<u>Ασκήσεις σε Στοχαστικές Διεργασίες</u>

Οι περισσότερες από τις παρακάτω ασκήσεις προέρχονται από τα κεφάλαια 1, 2 και 5 του βιβλίου "Στοχαστικές Διαδικασίες" (Μ. Λουλάκης) που είναι διαθέσιμο από https://repository.kallipos.gr/handle/11419/6003

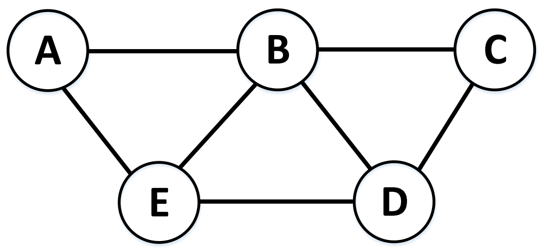
Άσκηση 1

Ένα έντομο κινείται στις κορυφές του παρακάτω γράφου. Ξεκινά από την κορυφή A. Σε κάθε βήμα, αν βρίσκεται στην κορυφή x, επιλέγει τυχαία μία από τις κορυφές που συνδέονται με την x μέσω μιας ακμής του γράφου και μεταβαίνει εκεί. Το έντομο δεν μπορεί να παραμείνει στην ίδια κορυφή και κάνει απαραίτητα ένα βήμα κάθε φορά.

α) Ποιος είναι ο χώρος καταστάσεων X του πειράματος;

β) Ποιος είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P της αλυσίδας;

γ) Να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή π της μαρκοβιανής αλυσίδας.



Λύση

α) Ο χώρος καταστάσεων της αλυσίδας είναι ο $X = \{A, B, C, D, E\}$.

β) Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας είναι ο:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Για την αλυσίδα αρχικά ισχύει: $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, αφού το έντομο ξεκινά από την κορυφή A.

Τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα P αντιστοιχούν στην πιθανότητα μετάβασης του εντόμου από την κορυφή A στις κορυφές A, B, C, D και E του γράφου αντίστοιχα. Επειδή το έντομο δεν μπορεί να παραμείνει στην ίδια κορυφή, η πιθανότητα παραμονής στην κατάσταση A είναι μηδενική. Από την κορυφή A, το έντομο μπορεί να μεταβεί είτε στην κατάσταση B με πιθανότητα $1/2$ ή στην κατάσταση E με πιθανότητα $1/2$.

γ) Για την εύρεση της αναλλοίωτης κατανομής της μαρκοβιανής αλυσίδας πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E) = (\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_A = {}^{56}/_{275} \\ \pi_B = {}^{96}/_{275} \\ \pi_C = {}^{42}/_{275} \\ \pi_D = {}^{54}/_{275} \\ \pi_E = {}^{27}/_{275} \end{cases}$$

<u>Άσκηση 2</u>

Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης και να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της μαρκοβιανής αλυσίδας.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & ? & 0 & 0 \\ 3/4 & ? & ? & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & ? \\ 0 & 1/4 & ? & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 3/8 \end{pmatrix}$$

<u>Λύση</u>

Το άθροισμα των στοιχείων κάθε **γραμμής** ενός πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης είναι **πάντοτε** 1. Άρα, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ο παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης **τυχαίνει** και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης να είναι ίσο με τη μονάδα. Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι ο πίνακας είναι ***διπλά στοχαστικός***. Όταν ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας είναι διπλά στοχαστικός, έχουμε ίση πιθανότητα να βρεθούμε στην κάθε κατάσταση της αλυσίδας, όταν έχει παρέλθει το μεταβατικό φαινόμενο. Άρα, η αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας είναι:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

<u>Άσκηση 3</u>

Έστω $\{X_n\}_n$ μια μαρκοβιανή αλυσίδα σε ένα χώρο με δύο καταστάσεις $X = \{A, B\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

α) Να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της παραπάνω μαρκοβιανής αλυσίδας.

β) Να υποθέσετε ότι σε κάποιο βήμα, η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση A και ότι έχει παρέλθει το μεταβατικό φαινόμενο. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων που απαιτούνται για την πρώτη επιστροφή της αλυσίδας στην κατάσταση A;

<u>Λύση</u>

α) Για να πάρουμε την αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας, θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_A + \pi_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\pi_A \quad \pi_B) = (\pi_A \quad \pi_B) \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \\ \pi_A + \pi_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_A = \dfrac{q}{p+q} \\ \pi_B = \dfrac{p}{p+q} \end{cases}$$

β) Ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων που απαιτούνται για την πρώτη επιστροφή της αλυσίδας στην κατάσταση A είναι:

$$E_A[{T_A}^+] = \frac{1}{\pi_A} = \frac{p+q}{q}$$

<u>Άσκηση 4</u>

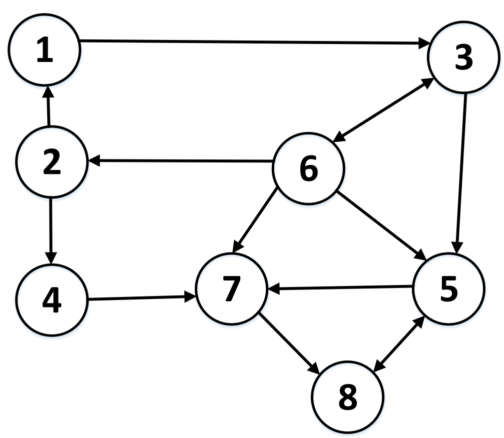
Να χωρίσετε την παρακάτω αλυσίδα σε ανοιχτές και κλειστές κλάσεις επικοινωνίας:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ο χώρος καταστάσεων της αλυσίδας είναι ο $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

<u>Λύση</u>

Σύμφωνα με τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, το διάγραμμα που δείχνει πώς επικοινωνούν οι καταστάσεις μεταξύ τους είναι το παρακάτω:



Η αλυσίδα περιλαμβάνει τρεις κλάσεις. Η κλάση $\{4\}$ είναι ανοιχτή, η κλάση $\{1, 2, 3, 6\}$ είναι ανοιχτή και η κλάση $\{5, 7,8\}$ είναι κλειστή.

<u>Άσκηση 5</u>

Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

β) Να εντοπίσετε την κλειστή κλάση που υπάρχει στην αλυσίδα.

γ) Να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας.

δ) Να υποθέσετε ότι σε κάποιο βήμα, η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση 5 και ότι έχει παρέλθει το μεταβατικό φαινόμενο. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων που απαιτούνται για την πρώτη επιστροφή της αλυσίδας στην κατάσταση 5;

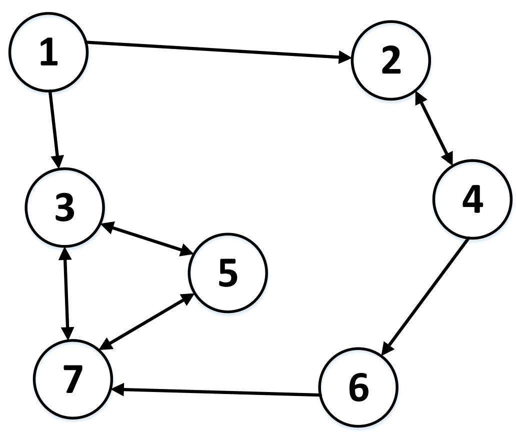
$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & ? & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & ? & ? & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

<u>Λύση</u>

α) Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ο παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

β) Από το παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε ότι η μόνη κλειστή κλάση είναι η $\{3, 5, 7\}$.



γ) Παρατηρούμε ότι η αλυσίδα θα καταλήξει στην κλειστή κλάση. Έτσι, θα επικεντρωθούμε στον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης που αντιστοιχεί στις καταστάσεις 3, 5 και 7, δηλαδή στον:

$$P' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Η αναλοίωτη κατανομή της αλυσίδας είναι η:

$$\begin{cases} \pi = \pi P' \\ \pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\pi_3 \quad \pi_5 \quad \pi_7) = (\pi_3 \quad \pi_5 \quad \pi_7)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\ \pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_3 = \dfrac{1}{2} \\ \pi_5 = \dfrac{1}{5} \\ \pi_7 = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

δ) Χρειάζονται $\frac{1}{\pi_5} = 5$ βήματα.