

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

1	Интеграл	2
1.1	Определение интеграла	2
1.2	Предельный переход под знаком интеграла	7
1.3	Произведение мер	10
1.4	Замена переменных в интеграле	19
1.5	Функции распределения	25
2	Поверхностные интегралы	26
2.1	Поверхностный интеграл I рода	26
2.2	Поверхностный интеграл II рода	28
3	Основные интегральные формулы	30
3.1	Формула Грина	30
3.2	Формула Стокса	30
3.3	Формула Гаусса-Остроградского	30
3.4	Примеры дифференциальных операторов	31
4	Ряды Фурье	33
4.1	Пространство L^p	33
4.2	Гильбертовы пространства	36
4.3	Ряды Фурье	37
4.4	Базис в Гильбертовом пространстве	37

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна}\}.$$

Определение. Пусть $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{f \text{ in}} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \lambda_k \mu(E \cap E_k).$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

1. Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
2. $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Доказательство.

1. Пусть $f = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k} = \sum_j \alpha_j \chi_{F_j}$. Тогда $f = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j} = \sum_{k,j} \alpha_j \chi_{E_k \cap F_j}$. Пользуясь этим, перепишем интеграл:

$$\int_1 f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \sum_k \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int_2 f.$$

2. Воспользуемся общим допустимым разбиением:

$$\int f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_{k,j} \lambda_k \mu(E_k \cap F_j) \leq \sum_{k,j} \alpha_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int g.$$

■

Определение. Пусть $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, d\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, d\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leq \int f \, d\mu \leq +\infty$.
- $0 \leq g \leq f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.
- $0 \leq g \leq f$, f, g измеримы, тогда $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

Доказательство.

1. Очевидно, так как супремум реализуется на самой интегрируемой функции.
3. Поскольку g – ступенчатая и $0 \leq g \leq f$, g входит в супремум из определения интеграла f , поэтому автоматически $\int g \leq \int f$.
2. Все ступенчатые функции, супремум по которым берется в определении интеграла функции g , входят так же и в супремум для интеграла f , так как $0 \leq h \leq g \leq f$.

■

Определение. Пусть f — измеримая функция X , причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

1. Измеримая $f \geq 0 \implies$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
2. f суммируема $\iff \int |f| d\mu < +\infty$.
3. Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:

$$f \leq g \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

$$4. \int_E 1 d\mu = \mu(E), \int_E 0 d\mu = 0.$$

5. Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда

$$\int_E f d\mu = 0.$$

$$6. \int -f d\mu = - \int f d\mu, \forall c > 0 \int c \cdot f d\mu = c \cdot \int f d\mu.$$

7. Пусть $\exists \int_E f d\mu$, Тогда

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

8. Пусть f измерима на E , $\mu(E) < +\infty$, $\forall x \in E A \leq f(x) \leq B$, тогда

$$A \cdot \mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq B \cdot \mu(E).$$

Доказательство.

2. Следует из аддитивности интеграла по функции, что будет доказано позже.
1. Для неотрицательных f, g это уже было доказано. Для произвольных воспользуемся определением и тем соображением, что $f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \leq \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g.$$

5. Если f ступенчатая, то утверждение очевидно. Если $f \geq 0$ и измерима, то супремум из определения равен нулю. Если f – произвольная измеримая функция, то $\int f = \int f^+ - \int f^- = 0$.

2. Очевидным образом следует из определений и того, что $\sup cA = c \sup A$.

3. $-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$.

■

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $g \geq 0$, ступенчатая. Тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

Доказательство. Пусть $g = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k}$, тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A).$$

Воспользуемся счетной аддитивностью меры:

$$\sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i).$$

Последний ряд сходится абсолютно, поэтому можно переставить порядок суммирования:

$$\sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

■

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, измерима на A . Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Доказательство.

(\leq) Левая часть равенства аппроксимируется ступенчатыми функциями $0 \leq g \leq f$. Для них имеем:

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Теперь имеем:

$$\int_A f \, d\mu = \sup \int_A g \, d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

(\geq) Для начала рассмотрим случай, когда $A = A_1 \sqcup A_2$. Рассмотрим ступенчатую функцию $0 \leq g \leq f$ и функции g_1, g_2 такие, что $g_i|_{A_i} = g$, $g_i|_{A_i^c} = 0$. Очевидно, что $g_1 + g_2 = g$ на A . Тогда по построению:

$$\int_{A_1} g_1 d\mu + \int_{A_2} g_2 d\mu = \int_A (g_1 + g_2) d\mu = \int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

Возьмём супремум от обеих частей сначала по g_1 , потом по g_2 :

$$\int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

Теперь разберемся с бесконечным случаем. Пусть $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$. Тогда, пользуясь уже доказанным фактом для конечных разбиений, имеем:

$$\int_A f d\mu \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f d\mu + \int_{B_n} f d\mu \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f d\mu.$$

Совершая предельный переход при $n \rightarrow +\infty$, имеем:

$$\int_A f d\mu \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

■

Следствие 1.1.6. Пусть $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, измерима. Зададим отображение:

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{A} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ E &\mapsto \int_E f d\mu \end{aligned}$$

Тогда ν – мера.

Доказательство. Единственное, что нужно проверить, это счетную аддитивность. Она как раз и проверена в теореме. ■

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x .

Тогда $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{A}$: $\mu e = 0$, $f = g$ на $E \setminus e$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus e} f d\mu + \int_e f d\mu = \int_{E \setminus e} f d\mu = \int_{E \setminus e} g d\mu = \int_{E \setminus e} g d\mu + \int_e g d\mu = \int_E g d\mu.$$

■

1.2 Пределный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)

Пусть $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n$ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Доказательство. Для начала отметим, что f измерима, как предел измеримых функций, поэтому её интеграл имеет смысл.

(\geq) Очевидно, поскольку $f(x) \geq f_n(x)$.

(\leq) Докажем, что $\forall g: 0 \leq g \leq f$, g – ступенчатая, $\forall c \in (0, 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X g \, d\mu$. Пусть $E_n = X(f_n \geq cg)$. Очевидно, что $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$. Кроме того, $\bigcup E_n = X$, потому что либо $\forall x \, f(x) > g(x)$ или $f(x) = g(x)$, но $c < 1$, поэтому всегда $f(x) > cg(x)$.

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{E_n} g \, d\mu.$$

Совершим переход при $n \rightarrow +\infty$ в неравенстве:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} g \, d\mu.$$

Воспользуемся тем, что $E \mapsto \int_E g \, d\mu$ – мера, то есть обладает свойством непрерывности снизу:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X g \, d\mu.$$

Из этого неравенства очевидно следует:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X g \, d\mu.$$

Возьмем теперь супремум по g от обеих частей и получим требуемое. ■

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geq 0$, измеримы на E . Тогда

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Доказательство. Аппроксимируем f, g ступенчатыми функциями f_n, g_n . Теорема об аппроксимации поставляет такие f_n, g_n , что $0 \leq f_n \leq f$ и $0 \leq g_n \leq g$. f_n, g_n ступенчатые, поэтому

$$\int_E (f_n + g_n) d\mu = \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu.$$

По теореме Леви переходим к пределу при $n \rightarrow +\infty$:

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

■

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E . Тогда $f + g$ суммируема, причем

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Доказательство.

- $(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|$, поэтому интегралы

$$\int_E (f + g)_\pm d\mu$$

конечны, то есть $f + g$ суммируема.

- Пусть $h = f + g$:

$$\begin{aligned} h_+ - h_- &= f_+ - f_- + g_+ - g_- \implies h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \implies \\ \int h_+ + \int f_- + \int g_- &= \int h_- + \int f_+ + \int g_+ \implies \\ \int_E (f + g) d\mu &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \end{aligned}$$

■

Определение. $\mathcal{L}(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \int |f| d\mu < +\infty\}$

Лемма 1.2.4. $\mathcal{L}(X)$ – линейное пространство.

Теорема 1.2.5. Пусть $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $u_n \geq 0$ почти везде, u_n измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)$, $0 \leq S_n(x) \leq S_{n+1}(x)$ почти везде, $S(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$. Тогда по теореме Леви:

$$\int_E S \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_n(x) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \int_E u_i(x) \, d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E u_i(x) \, d\mu.$$

■

Следствие 1.2.6. Пусть u_n измеримы, причем $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| \, d\mu < +\infty$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится абсолютно почти везде на E .

Доказательство.

$$\int_E \sum_{i=1}^{+\infty} |u_i| \, d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E |u_i| \, d\mu < +\infty.$$

Поэтому ряд под первым интегралом сходится.

■

Теорема 1.2.7. (Абсолютная непрерывность интеграла)

Пусть f – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{A}: \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $X_n = X(f \geq n)$. Тогда $X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \dots$. Кроме того, поскольку f суммируема, она не может быть бесконечной на множестве меры, отличной от нуля, то есть $\mu(\bigcap X_n) = 0$.

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon: \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$. Это выполнено потому, что отображение $A \mapsto \int_A |f|$ – мера, то есть непрерывно сверху:

$$\int_{X_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\bigcap X_n} |f| \, d\mu = 0.$$

- По ε положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Пусть теперь $\mu E < \delta$, вычислим интеграл:

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu + \int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu + n_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

■

Следствие 1.2.8. Пусть $e_n \in \mathcal{A}$, $\mu(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, f – суммируемая функция, тогда

$$\int_{e_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$, $\langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$ строим пространство $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu \rangle$.

Лемма 1.3.1. \mathcal{A} , \mathcal{B} – полукольца, тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – полукольцо.

Определение. \mathcal{A} , \mathcal{B} – полукольца, назовем тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ полукольцом измеримых прямоугольников. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0: \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

Теорема 1.3.2.

- m_0 – мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- Если μ , ν σ -конечны, тогда m_0 тоже σ -конечна.

Доказательство.

- Достаточно доказать счетную аддитивность. Пусть $P = \bigsqcup P_i$, $P, P_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $P = A \times B$, $P_i = A_i \times B_i$. Заметим, что верны утверждения:

$$\chi_P(x, y) = \sum_i \chi_{P_i}(x, y), \quad \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_i \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y).$$

Проинтегрируем последнее равенство по мере ν в Y :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) \cdot \int_B \chi_B(y) d\nu &= \sum_i \chi_{A_i}(x) \cdot \int_B \chi_{B_i}(y) d\nu \\ \chi_A(x) \cdot \nu B &= \sum_i \chi_{A_i}(x) \cdot \nu B \end{aligned}$$

Интегрируя второй раз по переменной x по мере μ , получаем:

$$\mu A \nu B = \sum_i \mu A_i \nu B_i.$$

- Пусть $X = \bigcup X_i$, $Y = \bigcup Y_i$, $\mu X_k < +\infty$, $\nu Y_k < +\infty$, тогда

$$X \times Y = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j, \quad m_0(X_k \times Y_j) = \mu X_k \nu Y_j < +\infty$$

■

Определение. Мы получили $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0 \rangle$ – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до σ -алгебры, которую будем обозначать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

Теорема 1.3.3. Произведение мер ассоциативно.

Теорема 1.3.4. $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$.

Определение. Пусть $C \subseteq X \times Y$. Тогда *сечением* для произвольного $x \in X$ назовем множество

$$C_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}.$$

Замечание. Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha}\right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_{\alpha})_x.$$

Теорема 1.3.5. (Принцип Кавальери)

Пусть μ, ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, тогда

1. При почти всех x $C_x \in \mathcal{B}$.
2. Отображение $x \mapsto \nu C_x$ измеримо на X .

$$3. m(C) = \int_X \nu C_x d\mu.$$

Доказательство. Пусть множество $D \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – элементы $X \times Y$, для которых принцип Кавальери верен.

- Запасем какие-нибудь простые множества в D . А именно, $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ верно, что $C = A \times B \in D$. Проверим это:

1. $C_x = B \in \mathcal{B}$ или \emptyset , в обоих случаях измеримо.
2. $x \mapsto \nu C_x = \nu B \chi_A(x)$ – очевидно измерима.
3. Вычислим интеграл:

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu B \chi_A(x) d\mu = \int_A \nu B d\mu = \mu A \nu B = mC.$$

- Пусть теперь $E = \bigsqcup_i E_i$, $E_i \in D$. Тогда $E \in D$.

1. $E_x = \bigsqcup_i (E_i)_x$ – измеримо почти везде, потому что $(E_i)_x$ измеримы почти везде.
2. $x \mapsto \nu E_x = \sum_i \nu(E_i)_x$ – измерима как сумма измеримых функций.
3. Считаем:

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \sum_i \nu(E_i)_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum_i m(E_i) = mE.$$

- Пусть $E_i \in D$, $E_1 \supseteq \dots$, $\bigcap E_i = E$, $mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$. Для начала заметим, что

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty.$$

Поэтому почти везде $\nu(E_i)_x < +\infty$.

1. При почти всех x одновременно измеримы все $(E_i)_x$, поэтому измеримо множество $\bigcap (E_i)_x = E_x$.
2. Пользуясь непрерывностью меры сверху получаем, что функция $x \mapsto \nu E_x = \lim \nu(E_i)_x$ измерима как предел измеримых функций.
3. Считаем:

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim \nu(E_i)_x d\mu.$$

По теореме Лебега, которую мы пока не знаем, можно вынести предел из под знака интеграла в случае, когда подынтегральное выражение можно мажорировать суммируемой функцией, не зависящей от i :

$$\nu(E_i)_x \leq \nu(E_1)_x.$$

Последняя функция суммируема, поэтому

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim \nu(E_i)_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim m(E_i) = mE.$$

Последнее равенство верно в силу непрерывности меры m сверху.

- Если $A_{i,j} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap_j \bigcup_i A_{i,j} \in D$. Сделаем множества $A_{i,j}$ дизъюнктными (пользуясь стандартной техникой, мы останемся в полукольце), а затем сделаем множества $\bigcup_i \hat{A}_{i,j}$ убывающими, взяв в $\tilde{A}_0 = \hat{A}_{i,j}, \dots, \tilde{A}_n = \bigcup_{i=1}^n \hat{A}_{i,j}$.
- Покажем, что если $mE = 0$, то $E \in D$. Аппроксимируем E сериями прямоугольников $P_{i,j}$ (из теоремы о стандартном продолжении меры): пусть $H = \bigcap_i \bigcup_j P_{i,j}$, очевидно, что $E \subset H \in D$, $mH = 0$. Обладая этими знаниями, проверим, что $E \in D$:

1. Поскольку $H \in D$:

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \implies \nu H_x = 0 \text{ при п.в. } x.$$

Пользуясь полнотой меры ν и тем фактом, что $E_x \subset H_x$, получаем, что $\nu E_x = 0$ при почти всех x .

2. Отображение $x \mapsto \nu E_x$ измеримо как отображение, почти всюду равное нулю.

3. Поскольку $\nu E_x = 0$ почти везде, очевидно, что $\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$.

- Покажем, что если $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $mC < +\infty$, то $C \in D$. $\exists e: me = 0$, $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{i,j}$, $H = C \setminus e$, $mC = mH$ (как в предыдущем пункте, из теоремы о стандартном продолжении меры).

1. $C_x = H_x \setminus e_x$ – измеримо как разность измеримых множеств.
2. $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ – измерима как разность измеримых функций.
3. Считаем:

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = \int_X \nu e_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC.$$

- Пусть, наконец, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Пусть $X = \bigsqcup_i X_i$, $Y = \bigsqcup_j Y_j$ (пользуемся σ -конечностью мер), тогда:

$$C = \bigsqcup_{i,j} C \cap (X_i \times Y_j) \in D.$$

■

Следствие 1.3.6. Пусть $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $p_1(C) \in \mathcal{A}$, тогда

$$m(C) = \int_{p_1(C)} \nu(C_x) d\mu.$$

Следствие 1.3.7. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для $f \geq 0$. Поскольку f непрерывна, множество $C = \Pi\Gamma(f, [a, b])$ измеримо в \mathbb{R}^2 . Тогда $C_x = [0, f(x)]$ – измеримо, $\lambda_1 C_x = f(x)$. Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1.$$

■

Замечание. Пусть $f \geq 0$, измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

Определение. Пусть $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$. Зафиксируем $x \in X$ и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим $f_y : C_y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.3.8. (Тонелли)

Пусть μ, ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, **измерима** по мере m . Тогда

- При почти всех x f_x **измерима** на Y .
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$ **измеримо** на X .

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

Доказательство.

- Пусть $f = \chi_C$, $C \subseteq X \times Y$. Тогда
 1. $f_x = \chi_{C_x}$ – измерима при почти всех x потому, что C_x измеримо при почти всех x (принцип Кавальери).
 2. $\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) d\nu = \nu_{C_x}$ – измеримо по принципу Кавальери.
 3.

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu_{C_x} d\mu = mC = \int_{X \times Y} \chi_C dm.$$
- Пусть $f = \sum_k a_k \chi_{C_k} \geq 0$, C_k измеримы, $k < +\infty$. Тогда:
 1. $f_x = \sum_k a_k \chi_{C_k}$ – измеримо почти как линейная комбинация измеримых почти везде функций.
 2. $\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu = \sum_k a_k \nu(C_k)_x$ – измеримо почти везде по аналогичной причине.
 3.

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_k a_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum_k a_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm.$$
- Пусть $f \geq 0$, g_n – ступенчатые функции, аппроксимирующие f , $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$, $\lim g_n = f$. Тогда
 1. $f_x = \lim (g_n)_x$ – измерима как предел измеримых функций.

2. $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \lim_Y \int_Y (g_n)_x d\nu = \lim_Y \int_Y \varphi_n(y) d\nu$ – измерима как предел измеримых функций. Второе равенство справедливо как следствие теоремы Леви.

3.

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \lim \int_X \varphi_n(x) d\mu = \lim \int_{X \times Y} g_n dm = \int_{X \times Y} f dm.$$

Здесь дважды применена теорема Леви.

■

Теорема 1.3.9. (Фубини)

Пусть μ, ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu, f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$, суммируема. Тогда

- При почти всех x f_x **суммируема** на Y .
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$ **суммируемо** на X .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы Тонелли.

■

Следствие 1.3.10. Если $p_1(C)$ измеримо, то

$$\int_C f dm = \int_{X \times Y} f \chi_C dm = \int_X \left(\int_Y f \chi_C d\nu \right) d\mu = \int_{p_1(C)} \left(\int_{C_x} f d\nu \right) d\mu.$$

Замечание. Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

1. $f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \rightarrow 0.$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$

Оказывается, верно $2 \implies 1$, но без дополнительных требований неверно $1 \implies 2$.

Лемма 1.3.11. Пусть g суммируема. Тогда $\exists A \in \mathcal{A}: \mu A < +\infty, \int_{X \setminus A} g d\mu < \varepsilon.$

Доказательство.

$$\int_X g d\mu = \sup \left\{ \int_X h d\mu, h - \text{суммируема} \right\}.$$

Выберем ступенчатую h_0 такую, что $\int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon$. Тогда пусть

$$A = \text{supp } h_0 = \{x \mid h(x) \neq 0\}.$$

$$\int_{X \setminus A} g + \int_A g - h_0 = \int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon.$$

$\mu A < +\infty$, так как g суммируема. ■

Теорема 1.3.12. (Лебега о мажорированной сходимости)

Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$, $\exists g$:

- $\forall n \ |f_n| \leq g$ при почти всех x .
- g суммируема на X .

В такой ситуации g называется *мажорантой*. Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Доказательство.

- f_n суммируема по первому пункту условия
- По следствию из теоремы Рисса, $f \leq g$. Поэтому f тоже суммируема.
- Пусть теперь $\mu X < +\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ положим $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$.
 $f_n \xrightarrow[\mu]{} f \implies \mu X_n \rightarrow 0$.

$$\int_X |f - f_n| d\mu = \int_{X_n} |f - f_n| d\mu + \int_{X \setminus X_n} |f - f_n| d\mu < \int_{X_n} 2g d\mu + \int_{X \setminus X_n} \varepsilon d\mu.$$

Первый интеграл стремится к нулю по теореме об абсолютной сходимости интеграла. Второй интеграл оценивается сверху:

$$\int_{X \setminus X_n} \varepsilon d\mu \leq \int_X \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu X \rightarrow 0.$$

- Пусть $\mu X = +\infty$. По предыдущей лемме $\exists A: \mu A < +\infty, \int_X g < \varepsilon$, тогда

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| d\mu + 2\varepsilon \rightarrow 0.$$

Первый интеграл стремится к нулю по предыдущему пункту ($\mu A < +\infty$).

Следствие 1.3.13. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Доказательство.

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f - f_n| d\mu \rightarrow 0.$$

Теорема 1.3.14. Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \rightarrow f$ почти везде, $\exists g$:

- $\forall n |f_n| \leq g$.
- g суммируема на X .

Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Доказательство.

- Первый пункт доказывается аналогично предыдущей теореме.
- Положим

$$h_n = \sup_{j \geq n} |f_j - f|.$$

Очевидно, что h_n убывает с ростом n , и $0 \leq h_n \leq 2g$ почти везде. Кроме того, по определению, $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| \rightarrow 0$ почти везде, потому что $f_n \rightarrow f$ почти везде. Функция $2g - h_n$ неотрицательна и возрастает с ростом n , поэтому подходит под теорему Леви:

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \implies \int_X h_n \rightarrow 0.$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \leq \int_X h_n d\mu \rightarrow 0.$$

Следствие 1.3.15. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Теорема 1.3.16. (Фату)

Пусть $f_n \geq 0$, f_n измеримы, $f_n \rightarrow f$ почти везде. Если

$$\exists c > 0: \forall n \int_X f_n d\mu \leq c.$$

то

$$\int_X f d\mu \leq c.$$

Доказательство. Пусть $g_n = \inf_{j \geq n} f_j$. Очевидно, что g_n возрастает с ростом n и $g_n \geq 0$. Кроме того,

$$\lim g_n = \varliminf f_n = f.$$

Тогда g_n подходит под теорему Леви:

$$\int_X f d\mu \leftarrow \int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq c.$$

■

Следствие 1.3.17. Теорема Фату верна и в случае $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Доказательство. Сразу следует из теоремы Рисса. ■

Следствие 1.3.18. Пусть $f_n \geq 0$, f_n измеримы, тогда

$$\int_X \varliminf f_n d\mu \leq \varliminf \int_X f_n d\mu.$$

Доказательство. Выберем последовательность n_k такую, что

$$\lim \int_X f_{n_k} d\mu = \varliminf \int_X f_n d\mu.$$

Положим $g_n = \inf_{j \geq n} f_j$. Аналогично тому, как мы делали в доказательстве теоремы Фату:

$$\int_X \varliminf f_n d\mu \leftarrow \int_X g_{n_k} d\mu \leq \int_X f_{n_k} d\mu \rightarrow \varliminf \int_X f_n d\mu.$$

■

1.4 Замена переменных в интеграле

Определение. Отображение $\Phi: X \rightarrow Y$ называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

Лемма 1.4.1. $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$ – σ -алгебра.

Определение. При фиксированном измеримом $\Phi: X \rightarrow Y$ отображение

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры μ при отображении Φ* .

Лемма 1.4.2. Образ меры при отображении является мерой.

Замечание. $\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, d\mu$

Лемма 1.4.3. Если функция $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно \mathcal{B} , то $f \circ \Phi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно \mathcal{A} .

Доказательство.

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \in \mathcal{A}.$$

■

Определение. Пусть $\omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$, измерима. В этом контексте ω называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры μ с весом ω* называется мера

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu$$

Теорема 1.4.4. (Об интегрировании по взвешенному образу меры)

Пусть $\Phi: X \rightarrow Y$ – измеримое отображение, $0 \leq \omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – весовая функция, измерима на X , ν – взвешенный образ меры μ с весом ω . Тогда для любой измеримой $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ верно:

- $f \circ \Phi$ измерима на X .
- $\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu$

Доказательство.

- $(f \circ \Phi)$ измерима по предыдущей лемме.

- Пусть $f = \chi_B$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда

$$(f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu = \nu B = \int_Y f \, d\nu.$$

- Пусть теперь f – ступенчатая функция. Тогда:

$$\int_Y f \, d\nu = \sum_{k=1}^n \int_Y f_k \, d\nu = \sum_{k=1}^n \int_X (f_k \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

- Докажем утверждение для измеримой неотрицательной f . Аппроксимируем f ступенчатыми f_n так, чтобы $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Тогда справедлива теорема Леви:

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \lim \int_X (f_n \circ \Phi) \omega \, d\mu = \lim \int_Y f_n \, d\nu = \int_Y f \, d\nu.$$

- Проверим утверждение для произвольной суммируемой функции f . Интеграл её модуля конечен, кроме того, срезки мажирируются модулем, поэтому их интегралы тоже конечны. Таким образом, мы имеем право писать все формулы, использующие срезки.

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X (f_+ \circ \Phi) \omega \, d\mu - \int_X (f_- \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_Y f_+ \, d\nu - \int_Y f_- \, d\nu = \int_Y f \, d\nu.$$

■

Следствие 1.4.5. Пусть f суммируема на Y , $B \in \mathcal{B}$, тогда в условиях теоремы:

$$\int_B f \, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

Определение. В ситуации $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \text{id}$, если $\omega \geq 0$ измерима, причем $\nu(B) = \int_B \omega \, d\mu$, ω называется *плотностью меры ν относительно меры μ* . В таком случае

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \omega \, d\mu.$$

Теорема 1.4.6. (Критерий плотности)

Пусть ν – мера на \mathcal{A} , $\omega \geq 0$ измерима, тогда верно, что ω – плотность ν относительно μ тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu(A) \leq \nu(A) \leq \sup_A \omega \cdot \mu(A).$$

Доказательство.

(\Rightarrow) $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\inf_A \omega \cdot \mu A \leq \int_A \omega d\mu = \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A.$$

(\Leftarrow) – Пусть $\omega > 0$, $q \in (0, 1)$, $A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1})$. Тогда посылке теоремы имеем:

$$q^j \cdot \mu A_j \leq_1 \nu A_j \leq_2 q^{j-1} \cdot \mu A_j.$$

Кроме того, из простейших свойств интеграла следует:

$$q^j \cdot \mu A_j \leq_3 \int_{A_j} \omega d\mu \leq_4 q^{j-1} \cdot \mu A_j.$$

Воспользуемся этим:

$$q \int_A \omega d\mu = q \sum_j \int_{A_j} \omega d\mu \leq_4 \sum_j q^j \cdot \mu A_j \leq_1 \nu A \leq_2 \frac{1}{q} \sum_j q^j \cdot \mu A_j \leq_3 \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu.$$

Устремляя q к единице, получаем требуемое.

– Пусть теперь $\omega \geq 0$, $e = X(\omega = 0)$. Тогда $\nu e = 0$ по условию. Получается, что

$$\nu e = 0 = \int_e \omega d\mu.$$

Проверим теперь утверждение для произвольного измеримого A :

$$\nu A = \int_{X \setminus e} \omega d\mu + 0 = \int_{X \setminus e} \omega d\mu + \int_e \omega d\mu = \int_X \omega d\mu.$$

■

Лемма 1.4.7. Пусть f, g – суммируемые на X функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f d\mu = \int_A g d\mu.$$

Тогда $f = g$ почти везде.

Доказательство. Проверим, что $h = f - g = 0$ при почти всех x . По условию, $\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A h d\mu = \int_A (f - g) d\mu = 0$. Положим $A_+ = X(h \geq 0)$, $A_- = X(h < 0)$. Тогда $X = A_+ \sqcup A_-$ и

$$\int_{A_+} |h| d\mu = \int_{A_+} h d\mu = 0.$$

$$\int_{A_-} |h| d\mu = - \int_{A_-} h d\mu = 0.$$

Получается,

$$\int_X |h| d\mu = 0 + 0 = 0.$$

Поэтому $h = 0$ за исключением, может быть, множества меры ноль. ■

Замечание. Из последней леммы очевидно следует, что плотность одной меры относительно другой определена однозначно с точностью до равенства почти везде.

Лемма 1.4.8. (Об образе малых кубических ячеек)

Пусть \mathcal{O} открыто, $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$, Φ дифференцируемо в $U(\mathbf{a})$, $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$, $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 \forall Q - \text{куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

Доказательство. Обозначим $L = \Phi'(\mathbf{a})$ – обратимый линейный оператор. Выпишем определение дифференцируемости:

$$\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{a}) = L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Умножим обе части на L^{-1} и перенесем через знак равенства:

$$\underbrace{\mathbf{a} + L^{-1}(\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{a}))}_{\Psi(\mathbf{x})} = \mathbf{x} + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Получается, что Ψ близок к тождественному отображению. Из последней формулы очевидно следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon(\mathbf{a})$:

$$|\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Пусть теперь $Q \subset B_\varepsilon(\mathbf{a})$ – куб со стороной h . Тогда $\forall \mathbf{x} \in Q$

$$|\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon h, \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i| < h.$$

Попытаемся понять, что делает с Q отображение Ψ . Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$. Тогда

$$\begin{aligned} |\Psi(\mathbf{x})_i - \Psi(\mathbf{y})_i| &\leq |\Psi(\mathbf{x})_i - \mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| + |\Psi(\mathbf{y})_i - \mathbf{y}_i| \\ &\leq |\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| + h + |\Psi(\mathbf{y}) - \mathbf{y}| \\ &\leq (1 + 2\varepsilon)h \end{aligned}$$

Получается, что $\Psi(Q)$ содержится в кубе со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$. Тогда:

$$\lambda\Psi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q.$$

Отображение Ψ отличается от отображения Φ только однократным применением оператора L и парой сдвигов. Поэтому:

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q.$$

Подберем такое ε чтобы выполнялось неравенство

$$|\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m < c.$$

И выберем в качестве δ радиус шара $B_\varepsilon(\mathbf{a})$. ■

Лемма 1.4.9. Пусть \mathcal{O} открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\mathcal{O})$, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq Q$, Q – куб, причем $\text{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$. Тогда

$$\inf_{\substack{A \subseteq G \\ G \text{ открыто}}} \left(\lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

Теорема 1.4.10. Пусть \mathcal{O} открыто, $\Phi : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq \mathcal{O}$, тогда

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'| d\lambda_m.$$

Доказательство.

- Пусть $\nu A = \lambda\Phi(A)$. Это мера, потому что Φ – диффеоморфизм. Надо проверить, что $J_\Phi = |\det \Phi'|$ – плотность меры ν относительно меры λ . Для этого будем проверять критерий плотности: $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

- Проверим второе неравенство. Пусть Q – кубическая ячейка, причем $\overline{Q} \subseteq \mathcal{O}$. Предположим противное:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu Q.$$

Возьмем $c > \sup_Q J_\Phi$ такое, чтобы

$$\lambda Q \cdot c < \nu Q.$$

Запустим процесс половинного деления. На каждом шаге найдется часть Q_i , для которой верно

$$\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i.$$

Это верно потому, что иначе по аддитивности меры не было бы выполнено аналогичное неравенство на предыдущем шаге. По теореме Кантора

$$\exists! \mathbf{a} \in \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{Q_i}.$$

То есть, мы имеем кубы с центром в точке \mathbf{a} со сколь угодно малой стороной. Это противоречит лемме об образе малых кубических ячеек, которая для достаточно малых кубов устанавливает неравенство

$$\nu Q = \lambda\Phi(Q) > c \cdot \lambda Q.$$

- Пусть теперь A – открытое множество. Представим его в виде дизъюнктного объединения кубических ячеек Q_i : $\overline{Q_i} \subseteq \mathcal{O}$. Тогда

$$\nu A = \sum_i \nu Q_i \leq \sum_i \sup_{Q_i} J_\Phi \cdot \lambda Q_i \leq \sum_i \sup_A J_\Phi \cdot \lambda Q_i = \sup_A J_\Phi \cdot \sum_i \lambda Q_i = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

- Пусть наконец A – измеримое множество. Пользуясь предыдущей леммой имеем

$$\lambda A \cdot \sup_A J_\Phi = \inf_{G \supset A} \left(\lambda G \cdot \sup_G J_\Phi \right) \geq \inf_{G \supset A} \nu G \geq \inf_{G \supset A} \nu A = \nu A.$$

- Таким образом, мы доказали второе неравенство из критерия плотности. Докажем левую часть, перейдя к $\hat{A} = \Phi(A)$, $\hat{\Phi} = \Phi^{-1}$:

$$\lambda \hat{\Phi}(\hat{A}) = \nu \hat{A} \leq \sup_{\hat{A}} J_{\hat{\Phi}} \cdot \lambda \hat{A} \implies \lambda A \leq \frac{1}{\inf_A J_\Phi} \cdot \lambda \Phi(A) \implies \nu A = \lambda \Phi(A) \geq \inf_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

■

Теорема 1.4.11. Пусть \mathcal{O} открыто, $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$, f – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int_{\mathcal{O}^1} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(\mathbf{x})) |\det \Phi'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Доказательство. По предыдущей теореме, $J_\Phi = |\det \Phi'(\mathbf{x})|$ – плотность меры $\nu = \lambda \circ \Phi$. Тогда теорема напрямую следует из теоремы об интегрировании по взвешенному образу меры. ■

Замечание. То же верно и в случае, когда f суммируема.

1.5 Функции распределения

Определение. Пусть $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, причем $\forall t \in \mathbb{R} \mu X(h < t) < +\infty$. Тогда функция $H(t) = \mu X(h < t)$ называется *функцией распределения h по мере μ* .

Замечание. $H(t)$ не убывает.

Замечание. Пусть h измерима, тогда для любого борелевского $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $h^{-1}(B)$ измерим.

Определение. Стандартное продолжение $\mu_H([a, b)) = H(b-0) - H(a-0)$ называется *мерой Бореля-Стилтьеса*.

Определение. В текущем контексте обозначим $h(\mu) = \nu: \nu A = \mu h^{-1}(A)$.

Лемма 1.5.1. Пусть $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения. Тогда на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu_H = h(\mu)$.

Доказательство. Проверим равенство на ячейках, чего будет достаточно для совпадения функций на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\mu_H[a, b) = H(b-0) - H(a-0) = H(b) - H(a) = \mu X(a \leq h < b) = \mu h^{-1}([a, b)).$$

Второе равенство выполнено как следствие непрерывности меры снизу:

$$\bigcup_{t < b} X(h < t) = X(h < b) \implies H(b-0) = \lim_{t \rightarrow b-} H(t) = \mu X(h < b) = H(b).$$

■

Теорема 1.5.2. Пусть $0 \leq f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, измеримая по Борелю, $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения, μ_H – мера Бореля-Стилтьеса для H . Тогда

$$\int_X f \circ h \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_H.$$

Доказательство. Пусть $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi = h$, $w = 1$. Кроме того, нам по определению известно, что для $\nu = h(\mu)$ верно

$$\nu A = \mu h^{-1}(A).$$

Это значит, что ν есть взвешенный (с весом 1) образ меры μ при отображении h . Поэтому справедлива теорема об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\nu = \int_X f \circ \Phi \, d\mu.$$

Заменяв ν на μ_H по предыдущей лемме и вернув $h = \Phi$ получаем

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_H = \int_X f \circ h \, d\mu.$$

■

Глава 2

Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностный интеграл I рода

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3 , $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – параметризация M , тогда $E \subseteq M$ называется *измеримым*, если $\varphi^{-1}(E) \in \mathcal{M}^2$.

Определение. Введем обозначение:

$$\mathcal{A}_M \stackrel{def}{=} \{E \subseteq M \mid E \text{ измеримо}\}.$$

Замечание. \mathcal{A}_M – σ -алгебра.

Определение. На \mathcal{A}_M заведем меру:

$$\begin{aligned} S: \mathcal{A}_M &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ E &\mapsto \iint_{\varphi^{-1}(E)} \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv. \end{aligned}$$

Замечание. Замкнутые, открытые, компактные $E \subset M$ измеримы.

Лемма 2.1.1. S не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. Пусть $\varphi: \mathcal{O}_1 \rightarrow M$, $\psi: \mathcal{O}_2 \rightarrow M$ – параметризации M . Тогда они отличаются на диффеоморфизм (u, v) :

$$\varphi(s, t) = \psi(u(s, t), v(s, t)).$$

Вычислим для начала $\|\psi'_s \times \psi'_t\|$:

$$\begin{aligned} \|\psi'_s \times \psi'_t\| &= \|(\varphi'_u u'_s + \varphi'_v v'_s) \times (\varphi'_u u'_t + \varphi'_v v'_t)\| = \|(\varphi'_u \times \varphi'_v) \cdot (u'_s v'_t - u'_t v'_s)\| \\ &= \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \cdot |u'_s v'_t - u'_t v'_s| = \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \cdot |\det J| \end{aligned}$$

Проверим совпадение интегралов:

$$\iint_{\psi^{-1}(E)} \|\psi'_s \times \psi'_t\| \, ds dt = \iint_{\varphi^{-1}(E)} \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| |\det J| \, ds dt = \iint_{\varphi^{-1}(E)} \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv.$$

■

Определение. $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима по мере S , если $f \circ \varphi$ измерима на \mathcal{O} по мере λ .

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие, φ – его параметризация, $0 \leq f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима по S , тогда *поверхностным интегралом I рода* назовем интеграл

$$\iint_M f \, dS.$$

Или развернуто, пользуясь теоремой об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\iint_M f \, dS = \iint_{\varphi^{-1}(M)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv.$$

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^3$ назовем *кусочно-гладким многообразием в \mathbb{R}^3* , если M представляется в виде конечного дизъюнктного объединения объектов вида

- простое гладкое двумерное многообразие.
- простое гладкое одномерное многообразие (носитель гладкого пути).
- точка.

Определение. Мера S на кусочно-гладком многообразии $E = \bigsqcup_i M_i$ вычисляется следующим образом:

$$S(E) = \sum_i S(E \cap M_i).$$

2.2 Поверхностный интеграл II рода

Определение. Поверхностью будем называть простое гладкое двумерное многообразие.

Определение. Стороной поверхности называется непрерывное векторное поле единичных нормалей к этой поверхности.

Определение. Поверхность называется двусторонней, если для неё существует непрерывное поле нормалей. Иначе она называется односторонней.

Пример. Лента Мебиуса – односторонняя поверхность.

Определение. Репером называется пара линейно независимых касательных векторов.

Определение. Пусть Ω – двусторонняя поверхность в \mathbb{R}^3 , $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $n_0: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – сторона поверхности. Тогда интегралом II рода функции F по поверхности Ω назовем интеграл

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS.$$

Замечание.

- Смена стороны на противоположную влечет замену знака.
- Интеграл II рода не зависит от параметризации.
- Пусть $F = \langle P, Q, R \rangle$. Тогда интеграл II рода записывают так:

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS = \int_{\Omega} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

- Пусть поверхность задана параметризацией $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$. Получим нормальный вектор, перемножив векторно касательные векторы:

$$n = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right)^T.$$

Мера S выглядит следующим образом:

$$dS = \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| du dv = \|n\| du dv.$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS &= \iint_{\tilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\|n\|} \cdot \|n\| du dv = \\ &= \iint_{\tilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) du dv \end{aligned}$$

Замечание. Посчитаем интеграл поля $\langle 0, 0, R \rangle$ по поверхности Ω , заданной графиком (то есть, имеющей параметризацию вида $x, y, z(x, y)$).

$$\iint_{\Omega^+} R \, dx \, dy = \iint_{\tilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) du \, dv = \iint_{\tilde{\Omega}} R(x, y, z(x, y)) du \, dv$$

Замечание. Попробуем посчитать объём фигуры Ω , ограниченной графиками z_1, z_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_3(\Omega) &= \iint_{\tilde{\Omega}} (z_1(x, y) - z_2(x, y)) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{\Omega}} z_1(x, y) \, dx \, dy - \iint_{\tilde{\Omega}} z_2(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\partial\Omega^+} z \, dx \, dy \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались предыдущим замечанием и тем, что у нижней части фигуры (ограниченной z_1) нормали направлены в другую сторону.

Замечание. Пусть γ – гладкая кривая в \mathbb{R}^2 (лежит в плоскости xy), Ω – цилиндр над γ . Тогда

$$\iint_{\Omega} R \, dx \, dy = 0.$$

Доказательство.

Первое доказательство: по формуле из первого замечания мы собираемся интегрировать какую-то функцию по носителю пути по двумерной мере. Носитель гладкого пути по такой мере всегда имеет меру 0.

Второе доказательство: мы пытаемся интегрировать $\langle F, n_0 \rangle$. Заметим, что у F не равна нулю только третья координата (R), тогда как вектор нормали к цилиндру над xy всегда имеет $z = 0$. Таким образом, мы интегрируем функцию, тождественно равную нулю. ■

Глава 3

Основные интегральные формулы

3.1 Формула Грина

Замечание. В данном контексте рассматривается D : компактное, связное, односвязное множество в \mathbb{R}^2 , ограниченное кусочно-гладкой кривой. При этом граница ∂D направлена против часовой стрелки (фигура всегда находится слева).

Теорема 3.1.1. (Формула Грина)

Пусть P, Q – гладкие векторные поля в $U(D)$. Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Замечание. Формула "аддитивна" по фигуре.

3.2 Формула Стокса

Замечание. В данном контексте рассматривается Ω – двусторонняя поверхность с границей. n_0 – её сторона. $\partial \Omega$ – кусочно-гладкая кривая, согласованная по ориентации со стороной поверхности.

Теорема 3.2.1. (Формула Стокса)

Пусть $\langle P, Q, R \rangle$ – гладкое векторное поле в $U(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\partial \Omega} P dx + Q dy + R dz = \iiint_{\Omega} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy$$

Замечание. Формула "аддитивна" по фигуре.

3.3 Формула Гаусса-Остроградского

Замечание. В данном контексте рассматриваются

$$V = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, f(x, y) \leq z \leq F(x, y) \}.$$

Здесь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ – замкнутое множество, $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая в \mathbb{R}^2 , $f, F \in C^1(\Omega)$. Рассматриваем внешнюю сторону фигуры.

Теорема 3.3.1. (Формула Гаусса-Остроградского)

Пусть $R: U(V) \rightarrow \mathbb{R}$, $R \in C^1(U(V))$. Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} R dx dy.$$

Следствие 3.3.2. В условиях формулы Гаусса-Остроградского, верно

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial V^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Следствие 3.3.3. Пусть l – фиксированное направление в \mathbb{R}^3 . Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} f \cdot \langle l, n_0 \rangle dS.$$

3.4 Примеры дифференциальных операторов

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R \rangle$ – векторное поле в \mathbb{R}^3 . Тогда *дивергенцией* A называется

$$\operatorname{div} A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Замечание. Дивергенцию поля в точке можно вычислять так:

$$\operatorname{div} A(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iiint_{B(a,r)} \operatorname{div} A dx dy dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iint_{S(a,r)} \langle A, n_0 \rangle dS.$$

Последнюю формулу можно интерпретировать как величину потока, проходящего через сферу с центром в данной точке достаточно малого радиуса. То есть, дивергенция характеризует точку как “источник” поля.

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R \rangle$ – векторное поле в \mathbb{R}^3 . Тогда *ротом* A называется

$$\operatorname{rot} A \stackrel{\text{def}}{=} \langle R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y \rangle.$$

Замечание. $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$, \mathcal{O} – односвязная область, $\operatorname{rot} V = 0$. Тогда V потенциально.

Замечание. $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$, \mathcal{O} – односвязная область, $\operatorname{rot} V = 0$. Тогда

- Если γ – петля, то

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = 0.$$

- Если γ – путь, то интеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

зависит только от начальной и конечной точек пути.

Замечание. Если \mathcal{O} не односвязна, но $\operatorname{rot} V = 0$, то все равно интеграл по пути не зависит от самого пути.

Если в поле нет источников, то откуда может взяться поток через поверхность?

Замечание. $\operatorname{div} V = 0$, тогда для любой “разумной” фигуры Ω выполнено

$$\iint_{\partial\Omega} \langle V, n_0 \rangle dS = 0.$$

Определение. Поле V называется *соленоидальным* в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, если у него существует векторный потенциал, то есть $\exists B$ – векторное поле такое, что $\operatorname{rot} B = V$ на Ω .

Теорема 3.4.1. (Критерий соленоидальности поля)

A соленоидально в $\Omega \iff \operatorname{div} A = 0$ на Ω

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Пространство L^p

Определение. Комплексное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ назовем *измеримым*, если $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$, причем g, h измеримы.

Определение. Аналогично определим *суммируемые* комплексные отображения.

Определение. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда определим интеграл:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E g \, d\mu + i \int_E h \, d\mu.$$

Замечание.

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

Теорема 4.1.1. (Интегральное неравенство Гёльдера)

Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримые почти везде заданные функции. Тогда

$$\int_X |f g| \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 4.1.2. (Интегральное неравенство Минковского)

Пусть $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$, $p \geq 1$, тогда

$$\left(\int_X |f + g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. Пусть $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой. Тогда для $1 \leq p < +\infty$ положим

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \text{п.в. } X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима, } \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ – линейное пространство.

Определение. Зададим на \mathcal{L}^p отношение эквивалентности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ почти везде. Положим

$$L^p(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^p(X, \mu) / \sim.$$

Определение. В L^p заведем норму: $\| [f] \| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$

Определение. Пусть $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ задана почти везде. Тогда *существенным супремумом* f называется

$$\operatorname{ess\,sup}_X f \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq A \text{ п.в.} \}.$$

Теорема 4.1.3. (Свойства существенного супремума)

- $\operatorname{ess\,sup}_X f \leq \sup_X f.$
- $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_X f$ при почти всех $x.$
- $\left| \int_X f g d\mu \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_X |f| \cdot \int_X |g|.$

Определение. Для $p = \infty$:

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \text{п.в. } X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима, } \operatorname{ess\,sup}_X f < +\infty \right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ – линейное пространство.

Определение. Пространство L^∞ зададим аналогично конечному случаю. Нормой на этом пространстве положим $\operatorname{ess\,sup}$.

Теорема 4.1.4. (О вложении пространств L^p)

Пусть $\mu(X) < +\infty$, $1 \leq r < s \leq +\infty$. Тогда

- $L^r(X, \mu) \subset L^s(X, \mu).$
- $\|f\|^s \leq \mu(X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r.$

Следствие 4.1.5. Пусть $\mu(E) < +\infty$, $1 \leq s < r \leq +\infty$, $f_n, f \in L^s$, $f_n \xrightarrow{L^r} f$, тогда $f_n \xrightarrow{L^s} f$.

Теорема 4.1.6. (О сходимости в L^p и по мере)

Пусть $1 \leq r < +\infty$, $f_n, f \in L^p$, тогда

- $f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$, либо $f_n \rightarrow f$ почти везде, тогда если $\exists g \in L^p: |f_n| \leq g$, то $f_n \xrightarrow{L^p} f.$

Замечание. L^∞ – полное метрическое пространство.

Теорема 4.1.7. (Полнота пространств L^p)

$\forall 1 \leq p \leq \infty$ L^p полно.

Определение. Пусть X – топологическое пространство, тогда множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если $\text{Cl}(A) = X$. Иначе говоря, $\text{Int}(X \setminus A) = \emptyset$, или $\forall x \in X \forall U(x) U(x) \cap A \neq \emptyset$.

Определение. Множество всех ступенчатых функций $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим $St(X)$.

Лемма 4.1.8. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, тогда множество $St(X) \cap L^p$ плотно в L^p .

Определение. (Четвертая аксиома отделимости)

Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нем любые два замкнутые непересекающиеся множества отделимы, причем любое одноточечное множество замкнуто.

Лемма 4.1.9. (Урысон)

Пусть X – нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует непрерывная функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

- $0 \leq f \leq 1$.
- $f|_{F_0} = 0$.
- $f|_{F_1} = 1$.

Определение. Финитной функцией в \mathbb{R}^m называется функция f такая, что

$$\exists B(a, r): f|_B = 0.$$

По умолчанию, f непрерывна.

Теорема 4.1.10. Множество финитных функций плотно в L^p при $1 \leq p < +\infty$.

Замечание. Условие $p \neq +\infty$ существенно.

Определение. Множество непрерывных T -периодических функций будем обозначать $\tilde{C}([0, T])$.

Теорема 4.1.11. (О непрерывности сдвига)

Пусть $f_h(x) = f(x + h)$. Тогда

- f равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m \implies \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
- $1 \leq p < +\infty, f \in L^p \implies \|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
- $f \in \tilde{C}([0, T]) \implies \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
- $1 \leq p < +\infty, f \in L^p([0, T]) \implies \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

4.2 Гильбертовы пространства

Определение. Гильбертовым пространством называется линейное пространство \mathcal{H} со скалярным произведением, полное как метрическое пространство с метрикой и нормой, порожденными скалярным произведением:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
- $\| \cdot \|: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
- $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Далее \mathcal{H} – Гильбертово пространство.

Определение. Ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n, a_n \in \mathcal{H}$, называется *сходящимся*, если $S_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N a_i$ таково, что $\exists S \in \mathcal{H}: \|S_N - S\| \rightarrow 0$. Иными словами, последовательность частичных сумм ряда сходится к элементу \mathcal{H} .

Определение. $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$.

Определение. Пусть $A \subseteq \mathcal{H}$. Тогда по определению $x \perp A \iff \forall y \in A \ x \perp y$.

Определение. Ряд называется *ортogonalным*, если все его элементы попарно ортogonalны.

Теорема 4.2.1. (Свойства сходимости в Гильбертовых пространствах)

Пусть $x_i, y_i \in \mathcal{H}$. Тогда

- $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 \implies \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$.
- Пусть ряд $\sum x_k$ сходится. Тогда $\forall y \in \mathcal{H} \ \langle \sum x_k, y \rangle = \sum \langle x_k, y \rangle$.
- Пусть ряд $\sum x_k$ ортogonalен. Тогда $\sum x_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum \|x_k\|^2$ сходится. Более того, в этом случае $\|\sum x_k\|^2 = \sum \|x_k\|^2$.

Определение. *Ортogonalным семейством векторов* называется $\{e_k\} \subseteq \mathcal{H}$ такое, что $e_k \perp e_{j \neq k}$. Если более того $\|e_k\| = 1$, то семейство называется *ортонормированным*.

Определение. $L_2 \stackrel{\text{def}}{=} L^2([0, 2\pi], \lambda_1)$.

Теорема 4.2.2. Пусть $\{e_k\}$ – ОС, $x \in \mathcal{H}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k$. Тогда

- ОС линейно независима.
- $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$.
- $c_k e_k = \mathcal{P}_{\{te_k\}}^\perp$, то есть $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$.

4.3 Ряды Фурье

Определение. Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, тогда числа $c_k(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$ называются *коэффициентами Фурье вектора \mathbf{x} по системе \mathbf{e}_k* .

Определение. Ряд $\sum_k c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k$ называется *рядом Фурье \mathbf{x} по \mathbf{e}_k* .

Замечание. При перенормировке ОС ряд Фурье не меняется.

Теорема 4.3.1. (О свойствах частичных сумм ряда Фурье)

Пусть $\mathcal{L} = \text{Lin}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Тогда

- $S_n = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{\perp}(\mathbf{x})$, то есть $\mathbf{x} = S_n + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \perp \mathcal{L}$.
- S_n – элемент наилучшего приближения \mathbf{x} в \mathcal{L} , то есть $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{L} \quad \|S_n - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.
- $\|S_n\| \leq \|\mathbf{x}\|$.

Следствие 4.3.2. (Неравенство Бесселя)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

Теорема 4.3.3. (Рисс, Фишер)

Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$. Тогда

- Ряд Фурье \mathbf{x} сходится в \mathcal{H} .
- $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k + \mathbf{z}$, $\forall k \quad \mathbf{z} \perp \mathbf{e}_k$.
- $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k \iff \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2$.

Определение. Равенство Парсиваля, или уравнение замкнутости:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2.$$

4.4 Базис в Гильбертовом пространстве

Определение. *Базисом* в Гильбертовом пространстве называется ОС $\{\mathbf{e}_k\}$, если выполняется условие:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k.$$

Определение. ОС $\{\mathbf{e}_k\}$ называется *полной*, если

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}: \quad \{\mathbf{e}_k\} \cup \mathbf{x} - \text{не ОС}.$$

Определение. ОС $\{e_k\}$ называется *замкнутой*, если для любого её элемента выполняется уравнение замкнутости.

Теорема 4.4.1. (Характеризация базиса)

Пусть $E = \{e_k\}$ – ОС. Тогда эквивалентны утверждения:

- E – базис.
- $\forall x, y \in \mathcal{H} \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \cdot \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$
- E замкнута.
- E полна.
- $Lin(e_1, e_2, \dots)$ плотно в \mathcal{H} .