi) 对任意 $\varepsilon > 0$, 均存在充分大的正整数 n, 使得对任意 $A \subseteq [n]$,

- 若 $|A| > \varepsilon n$, 则集合 A 包含一个 k-AP 子集.

上述 Roth 定理与 Szemerédi 定理十分深刻, 其证明不属于本课程的讨论范围. 顺便一提: 不难看出 van der Waerden 定理是 Szemerédi 定理的直接推论.

6. 基于 Szemerédi 定理证明 $r_k(N) = o(N)$.

考虑 $r_3(n)$ 的下界 (*Behrend* 构造): 对正整数 n, d, R 定义格点集 $G_n^d \overset{\text{def}}{=} [2n+1]^d$ 和球面

$$S_R^d \overset{\text{def}}{=} \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \cdots + x_d^2 = R^2\right\}.$$

7. 证明: 存在 $R \in [dn^2]$ 使得 $|S_R^d \cap G_n^d| \geq \frac{n^{d-2}}{d}$.

8. 证明 $r_3(N) \geq N \cdot \exp\Big(-\Omega\big(\sqrt{\log N}\big)\Big)$. 这表明 $r_3(N) = \Omega(N^{1-\varepsilon})$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 成立.

4 思考题

1. [😄] 对任意正整数 r, 定义 $P(r)$ 为具有以下性质的最小正整数 N:

- 无论怎样对 $[N]$ 进行 r 染色, 总能找到颜色相同的整数 x, y, z, 使得 $xy = z$.

证明: 对任意正整数 r, 均有 $P(r) < \infty$.

2. [😉] 对任意正整数 r, 定义 $S'(r)$ 为具有以下性质的最小正整数 N:

- 无论怎样对 $[N]$ 进行 r 染色, 总能找到颜色相同的互异整数 x, y, z, 使得 $x + y = z$.

证明: 对任意正整数 r, 均有 $S'(r) < \infty$.

3. [🙁] 证明: 对任意正整数 k, 均存在正整数 n, 满足在 $2^{[n]}$ 之任一 k 染色下,

- 总是存在互不相交的集合 $A, B \subseteq [n]$, 使得 $A, B, A \cup B$ 的颜色相同.

4. [🙁] 证明 van der Waerden 定理的变式, 从而确认 van der Waerden 定理所有的情形.

5. [🙁] 证明: 对任意正整数 r, 均存在正整数 n, 满足:

- 无论怎样对 $[n]$ 的全体二元子集进行 r 染色, 总能找到正整数 a, d_1, d_2, 使得
  - 集合 $\{a, a+d_1\}$, $\{a+d_2, a+d_1+d_2\}$ 的颜色相同,
  - 集合 $\{a, a+d_2\}$, $\{a+d_1, a+d_1+d_2\}$ 的颜色相同.

6. [🙁] 给定正整数 r. 已知正整数数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正整数 n, 均有 $a_{n+1} - a_n \in [r]$. 证明: 对任意正整数 k, 在 $\{a_n\}$ 中均能找到 k 项等差子列.

7. [😠] 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为 n 个正整数. 考虑无穷集合

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{a_1^{e_1} + a_2^{e_2} + \cdots + a_n^{e_n} \mid e_1, e_2, \ldots, e_n \text{ 均为非负整数}\right\}.$$

证明: 存在正整数 $k = k(n)$, 使得在 S 中一定找不到 k 项等差数列.

8. [🙁] 证明: 对任意正整数 n, d, 若 $[n]$ 的子集 A 所含元素个数 $|A| > (4n)^{1-2^{-d}}$, 则 A 有一个 d 维 Hilbert 立方体子集. 这里 (d 维) *Hilbert 立方体*指的是具有以下形式的整数集合:

$$\left\{x_0 + \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i x_i \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}\right\}.$$

注: 这个命题是 Szemerédi 给出的 Roth 定理之证明中的关键引理.

9. [🙁] 在某一 (元素的) 染色下, 称集合 S 为*彩虹集*, 是指 S 所含元素的颜色互不相同.

(1) 证明: 对任意正整数 k, 均存在 $c = c(k) > 0$, 使得无论怎样对 $[n]$ 进行染色 (所用颜色个数不限), 只要每种颜色出现的次数不超过 cn, 就能在 $[n]$ 中找到一个 k-AP 彩虹子集.

(2) 基于 Szemerédi 定理证明以下命题: 对任意正整数 k, 均存在正整数 n, 使得无论怎样对 $[n]$ 进行染色 (所用颜色个数不限), 都能在 $[n]$ 中找到一个 k-AP 单色子集或彩虹子集.

10. [😡] 设 n 为正整数. 在平面上构造一般位置的 n 点集 P, 使它有满足 $|B| = n^{1+o(1)}$ 的*遮挡点集* B. 这里遮挡的含义是: 点集 P 所成任一线段 (不含端点) 上至少有一个 B 中的点.