

# **Математический анализ III**

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Интеграл</b>	<b>2</b>
1.1	Определение интеграла . . . . .	2
1.2	Предельный переход под знаком интеграла . . . . .	7
1.3	Произведение мер . . . . .	10
1.4	Замена переменных в интеграле . . . . .	19
1.5	Функции распределения . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Поверхностные интегралы</b>	<b>26</b>
2.1	Поверхностный интеграл I рода . . . . .	26
2.2	Поверхностный интеграл II рода . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Основные интегральные формулы</b>	<b>30</b>
3.1	Формула Грина . . . . .	30
3.2	Формула Стокса . . . . .	30
3.3	Формула Гаусса-Остроградского . . . . .	30
3.4	Примеры дифференциальных операторов . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>33</b>
4.1	Пространство $L^p$ . . . . .	33
4.2	Гильбертовы пространства . . . . .	36
4.3	Ряды Фурье . . . . .	37
4.4	Базис в Гильбертовом пространстве . . . . .	37

# Глава 1

## Интеграл

### 1.1 Определение интеграла

Общий контекст:  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  — пространство с мерой

**Определение.** Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна}\}.$$

**Определение.** Пусть  $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{f \text{ in}} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все  $E_k$  измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

**Определение.** Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \lambda_k \mu(E \cap E_k).$$

**Теорема 1.1.1.** (Свойства интеграла ступенчатой функции)

1. Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
2.  $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $f = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k} = \sum_j \alpha_j \chi_{F_j}$ . Тогда  $f = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j} = \sum_{k,j} \alpha_j \chi_{E_k \cap F_j}$ . Пользуясь этим, перепишем интеграл:

$$\int_1 f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \sum_k \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int_2 f.$$

2. Воспользуемся общим допустимым разбиением:

$$\int f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_{k,j} \lambda_k \mu(E_k \cap F_j) \leq \sum_{k,j} \alpha_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int g.$$

■

**Определение.** Пусть  $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, d\mu.$$

**Определение.** Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, d\mu.$$

**Теорема 1.1.2.** (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leq \int f \, d\mu \leq +\infty$ .
- $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  ступенчатая,  $f$  измеримая, тогда  $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ .
- $0 \leq g \leq f$ ,  $f, g$  измеримы, тогда  $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ .

*Доказательство.*

1. Очевидно, так как супремум реализуется на самой интегрируемой функции.
3. Поскольку  $g$  – ступенчатая и  $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  входит в супремум из определения интеграла  $f$ , поэтому автоматически  $\int g \leq \int f$ .
2. Все ступенчатые функции, супремум по которым берется в определении интеграла функции  $g$ , входят так же и в супремум для интеграла  $f$ , так как  $0 \leq h \leq g \leq f$ .

■

**Определение.** Пусть  $f$  — измеримая функция  $X$ , причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

**Определение.** Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu.$$

**Определение.** Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

**Теорема 1.1.3.** (Свойства интеграла)

1. Измеримая  $f \geq 0 \implies$  интеграл совпадает с предыдущим определением.
2.  $f$  суммируема  $\iff \int |f| d\mu < +\infty$ .
3. Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых  $f, g$  верно:

$$f \leq g \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

$$4. \int_E 1 d\mu = \mu(E), \int_E 0 d\mu = 0.$$

5. Пусть  $\mu(E) = 0$ ,  $f$  измерима. Тогда

$$\int_E f d\mu = 0.$$

$$6. \int -f d\mu = - \int f d\mu, \forall c > 0 \int c \cdot f d\mu = c \cdot \int f d\mu.$$

7. Пусть  $\exists \int_E f d\mu$ , Тогда

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

8. Пусть  $f$  измерима на  $E$ ,  $\mu(E) < +\infty$ ,  $\forall x \in E A \leq f(x) \leq B$ , тогда

$$A \cdot \mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq B \cdot \mu(E).$$

*Доказательство.*

2. Следует из аддитивности интеграла по функции, что будет доказано позже.
1. Для неотрицательных  $f, g$  это уже было доказано. Для произвольных воспользуемся определением и тем соображением, что  $f^+ \leq g^+$  и  $f^- \geq g^-$ :

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \leq \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g.$$

5. Если  $f$  ступенчатая, то утверждение очевидно. Если  $f \geq 0$  и измерима, то супремум из определения равен нулю. Если  $f$  – произвольная измеримая функция, то  $\int f = \int f^+ - \int f^- = 0$ .

2. Очевидным образом следует из определений и того, что  $\sup cA = c \sup A$ .

3.  $-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$ .

■

**Лемма 1.1.4.** Пусть  $A = \bigsqcup_i A_i$ ,  $A, A_i \in \mathcal{A}$ ,  $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $g \geq 0$ , ступенчатая. Тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

*Доказательство.* Пусть  $g = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k}$ , тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A).$$

Воспользуемся счетной аддитивностью меры:

$$\sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i).$$

Последний ряд сходится абсолютно, поэтому можно переставить порядок суммирования:

$$\sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

■

**Теорема 1.1.5.** Пусть  $A = \bigsqcup_i A_i$ ,  $A, A_i \in \mathcal{A}$ ,  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , измерима на  $A$ . Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

*Доказательство.*

( $\leq$ ) Левая часть равенства аппроксимируется ступенчатыми функциями  $0 \leq g \leq f$ . Для них имеем:

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Теперь имеем:

$$\int_A f \, d\mu = \sup \int_A g \, d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

( $\geq$ ) Для начала рассмотрим случай, когда  $A = A_1 \sqcup A_2$ . Рассмотрим ступенчатую функцию  $0 \leq g \leq f$  и функции  $g_1, g_2$  такие, что  $g_i|_{A_i} = g$ ,  $g_i|_{A_i^c} = 0$ . Очевидно, что  $g_1 + g_2 = g$  на  $A$ . Тогда по построению:

$$\int_{A_1} g_1 d\mu + \int_{A_2} g_2 d\mu = \int_A (g_1 + g_2) d\mu = \int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

Возьмём супремум от обеих частей сначала по  $g_1$ , потом по  $g_2$ :

$$\int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

Теперь разберемся с бесконечным случаем. Пусть  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$ , где  $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$ . Тогда, пользуясь уже доказанным фактом для конечных разбиений, имеем:

$$\int_A f d\mu \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f d\mu + \int_{B_n} f d\mu \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f d\mu.$$

Совершая предельный переход при  $n \rightarrow +\infty$ , имеем:

$$\int_A f d\mu \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

■

**Следствие 1.1.6.** Пусть  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , измерима. Зададим отображение:

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{A} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ E &\mapsto \int_E f d\mu \end{aligned}$$

Тогда  $\nu$  – мера.

*Доказательство.* Единственное, что нужно проверить, это счетную аддитивность. Она как раз и проверена в теореме. ■

**Лемма 1.1.7.** Пусть  $f$  суммируема,  $g$  измерима, причем  $f = g$  при почти всех  $x$ .

Тогда  $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ .

*Доказательство.* Пусть  $e \in \mathcal{A}$ :  $\mu e = 0$ ,  $f = g$  на  $E \setminus e$ . Тогда

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus e} f d\mu + \int_e f d\mu = \int_{E \setminus e} f d\mu = \int_{E \setminus e} g d\mu = \int_{E \setminus e} g d\mu + \int_e g d\mu = \int_E g d\mu.$$

■

## 1.2 Пределный переход под знаком интеграла

**Теорема 1.2.1.** (Леви)

Пусть  $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , измеримы,  $\forall n$   $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  при почти всех  $x \in X$ . Пусть  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$ . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

*Доказательство.* Для начала отметим, что  $f$  измерима, как предел измеримых функций, поэтому её интеграл имеет смысл.

( $\geq$ ) Очевидно, поскольку  $f(x) \geq f_n(x)$ .

( $\leq$ ) Докажем, что  $\forall g: 0 \leq g \leq f$ ,  $g$  – ступенчатая,  $\forall c \in (0, 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X g \, d\mu$ . Пусть  $E_n = X(f_n \geq cg)$ . Очевидно, что  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ . Кроме того,  $\bigcup E_n = X$ , потому что либо  $\forall x \, f(x) > g(x)$  или  $f(x) = g(x)$ , но  $c < 1$ , поэтому всегда  $f(x) > cg(x)$ .

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{E_n} g \, d\mu.$$

Совершим переход при  $n \rightarrow +\infty$  в неравенстве:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} g \, d\mu.$$

Воспользуемся тем, что  $E \mapsto \int_E g \, d\mu$  – мера, то есть обладает свойством непрерывности снизу:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X g \, d\mu.$$

Из этого неравенства очевидно следует:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X g \, d\mu.$$

Возьмем теперь супремум по  $g$  от обеих частей и получим требуемое. ■

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $f, g \geq 0$ , измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$



*Доказательство.* Аппроксимируем  $f, g$  ступенчатыми функциями  $f_n, g_n$ . Теорема об аппроксимации поставляет такие  $f_n, g_n$ , что  $0 \leq f_n \leq f$  и  $0 \leq g_n \leq g$ .  $f_n, g_n$  ступенчатые, поэтому

$$\int_E (f_n + g_n) d\mu = \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu.$$

По теореме Леви переходим к пределу при  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

■

**Следствие 1.2.3.** Пусть  $f, g$  суммируемы на  $E$ . Тогда  $f + g$  суммируема, причем

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

*Доказательство.*

- $(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|$ , поэтому интегралы

$$\int_E (f + g)_\pm d\mu$$

конечны, то есть  $f + g$  суммируема.

- Пусть  $h = f + g$ :

$$\begin{aligned} h_+ - h_- &= f_+ - f_- + g_+ - g_- \implies h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \implies \\ \int h_+ + \int f_- + \int g_- &= \int h_- + \int f_+ + \int g_+ \implies \\ \int_E (f + g) d\mu &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \end{aligned}$$

■

**Определение.**  $\mathcal{L}(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \int |f| d\mu < +\infty\}$

**Лемма 1.2.4.**  $\mathcal{L}(X)$  – линейное пространство.

**Теорема 1.2.5.** Пусть  $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_n \geq 0$  почти везде,  $u_n$  измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

**Доказательство.** Пусть  $S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)$ ,  $0 \leq S_n(x) \leq S_{n+1}(x)$  почти везде,  $S(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ . Тогда по теореме Леви:

$$\int_E S \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_n(x) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \int_E u_i(x) \, d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E u_i(x) \, d\mu.$$

■

**Следствие 1.2.6.** Пусть  $u_n$  измеримы, причем  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| \, d\mu < +\infty$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  сходится абсолютно почти везде на  $E$ .

**Доказательство.**

$$\int_E \sum_{i=1}^{+\infty} |u_i| \, d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E |u_i| \, d\mu < +\infty.$$

Поэтому ряд под первым интегралом сходится.

■

**Теорема 1.2.7.** (Абсолютная непрерывность интеграла)

Пусть  $f$  – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{A}: \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Пусть  $X_n = X(f \geq n)$ . Тогда  $X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \dots$ . Кроме того, поскольку  $f$  суммируема, она не может быть бесконечной на множестве меры, отличной от нуля, то есть  $\mu(\bigcap X_n) = 0$ .

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon: \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Это выполнено потому, что отображение  $A \mapsto \int_A |f|$  – мера, то есть непрерывно сверху:

$$\int_{X_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\bigcap X_n} |f| \, d\mu = 0.$$

- По  $\varepsilon$  положим  $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ . Пусть теперь  $\mu E < \delta$ , вычислим интеграл:

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu + \int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu + n_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

■

**Следствие 1.2.8.** Пусть  $e_n \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $f$  – суммируемая функция, тогда

$$\int_{e_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

### 1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ ,  $\langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$  строим пространство  $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu \rangle$ .

**Лемма 1.3.1.**  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – полукольца, тогда  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  – полукольцо.

**Определение.**  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – полукольца, назовем тогда  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  полукольцом измеримых прямоугольников. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0: \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

**Теорема 1.3.2.**

- $m_0$  – мера на полукольце  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .
- Если  $\mu$ ,  $\nu$   $\sigma$ -конечны, тогда  $m_0$  тоже  $\sigma$ -конечна.

*Доказательство.*

- Достаточно доказать счетную аддитивность. Пусть  $P = \bigsqcup P_i$ ,  $P, P_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ,  $P = A \times B$ ,  $P_i = A_i \times B_i$ . Заметим, что верны утверждения:

$$\chi_P(x, y) = \sum_i \chi_{P_i}(x, y), \quad \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_i \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y).$$

Проинтегрируем последнее равенство по мере  $\nu$  в  $Y$ :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) \cdot \int_B \chi_B(y) d\nu &= \sum_i \chi_A(x) \cdot \int_B \chi_{B_i}(y) d\nu \\ \chi_A(x) \cdot \nu B &= \sum_i \chi_A(x) \cdot \nu B \end{aligned}$$

Интегрируя второй раз по переменной  $x$  по мере  $\mu$ , получаем:

$$\mu A \nu B = \sum_i \mu A_i \nu B_i.$$

- Пусть  $X = \bigcup X_i$ ,  $Y = \bigcup Y_i$ ,  $\mu X_k < +\infty$ ,  $\nu Y_k < +\infty$ , тогда

$$X \times Y = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j, \quad m_0(X_k \times Y_j) = \mu X_k \nu Y_j < +\infty$$

■

**Определение.** Мы получили  $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0 \rangle$  – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до  $\sigma$ -алгебры, которую будем обозначать  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

**Теорема 1.3.3.** Произведение мер ассоциативно.

**Теорема 1.3.4.**  $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$ .

**Определение.** Пусть  $C \subseteq X \times Y$ . Тогда *сечением* для произвольного  $x \in X$  назовем множество

$$C_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}.$$

**Замечание.** Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha}\right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_{\alpha})_x.$$

**Теорема 1.3.5.** (Принцип Кавальери)

Пусть  $\mu, \nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu$ ,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , тогда

1. При почти всех  $x$   $C_x \in \mathcal{B}$ .
2. Отображение  $x \mapsto \nu C_x$  измеримо на  $X$ .

$$3. m(C) = \int_X \nu C_x d\mu.$$

*Доказательство.* Пусть множество  $D \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  – элементы  $X \times Y$ , для которых принцип Кавальери верен.

- Запасем какие-нибудь простые множества в  $D$ . А именно,  $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$  верно, что  $C = A \times B \in D$ . Проверим это:

1.  $C_x = B \in \mathcal{B}$  или  $\emptyset$ , в обоих случаях измеримо.
2.  $x \mapsto \nu C_x = \nu B \chi_A(x)$  – очевидно измерима.
3. Вычислим интеграл:

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu B \chi_A(x) d\mu = \int_A \nu B d\mu = \mu A \nu B = mC.$$

- Пусть теперь  $E = \bigsqcup_i E_i$ ,  $E_i \in D$ . Тогда  $E \in D$ .

1.  $E_x = \bigsqcup_i (E_i)_x$  – измеримо почти везде, потому что  $(E_i)_x$  измеримы почти везде.
2.  $x \mapsto \nu E_x = \sum_i \nu(E_i)_x$  – измерима как сумма измеримых функций.
3. Считаём:

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \sum_i \nu(E_i)_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum_i m(E_i) = mE.$$

- Пусть  $E_i \in D$ ,  $E_1 \supseteq \dots$ ,  $\bigcap E_i = E$ ,  $mE_i < +\infty$ . Тогда  $E \in D$ . Для начала заметим, что

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty.$$

Поэтому почти везде  $\nu(E_i)_x < +\infty$ .

1. При почти всех  $x$  одновременно измеримы все  $(E_i)_x$ , поэтому измеримо множество  $\bigcap (E_i)_x = E_x$ .
2. Пользуясь непрерывностью меры сверху получаем, что функция  $x \mapsto \nu E_x = \lim \nu(E_i)_x$  измерима как предел измеримых функций.
3. Считаем:

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim \nu(E_i)_x d\mu.$$

По теореме Лебега, которую мы пока не знаем, можно вынести предел из под знака интеграла в случае, когда подынтегральное выражение можно мажорировать суммируемой функцией, не зависящей от  $i$ :

$$\nu(E_i)_x \leq \nu(E_1)_x.$$

Последняя функция суммируема, поэтому

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim \nu(E_i)_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim m(E_i) = mE.$$

Последнее равенство верно в силу непрерывности меры  $m$  сверху.

- Если  $A_{i,j} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , то  $\bigcap_j \bigcup_i A_{i,j} \in D$ . Сделаем множества  $A_{i,j}$  дизъюнктными (пользуясь стандартной техникой, мы останемся в полукольце), а затем сделаем множества  $\bigcup_i \hat{A}_{i,j}$  убывающими, взяв в  $\tilde{A}_0 = \hat{A}_{i,j}, \dots, \tilde{A}_n = \bigcup_{i=1}^n \hat{A}_{i,j}$ .
- Покажем, что если  $mE = 0$ , то  $E \in D$ . Аппроксимируем  $E$  сериями прямоугольников  $P_{i,j}$  (из теоремы о стандартном продолжении меры): пусть  $H = \bigcap_i \bigcup_j P_{i,j}$ , очевидно, что  $E \subset H \in D$ ,  $mH = 0$ . Обладая этими знаниями, проверим, что  $E \in D$ :

1. Поскольку  $H \in D$ :

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \implies \nu H_x = 0 \text{ при п.в. } x.$$

Пользуясь полнотой меры  $\nu$  и тем фактом, что  $E_x \subset H_x$ , получаем, что  $\nu E_x = 0$  при почти всех  $x$ .

2. Отображение  $x \mapsto \nu E_x$  измеримо как отображение, почти всюду равное нулю.

3. Поскольку  $\nu E_x = 0$  почти везде, очевидно, что  $\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$ .

- Покажем, что если  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $mC < +\infty$ , то  $C \in D$ .  $\exists e: me = 0$ ,  $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{i,j}$ ,  $H = C \setminus e$ ,  $mC = mH$  (как в предыдущем пункте, из теоремы о стандартном продолжении меры).

1.  $C_x = H_x \setminus e_x$  – измеримо как разность измеримых множеств.

2.  $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$  – измерима как разность измеримых функций.

3. Считаем:

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = \int_X \nu e_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC.$$

- Пусть, наконец,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Пусть  $X = \bigsqcup_i X_i$ ,  $Y = \bigsqcup_j Y_j$  (пользуемся  $\sigma$ -конечностью мер), тогда:

$$C = \bigsqcup_{i,j} C \cap (X_i \times Y_j) \in D.$$

■

**Следствие 1.3.6.** Пусть  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $p_1(C) \in \mathcal{A}$ , тогда

$$m(C) = \int_{p_1(C)} \nu(C_x) d\mu.$$

**Следствие 1.3.7.** Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C$ , тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

*Доказательство.* Достаточно доказать утверждение для  $f \geq 0$ . Поскольку  $f$  непрерывна, множество  $C = \Pi\Gamma(f, [a, b])$  измеримо в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда  $C_x = [0, f(x)]$  – измеримо,  $\lambda_1 C_x = f(x)$ . Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1.$$

■

**Замечание.** Пусть  $f \geq 0$ , измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

**Определение.** Пусть  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $C \in X \times Y$ . Зафиксируем  $x \in X$  и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим  $f_y : C_y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  для всех  $y \in Y$ .

**Теорема 1.3.8. (Тонелли)**

Пусть  $\mu, \nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu$ ,  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , **измерима** по мере  $m$ . Тогда

- При почти всех  $x$   $f_x$  **измерима** на  $Y$ .
- Отображение  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$  **измеримо** на  $X$ .

$$\bullet \int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

*Доказательство.*

- Пусть  $f = \chi_C$ ,  $C \subseteq X \times Y$ . Тогда
  1.  $f_x = \chi_{C_x}$  – измерима при почти всех  $x$  потому, что  $C_x$  измеримо при почти всех  $x$  (принцип Кавальери).
  2.  $\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) d\nu = \nu_{C_x}$  – измеримо по принципу Кавальери.
  3.
 
$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu_{C_x} d\mu = mC = \int_{X \times Y} \chi_C dm.$$
- Пусть  $f = \sum_k a_k \chi_{C_k} \geq 0$ ,  $C_k$  измеримы,  $k < +\infty$ . Тогда:
  1.  $f_x = \sum_k a_k \chi_{C_k}$  – измеримо почти как линейная комбинация измеримых почти везде функций.
  2.  $\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu = \sum_k a_k \nu(C_k)_x$  – измеримо почти везде по аналогичной причине.
  3.
 
$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_k a_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum_k a_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm.$$
- Пусть  $f \geq 0$ ,  $g_n$  – ступенчатые функции, аппроксимирующие  $f$ ,  $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$ ,  $\lim g_n = f$ . Тогда
  1.  $f_x = \lim (g_n)_x$  – измерима как предел измеримых функций.

2.  $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \lim_Y \int_Y (g_n)_x d\nu = \lim_Y \int_Y \varphi_n(y) d\nu$  – измерима как предел измеримых функций. Второе равенство справедливо как следствие теоремы Леви.

3.

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \lim \int_X \varphi_n(x) d\mu = \lim \int_{X \times Y} g_n dm = \int_{X \times Y} f dm.$$

Здесь дважды применена теорема Леви.

■

### Теорема 1.3.9. (Фубини)

Пусть  $\mu, \nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu, f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ , суммируема. Тогда

- При почти всех  $x$   $f_x$  **суммируема** на  $Y$ .
- Отображение  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$  **суммируемо** на  $X$ .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству теоремы Тонелли.

■

**Следствие 1.3.10.** Если  $p_1(C)$  измеримо, то

$$\int_C f dm = \int_{X \times Y} f \chi_C dm = \int_X \left( \int_Y f \chi_C d\nu \right) d\mu = \int_{p_1(C)} \left( \int_{C_x} f d\nu \right) d\mu.$$

**Замечание.** Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

1.  $f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \rightarrow 0.$
2.  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$

Оказывается, верно  $2 \implies 1$ , но без дополнительных требований неверно  $1 \implies 2$ .

**Лемма 1.3.11.** Пусть  $g$  суммируема. Тогда  $\exists A \in \mathcal{A}: \mu A < +\infty, \int_{X \setminus A} g d\mu < \varepsilon.$

*Доказательство.*

$$\int_X g d\mu = \sup \left\{ \int_X h d\mu, h - \text{суммируема} \right\}.$$



Выберем ступенчатую  $h_0$  такую, что  $\int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon$ . Тогда пусть

$$A = \text{supp } h_0 = \{x \mid h(x) \neq 0\}.$$

$$\int_{X \setminus A} g + \int_A g - h_0 = \int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon.$$

$\mu A < +\infty$ , так как  $g$  суммируема. ■

**Теорема 1.3.12.** (Лебега о мажорированной сходимости)

Пусть  $f_n, f$  измеримы и почти везде конечны,  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ ,  $\exists g$ :

- $\forall n \ |f_n| \leq g$  при почти всех  $x$ .
- $g$  суммируема на  $X$ .

В такой ситуации  $g$  называется *мажорантой*. Тогда

- $f_n, f$  суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ .

*Доказательство.*

- $f_n$  суммируема по первому пункту условия
- По следствию из теоремы Рисса,  $f \leq g$ . Поэтому  $f$  тоже суммируема.
- Пусть теперь  $\mu X < +\infty$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  положим  $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$ .  
 $f_n \xrightarrow[\mu]{} f \implies \mu X_n \rightarrow 0$ .

$$\int_X |f - f_n| d\mu = \int_{X_n} |f - f_n| d\mu + \int_{X \setminus X_n} |f - f_n| d\mu < \int_{X_n} 2g d\mu + \int_{X \setminus X_n} \varepsilon d\mu.$$

Первый интеграл стремится к нулю по теореме об абсолютной сходимости интеграла. Второй интеграл оценивается сверху:

$$\int_{X \setminus X_n} \varepsilon d\mu \leq \int_X \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu X \rightarrow 0.$$

- Пусть  $\mu X = +\infty$ . По предыдущей лемме  $\exists A: \mu A < +\infty, \int_X g < \varepsilon$ , тогда

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| d\mu + 2\varepsilon \rightarrow 0.$$

Первый интеграл стремится к нулю по предыдущему пункту ( $\mu A < +\infty$ ).

**Следствие 1.3.13.** В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

*Доказательство.*

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f - f_n| d\mu \rightarrow 0.$$

**Теорема 1.3.14.** Пусть  $f_n, f$  измеримы и почти везде конечны,  $f_n \rightarrow f$  почти везде,  $\exists g$ :

- $\forall n |f_n| \leq g$ .
- $g$  суммируема на  $X$ .

Тогда

- $f_n, f$  суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ .

*Доказательство.*

- Первый пункт доказывается аналогично предыдущей теореме.
- Положим

$$h_n = \sup_{j \geq n} |f_j - f|.$$

Очевидно, что  $h_n$  убывает с ростом  $n$ , и  $0 \leq h_n \leq 2g$  почти везде. Кроме того, по определению,  $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| \rightarrow 0$  почти везде, потому что  $f_n \rightarrow f$  почти везде. Функция  $2g - h_n$  неотрицательна и возрастает с ростом  $n$ , поэтому подходит под теорему Леви:

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \implies \int_X h_n \rightarrow 0.$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \leq \int_X h_n d\mu \rightarrow 0.$$

**Следствие 1.3.15.** В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

**Теорема 1.3.16.** (Фату)

Пусть  $f_n \geq 0$ ,  $f_n$  измеримы,  $f_n \rightarrow f$  почти везде. Если

$$\exists c > 0: \forall n \int_X f_n d\mu \leq c.$$

то

$$\int_X f d\mu \leq c.$$

*Доказательство.* Пусть  $g_n = \inf_{j \geq n} f_j$ . Очевидно, что  $g_n$  возрастает с ростом  $n$  и  $g_n \geq 0$ . Кроме того,

$$\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f.$$

Тогда  $g_n$  подходит под теорему Леви:

$$\int_X f d\mu \leftarrow \int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq c.$$

■

**Следствие 1.3.17.** Теорема Фату верна и в случае  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ .

*Доказательство.* Сразу следует из теоремы Рисса. ■

**Следствие 1.3.18.** Пусть  $f_n \geq 0$ ,  $f_n$  измеримы, тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu.$$

*Доказательство.* Выберем последовательность  $n_k$  такую, что

$$\lim \int_X f_{n_k} d\mu = \underline{\lim} \int_X f_n d\mu.$$

Положим  $g_n = \inf_{j \geq n} f_j$ . Аналогично тому, как мы делали в доказательстве теоремы Фату:

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leftarrow \int_X g_{n_k} d\mu \leq \int_X f_{n_k} d\mu \rightarrow \underline{\lim} \int_X f_n d\mu.$$

■

## 1.4 Замена переменных в интеграле

**Определение.** Отображение  $\Phi: X \rightarrow Y$  называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

**Лемма 1.4.1.**  $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$  –  $\sigma$ -алгебра.

**Определение.** При фиксированном измеримом  $\Phi: X \rightarrow Y$  отображение

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$* .

**Лемма 1.4.2.** Образ меры при отображении является мерой.

**Замечание.**  $\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, d\mu$

**Лемма 1.4.3.** Если функция  $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима относительно  $\mathcal{B}$ , то  $f \circ \Phi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима относительно  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.*

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \in \mathcal{A}.$$

■

**Определение.** Пусть  $\omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$ , измерима. В этом контексте  $\omega$  называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры  $\mu$  с весом  $\omega$*  называется мера

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu$$

**Теорема 1.4.4.** (Об интегрировании по взвешенному образу меры)

Пусть  $\Phi: X \rightarrow Y$  – измеримое отображение,  $0 \leq \omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – весовая функция, измерима на  $X$ ,  $\nu$  – взвешенный образ меры  $\mu$  с весом  $\omega$ . Тогда для любой измеримой  $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  верно:

- $f \circ \Phi$  измерима на  $X$ .
- $\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu$

*Доказательство.*

- $(f \circ \Phi)$  измерима по предыдущей лемме.

- Пусть  $f = \chi_B$ ,  $B \in \mathcal{B}$ . Тогда

$$(f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu = \nu B = \int_Y f \, d\nu.$$

- Пусть теперь  $f$  – ступенчатая функция. Тогда:

$$\int_Y f \, d\nu = \sum_{k=1}^n \int_Y f_k \, d\nu = \sum_{k=1}^n \int_X (f_k \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

- Докажем утверждение для измеримой неотрицательной  $f$ . Аппроксимируем  $f$  ступенчатыми  $f_n$  так, чтобы  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ . Тогда справедлива теорема Леви:

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \lim \int_X (f_n \circ \Phi) \omega \, d\mu = \lim \int_Y f_n \, d\nu = \int_Y f \, d\nu.$$

- Проверим утверждение для произвольной суммируемой функции  $f$ . Интеграл её модуля конечен, кроме того, срезки мажирируются модулем, поэтому их интегралы тоже конечны. Таким образом, мы имеем право писать все формулы, использующие срезки.

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X (f_+ \circ \Phi) \omega \, d\mu - \int_X (f_- \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_Y f_+ \, d\nu - \int_Y f_- \, d\nu = \int_Y f \, d\nu.$$

■

**Следствие 1.4.5.** Пусть  $f$  суммируема на  $Y$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , тогда в условиях теоремы:

$$\int_B f \, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

**Определение.** В ситуации  $X = Y$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ,  $\Phi = \text{id}$ , если  $\omega \geq 0$  измерима, причем  $\nu(B) = \int_B \omega \, d\mu$ ,  $\omega$  называется *плотностью меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$* . В таком случае

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \omega \, d\mu.$$

**Теорема 1.4.6.** (Критерий плотности)

Пусть  $\nu$  – мера на  $\mathcal{A}$ ,  $\omega \geq 0$  измерима, тогда верно, что  $\omega$  – плотность  $\nu$  относительно  $\mu$  тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu(A) \leq \nu(A) \leq \sup_A \omega \cdot \mu(A).$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ )  $\forall A \in \mathcal{A}$ :

$$\inf_A \omega \cdot \mu A \leq \int_A \omega d\mu = \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A.$$

( $\Leftarrow$ ) – Пусть  $\omega > 0$ ,  $q \in (0, 1)$ ,  $A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1})$ . Тогда посылке теоремы имеем:

$$q^j \cdot \mu A_j \leq_1 \nu A_j \leq_2 q^{j-1} \cdot \mu A_j.$$

Кроме того, из простейших свойств интеграла следует:

$$q^j \cdot \mu A_j \leq_3 \int_{A_j} \omega d\mu \leq_4 q^{j-1} \cdot \mu A_j.$$

Воспользуемся этим:

$$q \int_A \omega d\mu = q \sum_j \int_{A_j} \omega d\mu \leq_4 \sum_j q^j \cdot \mu A_j \leq_1 \nu A \leq_2 \frac{1}{q} \sum_j q^j \cdot \mu A_j \leq_3 \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu.$$

Устремляя  $q$  к единице, получаем требуемое.

– Пусть теперь  $\omega \geq 0$ ,  $e = X(\omega = 0)$ . Тогда  $\nu e = 0$  по условию. Получается, что

$$\nu e = 0 = \int_e \omega d\mu.$$

Проверим теперь утверждение для произвольного измеримого  $A$ :

$$\nu A = \int_{X \setminus e} \omega d\mu + 0 = \int_{X \setminus e} \omega d\mu + \int_e \omega d\mu = \int_X \omega d\mu.$$

■

**Лемма 1.4.7.** Пусть  $f, g$  – суммируемые на  $X$  функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f d\mu = \int_A g d\mu.$$

Тогда  $f = g$  почти везде.

*Доказательство.* Проверим, что  $h = f - g = 0$  при почти всех  $x$ . По условию,  $\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A h d\mu = \int_A (f - g) d\mu = 0$ . Положим  $A_+ = X(h \geq 0)$ ,  $A_- = X(h < 0)$ . Тогда  $X = A_+ \sqcup A_-$  и

$$\int_{A_+} |h| d\mu = \int_{A_+} h d\mu = 0.$$

$$\int_{A_-} |h| d\mu = - \int_{A_-} h d\mu = 0.$$

Получается,

$$\int_X |h| d\mu = 0 + 0 = 0.$$

Поэтому  $h = 0$  за исключением, может быть, множества меры ноль. ■

**Замечание.** Из последней леммы очевидно следует, что плотность одной меры относительно другой определена однозначно с точностью до равенства почти везде.

**Лемма 1.4.8.** (Об образе малых кубических ячеек)

Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$ ,  $\Phi$  дифференцируемо в  $U(\mathbf{a})$ ,  $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$ ,  $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$ . Тогда

$$\exists \delta > 0 \forall Q - \text{куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

*Доказательство.* Обозначим  $L = \Phi'(\mathbf{a})$  – обратимый линейный оператор. Выпишем определение дифференцируемости:

$$\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{a}) = L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Умножим обе части на  $L^{-1}$  и перенесем через знак равенства:

$$\underbrace{\mathbf{a} + L^{-1}(\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{a}))}_{\Psi(\mathbf{x})} = \mathbf{x} + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Получается, что  $\Psi$  близок к тождественному отображению. Из последней формулы очевидно следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon(\mathbf{a})$ :

$$|\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Пусть теперь  $Q \subset B_\varepsilon(\mathbf{a})$  – куб со стороной  $h$ . Тогда  $\forall \mathbf{x} \in Q$

$$|\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon h, \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i| < h.$$

Попытаемся понять, что делает с  $Q$  отображение  $\Psi$ . Пусть  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\Psi(\mathbf{x})_i - \Psi(\mathbf{y})_i| &\leq |\Psi(\mathbf{x})_i - \mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| + |\Psi(\mathbf{y})_i - \mathbf{y}_i| \\ &\leq |\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| + h + |\Psi(\mathbf{y}) - \mathbf{y}| \\ &\leq (1 + 2\varepsilon)h \end{aligned}$$

Получается, что  $\Psi(Q)$  содержится в кубе со стороной  $(1 + 2\varepsilon)h$ . Тогда:

$$\lambda\Psi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q.$$

Отображение  $\Psi$  отличается от отображения  $\Phi$  только однократным применением оператора  $L$  и парой сдвигов. Поэтому:

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q.$$

Подберем такое  $\varepsilon$  чтобы выполнялось неравенство

$$|\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m < c.$$

И выберем в качестве  $\delta$  радиус шара  $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ . ■

**Лемма 1.4.9.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C(\mathcal{O})$ ,  $A \in \mathfrak{M}^m$ ,  $A \subseteq Q$ ,  $Q$  – куб, причем  $\text{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$ . Тогда

$$\inf_{\substack{A \subseteq G \\ G \text{ открыто}}} \left( \lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

**Теорема 1.4.10.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – диффеоморфизм,  $A \in \mathfrak{M}^m$ ,  $A \subseteq \mathcal{O}$ , тогда

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'| d\lambda_m.$$

*Доказательство.*

- Пусть  $\nu A = \lambda\Phi(A)$ . Это мера, потому что  $\Phi$  – диффеоморфизм. Надо проверить, что  $J_\Phi = |\det \Phi'|$  – плотность меры  $\nu$  относительно меры  $\lambda$ . Для этого будем проверять критерий плотности:  $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

- Проверим второе неравенство. Пусть  $Q$  – кубическая ячейка, причем  $\overline{Q} \subseteq \mathcal{O}$ . Предположим противное:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu Q.$$

Возьмем  $c > \sup_Q J_\Phi$  такое, чтобы

$$\lambda Q \cdot c < \nu Q.$$

Запустим процесс половинного деления. На каждом шаге найдется часть  $Q_i$ , для которой верно

$$\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i.$$

Это верно потому, что иначе по аддитивности меры не было бы выполнено аналогичное неравенство на предыдущем шаге. По теореме Кантора

$$\exists! \mathbf{a} \in \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{Q_i}.$$

То есть, мы имеем кубы с центром в точке  $\mathbf{a}$  со сколь угодно малой стороной. Это противоречит лемме об образе малых кубических ячеек, которая для достаточно малых кубов устанавливает неравенство

$$\nu Q = \lambda\Phi(Q) > c \cdot \lambda Q.$$



- Пусть теперь  $A$  – открытое множество. Представим его в виде дизъюнктного объединения кубических ячеек  $Q_i$ :  $\overline{Q_i} \subseteq \mathcal{O}$ . Тогда

$$\nu A = \sum_i \nu Q_i \leq \sum_i \sup_{Q_i} J_\Phi \cdot \lambda Q_i \leq \sum_i \sup_A J_\Phi \cdot \lambda Q_i = \sup_A J_\Phi \cdot \sum_i \lambda Q_i = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

- Пусть наконец  $A$  – измеримое множество. Пользуясь предыдущей леммой имеем

$$\lambda A \cdot \sup_A J_\Phi = \inf_{G \supset A} \left( \lambda G \cdot \sup_G J_\Phi \right) \geq \inf_{G \supset A} \nu G \geq \inf_{G \supset A} \nu A = \nu A.$$

- Таким образом, мы доказали второе неравенство из критерия плотности. Докажем левую часть, перейдя к  $\hat{A} = \Phi(A)$ ,  $\hat{\Phi} = \Phi^{-1}$ :

$$\lambda \hat{\Phi}(\hat{A}) = \nu \hat{A} \leq \sup_{\hat{A}} J_{\hat{\Phi}} \cdot \lambda \hat{A} \implies \lambda A \leq \frac{1}{\inf_A J_\Phi} \cdot \lambda \Phi(A) \implies \nu A = \lambda \Phi(A) \geq \inf_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

■

**Теорема 1.4.11.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – диффеоморфизм,  $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$ ,  $f$  – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int_{\mathcal{O}^1} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(\mathbf{x})) |\det \Phi'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

*Доказательство.* По предыдущей теореме,  $J_\Phi = |\det \Phi'(\mathbf{x})|$  – плотность меры  $\nu = \lambda \circ \Phi$ . Тогда теорема напрямую следует из теоремы об интегрировании по взвешенному образу меры. ■

**Замечание.** То же верно и в случае, когда  $f$  суммируема.

## 1.5 Функции распределения

**Определение.** Пусть  $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измеримая и почти везде конечная функция, причем  $\forall t \in \mathbb{R} \mu X(h < t) < +\infty$ . Тогда функция  $H(t) = \mu X(h < t)$  называется *функцией распределения  $h$  по мере  $\mu$* .

**Замечание.**  $H(t)$  не убывает.

**Замечание.** Пусть  $h$  измерима, тогда для любого борелевского  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $h^{-1}(B)$  измерим.

**Определение.** Стандартное продолжение  $\mu_H([a, b)) = H(b-0) - H(a-0)$  называется *мерой Бореля-Стилтьеса*.

**Определение.** В текущем контексте обозначим  $h(\mu) = \nu: \nu A = \mu h^{-1}(A)$ .

**Лемма 1.5.1.** Пусть  $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измеримая и почти везде конечная функция,  $H$  – её функция распределения. Тогда на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$   $\mu_H = h(\mu)$ .

*Доказательство.* Проверим равенство на ячейках, чего будет достаточно для совпадения функций на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

$$\mu_H[a, b) = H(b-0) - H(a-0) = H(b) - H(a) = \mu X(a \leq h < b) = \mu h^{-1}([a, b)).$$

Второе равенство выполнено как следствие непрерывности меры снизу:

$$\bigcup_{t < b} X(h < t) = X(h < b) \implies H(b-0) = \lim_{t \rightarrow b-} H(t) = \mu X(h < b) = H(b).$$

■

**Теорема 1.5.2.** Пусть  $0 \leq f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, измеримая по Борелю,  $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измеримая и почти везде конечная функция,  $H$  – её функция распределения,  $\mu_H$  – мера Бореля-Стилтьеса для  $H$ . Тогда

$$\int_X f \circ h \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_H.$$

*Доказательство.* Пусть  $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi = h$ ,  $w = 1$ . Кроме того, нам по определению известно, что для  $\nu = h(\mu)$  верно

$$\nu A = \mu h^{-1}(A).$$

Это значит, что  $\nu$  есть взвешенный (с весом 1) образ меры  $\mu$  при отображении  $h$ . Поэтому справедлива теорема об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\nu = \int_X f \circ \Phi \, d\mu.$$

Заменив  $\nu$  на  $\mu_H$  по предыдущей лемме и вернув  $h = \Phi$  получаем

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_H = \int_X f \circ h \, d\mu.$$

■

## Глава 2

# Поверхностные интегралы

### 2.1 Поверхностный интеграл I рода

**Определение.** Пусть  $M$  – простое гладкое двумерное многообразие в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – параметризация  $M$ , тогда  $E \subseteq M$  называется *измеримым*, если  $\varphi^{-1}E \in \mathcal{M}^2$ .

**Определение.** Введем обозначение:

$$\mathcal{A}_M \stackrel{\text{def}}{=} \{E \subseteq M \mid E \text{ измеримо}\}.$$

**Замечание.**  $\mathcal{A}_M$  –  $\sigma$ -алгебра.

**Определение.** На  $\mathcal{A}_M$  наведем меру:

$$\begin{aligned} S: \mathcal{A}_M &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ E &\mapsto \iint_{\varphi^{-1}(E)} \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv. \end{aligned}$$

**Замечание.** Замкнутые, открытые, компактные  $E \subset M$  измеримы.

**Лемма 2.1.1.**  $S$  не зависит от выбора параметризации.

**Определение.**  $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима по мере  $S$ , если  $f \circ \varphi$  измерима на  $\mathcal{O}$  по мере  $\lambda$ .

**Определение.** Пусть  $M$  – простое гладкое двумерное многообразие,  $\varphi$  – его параметризация,  $0 \leq f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима по  $S$ , тогда *поверхностным интегралом I рода* назовем интеграл

$$\iint_M f \, dS.$$

Или развернуто, пользуясь теоремой об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\iint_M f \, dS = \iint_{\varphi^{-1}(M)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv.$$

**Определение.**  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  назовем *кусочно-гладким многообразием в  $\mathbb{R}^3$* , если  $M$  представляется в виде конечного дизъюнктного объединения объектов вида

- простое гладкое двумерное многообразие.
- простое гладкое одномерное многообразие (носитель гладкого пути).
- точка.

**Определение.** Мера  $S$  на кусочно-гладком многообразии  $E = \bigsqcup_i M_i$  вычисляется следующим образом:

$$S(E) = \sum_i S(E \cap M_i).$$

## 2.2 Поверхностный интеграл II рода

**Определение.** Поверхностью будем называть простое гладкое двумерное многообразие.

**Определение.** Стороной поверхности называется непрерывное векторное поле единичных нормалей к этой поверхности.

**Определение.** Поверхность называется двусторонней, если для неё существует непрерывное поле нормалей. Иначе она называется односторонней.

**Пример.** Лента Мебиуса – односторонняя поверхность.

**Определение.** Репером называется пара линейно независимых касательных векторов.

**Определение.** Пусть  $\Omega$  – двусторонняя поверхность в  $\mathbb{R}^3$ ,  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $n_0: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – сторона поверхности. Тогда интегралом II рода функции  $F$  по поверхности  $\Omega$  назовем интеграл

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS.$$

**Замечание.**

- Смена стороны на противоположную влечет замену знака.
- Интеграл II рода не зависит от параметризации.
- Пусть  $F = \langle P, Q, R \rangle$ . Тогда интеграл II рода записывают так:

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS = \int_{\Omega} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

- Пусть поверхность задана параметризацией  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ . Получим нормальный вектор, перемножив векторно касательные векторы:

$$n = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \left( \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right)^T.$$

Мера  $S$  выглядит следующим образом:

$$dS = \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| du dv = \|n\| du dv.$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS &= \iint_{\tilde{\Omega}} \left( P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\|n\|} \cdot \|n\| du dv = \\ &= \iint_{\tilde{\Omega}} \left( P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) du dv \end{aligned}$$

**Замечание.** Посчитаем интеграл поля  $\langle 0, 0, R \rangle$  по поверхности  $\Omega$ , заданной графиком (то есть, имеющей параметризацию вида  $x, y, z(x, y)$ ).

$$\iint_{\Omega^+} R \, dx \, dy = \iint_{\tilde{\Omega}} \left( P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) du \, dv = \iint_{\tilde{\Omega}} R(x, y, z(x, y)) du \, dv$$

**Замечание.** Попробуем посчитать объём фигуры  $\Omega$ , ограниченной графиками  $z_1, z_2$ :

$$\begin{aligned} \lambda_3(\Omega) &= \iint_{\tilde{\Omega}} (z_1(x, y) - z_2(x, y)) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{\Omega}} z_1(x, y) \, dx \, dy - \iint_{\tilde{\Omega}} z_2(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\partial\Omega^+} z \, dx \, dy \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались предыдущим замечанием и тем, что у нижней части фигуры (ограниченной  $z_1$ ) нормали направлены в другую сторону.

**Замечание.** Пусть  $\gamma$  – гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$  (лежит в плоскости  $xy$ ),  $\Omega$  – цилиндр над  $\gamma$ . Тогда

$$\iint_{\Omega} R \, dx \, dy = 0.$$

*Доказательство.*

*Первое доказательство:* по формуле из первого замечания мы собираемся интегрировать какую-то функцию по носителю пути по двумерной мере. Носитель гладкого пути по такой мере всегда имеет меру 0.

*Второе доказательство:* мы пытаемся интегрировать  $\langle F, n_0 \rangle$ . Заметим, что у  $F$  не равна нулю только третья координата ( $R$ ), тогда как вектор нормали к цилиндру над  $xy$  всегда имеет  $z = 0$ . Таким образом, мы интегрируем функцию, тождественно равную нулю. ■

## Глава 3

# Основные интегральные формулы

### 3.1 Формула Грина

**Замечание.** В данном контексте рассматривается  $D$ : компактное, связное, односвязное множество в  $\mathbb{R}^2$ , ограниченное кусочно-гладкой кривой. При этом граница  $\partial D$  направлена против часовой стрелки (фигура всегда находится слева).

**Теорема 3.1.1.** (Формула Грина)

Пусть  $P, Q$  – гладкие векторные поля в  $U(D)$ . Тогда

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

**Замечание.** Формула "аддитивна" по фигуре.

### 3.2 Формула Стокса

**Замечание.** В данном контексте рассматривается  $\Omega$  – двусторонняя поверхность с границей.  $n_0$  – её сторона.  $\partial \Omega$  – кусочно-гладкая кривая, согласованная по ориентации со стороной поверхности.

**Теорема 3.2.1.** (Формула Стокса)

Пусть  $\langle P, Q, R \rangle$  – гладкое векторное поле в  $U(\Omega)$ . Тогда

$$\int_{\partial \Omega} P dx + Q dy + R dz = \iiint_{\Omega} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy$$

**Замечание.** Формула "аддитивна" по фигуре.

### 3.3 Формула Гаусса-Остроградского

**Замечание.** В данном контексте рассматриваются

$$V = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, f(x, y) \leq z \leq F(x, y) \}.$$

Здесь  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  – замкнутое множество,  $\partial\Omega$  – кусочно-гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$ ,  $f, F \in C^1(\Omega)$ . Рассматриваем внешнюю сторону фигуры.

**Теорема 3.3.1.** (Формула Гаусса-Остроградского)

Пусть  $R: U(V) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R \in C^1(U(V))$ . Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} R dx dy.$$

**Следствие 3.3.2.** В условиях формулы Гаусса-Остроградского, верно

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial V^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

**Следствие 3.3.3.** Пусть  $l$  – фиксированное направление в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} f \cdot \langle l, n_0 \rangle dS.$$

## 3.4 Примеры дифференциальных операторов

**Определение.** Пусть  $C^1 \ni A = \langle P, Q, R \rangle$  – векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда *дивергенцией*  $A$  называется

$$\operatorname{div} A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

**Замечание.** Дивергенцию поля в точке можно вычислять так:

$$\operatorname{div} A(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iiint_{B(a,r)} \operatorname{div} A dx dy dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iint_{S(a,r)} \langle A, n_0 \rangle dS.$$

Последнюю формулу можно интерпретировать как величину потока, проходящего через сферу с центром в данной точке достаточно малого радиуса. То есть, дивергенция характеризует точку как “источник” поля.

**Определение.** Пусть  $C^1 \ni A = \langle P, Q, R \rangle$  – векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда *ротором*  $A$  называется

$$\operatorname{rot} A \stackrel{\text{def}}{=} \langle R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y \rangle.$$

**Замечание.**  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{O}$  – односвязная область,  $\operatorname{rot} V = 0$ . Тогда  $V$  потенциально.

**Замечание.**  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{O}$  – односвязная область,  $\operatorname{rot} V = 0$ . Тогда

- Если  $\gamma$  – петля, то

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = 0.$$



- Если  $\gamma$  – путь, то интеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

зависит только от начальной и конечной точек пути.

**Замечание.** Если  $\mathcal{O}$  не односвязна, но  $\operatorname{rot} V = 0$ , то все равно интеграл по пути не зависит от самого пути.

*Если в поле нет источников, то откуда может взяться поток через поверхность?*

**Замечание.**  $\operatorname{div} V = 0$ , тогда для любой “разумной” фигуры  $\Omega$  выполнено

$$\iint_{\partial\Omega} \langle V, n_0 \rangle dS = 0.$$

**Определение.** Поле  $V$  называется *соленоидальным* в  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , если у него существует векторный потенциал, то есть  $\exists B$  – векторное поле такое, что  $\operatorname{rot} B = V$  на  $\Omega$ .

**Теорема 3.4.1.** (Критерий соленоидальности поля)

$A$  соленоидально в  $\Omega \iff \operatorname{div} A = 0$  на  $\Omega$

# Глава 4

## Ряды Фурье

### 4.1 Пространство $L^p$

**Определение.** Комплексное отображение  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  назовем *измеримым*, если  $f(x) = g(x) + ih(x)$ ,  $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$ , причем  $g, h$  измеримы.

**Определение.** Аналогично определим *суммируемые* комплексные отображения.

**Определение.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = g(x) + ih(x)$ ,  $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда определим интеграл:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E g \, d\mu + i \int_E h \, d\mu.$$

**Замечание.**

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

**Теорема 4.1.1.** (Интегральное неравенство Гёльдера)

Пусть  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$  – измеримые почти везде заданные функции. Тогда

$$\int_X |f g| \, d\mu \leq \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Теорема 4.1.2.** (Интегральное неравенство Минковского)

Пусть  $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p \geq 1$ , тогда

$$\left( \int_X |f + g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Определение.** Пусть  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой. Тогда для  $1 \leq p < +\infty$  положим

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \text{п.в. } X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима, } \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

**Замечание.**  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$  – линейное пространство.

**Определение.** Зададим на  $\mathcal{L}^p$  отношение эквивалентности:  $f \sim g$  тогда и только тогда, когда  $f = g$  почти везде. Положим

$$L^p(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^p(X, \mu) / \sim.$$

**Определение.** В  $L^p$  заведем норму:  $\| [f] \| \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$

**Определение.** Пусть  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  задана почти везде. Тогда *существенным супремумом*  $f$  называется

$$\operatorname{ess\,sup}_X f \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq A \text{ п.в.} \}.$$

**Теорема 4.1.3.** (Свойства существенного супремума)

- $\operatorname{ess\,sup}_X f \leq \sup_X f.$
- $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_X f$  при почти всех  $x.$
- $\left| \int_X f g d\mu \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_X |f| \cdot \int_X |g|.$

**Определение.** Для  $p = \infty$ :

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \text{п.в. } X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима, } \operatorname{ess\,sup}_X f < +\infty \right\}.$$

**Замечание.**  $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$  – линейное пространство.

**Определение.** Пространство  $L^\infty$  зададим аналогично конечному случаю. Нормой на этом пространстве положим  $\operatorname{ess\,sup}$ .

**Теорема 4.1.4.** (О вложении пространств  $L^p$ )

Пусть  $\mu(X) < +\infty$ ,  $1 \leq r < s \leq +\infty$ . Тогда

- $L^r(X, \mu) \subset L^s(X, \mu).$
- $\|f\|^s \leq \mu(X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r.$

**Следствие 4.1.5.** Пусть  $\mu(E) < +\infty$ ,  $1 \leq s < r \leq +\infty$ ,  $f_n, f \in L^s$ ,  $f_n \xrightarrow{L^r} f$ , тогда  $f_n \xrightarrow{L^s} f$ .

**Теорема 4.1.6.** (О сходимости в  $L^p$  и по мере)

Пусть  $1 \leq r < +\infty$ ,  $f_n, f \in L^p$ , тогда

- $f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , либо  $f_n \rightarrow f$  почти везде, тогда если  $\exists g \in L^p: |f_n| \leq g$ , то  $f_n \xrightarrow{L^p} f.$

**Замечание.**  $L^\infty$  – полное метрическое пространство.

**Теорема 4.1.7.** (Полнота пространств  $L^p$ )

$\forall 1 \leq p \leq \infty$   $L^p$  полно.

**Определение.** Пусть  $X$  – топологическое пространство, тогда множество  $A \subset X$  называется всюду плотным, если  $\text{Cl}(A) = X$ . Иначе говоря,  $\text{Int}(X \setminus A) = \emptyset$ , или  $\forall x \in X \forall U(x) U(x) \cap A \neq \emptyset$ .

**Определение.** Множество всех ступенчатых функций  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  обозначим  $St(X)$ .

**Лемма 4.1.8.** Пусть  $1 \leq p \leq +\infty$ , тогда множество  $St(X) \cap L^p$  плотно в  $L^p$ .

**Определение.** (Четвертая аксиома отделимости)

Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нем любые два замкнутые непересекающиеся множества отделимы, причем любое одноточечное множество замкнуто.

**Лемма 4.1.9.** (Урысон)

Пусть  $X$  – нормальное топологическое пространство,  $F_0, F_1$  – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует непрерывная функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что

- $0 \leq f \leq 1$ .
- $f|_{F_0} = 0$ .
- $f|_{F_1} = 1$ .

**Определение.** Финитной функцией в  $\mathbb{R}^m$  называется функция  $f$  такая, что

$$\exists B(a, r): f|_B = 0.$$

По умолчанию,  $f$  непрерывна.

**Теорема 4.1.10.** Множество финитных функций плотно в  $L^p$  при  $1 \leq p < +\infty$ .

**Замечание.** Условие  $p \neq +\infty$  существенно.

**Определение.** Множество непрерывных  $T$ -периодических функций будем обозначать  $\tilde{C}([0, T])$ .

**Теорема 4.1.11.** (О непрерывности сдвига)

Пусть  $f_h(x) = f(x + h)$ . Тогда

- $f$  равномерно непрерывна в  $\mathbb{R}^m \implies \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- $1 \leq p < +\infty, f \in L^p \implies \|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- $f \in \tilde{C}([0, T]) \implies \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- $1 \leq p < +\infty, f \in L^p([0, T]) \implies \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

## 4.2 Гильбертовы пространства

**Определение.** Гильбертовым пространством называется линейное пространство  $\mathcal{H}$  со скалярным произведением, полное как метрическое пространство с метрикой и нормой, порожденными скалярным произведением:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ .
- $\| \cdot \| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .
- $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ .

Далее  $\mathcal{H}$  – Гильбертово пространство.

**Определение.** Ряд  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n, a_n \in \mathcal{H}$ , называется *сходящимся*, если  $S_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N a_i$  таково, что  $\exists S \in \mathcal{H}: \|S_N - S\| \rightarrow 0$ . Иными словами, последовательность частичных сумм ряда сходится к элементу  $\mathcal{H}$ .

**Определение.**  $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$ .

**Определение.** Пусть  $A \subseteq \mathcal{H}$ . Тогда по определению  $x \perp A \iff \forall y \in A \ x \perp y$ .

**Определение.** Ряд называется *ортogonalным*, если все его элементы попарно ортогональны.

**Теорема 4.2.1.** (Свойства сходимости в Гильбертовых пространствах)

Пусть  $x_i, y_i \in \mathcal{H}$ . Тогда

- $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 \implies \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$ .
- Пусть ряд  $\sum x_k$  сходится. Тогда  $\forall y \in \mathcal{H} \ \langle \sum x_k, y \rangle = \sum \langle x_k, y \rangle$ .
- Пусть ряд  $\sum x_k$  ортогонален. Тогда  $\sum x_k$  сходится тогда и только тогда, когда  $\sum \|x_k\|^2$  сходится. Более того, в этом случае  $\|\sum x_k\|^2 = \sum \|x_k\|^2$ .

**Определение.** *Ортогональным семейством векторов* называется  $\{e_k\} \subseteq \mathcal{H}$  такое, что  $e_k \perp e_{j \neq k}$ . Если более того  $\|e_k\| = 1$ , то семейство называется *ортонормированным*.

**Определение.**  $L_2 \stackrel{\text{def}}{=} L^2([0, 2\pi], \lambda_1)$ .

**Теорема 4.2.2.** Пусть  $\{e_k\}$  – ОС,  $x \in \mathcal{H}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k$ . Тогда

- ОС линейно независима.
- $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ .
- $c_k e_k = \mathcal{P}_{\{te_k\}}^\perp$ , то есть  $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$ .

## 4.3 Ряды Фурье

**Определение.** Пусть  $\{\mathbf{e}_k\}$  – ОС,  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ , тогда числа  $c_k(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$  называются *коэффициентами Фурье вектора  $\mathbf{x}$  по системе  $\mathbf{e}_k$* .

**Определение.** Ряд  $\sum_k c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k$  называется *рядом Фурье  $\mathbf{x}$  по  $\mathbf{e}_k$* .

**Замечание.** При перенормировке ОС ряд Фурье не меняется.

**Теорема 4.3.1.** (О свойствах частичных сумм ряда Фурье)

Пусть  $\mathcal{L} = \text{Lin}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Тогда

- $S_n = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{\perp}(\mathbf{x})$ , то есть  $\mathbf{x} = S_n + \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z} \perp \mathcal{L}$ .
- $S_n$  – элемент наилучшего приближения  $\mathbf{x}$  в  $\mathcal{L}$ , то есть  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{L} \quad \|S_n - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ .
- $\|S_n\| \leq \|\mathbf{x}\|$ .

**Следствие 4.3.2.** (Неравенство Бесселя)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

**Теорема 4.3.3.** (Рисс, Фишер)

Пусть  $\{\mathbf{e}_k\}$  – ОС,  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ . Тогда

- Ряд Фурье  $\mathbf{x}$  сходится в  $\mathcal{H}$ .
- $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k + \mathbf{z}$ ,  $\forall k \quad \mathbf{z} \perp \mathbf{e}_k$ .
- $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k \iff \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2$ .

**Определение.** Равенство Парсиваля, или уравнение замкнутости:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2.$$

## 4.4 Базис в Гильбертовом пространстве

**Определение.** *Базисом* в Гильбертовом пространстве называется ОС  $\{\mathbf{e}_k\}$ , если выполняется условие:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k.$$

**Определение.** ОС  $\{\mathbf{e}_k\}$  называется *полной*, если

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}: \quad \{\mathbf{e}_k\} \cup \mathbf{x} - \text{не ОС}.$$

**Определение.** ОС  $\{e_k\}$  называется *замкнутой*, если для любого её элемента выполняется уравнение замкнутости.

**Теорема 4.4.1.** (Характеризация базиса)

Пусть  $E = \{e_k\}$  – ОС. Тогда эквивалентны утверждения:

- $E$  – базис.
- $\forall x, y \in \mathcal{H} \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \cdot \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$
- $E$  замкнута.
- $E$  полна.
- $Lin(e_1, e_2, \dots)$  плотно в  $\mathcal{H}$ .