Математический анализ IIII

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$ — пространство с мерой

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна}\}.$$

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu(E \cap E_k).$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

1. Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
2. $f \leqslant g \Longrightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство.

1. Пусть $f = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k} = \sum_j \alpha_j \chi_{F_j}$. Тогда $f = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap F_j}$. Пользуясь этим, перепишем интеграл:

$$\int_1 f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \sum_k \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int_2 f.$$

2. Воспользуемся общим допустимым разбиением:

$$\int f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_{k,j} \lambda_k \mu(E_k \cap F_j) \leqslant \sum_{k,j} \alpha_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int g.$$

■

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leqslant \int f \, \mathrm{d}\mu \leqslant +\infty$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int f \, \mathrm{d}\mu$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, f, g измеримы, тогда $\int g \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Доказательство.

1. Очевидно, так как супремум реализуется на самой интегрируемой функции.
3. Поскольку g – ступенчатая и $0 \leqslant g \leqslant f$, g входит в супремум из определения интеграла f, поэтому автоматически $\int g \leqslant \int f$.
2. Все ступенчатые функции, супремум по которым берется в определении интеграла функции g, входят так же и в супремум для интеграла f, так как $0 \leqslant h \leqslant g \leqslant f$.

■

Определение. Пусть f — измеримая функция X, причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

1. Измеримая $f \geqslant 0 \Longrightarrow$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
2. f суммируема $\Longleftrightarrow \int |f| \, d\mu < +\infty$.
3. Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:
$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_E f \, d\mu \leqslant \int_E g \, d\mu.$$
4. $\displaystyle\int_E 1 \, d\mu = \mu(E)$, $\displaystyle\int_E 0 \, d\mu = 0$.
5. Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда
$$\int_E f \, d\mu = 0.$$
6. $\displaystyle\int -f \, d\mu = -\int f \, d\mu$, $\forall c > 0$ $\displaystyle\int c \cdot f \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu$.
7. Пусть $\exists \displaystyle\int_E f \, d\mu$, Тогда
$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leqslant \int_E |f| \, d\mu.$$
8. Пусть f измерима на E, $\mu(E) < +\infty$, $\forall x \in E$ $A \leqslant f(x) \leqslant B$, тогда
$$A \cdot \mu(E) \leqslant \int_E f \, d\mu \leqslant B \cdot \mu(E).$$

Доказательство.

2. Следует из аддитивности интеграла по функции, что будет доказано позже.

1. Для неотрицательных f, g это уже было доказано. Для произвольных воспользуемся определением и тем соображением, что $f^+ \leqslant g^+$ и $f^- \geqslant g^-$:
$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \leqslant \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g.$$

5. Если f ступенчата, то утверждение очевидно. Если $f \geqslant 0$ и измерима, то супремум из определения равен нулю. Если f – произвольная измеримая функция, то $\int f = \int f^+ - \int f^- = 0$.

2. Очевидным образом следует из определений и того, что $\sup cA = c\sup A$.
3. $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Longrightarrow -\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$.

■

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \geqslant 0$, ступенчата. Тогда

$$\int\limits_A g \, \mathrm{d}\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Пусть $g = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k}$, тогда

$$\int\limits_A g \, \mathrm{d}\mu = \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A).$$

Воспользуемся счетной аддитивностью меры:

$$\sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i).$$

Последний ряд сходится абсолютно, поэтому можно переставить порядок суммирования:

$$\sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, \mathrm{d}\mu.$$

■

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима на A. Тогда

$$\int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

($\leqslant$) Левая часть равенства аппроксимируется ступенчатыми функциями $0 \leqslant g \leqslant f$. Для них имеем:

$$\int\limits_A g \, \mathrm{d}\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, \mathrm{d}\mu \leqslant \sum_i \int\limits_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Теперь имеем:

$$\int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu = \sup \int\limits_A g \, \mathrm{d}\mu \leqslant \sum_i \int\limits_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu.$$

($\geqslant$) Для начала рассмотрим случай, когда $A = A_1 \sqcup A_2$. Рассмотрим ступенчатую функцию $0 \leqslant g \leqslant f$ и функции g_1, g_2 такие, что $g_i\big|_{A_i} = g$, $g_i\big|_{\overline{A_i}} = 0$. Очевидно, что $g_1 + g_2 = g$ на A. Тогда по построению:

$$\int\limits_{A_1} g_1 \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} g_2 \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} (g_1 + g_2) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Возьмём супремум от обеих частей сначала по g_1, потом по g_2:

$$\int\limits_{A_1} f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Теперь разберемся с бесконечным случаем. Пусть $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$. Тогда, пользуясь уже доказанным фактом для конечных разбиений, имеем:

$$\int\limits_{A} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{B_n} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Совершая предельный переход при $n \to +\infty$, имеем:

$$\int\limits_{A} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

∎

Следствие 1.1.6. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима. Зададим отображение:

$$\nu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0}$$
$$E \mapsto \int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

Тогда ν – мера.

Доказательство. Единственное, что нужно проверить, это счетную аддитивность. Она как раз и проверена в теореме. ∎

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x. Тогда $\int\limits_{E} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E} g \,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{A}\colon\ \mu e = 0$, $f = g$ на $E \setminus e$. Тогда

$$\int\limits_{E} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{e} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} g \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{e} g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E} g \,\mathrm{d}\mu.$$

∎

1.2 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)
Пусть $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n\ 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Для начала отметим, что f измерима, как предел измеримых функций, поэтому её интеграл имеет смысл.

($\geqslant$) Очевидно, поскольку $f(x) \geqslant f_n(x)$.

($\leqslant$) Докажем, что $\forall g\colon\ 0 \leqslant g \leqslant f$, g – ступенчатая, $\forall c \in (0,1)$ $\lim \int\limits_X f_n \geqslant c\int\limits_X g$. Пусть $E_n = X(f_n \geqslant cg)$. Очевидно, что $E_1 \subseteq E_2 \ldots$. Кроме того, $\bigcup E_n = X$, потому что либо $\forall x\ f(x) > g(x)$ или $f(x) = g(x)$, но $c < 1$, поэтому всегда $f(x) > cg(x)$.

$$\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{E_n} f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant c\int\limits_{E_n} g\,\mathrm{d}\mu.$$

Совершим переход при $n \to +\infty$ в неравенстве:

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant c\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{E_n} g\,\mathrm{d}\mu.$$

Воспользуемся тем, что $E \mapsto \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu$ – мера, то есть обладает свойством непрерывности снизу:

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant c\int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Из этого неравенства очевидно следует:

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Возьмем теперь супремум по g от обеих частей и получим требуемое.

■

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geqslant 0$, измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Аппроксимируем f, g ступенчатыми фукнциями f_n, g_n. Теорема об аппроксимации поставляет такие f_n, g_n, что $0 \leqslant f_n \leqslant f$ и $0 \leqslant g_n \leqslant g$. f_n, g_n ступенчатые, поэтому

$$\int\limits_E (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_n\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g_n\,\mathrm{d}\mu.$$

По теореме Леви переходим к пределу при $n \to +\infty$:

$$\int\limits_E (f + g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

■

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E. Тогда $f + g$ суммируема, причем

$$\int\limits_E (f + g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

- $(f + g)_{\pm} \leqslant |f + g| \leqslant |f| + |g|$, поэтому интегралы

  $$\int\limits_E (f + g)_{\pm}\,\mathrm{d}\mu$$

  конечны, то есть $f + g$ суммируема.

- Пусть $h = f + g$:

  $$\begin{aligned}
  &h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_- \Longrightarrow h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \Longrightarrow \\
  &\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+ \Longrightarrow \\
  &\int\limits_E (f + g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu
  \end{aligned}$$

■

Определение. $\mathcal{L}(X) = \left\{ f \mid f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \int |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$

Лемма 1.2.4. $\mathcal{L}(X)$ – линейное пространство.

Теорема 1.2.5. Пусть $u_n : X \to \mathbb{R}$, $u_n \geqslant 0$ почти везде, u_n измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_n(x)$, $0 \leqslant S_n(x) \leqslant S_{n+1}(x)$ почти везде, $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$. Тогда по теореме Леви:

$$\int\limits_E S\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_E S_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_E u_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

■

Следствие 1.2.6. Пусть u_n измеримы, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится абсолютно почти везде на E.

Доказательство.

$$\int\limits_E \sum_{i=1}^{+\infty} |u_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Поэтому ряд под первым интегралом сходится. ■

Теорема 1.2.7. (Абсолютная непрерывность интеграла)
Пусть f – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathcal{A}\colon\ \mu(E) < \delta \quad \left| \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $X_n = X(f \geqslant n)$. Тогда $X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$. Кроме того, поскольку f суммируема, она не может быть бесконечной на множестве меры, отличной от нуля, то есть $\mu(\bigcap X_n) = 0$.

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\colon \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Это выполнено потому, что отображение $A \mapsto \int\limits_A |f|$ – мера, то есть непрерывно сверху:

$$\int\limits_{X_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_{\bigcap X_n} |f|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- По ε положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Пусть теперь $\mu E < \delta$, вычислим интеграл:

$$\left| \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int\limits_E |f|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\cap X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{E\setminus X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu + n_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

■

Следствие 1.2.8. Пусть $e_n \in \mathcal{A}$, $\mu(e_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, f – суммируемая функция, тогда

$$\int\limits_{e_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$, $\langle Y, \mathcal{B}, \nu\rangle$ строим пространство $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu\rangle$.

Лемма 1.3.1. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – полукольцо.

Определение. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, назовем тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *полукольцом измеримых прямоугольников*. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0 \colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

Теорема 1.3.2.

- m_0 – мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- Если μ, ν σ-конечны, тогда m_0 тоже σ-конечна.

Определение. Мы получили $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0\rangle$ – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до σ-алгебры, которую будем обозначать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

Теорема 1.3.3. Произведение мер ассоциативно.

Теорема 1.3.4. $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$.

Определение. Пусть $C \subseteq X \times Y$. Тогда *сечением* для произвольного $x \in X$ назовем множество

$$C_x \overset{def}{=} \{\, y \in Y \mid (x, y) \in C \,\}.$$

Замечание. Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcup_\alpha (C_\alpha)_x.$$

Теорема 1.3.5. (Принцип Кавальери)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, тогда

- При почти всех x $C_x \in \mathcal{B}$.
- Отображение $x \mapsto \nu(C_x)$ измеримо на X.
- $m(C) = \displaystyle\int_X \nu(C_x)\, \mathrm{d}\mu$.

Следствие 1.3.6. Пусть $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $p_1(C) \in \mathcal{A}$, тогда

$$m(C) = \int\limits_{p_1(C)} \nu(C_x)\, \mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.3.7. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Замечание. Пусть $f \geqslant 0$, измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Определение. Пусть $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$. Зафиксируем $x \in X$ и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\to \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим $f_y : C_y \to \overline{\mathbb{R}}$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.3.8. (Тонелли)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **измерима** по мере m. Тогда

- При почти всех x f_x **измерима** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu = \int_Y f_x\,\mathrm{d}\nu$ **измеримо** на X.
- $\displaystyle\int_{X\times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}m = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$

Теорема 1.3.9. (Фубини)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **суммируема**. Тогда

- При почти всех x f_x **суммируема** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu = \int_Y f_x\,\mathrm{d}\nu$ **суммируемо** на X.
- $\displaystyle\int_{X\times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}m = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$

Следствие 1.3.10. Если $p_1(C)$ измеримо, то

$$\int_C f\,\mathrm{d}m = \int_{X\times Y} f\chi_C\,\mathrm{d}m = \int_X \left(\int_Y f\chi_C\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \int_{p_1(C)} \left(\int_{C_x} f\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$$

Замечание. Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

1. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \Longleftrightarrow \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \to 0.$
2. $\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$

Оказывается, верно $2 \Longrightarrow 1$, но без дополнительных требований неверно $1 \Longrightarrow 2$.

Теорема 1.3.11. (Лебега о мажорированной сходимости)
Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, $\exists g$:

- $\forall n \; |f_n| \leqslant g$ при почти всех x.
- g суммируема на X.

В такой ситуации g называется *Мажорантой*. Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\displaystyle\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$

Следствие 1.3.12. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.3.13. Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \to f$ почти везде, $\exists g$:

- $\forall n \; |f_n| \leqslant g$.
- g суммируема на X.

Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\displaystyle\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$

Следствие 1.3.14. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.3.15. (Фату)
Пусть $f_n \geqslant 0$, f_n измеримы, $f_n \to f$ почти везде. Если

$$\exists c > 0\colon\ \forall n \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

то

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

Следствие 1.3.16. Теорема Фату верна и в случае $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.

Следствие 1.3.17. Пусть $f_n \geqslant 0$, f_n измеримы, тогда

$$\int\limits_X \varliminf f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

1.4 Замена переменных в интеграле

Определение. Отображение $\Phi\colon X \to Y$ называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

Лемма 1.4.1. $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$ – σ-алгебра.

Определение. При фиксированном измеримом $\Phi\colon X \to Y$ отображение

$$\begin{aligned} \nu\colon \mathcal{B} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры μ при отображении* Φ.

Лемма 1.4.2. Образ меры при отображении является мерой.

Замечание. $\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, \mathrm{d}\mu$

Замечание. Если функция $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathcal{B}$, то $f \circ \Phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathcal{A}$.

Определение. Пусть $\omega\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geqslant 0$, измерима. В этом контексте ω называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры μ с весом ω* называется мера

$$\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, \mathrm{d}\mu$$

Теорема 1.4.3. (Об интегрировании по взвешенному образу меры)
Пусть $\Phi\colon X \to Y$ – измеримое отображение, $0 \leqslant \omega\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – весовая функция, измерима на X, ν – взвешенный образ меры μ с весом ω. Тогда для любой измеримой $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ верно:

- $f \circ \Phi$ измерима на X.
- $\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X (f \circ \Phi)\, \omega \, \mathrm{d}\mu$

Следствие 1.4.4. Пусть f суммируема на Y, $B \in \mathcal{B}$, тогда в условиях теоремы:

$$\int\limits_B f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi)\, \omega \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. В ситуации $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \mathrm{id}$, если $\omega \geqslant 0$ измерима, причем $\nu(B) = \int\limits_B \omega \, \mathrm{d}\mu$, ω называется *плотностью меры ν относительно меры μ*. В таком случае

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X f \, \omega \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.4.5. (Критерий плотности)
Пусть ν – мера на $\mathcal{A}$, $\omega \geqslant 0$ измерима, тогда верно, что ω – плотность ν относительно μ тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \inf_A \omega \cdot \mu(A) \leqslant \nu(A) \leqslant \sup_A \omega \cdot \mu(A).$$

Лемма 1.4.6. Пусть f, g – суммируемые на X функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Тогда $f = g$ почти везде.

Лемма 1.4.7. (Об образе малых кубических ячеек)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$, Φ дифференцируемо в $\mathbf{a}$, $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$, $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 \;\forall Q – \text{куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \;\; \lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

Лемма 1.4.8. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathcal{O})$, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq Q$, Q – куб, причем $\mathrm{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$. Тогда

$$\inf_{\substack{A \subset G \\ G \text{ открыто}}} \left(\lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

Теорема 1.4.9. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq \mathcal{O}$, тогда

$$\lambda\Phi(A) = \int\limits_A |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_m.$$

Теорема 1.4.10. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$, f – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}^1} f(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{\mathcal{O}} f(\Phi(x)) \, |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Замечание. То же верно и в случае, когда f суммируема.

1.5 Функции распределения

Определение. Пусть $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, причем $\forall t \in \mathbb{R}$ $\mu X(h < t) < +\infty$. Тогда функция $H(t) = \mu X(h < t)$ называется *функцией распределения h по мере* μ.

Замечание. $H(t)$ не убывает.

Замечание. Пусть h измерима, тогда для любого борелевского $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $h^{-1}(B)$ измерим.

Определение. Стандартное продолжение $\mu_H([a,b)) = H(b-0) - H(a-0)$ называется *мерой Бореля-Стилтьеса*.

Лемма 1.5.1. Пусть $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения. Тогда на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu_H = H(\mu)$.

Теорема 1.5.2. Пусть $0 \leqslant f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, измеримая по Борелю, $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения, μ_H – мера Бореля-Стилтьеса для H. Тогда

$$\int\limits_X f \circ h \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu_H.$$

Глава 2

Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностный интеграл I рода

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$, $\varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ – параметризация M, тогда $E \subseteq M$ называется *измеримым*, если $\varphi^{-1}E \in \mathfrak{M}^2$.

Определение. Введем обозначение:

$$\mathcal{A}_M \overset{def}{=} \{E \subseteq M \mid E \text{ измеримо}\}.$$

Замечание. $\mathcal{A}_M$ – σ-алгебра.

Определение. На $\mathcal{A}_M$ заведем меру:

$$\begin{aligned} S\colon \mathcal{A}_M &\to \overline{\mathbb{R}} \\ E &\mapsto \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Замечание. Замкнутые, открытые, компактные $E \subset M$ измеримы.

Лемма 2.1.1. S не зависит от выбора параметризации.

Определение. $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по мере S, если $f \circ \varphi$ измерима на $\mathcal{O}$ по мере λ.

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие, φ – его параметризация, $0 \leqslant f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по S, тогда *поверхностным интегралом I рода* назовем интеграл

$$\iint\limits_M f \,\mathrm{d}S.$$

Или развернуто, пользуясь теоремой об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\iint\limits_M f \,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\varphi^{-1}(M)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^3$ назовем *кусочно-гладким многообразием в* $\mathbb{R}^3$, если M представляется в виде конечного дизъюнктного объединения объектов вида

- простое гладкое двумерное многообразие.
- простое гладкое одномерное многообразие (носитель гладкого пути).
- точка.

Определение. Мера S на кусочно-гладком многобразии $E = \bigsqcup_i M_i$ вычисляется следующим образом:

$$S(E) = \sum_i S(E \cap M_i).$$

2.2 Поверхностный интеграл II рода

Определение. *Поверхностью* будем называть простое гладкое двумерное многообразие.

Определение. *Стороной поверхности* называется непрерывное векторное поле единичных нормалей к этой поверхности.

Определение. Поверхность называется *двусторонней*, если для неё существует непрерывное поле нормалей. Иначе она называется *односторонней*.

Пример. Лента Мебиуса – односторонняя поверхность.

Определение. *Репером* называется пара линейно независимых касательных векторов.

Определение. Пусть Ω – двусторонняя поверхность в $\mathbb{R}^3$, $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, $n_0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – сторона поверхности. Тогда *интегралом II рода функции F по поверхности Ω* назовем интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S.$$

Замечание.

- Смена стороны на противоположную влечет замену знака.
- Интеграл II рода не зависит от параметризации.
- Пусть $F = \langle P, Q, R\rangle$. Тогда интеграл II рода записывают так:

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} P \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q \, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Пусть поверхность задана параметризацией $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$. Получим нормальный вектор, перемножив векторно касательные векторы:

$$n = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right)^T.$$

Мера S выгдялит следующим образом:

$$\mathrm{d}S = \left\| \varphi'_u \times \varphi'_v \right\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \|n\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\|n\|} \cdot \|n\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$\iint\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Замечание. Посчитаем интеграл поля $\langle 0,0,R\rangle$ по поверхности Ω, заданной графиком (то есть, имеющей параметризацию вида $x,y,z(x,y)$).

$$\iint\limits_{\Omega^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Замечание. Попробуем посчитать объём фигуры Ω, ограниченной графиками z_1, z_2:

$$\lambda_3(\Omega) = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} (z_1(x,y) - z_2(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} z_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} z_2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint\limits_{\partial\Omega^+} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

В последнем переходе мы воспользовались предыдущим замечанием и тем, что у нижней части фигуры (ограниченной z_1) нормали направлены в другую сторону.

Замечание. Пусть γ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$ (лежит в плоскости xy), Ω – цилиндр над γ. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Доказательство.
Первое доказательство: по формуле из первого замечания мы собираемся интегрировать какую-то функцию по носителю пути по двумерной мере. Носитель гладкого пути по такой мере всегда имеет меру 0.
Второе доказательство: мы пытаемся интегрировать $\langle F, n_0\rangle$. Заметим, что у F не равна нулю только третья координата (R), тогда как вектор нормали к цилиндру над xy всегда имеет $z = 0$. Таким образом, мы интегрируем функцию, тождественно равную нулю. ∎

Глава 3

Основные интегральные формулы

3.1 Формула Грина

Замечание. В данном контексте рассматривается D: компактное, связное, односвязное множество в $\mathbb{R}^2$, ограниченное кусочно-гладкой кривой. При этом граница ∂D направлена против часовой стрелки (фигура всегда находится слева).

Теорема 3.1.1. (Формула Грина)
Пусть P, Q – гладкие векторные поля в $U(D)$. Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

Замечание. Формула "аддитивна"по фигуре.

3.2 Формула Стокса

Замечание. В данном контексте рассматривается Ω – двусторонняя поверхность с границей. n_0 – её сторона. $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая, согласованная по ориентации со стороной поверхности.

Теорема 3.2.1. (Формула Стокса)
Пусть $\langle P, Q, R\rangle$ – гладкое векторное поле в $U(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Omega} (R'_y - Q'_z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P'_z - R'_x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y + (Q'_x - P'_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Замечание. Формула "аддитивна"по фигуре.

3.3 Формула Гаусса-Остроградского

Замечание. В данном контексте рассматриваются

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, f(x, y) \leqslant z \leqslant F(x, y)\}.$$

Здесь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ – замкнутое множество, $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $f, F \in C^1(\Omega)$. Рассматриваем внешнюю сторону фигуры.

Теорема 3.3.1. (Формула Гаусса-Остроградского)
Пусть $R\colon U(V) \to \mathbb{R}$, $R \in C^1(U(V))$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Следствие 3.3.2. В условиях формулы Гаусса-Остроградского, верно

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Следствие 3.3.3. Пусть l – фиксированное направление в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial l}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} f \cdot \langle l, n_0\rangle\,\mathrm{d}S.$$

3.4 Примеры дифференциальных операторов

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R\rangle$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда *дивергенцией* A называется

$$\mathrm{div} A \overset{def}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Замечание. Дивергенцию поля в точке можно вычислять так:

$$\mathrm{div} A(a) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iiint\limits_{B(a,r)} \mathrm{div} A\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iint\limits_{S(a,r)} \langle A, n_0\rangle\,\mathrm{d}S.$$

Последнюю формулу можно интерпретировать как величину потока, проходящего через сферу с центром в данной точке достаточно малого радиуса. То есть, дивергенция характеризует точку как “источник” поля.

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R\rangle$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда *ротором* A называется

$$\mathrm{rot} A \overset{def}{=} \langle R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\rangle.$$

Замечание. $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{O}$ – односвязная область, $\mathrm{rot}\, V = 0$. Тогда V потенциально.

Замечание. $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{O}$ – односвязная область, $\mathrm{rot}\, V = 0$. Тогда

- Если γ – петля, то
$$\int\limits_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0.$$

- Если γ – путь, то интеграл

$$\int\limits_{\gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

  зависит только от начальной и конечной точек пути.

Замечание. Если $\mathcal{O}$ не односвязна, но $\operatorname{rot} V = 0$, то все равно интеграл по пути не зависит от самого пути.

Если в поле нет источников, то откуда может взяться поток через поверхность?

Замечание. $\operatorname{div} V = 0$, тогда для любой "разумной" фигуры Ω выполнено

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \langle V, n_0 \rangle\,\mathrm{d}S = 0.$$

Определение. Поле V называется *соленоидальным* в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, если у него существует векторный потенциал, то есть $\exists B$ – векторное поле такое, что $\operatorname{rot} B = V$ на Ω.

Теорема 3.4.1. (Критерий соленоидальности поля)
A соленоидально в $\Omega \Longleftrightarrow \operatorname{div} A = 0$ на Ω

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Пространство L^p

Определение. Комплексное отображение $f : X \to \mathbb{C}$ назовем *измеримым*, если $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h \colon X \to \mathbb{R}$, причем g, h измеримы.

Определение. Аналогично определим *суммируемые* комплексные отображения.

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h \colon X \to \mathbb{R}$. Тогда определим интеграл:

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \int\limits_E g \, \mathrm{d}\mu + i \int\limits_E h \, \mathrm{d}\mu.$$

Замечание.

$$\left| \int\limits_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int\limits_E |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 4.1.1. (Интегральное неравенство Гёльдера)
Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g : X \to \mathbb{C}$ – измеримые почти везде заданные функции. Тогда

$$\int\limits_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 4.1.2. (Интегральное неравенство Минковского)
Пусть $f, g : X \to \mathbb{C}$, $p \geqslant 1$, тогда

$$\left(\int\limits_X |f + g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_X |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. Пусть $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой. Тогда для $1 \leqslant p < +\infty$ положим

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \stackrel{def}{=} \left\{ f : \text{п.в. } X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима}, \int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ – линейное пространство.

Определение. Зададим на $\mathcal{L}^p$ отношение эквивалентности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ почти везде. Положим

$$L^p(X,\mu) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim.$$

Определение. В L^p заведем норму: $\|[f]\| \stackrel{def}{=} \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Определение. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ задана почти везде. Тогда *существенным супремумом* f называется

$$\operatorname*{ess\,sup}_X f \stackrel{def}{=} \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leqslant A \text{ п.в.}\}.$$

Теорема 4.1.3. (Свойства существенного супремума)

- $\operatorname{ess\,sup}_X f \leqslant \sup_X f$.
- $f(x) \leqslant \operatorname{ess\,sup}_X f$ при почти всех x.
- $\left|\int_X f g \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_X |f| \cdot \int_X |g|$.

Определение. Для $p = \infty$:

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \stackrel{def}{=} \left\{f : \text{п.в. } X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима}, \operatorname*{ess\,sup}_X f < +\infty\right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ – линейное пространство.

Определение. Пространство L^∞ зададим аналогично конечному случаю. Нормой на этом пространстве положим $\operatorname{ess\,sup}$.

Теорема 4.1.4. (О вложении пространств L^p)
Пусть $\mu(X) < +\infty$, $1 \leqslant r < s \leqslant +\infty$. Тогда

- $L^r(X,\mu) \subset L^s(X,\mu)$.
- $\|f\|^s \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$.

Следствие 4.1.5. Пусть $\mu(E) < +\infty$, $1 \leqslant s < r \leqslant +\infty$, $f_n, f \in L^s$, $f_n \xrightarrow[L^r]{} f$, тогда $f_n \xrightarrow[L^s]{} f$.

Теорема 4.1.6. (О сходимости в L^p и по мере)
Пусть $1 \leqslant r < +\infty$, $f_n, f \in L^p$, тогда

- $f_n \xrightarrow[L^p]{} f \Longrightarrow f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, либо $f_n \to f$ почти везде, тогда если $\exists g \in L^p:\ |f_n| \leqslant g$, то $f_n \xrightarrow[L^p]{} f$.

Замечание. L^∞ – полное метрическое пространство.

Теорема 4.1.7. (Полнота пространств L^p)
$\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty$ L^p полно.

Определение. Пусть X – топологическое пространство, тогда множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если $\mathrm{Cl}(A) = X$. Иначе говоря, $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$, или $\forall x \in X\ \forall U(x)\ U(x) \cap A \neq \varnothing$.

Определение. Множество всех ступенчатых функций $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим $St(X)$.

Лемма 4.1.8. Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, тогда множество $St(X) \cap L^p$ плотно в L^p.

Определение. (Четвертая аксиома отделимости)
Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нем любые два замкнутые непересекающиеся множества отделимы, причем любое одноточечное множество замкнуто.

Лемма 4.1.9. (Урысон)
Пусть X – нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, такая, что

- $0 \leqslant f \leqslant 1$.
- $f\Big|_{F_0} = 0$.
- $f\Big|_{F_1} = 1$.

Определение. *Финитной функцией в* $\mathbb{R}^m$ называется функция f такая, что

$$\exists B(a, r) \colon\ f\Big|_B = 0.$$

По умолчанию, f непрерывна.

Теорема 4.1.10. Множество финитных функций плотно в L^p при $1 \leqslant p < +\infty$.

Замечание. Условие $p \neq +\infty$ существенно.

Определение. Множество непрерывных T-периодических функций будем обозначать $\widetilde{C}([0, T])$.

Теорема 4.1.11. (О непрерывности сдвига)
Пусть $f_h(x) = f(x + h)$. Тогда

- f равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.
- $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p \Longrightarrow \|f_h - f\|_p \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.
- $f \in \widetilde{C}([0, T]) \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.
- $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p([0, T]) \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

4.2 Гильбертовы пространства

Определение. *Гильбертовым пространством* называется линейное пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением, полное как метрическое пространство с метрикой и нормой, порожденными скалярным произведением:

- $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
- $\|\ \| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$.
- $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

Далее $\mathcal{H}$ – Гильбертово пространство.

Определение. Ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \in \mathcal{H}$, называется *сходящимся*, если $S_N \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i$ таково, что $\exists S \in \mathcal{H}: \ \|S_N - S\| \to 0$. Иными словами, последовательность частичных сумм ряда сходится к элементу $\mathcal{H}$.

Определение. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Longleftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Определение. Пусть $A \subseteq \mathcal{H}$. Тогда по определению $\mathbf{x} \perp A \Longleftrightarrow \forall \mathbf{y} \in A\ \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$.

Определение. Ряд называется *ортогональным*, если все его элементы попарно ортогональны.

Теорема 4.2.1. (Свойства сходимости в Гильбертовых пространствах)
Пусть $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in \mathcal{H}$. Тогда

- $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}_0 \Longrightarrow \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle \to \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle$.
- Пусть ряд $\sum \mathbf{x}_k$ сходится. Тогда $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}\ \langle \sum \mathbf{x}_k, \mathbf{y} \rangle = \sum \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y} \rangle$.
- Пусть ряд $\sum \mathbf{x}_k$ ортогонален. Тогда $\sum \mathbf{x}_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum \|\mathbf{x}_k\|^2$ сходится. Более того, в этом случае $\left\|\sum \mathbf{x}_k\right\|^2 = \sum \|\mathbf{x}_k\|^2$.

Определение. *Ортогональным семейством векторов* называется $\{\,\mathbf{e}_k\,\} \subseteq \mathcal{H}$ такое, что $\mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_{j \neq k}$. Если более того $\|\mathbf{e}_k\| = 1$, то семейство называется *ортонормированным*.

Определение. $L_2 \overset{def}{=} L^2([0, 2\pi], \lambda_1)$.

Теорема 4.2.2. Пусть $\{\,\mathbf{e}_k\,\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \mathbf{e}_k$. Тогда

- ОС линейно независима.
- $c_k = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k, \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$.
- $c_k \mathbf{e}_k = \mathcal{P}^{\perp}_{\{t\mathbf{e}_k\}}$, то есть $\mathbf{x} = c_k \mathbf{e}_k + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \perp \mathbf{e}_k$.

4.3 Ряды фурье

Определение. Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, тогда числа $c_k(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$ называются *коэффициентами фурье вектора* $\mathbf{x}$ *по системе* $\mathbf{e}_k$.

Определение. Ряд $\sum_k c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k$ называется *рядом Фурье* $\mathbf{x}$ *по* $\mathbf{e}_k$.

Замечание. При перенормировке ОС ряд Фурье не меняется.

Теорема 4.3.1. (О свойстах частичных сумм ряда Фурье)
Пусть $\mathcal{L} = Lin(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Тогда

- $S_n = \mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$, то есть $\mathbf{x} = S_n + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \perp \mathcal{L}$.
- S_n – элемент наилучшего приближения $\mathbf{x}$ в $\mathcal{L}$, то есть $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{L}\ \ \|S_n - \mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.
- $\|S_n\| \leqslant \|\mathbf{x}\|$.

Следствие 4.3.2. (Неравенство Бесселя)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \, \|\mathbf{e}_l\|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

Теорема 4.3.3. (Рисс, Фишер)
Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$. Тогда

- Ряд Фурье $\mathbf{x}$ сходится в $\mathcal{H}$.
- $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k + \mathbf{z}$, $\forall k\ \mathbf{z} \perp \mathbf{e}_k$.
- $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k \Longleftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \, \|\mathbf{e}_k\|^2$.

Определение. *Равенство Парсиваля*, или *уравнение замкнутости*:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \, \|\mathbf{e}_k\|^2.$$

4.4 Базис в Гильбертовом пространстве

Определение. *Базисом* в Гильбертовом пространстве называется ОС $\{\mathbf{e}_k\}$, если выполняется условие:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}\ \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k.$$

Определение. ОС $\{\mathbf{e}_k\}$ называется *полной*, если

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}\colon\ \{\mathbf{e}_k\} \cup \mathbf{x} \text{ – не ОС.}$$

Определение. ОС $\{\mathbf{e}_k\}$ называется *замкнутой*, если для любого её элемента выполняется уравнение замкнутости.

Теорема 4.4.1. (Характеризация базиса)
Пусть $E = \{\mathbf{e}_k\}$ – ОС. Тогда эквивалентны утверждения:

- E – базис.
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x}) \cdot \overline{c_k(\mathbf{y})} \cdot \|\mathbf{e}_k\|^2$
- E замкнута.
- E полна.
- $Lin(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots)$ плотно в $\mathcal{H}$.