Математический анализ IIII

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна} \}.$$

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu (E \cap E_k).$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

1. Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
2. $f \leqslant g \Longrightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int g \, \mathrm{d}\mu$.

Доказательство.

1. Пусть $f = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k} = \sum_j \alpha_j \chi_{F_j}$. Тогда $f = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap F_j}$. Пользуясь этим, перепишем интеграл:

$$\int_1 f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \sum_k \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int_2 f.$$

2. Воспользуемся общим допустимым разбиением:

$$\int f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_{k,j} \lambda_k \mu(E_k \cap F_j) \leqslant \sum_{k,j} \alpha_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int g.$$

■

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leqslant \int f \, \mathrm{d}\mu \leqslant +\infty$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int f \, \mathrm{d}\mu$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, f, g измеримы, тогда $\int g \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Доказательство.

1. Очевидно, так как супремум реализуется на самой интегрируемой функции.
3. Поскольку g – ступенчатая и $0 \leqslant g \leqslant f$, g входит в супремум из определения интеграла f, поэтому автоматически $\int g \leqslant \int f$.
2. Все ступенчатые функции, супремум по которым берется в определении интеграла функции g, входят так же и в супремум для интеграла f, так как $0 \leqslant h \leqslant g \leqslant f$.

■

Определение. Пусть f — измеримая функция X, причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

1. Измеримая $f \geqslant 0 \Longrightarrow$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
2. f суммируема $\Longleftrightarrow \int |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.
3. Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:
$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$
4. $\displaystyle\int_E 1\,\mathrm{d}\mu = \mu(E), \int_E 0\,\mathrm{d}\mu = 0.$
5. Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда
$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0.$$
6. $\displaystyle\int -f\,\mathrm{d}\mu = -\int f\,\mathrm{d}\mu, \forall c > 0 \int c \cdot f\,\mathrm{d}\mu = c \cdot \int f\,\mathrm{d}\mu.$
7. Пусть $\exists \displaystyle\int_E f\,\mathrm{d}\mu$, Тогда
$$\left|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu.$$
8. Пусть f измерима на E, $\mu(E) < +\infty$, $\forall x \in E\ A \leqslant f(x) \leqslant B$, тогда
$$A \cdot \mu(E) \leqslant \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant B \cdot \mu(E).$$

Доказательство.

2. Следует из аддитивности интеграла по функции, что будет доказано позже.
1. Для неотрицательных f, g это уже было доказано. Для произвольных воспользуемся определением и тем соображением, что $f^+ \leqslant g^+$ и $f^- \geqslant g^-$:
$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \leqslant \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g.$$
5. Если f ступенчата, то утверждение очевидно. Если $f \geqslant 0$ и измерима, то супремум из определения равен нулю. Если f – произвольная измеримая функция, то $\int f = \int f^+ - \int f^- = 0$.

2. Очевидным образом следует из определений и того, что $\sup cA = c\sup A$.

3. $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Longrightarrow -\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$.

■

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \geqslant 0$, ступенчата. Тогда

$$\int\limits_A g \, d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, d\mu.$$

Доказательство. Пусть $g = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k}$, тогда

$$\int\limits_A g \, d\mu = \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A).$$

Воспользуемся счетной аддитивностью меры:

$$\sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i).$$

Последний ряд сходится абсолютно, поэтому можно переставить порядок суммирования:

$$\sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, d\mu.$$

■

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима на A. Тогда

$$\int\limits_A f \, d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f \, d\mu.$$

Доказательство.

($\leqslant$) Левая часть равенства аппроксимируется ступенчатыми функциями $0 \leqslant g \leqslant f$. Для них имеем:

$$\int\limits_A g \, d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, d\mu \leqslant \sum_i \int\limits_{A_i} f \, d\mu.$$

Теперь имеем:

$$\int\limits_A f \, d\mu = \sup \int\limits_A g \, d\mu \leqslant \sum_i \int\limits_{A_i} f \, d\mu.$$

(⩾) Для начала рассмотрим случай, когда $A = A_1 \sqcup A_2$. Рассмотрим ступенчатую функцию $0 \leqslant g \leqslant f$ и функции g_1, g_2 такие, что $g_i\big|_{A_i} = g$, $g_i\big|_{\overline{A_i}} = 0$. Очевидно, что $g_1 + g_2 = g$ на A. Тогда по построению:

$$\int\limits_{A_1} g_1 \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} g_2 \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} (g_1 + g_2) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Возьмём супремум от обеих частей сначала по g_1, потом по g_2:

$$\int\limits_{A_1} f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Теперь разберемся с бесконечным случаем. Пусть $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$. Тогда, пользуясь уже доказанным фактом для конечных разбиений, имеем:

$$\int\limits_{A} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{B_n} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Совершая предельный переход при $n \to +\infty$, имеем:

$$\int\limits_{A} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

■

Следствие 1.1.6. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима. Зададим отображение:

$$\begin{aligned} \nu \colon \mathcal{A} &\to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0} \\ E &\mapsto \int_E f \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Тогда ν – мера.

Доказательство. Единственное, что нужно проверить, это счетную аддитивность. Она как раз и проверена в теореме. ■

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x. Тогда $\int\limits_{E} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E} g \,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{A}\colon\ \mu e = 0$, $f = g$ на $E \setminus e$. Тогда

$$\int\limits_{E} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{e} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} g \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{e} g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E} g \,\mathrm{d}\mu.$$

■

1.2 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)
Пусть $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n$ $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Для начала отметим, что f измерима, как предел измеримых функций, поэтому её интеграл имеет смысл.

($\geqslant$) Очевидно, поскольку $f(x) \geqslant f_n(x)$.

($\leqslant$) Докажем, что $\forall g\colon\ 0 \leqslant g \leqslant f$, g – ступенчатая, $\forall c \in (0,1)$ $\lim \int\limits_X f_n \geqslant c \int\limits_X g$. Пусть $E_n = X(f_n \geqslant cg)$. Очевидно, что $E_1 \subseteq E_2 \ldots$. Кроме того, $\bigcup E_n = X$, потому что либо $\forall x$ $f(x) > g(x)$ или $f(x) = g(x)$, но $c < 1$, поэтому всегда $f(x) > cg(x)$.

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant c \int\limits_{E_n} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Совершим переход при $n \to +\infty$ в неравенстве:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant c \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{E_n} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Воспользуемся тем, что $E \mapsto \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu$ – мера, то есть обладает свойством непрерывности снизу:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant c \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Из этого неравенства очевидно следует:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Возьмем теперь супремум по g от обеих частей и получим требуемое.

■

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geqslant 0$, измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Аппроксимируем f, g ступенчатыми фукнциями f_n, g_n. Теорема об аппроксимации поставляет такие f_n, g_n, что $0 \leqslant f_n \leqslant f$ и $0 \leqslant g_n \leqslant g$. f_n, g_n ступенчатые, поэтому

$$\int\limits_E (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_n\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g_n\,\mathrm{d}\mu.$$

По теореме Леви переходим к пределу при $n \to +\infty$:

$$\int\limits_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

∎

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E. Тогда $f+g$ суммируема, причем

$$\int\limits_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

- $(f+g)_\pm \leqslant |f+g| \leqslant |f| + |g|$, поэтому интегралы

  $$\int\limits_E (f+g)_\pm\,\mathrm{d}\mu$$

  конечны, то есть $f+g$ суммируема.

- Пусть $h = f+g$:

  $$\begin{aligned}&h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_- \Longrightarrow h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \Longrightarrow\\ &\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+ \Longrightarrow\\ &\int\limits_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

∎

Определение. $\mathcal{L}(X) = \left\{ f \mid f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \int |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$

Лемма 1.2.4. $\mathcal{L}(X)$ – линейное пространство.

Теорема 1.2.5. Пусть $u_n : X \to \mathbb{R}$, $u_n \geqslant 0$ почти везде, u_n измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_n(x)$, $0 \leqslant S_n(x) \leqslant S_{n+1}(x)$ почти везде, $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$. Тогда по теореме Леви:

$$\int\limits_E S\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_E S_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_E u_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

■

Следствие 1.2.6. Пусть u_n измеримы, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится абсолютно почти везде на E.

Доказательство.

$$\int\limits_E \sum_{i=1}^{+\infty} |u_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Поэтому ряд под первым интегралом сходится. ■

Теорема 1.2.7. (Абсолютная непрерывность интеграла)
Пусть f – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathcal{A}\colon\ \mu(E) < \delta \quad \left| \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $X_n = X(f \geqslant n)$. Тогда $X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$. Кроме того, поскольку f суммируема, она не может быть бесконечной на множестве меры, отличной от нуля, то есть $\mu(\bigcap X_n) = 0$.

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\colon \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Это выполнено потому, что отображение $A \mapsto \int\limits_A |f|$ – мера, то есть непрерывно сверху:

$$\int\limits_{X_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_{\bigcap X_n} |f|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- По ε положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Пусть теперь $\mu E < \delta$, вычислим интеграл:

$$\left| \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int\limits_E |f|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\cap X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{E\setminus X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu + n_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

■

Следствие 1.2.8. Пусть $e_n \in \mathcal{A}$, $\mu(e_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, f – суммируемая функция, тогда

$$\int\limits_{e_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$, $\langle Y, \mathcal{B}, \nu\rangle$ *строим пространство* $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu\rangle$.

Лемма 1.3.1. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – полукольцо.

Определение. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, назовем тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *полукольцом измеримых прямоугольников*. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0 \colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

Теорема 1.3.2.

- m_0 – мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- Если μ, ν σ-конечны, тогда m_0 тоже σ-конечна.

Доказательство.

- Достаточно доказать счетную аддитивность. Пусть $P = \bigsqcup P_i$, $P, P_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ $P = A \times B$, $P_i = A_i \times B_i$. Заметим, что верны утверждения:

  $$\chi_P(x,y) = \sum_i \chi_{P_i}(x,y), \quad \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_i \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y).$$

  Проинтегрируем последнее равенство по мере ν в Y:

  $$\begin{aligned} &\chi_A(x) \cdot \int_B \chi_B(y)\,\mathrm{d}\nu = \sum_i \chi_A(x) \cdot \int_B \chi_B(y)\,\mathrm{d}\nu \\ &\chi_A(x) \cdot \nu B = \sum_i \chi_A(x) \cdot \nu B \end{aligned}$$

  Интегрируя второй раз по переменной x по мере μ, получаем:

  $$\mu A \nu B = \sum_i \mu A_i \nu B_i.$$

- Пусть $X = \bigcup X_i$, $Y = \bigcup Y_i$, $\mu X_k < +\infty$, $\nu Y_k < +\infty$, тогда

  $$X = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j, \quad m_0(X_k \times Y_j) = \mu X_k \nu Y_j < +\infty$$

■

Определение. Мы получили $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0\rangle$ – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до σ-алгебры, которую будем обозначать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

Теорема 1.3.3. Произведение мер ассоциативно.

Теорема 1.3.4. $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$.

Определение. Пусть $C \subseteq X \times Y$. Тогда *сечением* для произвольного $x \in X$ назовем множество

$$C_x \overset{def}{=} \{ y \in Y \mid (x, y) \in C \}.$$

Замечание. Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcup_\alpha (C_\alpha)_x.$$

Теорема 1.3.5. (Принцип Кавальери)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, тогда

1. При почти всех x $C_x \in \mathcal{B}$.
2. Отображение $x \mapsto \nu C_x$ измеримо на X.
3. $m(C) = \int\limits_X \nu C_x \, \mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Пусть множество $D \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – элементы $X \times Y$, для которых принцип Кавальери верен.

- Запасем какие-нибудь простые множества в D. А именно, $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ верно, что $C = A \times B \in D$. Проверим это:
  1. $C_x = B \in \mathcal{B}$ или $\varnothing$, в обоих случаях измеримо.
  2. $x \mapsto \nu C_x = \nu B \chi_A(x)$ – очевидно измерима.
  3. Вычислим интеграл:

  $$\int\limits_X \nu C_x \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu B \chi_A(x) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_A \nu B \, \mathrm{d}\mu = \mu A \nu B = mC.$$

- Пусть теперь $E = \bigsqcup E_i$, $E_i \in D$. Тогда $E \in D$.
  1. $E_x = \bigsqcup_i (E_i)_x$ – измеримо почти везде, потому что $(E_i)_x$ измеримы почти везде.
  2. $x \mapsto \nu E_x = \sum_i \nu(E_i)_x$ – измерима как сумма измеримых функций.
  3. Считаем:

  $$\int\limits_X \nu E_x \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X \sum_i \nu(E_i)_x \, \mathrm{d}\mu = \sum_i \int\limits_X \nu(E_i)_x \, \mathrm{d}\mu = \sum_i m(E_i) = mE.$$

- Пусть $E_i \in D$, $E_1 \supseteq \ldots$, $\bigcap E_i = E$, $mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$. Для начала заметим, что
$$\int\limits_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = mE_i < +\infty.$$
Поэтому почти везде $\nu(E_i)_x < +\infty$.

  1. При почти всех x одновременно измеримы все $(E_i)_x$, поэтому измеримо множество $\bigcap (E_i)_x = E_x$.
  2. Пользуясь непрерывностью меры сверху получаем, что функция $x \mapsto \nu E_x = \lim \nu(E_i)_x$ измерима как предел измеримых функций.
  3. Считаем:
  $$\int\limits_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu.$$
  По теореме Лебега, которую мы пока не знаем, можно вынести предел из под знака интеграла в случае, когда подынтегральное выражение можно мажорировать суммируемой функцией, не зависящей от i:
  $$\nu(E_i)_x \leqslant \nu(E_1)_x.$$
  Последняя функция суммируема, поэтому
  $$\int\limits_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = \lim \int\limits_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = \lim m(E_i) = mE.$$
  Последнее равенство верно в силу непрерывности меры m сверху.

- Если $A_{i,j} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap_j \bigcup_i A_{i,j} \in D$. Сделаем множества $A_{i,j}$ дизъюнктными (пользуясь стандартной техникой, мы останемся в полукольце), а затем сделаем множества $\bigsqcup_i \hat{A}_{i,j}$ убывающими, взяв в $\widetilde{A}_0 = \hat{A}_{i,j}, \ldots, \widetilde{A}_n = \bigsqcup_{i=1}^n \hat{A}_{i,j}$.

- Покажем, что если $mE = 0$, то $E \in D$. Аппроксимируем E сериями прямоугольников $P_{i,j}$ (из теоремы о стандартном продолжении меры): пусть $H = \bigcap_i \bigcup_j P_{i,j}$, очевидно, что $E \subset H \in D$, $mH = 0$. Обладая этими знаниями, проверим, что $E \in D$:

  1. Поскольку $H \in D$:
  $$0 = mH = \int\limits_X \nu H_x \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \nu H_x = 0 \text{ при п.в. } x.$$
  Пользуясь полнотой меры ν и тем фактом, что $E_x \subset H_x$, получаем, что $\nu E_x = 0$ при почти всех x.
  2. Отображение $x \mapsto \nu E_x$ измеримо как отображение, почти всюду равное нулю.

3. Поскольку $\nu E_x = 0$ почти везде, очевидно, что $\int\limits_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = 0 = mE$.

- Покажем, что если $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $mC < +\infty$, то $C \in D$. $\exists e\colon\ me = 0$, $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{i,j}$, $H = C \setminus e$, $mC = mH$ (как в предыдущем пункте, из теоремы о стандартном продолжении меры).

  1. $C_x = H_x\ e_x$ – измеримо как разность измеримых множеств.
  2. $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ – измерима как разность измеримых функций.
  3. Считаем:

$$\int\limits_X \nu C_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu H_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu e_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu H_x \,\mathrm{d}\mu = mH = mC.$$

- Пусть, наконец, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Пусть $X = \bigsqcup X_i$, $Y = \bigsqcup Y_i$ (пользуемся σ-конечностью мер), тогда:

$$C = \bigsqcup_{i,j} C \cap (X_i \times Y_j) \in D.$$

■

Следствие 1.3.6. Пусть $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $p_1(C) \in \mathcal{A}$, тогда

$$m(C) = \int\limits_{p_1(C)} \nu(C_x) \,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.3.7. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для $f \geqslant 0$. Поскольку f непрерывна, множество $C = \Pi\Gamma(f, [a, b])$ измеримо в $\mathbb{R}^2$. Тогда $C_x = [0, f(x)]$ – измеримо, $\lambda_1 C_x = f(x)$. Тогда:

$$\int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int\limits_{[a,b]} f(x) \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

■

Замечание. Пусть $f \geqslant 0$, измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Определение. Пусть $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$. Зафиксируем $x \in X$ и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x: C_x &\to \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим $f_y: C_y \to \overline{\mathbb{R}}$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.3.8. (Тонелли)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **измерима** по мере m. Тогда

- При почти всех x f_x **измерима** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_Y f_x\,\mathrm{d}\nu$ **измеримо** на X.
- $$\int\limits_{X \times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

- Пусть $f = \chi C$, $C \subseteq X \times Y$. Тогда
  1. $f_x = \chi C_x$ – измерима при почти всех x потому, что C_x измеримо при почти всех x (принцип Кавальери).
  2. $\varphi(x) = \int\limits_Y \chi_{C_x}(y)\,\mathrm{d}\nu = \nu C_x$ – измеримо по принципу Кавальери.
  3. $$\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu C_x\,\mathrm{d}\mu = mC = \int\limits_{X \times Y} \chi_C\,\mathrm{d}m.$$
- Пусть $f = \sum_k a_k \chi_{C_k} \geqslant 0$, C_k измеримы, $k < +\infty$. Тогда:
  1. $f_x = \sum_k a_k \chi_{C_k}$ – измеримо почти как линейная комбинация измеримых почти везде функций.
  2. $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y)\,\mathrm{d}\nu = \sum_k a_k \nu(C_k)_x$ – измеримо почти везде по аналогичной причине.
  3. $$\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_k a_k \int\limits_X \nu(C_k)_x\,\mathrm{d}\mu = \sum_k a_k m C_k = \int\limits_{X \times Y} f\,\mathrm{d}m.$$
- Пусть $f \geqslant 0$, g_n – ступенчатые функции, аппроксимирующие f, $0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots$, $\lim g_n = f$. Тогда
  1. $f_x = \lim (g_n)_x$ – измерима как предел измеримых функций.

2. $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x \,\mathrm{d}\nu = \lim \int\limits_Y (g_n)_x \,\mathrm{d}\nu = \lim \int\limits_Y \varphi_n(y)\,\mathrm{d}\nu$ – измерима как предел измеримых функций. Второе равенство справедливо как следствие теоремы Леви.

3. $$\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim \int\limits_{X\times Y} g_n\,\mathrm{d}m = \int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}m.$$

   Здесь дважды применена теорема Леви.

■

Теорема 1.3.9. (Фубини)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **суммируема**. Тогда

- При почти всех x f_x **суммируема** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_Y f_x\,\mathrm{d}\nu$ **суммируемо** на X.
- $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы Тонелли. ■

Следствие 1.3.10. Если $p_1(C)$ измеримо, то

$$\int\limits_C f\,\mathrm{d}m = \int\limits_{X\times Y} f\chi_C\,\mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f\chi_C\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_{p_1(C)} \left(\int\limits_{C_x} f\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$$

Замечание. Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

1. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \to 0.$
2. $\int\limits_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0.$

Оказывается, верно $2 \Longrightarrow 1$, но без дополнительных требований неверно $1 \Longrightarrow 2$.

Лемма 1.3.11. Пусть g суммируема. Тогда $\exists A \in \mathcal{A}\colon\ \mu A < +\infty,\ \int\limits_{X\setminus A} g\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$

Доказательство.

$$\int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int\limits_X h\,\mathrm{d}\mu, h\text{– суммируема} \right\}.$$

Выберем ступенчатую h_0 такую, что $\int\limits_X g - \int\limits_X h_0 < \varepsilon$. Тогда пусть

$$A = \operatorname{supp} h_0 = \{\, x \mid h(x) \neq 0 \,\}.$$

$$\int\limits_{X\setminus A} g + \int\limits_A g - h_0 = \int\limits_X g - \int\limits_X h_0 < \varepsilon.$$

$\mu A < +\infty$, так как g суммируема. ∎

Теорема 1.3.12. (Лебега о мажорированной сходимости)
Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, $\exists g$:

- $\forall n \ |f_n| \leqslant g$ при почти всех x.
- g суммируема на X.

В такой ситуации g называется *мажорантой*. Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$

Доказательство.

- f_n суммируема по первому пункту условия
- По следствию из теоремы Рисса, $f \leqslant g$. Поэтому f тоже суммируема.
- Пусть теперь $\mu X < +\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ положим $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$.
  $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \Longrightarrow \mu X_n \to 0$.

  $$\int\limits_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{X_n} |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_{X\setminus X_n} |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu < \int\limits_{X_n} 2g \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_{X\setminus X_n} \varepsilon \, \mathrm{d}\mu.$$

  Первый интеграл стремится к нулю по теореме об абсолютной сходимости интеграла. Второй интеграл оценивается сверху:

  $$\int\limits_{X\setminus X_n} \varepsilon \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X \varepsilon \, \mathrm{d}\mu = \varepsilon \mu X \to 0.$$

- Пусть $\mu X = +\infty$. По предыдущей лемме $\exists A$: $\mu A < +\infty$, $\int\limits_X g < \varepsilon$, тогда

  $$\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_A + \int\limits_{X\setminus A} \leqslant \int\limits_A |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu + 2\varepsilon \to 0.$$

  Первый интеграл стремится к нулю по предыдущему пункту ($\mu A < +\infty$).

$\blacksquare$

Следствие 1.3.13. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$$

$\blacksquare$

Теорема 1.3.14. Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \to f$ почти везде, $\exists g:$

- $\forall n \; |f_n| \leqslant g$.
- g суммируема на X.

Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$.

Доказательство.

- Первый пункт доказывается аналогично предыдущей теореме.
- Положим

  $$h_n = \sup_{j \geqslant n} |f_j - f|.$$

  Очевидно, что h_n убывает с ростом n, и $0 \leqslant h_n \leqslant 2g$ почти везде. Кроме того, по определению, $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| \to 0$ почти везде, потому что $f_n \to f$ почти везде. Функция $2g - h_n$ неотрицательна и возрастает с ростом n, поэтому подходит под теорему Леви:

  $$\int\limits_X 2g - h_n \to \int\limits_X 2g \Longrightarrow \int\limits_X h_n \to 0.$$

  $$\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X h_n \, \mathrm{d}\mu \to 0.$$

$\blacksquare$

Следствие 1.3.15. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.3.16. (Фату)
Пусть $f_n \geqslant 0$, f_n измеримы, $f_n \to f$ почти везде. Если

$$\exists c > 0\colon\ \forall n \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

то

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

Доказательство. Пусть $g_n = \inf_{j\geqslant n} f_n$. Очевидно, что g_n возрастает с ростом n и $g_n \geqslant 0$. Кроме того,

$$\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f.$$

Тогда g_n подходит под теорему Леви:

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leftarrow \int\limits_X g_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

■

Следствие 1.3.17. Теорема Фату верна и в случае $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.

Доказательство. Сразу следует из теоремы Рисса. ■

Следствие 1.3.18. Пусть $f_n \geqslant 0$, f_n измеримы, тогда

$$\int\limits_X \underline{\lim} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Выберем последовательность n_k такую, что

$$\lim \int\limits_X f_{n_k} \,\mathrm{d}\mu = \underline{\lim} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Положим $g_n = \inf_{j\geqslant n} f_j$. Аналогично тому, как мы делали в доказательстве теоремы Фату:

$$\int\limits_X \underline{\lim} f_n \,\mathrm{d}\mu \leftarrow \int\limits_X g_{n_k} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f_{n_k} \,\mathrm{d}\mu \to \underline{\lim} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

■

1.4 Замена переменных в интеграле

Определение. Отображение $\Phi\colon X \to Y$ называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

Лемма 1.4.1. $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$ – σ-алгебра.

Определение. При фиксированном измеримом $\Phi\colon X \to Y$ отображение

$$\begin{aligned} \nu\colon \mathcal{B} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры μ при отображении* Φ.

Лемма 1.4.2. Образ меры при отображении является мерой.

Замечание. $\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, \mathrm{d}\mu$

Лемма 1.4.3. Если функция $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathcal{B}$, то $f \circ \Phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathcal{A}$.

Доказательство.

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \in \mathcal{A}.$$

∎

Определение. Пусть $\omega\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geqslant 0$, измерима. В этом контексте ω называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры μ с весом ω* называется мера

$$\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, \mathrm{d}\mu$$

Теорема 1.4.4. (Об интегрировании по взвешенному образу меры)
Пусть $\Phi\colon X \to Y$ – измеримое отображение, $0 \leqslant \omega\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – весовая функция, измерима на X, ν – взвешенный образ меры μ с весом ω. Тогда для любой измеримой $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ верно:

- $f \circ \Phi$ измерима на X.
- $\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X (f \circ \Phi)\, \omega \, \mathrm{d}\mu$

Доказательство.

- $(f \circ \Phi)$ измерима по предыдущей лемме.

- Пусть $f=\chi_B$, $B\in\mathcal{B}$. Тогда
$$(f\circ\Phi)(x)=\begin{cases}1, \Phi(x)\in B\\0, \Phi(x)\notin B\end{cases}=\chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$
$$\int\limits_X (f\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_X \chi_{\Phi^{-1}(B)}\,\omega\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_{\Phi^{-1}(B)}\omega\,\mathrm{d}\mu=\nu B=\int\limits_Y f\,\mathrm{d}\nu.$$

- Пусть теперь f – ступенчатая функция. Тогда:
$$\int\limits_Y f\,\mathrm{d}\nu=\sum_{k=1}^n\int\limits_Y f_k\,\mathrm{d}\nu=\sum_{k=1}^n\int\limits_X (f_k\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_X (f\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu.$$

- Докажем утверждение для измеримой неотрицательной f. Аппроксимируем f ступенчатыми f_n так, чтобы $0\leqslant f_n\leqslant f_{n+1}$. Тогда справедлива теорема Леви:
$$\int\limits_X (f\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu=\lim\int\limits_X (f_n\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu=\lim\int\limits_Y f_n\,\mathrm{d}\nu=\int\limits_Y f\,\mathrm{d}\nu.$$

- Проверим утверждение для произвольной суммируемой функции f. Интеграл её модуля конечен, кроме того, срезки мажирируются модулем, поэтому их интегралы тоже конечны. Таким образом, мы имеем право писать все формулы, использующие срезки.
$$\int\limits_X (f\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_X (f_+\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu-\int\limits_X (f_-\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_Y f_+\,\mathrm{d}\nu-\int\limits_Y f_-\,\mathrm{d}\nu=\int\limits_Y f\,\mathrm{d}\nu.$$

■

Следствие 1.4.5. Пусть f суммируема на Y, $B\in\mathcal{B}$, тогда в условиях теоремы:
$$\int\limits_B f\,\mathrm{d}\nu=\int\limits_{\Phi^{-1}(B)}(f\circ\Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. В ситуации $X=Y$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}$, $\Phi=\mathrm{id}$, если $\omega\geqslant 0$ измерима, причем $\nu(B)=\int\limits_B\omega\,\mathrm{d}\mu$, ω называется *плотностью меры ν относительно меры μ*. В таком случае
$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\nu=\int\limits_X f\,\omega\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.4.6. (Критерий плотности)
Пусть ν – мера на $\mathcal{A}$, $\omega\geqslant 0$ измерима, тогда верно, что ω – плотность ν относительно μ тогда и только тогда, когда
$$\forall A\in\mathcal{A}\ \inf_A\omega\cdot\mu(A)\leqslant\nu(A)\leqslant\sup_A\omega\cdot\mu(A).$$

Доказательство.

($\Longrightarrow$) $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\inf_A \omega \cdot \mu A \leqslant \int_A \omega \, \mathrm{d}\mu = \nu A \leqslant \sup_A \omega \cdot \mu A.$$

($\Longleftarrow$)

- Пусть $\omega > 0$, $q \in (0,1)$, $A_j = A(q^j \leqslant \omega < q^{j-1})$. Тогда по посылке теоремы имеем:

  $$q^j \cdot \mu A_j \leqslant_1 \nu A_j \leqslant_2 q^{j-1} \cdot \mu A_j.$$

  Кроме того, из простейших свойств интеграла слудует:

  $$q^j \cdot \mu A_j \leqslant_3 \int_{A_j} \omega \, \mathrm{d}\mu \leqslant_4 q^{j-1} \cdot \mu A_j.$$

  Воспользуемся этим:

  $$q \int_A \omega \, \mathrm{d}\mu = q \sum_j \int_{A_j} \omega \, \mathrm{d}\mu \leqslant_4 \sum_j q^j \cdot \mu A_j \leqslant_1 \nu A \leqslant_2 \frac{1}{q} \sum_j q^j \cdot \mu A_j \leqslant_3 \frac{1}{q} \int_A \omega \, \mathrm{d}\mu.$$

  Устремляя q к единице, получаем требуемое.

- Пусть теперь $\omega \geqslant 0$, $e = X(\omega = 0)$. Тогда $\nu e = 0$ по условию. Получается, что

  $$\nu e = 0 = \int_e w \, \mathrm{d}\mu.$$

  Проверим теперь утверждение для произвольного измеримого A:

  $$\nu A = \int_{X \setminus e} \omega \, \mathrm{d}\mu + 0 = \int_{X \setminus e} \omega \, \mathrm{d}\mu + \int_e \omega \, \mathrm{d}\mu = \int_X \omega \, \mathrm{d}\mu.$$

■

Лемма 1.4.7. Пусть f, g – суммируемые на X функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

Тогда $f = g$ почти везде.

Доказательство. Проверим, что $h = f - g = 0$ при почти всех x. По условию, $\forall A \in \mathcal{A}$ $\int_A h \, \mathrm{d}\mu = \int_A (f-g) \, \mathrm{d}\mu = 0$. Положим $A_+ = X(h \geqslant 0)$, $A_- = X(h < 0)$. Тогда $X = A_+ \sqcup A_-$ и

$$\int_{A_+} |h| \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_+} h \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

$$\int\limits_{A_-} |h| \,\mathrm{d}\mu = -\int\limits_{A_-} h \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Получается,

$$\int\limits_{X} |h| \,\mathrm{d}\mu = 0 + 0 = 0.$$

Поэтому $h = 0$ за исключением, может быть, множества меры ноль. ∎

Замечание. Из последней леммы очевидно следует, что плотность одной меры относительно другой определена однозначно с точностью до равенства почти везде.

Лемма 1.4.8. (Об образе малых кубических ячеек)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$, Φ дифференцируемо в $U(\mathbf{a})$, $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$, $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 \ \forall Q \text{ – куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \ \lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

Доказательство. Обозначим $L = \Phi'(\mathbf{a})$ – обратимый линейный оператор. Выпишем определение дифференцируемости:

$$\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{a}) = L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Умножим обе части на L^{-1} и перенесем через знак равенства:

$$\underbrace{\mathbf{a} + L^{-1}(\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{a}))}_{\Psi(\mathbf{x})} = \mathbf{x} + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Получается, что Ψ близок к тожественному отображению. Из последней формулы очевидно следует, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B_\varepsilon(\mathbf{a})$:

$$|\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Пусть теперь $Q \subset B_\varepsilon(\mathbf{a})$ – куб со стороной h. Тогда $\forall \mathbf{x} \in Q$

$$|\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon h, \ |\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i| < h.$$

Попытаемся понять, что делает с Q отображение Ψ. Пусть $x, y \in Q$. Тогда

$$\begin{aligned} |\Psi(\mathbf{x})_i - \Psi(\mathbf{y})_i| &\leqslant |\Psi(\mathbf{x})_i - \mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| + |\Psi(\mathbf{y})_i - \mathbf{y}_i| \\ &\leqslant |\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| + h + |\Psi(\mathbf{y}) - \mathbf{y}| \\ &\leqslant (1 + 2\varepsilon)h \end{aligned}$$

Получается, что $\Psi(Q)$ содержится в кубе со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$. Тогда:

$$\lambda\Psi(Q) \leqslant (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q.$$

Отображение Ψ отличается от отображения Φ только однократным применением оператора L и парой сдвигов. Поэтому:

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leqslant |\det L| \cdot (1+2\varepsilon)^m \lambda Q.$$

Подберем такое ε чтобы выполнялось неравенство

$$|\det L| \cdot (1+2\varepsilon)^m < c.$$

И выберем в качестве δ радиус шара $B_\varepsilon(\mathbf{a})$. ■

Лемма 1.4.9. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathcal{O})$, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq Q$, Q – куб, причем $\mathrm{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$. Тогда

$$\inf_{\substack{A \subset G \\ G \text{ открыто}}} \left(\lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

Теорема 1.4.10. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi \colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq \mathcal{O}$, тогда

$$\lambda\Phi(A) = \int\limits_A |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_m.$$

Доказательство.

- Пусть $\nu A = \lambda\Phi(A)$. Это мера, потому что Φ – диффеоморфизм. Надо проверить, что $J_\Phi = |\det \Phi'|$ – плотность меры ν относительно меры λ. Для этого будем проверять критерий плотности: $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leqslant \nu A \leqslant \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

- Проверим второе неравенство. Пусть Q – кучибеская ячейка, причем $\overline{Q} \subseteq \mathcal{O}$. Предположим противное:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu Q.$$

  Возьмем $c > \sup_Q J_\Phi$ такое, чтобы

$$\lambda Q \cdot c < \nu Q.$$

  Запустим процесс половинного деления. На каждом шаге найдется часть Q_i, для которой верно

$$\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i.$$

  Это верно потому, что иначе по аддитивности меры не было бы выполнено аналогичное неравенство на предыдущем шаге. По теореме Кантора

$$\exists! \mathbf{a} \in \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{Q_n}.$$

  То есть, мы имеем кубы с центром в точке $\mathbf{a}$ со сколь угодно малой стороной. Это противоречит лемме об образе малых кубических ячеек, которая для достаточно малых кубов устанавливает неравенство

$$\nu Q = \lambda\Phi(Q) > c \cdot \lambda Q.$$

- Пусть теперь A – открытое множетсво. Представим его в виде дизъюнктного объединения кубических ячеек $Q_i\colon\ \overline{Q_i} \subseteq \mathcal{O}$. Тогда

$$\nu A = \sum_i \nu Q_i \leqslant \sum_i \sup_{Q_i} J_\Phi \cdot \lambda Q_i \leqslant \sum_i \sup_A J_\Phi \cdot \lambda Q_i = \sup_A J_\Phi \cdot \sum_i \lambda Q_i = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

- Пусть наконец A – измеримое множество. Пользуясь предыдущей леммой имеем

$$\lambda A \cdot \sup_A J_\Phi = \inf_{G \supset A} \left(\lambda G \cdot \sup_G J_\Phi \right) \geqslant \inf_{G \supset A} \nu G \geqslant \inf_{G \supset A} \nu A = \nu A.$$

- Таким образом, мы доказали второе неравенство из критерия плотности. Докажем левую часть, перейдя к $\hat{A} = \Phi(A)$, $\hat{\Phi} = \Phi^{-1}$:

$$\lambda \hat{\Phi}(\hat{A}) = \nu \hat{A} \leqslant \sup_{\hat{A}} J_{\hat{\Phi}} \cdot \lambda \hat{A} \Longrightarrow \lambda A \leqslant \frac{1}{\inf_A J_\Phi} \cdot \lambda \Phi(A) \Longrightarrow \nu A = \lambda \Phi(A) \geqslant \inf_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

■

Теорема 1.4.11. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$, f – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}^1} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int\limits_{\mathcal{O}} f(\Phi(\mathbf{x}))\, |\det \Phi'(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$$

Доказательство. По предыдущей теореме, $J_\Phi = |\det \Phi'(\mathbf{x})|$ – плотность меры $\nu = \lambda \circ \Phi$. Тогда теорема напрямую следует из теоремы об интегрировании по взвешенному образу меры. ■

Замечание. То же верно и в случае, когда f суммируема.

Пример.

- Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \det J = r.$$

- Циллиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Longrightarrow \det J = r.$$

- Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \Longrightarrow \det J = r^2\cos\varphi.$$

- Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\ \dots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{cases}$$

  Вычислим $\det J$ для этого типа замены координат. Для начала сделаем замену по последним двум координатам:

$$\begin{cases} x_i = x_i,\ i = 1..n-2 \\ x_{n-1} = \rho_{n-1}\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = \rho_{n-1}\sin\varphi_{n-1} \end{cases}.$$

  Теперь заменим ρ_{n-1} и x_{n-2}:

$$\begin{cases} x_i = x_i,\ i = 1..n-3 \\ \rho_{n-1} = \rho_{n-2}\sin\varphi_{n-2} \\ x_{n-2} = \rho_{n-2}\cos\varphi_{n-2} \end{cases}.$$

  Продолжим этот процесс по индукции, в конце получим (вместо ρ_1 пишем r):

$$\begin{cases} \dots \\ \rho_2 = r\sin\varphi_1 \\ x_1 = r\cos\varphi_1 \end{cases}.$$

  Видно, что получилавь серия замен, которая совпадает со сферической заменой. Вычислим интеграл единицы по какому-нибудь простому множеству $\mathcal{O}$, находящемуся в положительном октанте ($\forall i\ x_i > 0$):

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n &= \int \rho_{n-1}\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{n-2}\mathrm{d}\rho_{n-1}\mathrm{d}\varphi_{n-1} \\ &= \int \rho_{n-2}^2\sin\varphi_{n-2}\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{n-3}\mathrm{d}\rho_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-1} \\ &= \int (\rho_{n-3}\sin\varphi_{n-3})^2\sin\varphi_{n-2}\rho_{n-3}\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{n-4}\mathrm{d}\rho_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-1} \\ &= \dots \\ &= \int r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-1}\varphi_2\dots\sin^1\varphi_{n-2}\,\mathrm{d}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_2\dots\mathrm{d}\varphi_{n-1}\mathrm{d}r \end{aligned}$$

  Выражение, получившееся под знаком интеграла и есть якобиан преобразования (по теореме о единственности плотности).

Определение. При $s,t>0$ функция, задаваемая формулой

$$B(s,t)=\int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,\mathrm{d}x.$$

называется *бета-функцией*.

Теорема 1.4.12. $\forall s,t>0\ B(s,t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(t)&=\left(\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y\right)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int\limits_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&\underset{y=u-x}{=}\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int\limits_0^{+\infty}(u-x)^{t-1}e^{x-u}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u\\
&=\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{d}u\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}\,\mathrm{d}x\\
&\underset{x=uv}{=}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{1} u^{s-1}v^{s-1}u^{t-1}(1-v)^{t-1}e^{-u}u\,\mathrm{d}v\\
&=\left(\int\limits_0^{+\infty} u^{s+t-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int\limits_0^{1} v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,\mathrm{d}v\right)=\Gamma(s+t)B(s,t)
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.4.13. (Объём шара в $\mathbb{R}^m$) $\lambda_m B(0,R)=\dfrac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$.

Доказательство. Вычислим для начала вспомогательный интеграл:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\sin^{n-k-1}\varphi_k\,\mathrm{d}\varphi_k&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-k-1}\varphi_k\,\mathrm{d}\varphi_k\underset{\sin^2\varphi_k=t}{=}2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}t^{\frac{n-k-1}{2}}\\
&=B\left(\frac{n-k}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\lambda_m B(0,R)=\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_m^2\leqslant R^2}1\,\mathrm{d}\lambda_m=\int\limits_0^R\mathrm{d}r\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi_1\ldots\int\limits_0^{2\pi}r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\,\mathrm{d}\varphi_{n-1}=\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

■

1.5 Функции распределения

Определение. Пусть $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, причем $\forall t \in \mathbb{R}\ \mu X(h < t) < +\infty$. Тогда функция $H(t) = \mu X(h < t)$ называется *функцией распределения h по мере μ.*

Замечание. $H(t)$ не убывает.

Замечание. Пусть h измерима, тогда для любого борелевского $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $h^{-1}(B)$ измерим.

Определение. Стандартное продолжение $\mu_H([a,b)) = H(b-0) - H(a-0)$ называется *мерой Бореля-Стилтьеса*.

Определение. В текущем контексте обозначим $h(\mu) = \nu\colon\ \nu A = \mu h^{-1}(A)$.

Лемма 1.5.1. Пусть $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения. Тогда на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu_H = h(\mu)$.

Доказательство. Проверим равенство на ячейках, чего будет достаточно для совпадения функций на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\mu_H[a,b) = H(b-0) - H(a-0) = H(b) - H(a) = \mu X(a \leqslant h < b) = \mu h^{-1}([a,b)).$$

Второе равенство выполнено как следствие непрерывности меры снизу:

$$\bigcup_{t<b} X(h < t) = X(h < b) \Longrightarrow H(b-0) = \lim_{t \to b_-} H(t) = \mu X(h < b) = H(b).$$

■

Теорема 1.5.2. Пусть $0 \leqslant f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, измеримая по Борелю, $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения, μ_H – мера Бореля-Стилтьеса для H. Тогда

$$\int\limits_X f \circ h \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu_H.$$

Доказательство. Пусть $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$, $\Phi = h$, $w = 1$. Кроме того, нам по определению известно, что для $\nu = h(\mu)$ верно

$$\nu A = \mu h^{-1}(A).$$

Это значит, что ν есть взвешенный (с весом 1) образ меры μ при отображении h. Поэтому справедлива теорема об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X f \circ \Phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Заменив ν на μ_H по предыдущей лемме и вернув $h = \Phi$ получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu_H = \int\limits_X f \circ h \, \mathrm{d}\mu.$$

■

Глава 2

Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностный интеграл I рода

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$, $\varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ – параметризация M, тогда $E \subseteq M$ называется *измеримым*, если $\varphi^{-1}(E) \in \mathfrak{M}^2$.

Определение. Введем обозначение:

$$\mathcal{A}_M \overset{def}{=} \{E \subseteq M \mid E \text{ измеримо}\}.$$

Замечание. $\mathcal{A}_M$ – σ-алгебра.

Определение. На $\mathcal{A}_M$ заведем меру:

$$\begin{aligned} S\colon \mathcal{A}_M &\to \overline{\mathbb{R}} \\ E &\mapsto \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Замечание. Замкнутые, открытые, компактные $E \subset M$ измеримы.

Лемма 2.1.1. S не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. Пусть $\varphi\colon \mathcal{O}_1 \to M$, $\psi\colon \mathcal{O}_2 \to M$ – параметризации M. Тогда они отличаются на диффеоморфизм (u, v):

$$\varphi(s,t) = \psi(u(s,t), v(s,t)).$$

Вычислим для начала $\left\|\psi'_s \times \psi'_t\right\|$:

$$\begin{aligned} \left\|\psi'_s \times \psi'_t\right\| &= \left\|(\varphi'_u u'_s + \varphi'_v v'_s) \times (\varphi'_u u'_t + \varphi'_v v'_t)\right\| = \left\|(\varphi'_u \times \varphi'_v) \cdot (u'_s v'_t - u'_t v'_s)\right\| \\ &= \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \cdot |u'_s v'_t - u'_t v'_s| = \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \cdot |\det J| \end{aligned}$$

Проверим совпадение интегралов:

$$\iint\limits_{\psi^{-1}(E)} \left\|\psi'_s \times \psi'_t\right\| \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \iint\limits_{\psi^{-1}(E)} \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| |\det J| \,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

∎

Определение. $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по мере S, если $f \circ \varphi$ измерима на $\mathcal{O}$ по мере λ.

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие, φ – его параметризация, $0 \leqslant f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по S, тогда *поверхностным интегралом I рода* назовем интеграл

$$\iint\limits_{M} f \, \mathrm{d}S.$$

Или развернуто, пользуясь теоремой об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\iint\limits_{M} f \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{\varphi^{-1}(M)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left\| \varphi_u' \times \varphi_v' \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^3$ назовем *кусочно-гладким многообразием в* $\mathbb{R}^3$, если M представляется в виде конечного дизъюнктного объединения объектов вида

- простое гладкое двумерное многообразие.
- простое гладкое одномерное многообразие (носитель гладкого пути).
- точка.

Определение. Мера S на кусочно-гладком многообразии $E = \bigsqcup_i M_i$ вычисляется следующим образом:

$$S(E) = \sum_i S(E \cap M_i).$$

2.2 Поверхностный интеграл II рода

Определение. *Поверхностью* будем называть простое гладкое двумерное многообразие.

Определение. *Стороной поверхности* называется непрерывное векторное поле единичных нормалей к этой поверхности.

Определение. Поверхность называется *двусторонней*, если для неё существует непрерывное поле нормалей. Иначе она называется *односторонней*.

Пример. Лента Мебиуса – односторонняя поверхность.

Определение. *Репером* называется пара линейно независимых касательных векторов.

Определение. Пусть Ω – двусторонняя поверхность в $\mathbb{R}^3$, $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, $n_0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – сторона поверхности. Тогда *интегралом II рода функции F по поверхности Ω* назовем интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S.$$

Замечание.

- Смена стороны на противоположную влечет замену знака.
- Интеграл II рода не зависит от параметризации.
- Пусть $F = \langle P, Q, R\rangle$. Тогда интеграл II рода записывают так:

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Пусть поверхность задана параметризацией $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$. Получим нормальный вектор, перемножив векторно касательные векторы:

$$n = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right)^T.$$

Мера S выгдялит следующим образом:

$$\mathrm{d}S = \left\| \varphi'_u \times \varphi'_v \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \|n\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{\tilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\|n\|} \cdot \|n\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$\iint\limits_{\tilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Замечание. Посчитаем интеграл поля $\langle 0,0,R\rangle$ по поверхности Ω, заданной графиком (то есть, имеющей параметризацию вида $x, y, z(x, y)$).

$$\iint\limits_{\Omega^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(P\begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v\end{vmatrix} + Q\begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v\end{vmatrix} + R\begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Замечание. Попробуем посчитать объём фигуры Ω, ограниченной графиками z_1, z_2:

$$\begin{aligned}\lambda_3(\Omega) &= \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} (z_1(x, y) - z_2(x, y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} z_1(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} z_2(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\partial\Omega^+} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались предыдущим замечанием и тем, что у нижней части фигуры (ограниченной z_1) нормали направлены в другую сторону.

Замечание. Пусть γ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$ (лежит в плоскости xy), Ω – цилиндр над γ. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Доказательство.
Первое доказательство: по формуле из первого замечания мы собираемся интегрировать какую-то функцию по носителю пути по двумерной мере. Носитель гладкого пути по такой мере всегда имеет меру 0.
Второе доказательство: мы пытаемся интегрировать $\langle F, n_0\rangle$. Заметим, что у F не равна нулю только третья координата (R), тогда как вектор нормали к цилиндру над xy всегда имеет $z = 0$. Таким образом, мы интегрируем функцию, тождественно равную нулю. ■

Глава 3

Основные интегральные формулы

3.1 Формула Грина

Замечание. В данном контексте рассматривается D: компактное, связное, односвязное множество в $\mathbb{R}^2$, ограниченное кусочно-гладкой кривой. При этом граница ∂D направлена против часовой стрелки (фигура всегда находится слева).

Теорема 3.1.1. (Формула Грина)
Пусть P, Q – гладкие векторные поля в $U(D)$. Тогда

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

Замечание. Формула "аддитивна"по фигуре.

3.2 Формула Стокса

Замечание. В данном контексте рассматривается Ω – двусторонняя поверхность с границей. n_0 – её сторона. $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая, согласованная по ориентации со стороной поверхности.

Теорема 3.2.1. (Формула Стокса)
Пусть $\langle P, Q, R\rangle$ – гладкое векторное поле в $U(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Omega} (R'_y - Q'_z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P'_z - R'_x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (Q'_x - P'_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Замечание. Формула "аддитивна"по фигуре.

3.3 Формула Гаусса-Остроградского

Замечание. В данном контексте рассматриваются

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, f(x, y) \leqslant z \leqslant F(x, y)\}.$$

Здесь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ – замкнутое множество, $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $f, F \in C^1(\Omega)$. Рассматриваем внешнюю сторону фигуры.

Теорема 3.3.1. (Формула Гаусса-Остроградского)
Пусть $R\colon U(V) \to \mathbb{R}$, $R \in C^1(U(V))$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Следствие 3.3.2. В условиях формулы Гаусса-Остроградского, верно

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Следствие 3.3.3. Пусть l – фиксированное направление в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial l}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} f \cdot \langle l, n_0\rangle\,\mathrm{d}S.$$

3.4 Примеры дифференциальных операторов

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R\rangle$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда *дивергенцией A* называется

$$\mathrm{div}A \stackrel{def}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Замечание. Дивергенцию поля в точке можно вычислять так:

$$\mathrm{div}A(a) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_3 B}\iiint\limits_{B(a,r)} \mathrm{div}A\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_3 B}\iint\limits_{S(a,r)} \langle A, n_0\rangle\,\mathrm{d}S.$$

Последнюю формулу можно интерпретировать как величину потока, проходящего через сферу с центром в данной точке достаточно малого радиуса. То есть, дивергенция характеризует точку как “источник” поля.

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R\rangle$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда *ротором A* называется

$$\mathrm{rot}A \stackrel{def}{=} \langle R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\rangle.$$

Замечание. $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{O}$ – односвязная область, $\mathrm{rot}\,V = 0$. Тогда V потенциально.

Замечание. $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{O}$ – односвязная область, $\mathrm{rot}\,V = 0$. Тогда

- Если γ – петля, то

$$\int\limits_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0.$$

- Если γ – путь, то интеграл

$$\int\limits_{\gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

  зависит только от начальной и конечной точек пути.

Замечание. Если $\mathcal{O}$ не односвязна, но $\operatorname{rot} V = 0$, то все равно интеграл по пути не зависит от самого пути.

Если в поле нет источников, то откуда может взяться поток через поверхность?

Замечание. $\operatorname{div} V = 0$, тогда для любой "разумной" фигуры Ω выполнено

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \langle V, n_0\rangle\,\mathrm{d}S = 0.$$

Определение. Поле V называется *соленоидальным* в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, если у него существует векторный потенциал, то есть $\exists B$ – векторное поле такое, что $\operatorname{rot} B = V$ на Ω.

Теорема 3.4.1. (Критерий соленоидальности поля)
A соленоидально в $\Omega \iff \operatorname{div} A = 0$ на Ω

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Пространство L^p

Определение. Комплексное отображение $f : X \to \mathbb{C}$ назовем *измеримым*, если $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h : X \to \mathbb{R}$, причем g, h измеримы.

Определение. Аналогично определим *суммируемые* комплексные отображения.

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h : X \to \mathbb{R}$. Тогда определим интеграл:

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \int\limits_E g \, \mathrm{d}\mu + i \int\limits_E h \, \mathrm{d}\mu.$$

Замечание.

$$\left| \int\limits_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int\limits_E |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 4.1.1. (Интегральное неравенство Гёльдера)
Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g : X \to \mathbb{C}$ – измеримые почти везде заданные функции. Тогда

$$\int\limits_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 4.1.2. (Интегральное неравенство Минковского)
Пусть $f, g : X \to \mathbb{C}$, $p \geqslant 1$, тогда

$$\left(\int\limits_X |f + g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_X |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. Пусть $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой. Тогда для $1 \leqslant p < +\infty$ положим

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \stackrel{def}{=} \left\{ f : \text{п.в. } X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима}, \int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ – линейное пространство.

Определение. Зададим на $\mathcal{L}^p$ отношение эквивалентности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ почти везде. Положим

$$L^p(X,\mu) \overset{def}{=} \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim.$$

Определение. В L^p заведем норму: $\|[f]\| \overset{def}{=} \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Определение. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ задана почти везде. Тогда *существенным супремумом* f называется

$$\operatorname*{ess\,sup}_X f \overset{def}{=} \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leqslant A \text{ п.в.}\}.$$

Теорема 4.1.3. (Свойства существенного супремума)

- $\operatorname{ess\,sup}_X f \leqslant \sup_X f$.
- $f(x) \leqslant \operatorname{ess\,sup}_X f$ при почти всех x.
- $\left|\int_X f g \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_X |f| \cdot \int_X |g|$.

Определение. Для $p = \infty$:

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \overset{def}{=} \left\{f : \text{п.в. } X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима}, \operatorname*{ess\,sup}_X f < +\infty\right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ – линейное пространство.

Определение. Пространство L^∞ зададим аналогично конечному случаю. Нормой на этом пространстве положим $\operatorname{ess\,sup}$.

Теорема 4.1.4. (О вложении пространств L^p)
Пусть $\mu(X) < +\infty$, $1 \leqslant r < s \leqslant +\infty$. Тогда

- $L^r(X,\mu) \subset L^s(X,\mu)$.
- $\|f\|^s \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$.

Следствие 4.1.5. Пусть $\mu(E) < +\infty$, $1 \leqslant s < r \leqslant +\infty$, $f_n, f \in L^s$, $f_n \underset{L^r}{\longrightarrow} f$, тогда $f_n \underset{L^s}{\longrightarrow} f$.

Теорема 4.1.6. (О сходимости в L^p и по мере)
Пусть $1 \leqslant r < +\infty$, $f_n, f \in L^p$, тогда

- $f_n \underset{L^p}{\longrightarrow} f \Longrightarrow f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, либо $f_n \to f$ почти везде, тогда если $\exists g \in L^p :\ |f_n| \leqslant g$, то $f_n \underset{L^p}{\longrightarrow} f$.

Замечание. L^∞ – полное метрическое пространство.

Теорема 4.1.7. (Полнота пространств L^p)
$\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty$ L^p полно.

Определение. Пусть X – топологическое пространство, тогда множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если $\mathrm{Cl}(A) = X$. Иначе говоря, $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$, или $\forall x \in X$ $\forall U(x)$ $U(x) \cap A \neq \varnothing$.

Определение. Множество всех ступенчатых функций $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим $St(X)$.

Лемма 4.1.8. Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, тогда множество $St(X) \cap L^p$ плотно в L^p.

Определение. (Четвертая аксиома отделимости)
Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нем любые два замкнутые непересекающиеся множества отделимы, причем любое одноточечное множество замкнуто.

Лемма 4.1.9. (Урысон)
Пусть X – нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, такая, что

- $0 \leqslant f \leqslant 1$.
- $f\Big|_{F_0} = 0$.
- $f\Big|_{F_1} = 1$.

Определение. *Финитной функцией в* $\mathbb{R}^m$ называется функция f такая, что

$$\exists B(a, r) : \ f\Big|_B = 0.$$

По умолчанию, f непрерывна.

Теорема 4.1.10. Множество финитных функций плотно в L^p при $1 \leqslant p < +\infty$.

Замечание. Условие $p \neq +\infty$ существенно.

Определение. Множество непрерывных T-периодических функций будем обозначать $\widetilde{C}([0, T])$.

Теорема 4.1.11. (О непрерывности сдвига)
Пусть $f_h(x) = f(x + h)$. Тогда

- f равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.
- $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p \Longrightarrow \|f_h - f\|_p \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.
- $f \in \widetilde{C}([0, T]) \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.
- $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p([0, T]) \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

4.2 Гильбертовы пространства

Определение. *Гильбертовым пространством* называется линейное пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением, полное как метрическое пространство с метрикой и нормой, порожденными скалярным произведением:

- $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
- $\|\ \| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$.
- $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

Далее $\mathcal{H}$ – Гильбертово пространство.

Определение. Ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \in \mathcal{H}$, называется *сходящимся*, если $S_N \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i$ таково, что $\exists S \in \mathcal{H} :\ \|S_N - S\| \to 0$. Иными словами, последовательность частичных сумм ряда сходится к элементу $\mathcal{H}$.

Определение. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Longleftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Определение. Пусть $A \subseteq \mathcal{H}$. Тогда по определению $\mathbf{x} \perp A \Longleftrightarrow \forall \mathbf{y} \in A\ \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$.

Определение. Ряд называется *ортогональным*, если все его элементы попарно ортогональны.

Теорема 4.2.1. (Свойства сходимости в Гильбертовых пространствах)
Пусть $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in \mathcal{H}$. Тогда

- $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}_0 \Longrightarrow \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle \to \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle$.
- Пусть ряд $\sum \mathbf{x}_k$ сходится. Тогда $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}\ \langle \sum \mathbf{x}_k, \mathbf{y} \rangle = \sum \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y} \rangle$.
- Пусть ряд $\sum \mathbf{x}_k$ ортогонален. Тогда $\sum \mathbf{x}_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum \|\mathbf{x}_k\|^2$ сходится. Более того, в этом случае $\left\|\sum \mathbf{x}_k\right\|^2 = \sum \|\mathbf{x}_k\|^2$.

Определение. *Ортогональным семейством векторов* называется $\{\, \mathbf{e}_k \,\} \subseteq \mathcal{H}$ такое, что $\mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_{j \neq k}$. Если более того $\|\mathbf{e}_k\| = 1$, то семейство называется *ортонормированным*.

Определение. $L_2 \overset{def}{=} L^2([0, 2\pi], \lambda_1)$.

Теорема 4.2.2. Пусть $\{\, \mathbf{e}_k \,\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \mathbf{e}_k$. Тогда

- ОС линейно независима.
- $c_k = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k, \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$.
- $c_k \mathbf{e}_k = \mathcal{P}^{\perp}_{\{t\mathbf{e}_k\}}$, то есть $\mathbf{x} = c_k \mathbf{e}_k + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \perp \mathbf{e}_k$.

4.3 Ряды фурье

Определение. Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, тогда числа $c_k(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$ называются *коэффициентами фурье вектора* $\mathbf{x}$ *по системе* $\mathbf{e}_k$.

Определение. Ряд $\sum_k c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k$ называется *рядом Фурье* $\mathbf{x}$ *по* $\mathbf{e}_k$.

Замечание. При перенормировке ОС ряд Фурье не меняется.

Теорема 4.3.1. (О свойстах частичных сумм ряда Фурье)
Пусть $\mathcal{L} = Lin(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Тогда

- $S_n = \mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$, то есть $\mathbf{x} = S_n + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \perp \mathcal{L}$.
- S_n – элемент наилучшего приближения $\mathbf{x}$ в $\mathcal{L}$, то есть $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{L}\ \ \|S_n - \mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.
- $\|S_n\| \leqslant \|\mathbf{x}\|$.

Следствие 4.3.2. (Неравенство Бесселя)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \, \|\mathbf{e}_l\|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

Теорема 4.3.3. (Рисс, Фишер)
Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$. Тогда

- Ряд Фурье $\mathbf{x}$ сходится в $\mathcal{H}$.
- $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k + \mathbf{z}$, $\forall k\ \mathbf{z} \perp \mathbf{e}_k$.
- $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k \Longleftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \, \|\mathbf{e}_k\|^2$.

Определение. *Равенство Парсиваля*, или *уравнение замкнутости*:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \, \|\mathbf{e}_k\|^2.$$

4.4 Базис в Гильбертовом пространстве

Определение. *Базисом* в Гильбертовом пространстве называется ОС $\{\mathbf{e}_k\}$, если выполняется условие:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}\ \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k.$$

Определение. ОС $\{\mathbf{e}_k\}$ называется *полной*, если

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}:\ \{\mathbf{e}_k\} \cup \mathbf{x} \text{ – не ОС.}$$

Определение. ОС $\{\mathbf{e}_k\}$ называется *замкнутой*, если для любого её элемента выполняется уравнение замкнутости.

Теорема 4.4.1. (Характеризация базиса)
Пусть $E = \{\mathbf{e}_k\}$ – ОС. Тогда эквивалентны утверждения:

- E – базис.
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x}) \cdot \overline{c_k(\mathbf{y})} \cdot \|\mathbf{e}_k\|^2$
- E замкнута.
- E полна.
- $Lin(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ плотно в $\mathcal{H}$.