

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Интеграл | 2 |
| 1.1 | Определение интеграла | 2 |
| 1.2 | Предельный переход под знаком интеграла | 5 |
| 1.3 | Произведение мер | 6 |
| 1.4 | Замена переменных в интеграле | 10 |

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна}\}.$$

Определение. Пусть $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E \cap E_k.$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
- $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Определение. Пусть $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, d\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, d\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leq \int f \, d\mu \leq +\infty$.
- $0 \leq g \leq f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.
- $0 \leq g \leq f$, f, g измеримы, тогда $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

Определение. Пусть f — измеримая функция X , причем хотя бы один из интегралов срезов конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезов конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

- Измеримая $f \geq 0 \implies$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
- f суммируема $\iff \int |f| \, d\mu < +\infty$.
- Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:

$$f \leq g \implies \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

- $\int_E 1 \, d\mu = \mu(E)$, $\int_E 0 \, d\mu = 0$.
- Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

- $\int -f \, d\mu = - \int f \, d\mu, \forall c > 0 \int c \cdot f \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu.$

- Пусть $\exists \int_E f \, d\mu$, Тогда

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

- Пусть f измерима на E , $\mu(E) < +\infty, \forall x \in E A \leq f(x) \leq B$, тогда

$$A \cdot \mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq B \cdot \mu(E).$$

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i, A, A_i \in \mathcal{A}, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g \geq 0$, ступенчатая. Тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i, A, A_i \in \mathcal{A}, f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$, измерима на A . Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Следствие 1.1.6. Пусть $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$, измерима. Зададим отображение:

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{A} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ E &\mapsto \int_E f \, d\mu \end{aligned}$$

Тогда ν – мера.

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x .

Тогда $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$

1.2 Пределный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)

Пусть $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n$ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geq 0$, измеримы на E . Тогда

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E . Тогда $f + g$ суммируема, причем

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Определение. $\mathcal{L}(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \int |f| \, d\mu < +\infty\}$

Лемма 1.2.4. $\mathcal{L}(X)$ – линейное пространство.

Теорема 1.2.5. Пусть $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $u_n \geq 0$ почти везде, u_n измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n \, d\mu.$$

Следствие 1.2.6. Пусть u_n измеримы, причем $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| \, d\mu < +\infty$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \, d\mu$ сходится абсолютно почти везде на E .

Теорема 1.2.7. (Абсолютная непрерывность интеграла)

Пусть f – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{A}: \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Следствие 1.2.8. Пусть $e_n \in \mathcal{A}$, $\mu(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, f – суммируемая функция, тогда

$$\int_{e_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$, $\langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$ строим пространство $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu \rangle$.

Лемма 1.3.1. \mathcal{A} , \mathcal{B} – полукольца, тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – полукольцо.

Определение. \mathcal{A} , \mathcal{B} – полукольца, назовем тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ полукольцом измеримых прямоугольников. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0: \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

Теорема 1.3.2.

- m_0 – мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- Если μ , ν σ -конечны, тогда m_0 тоже σ -конечна.

Определение. Мы получили $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0 \rangle$ – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до σ -алгебры, которую будем обозначать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

Теорема 1.3.3. Произведение мер ассоциативно.

Теорема 1.3.4. $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$.

Определение. Пусть $C \subseteq X \times Y$. Тогда *сечением* для произвольного $x \in X$ назовем множество

$$C_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}.$$

Замечание. Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_{\alpha})_x.$$

Теорема 1.3.5. (Принцип Кавальери)

Пусть μ , ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, тогда

- При почти всех x $C_x \in \mathcal{B}$.
- Отображение $x \mapsto \nu(C_x)$ измеримо на X .
- $m(C) = \int_X \nu(C_x) d\mu.$

Следствие 1.3.6. Пусть $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $p_1(C) \in \mathcal{A}$, тогда

$$m(C) = \int_{p_1(C)} \nu(C_x) d\mu.$$

Следствие 1.3.7. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

Замечание. Пусть $f \geq 0$, измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

Определение. Пусть $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$. Зафиксируем $x \in X$ и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим $f_y : C_y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.3.8. (Тонелли)

Пусть μ, ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, **измерима** по мере m . Тогда

- При почти всех x f_x **измерима** на Y .
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$ **измеримо** на X .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

Теорема 1.3.9. (Фубини)

Пусть μ, ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, **суммируема**. Тогда

- При почти всех x f_x **суммируема** на Y .
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$ **суммируемо** на X .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

Следствие 1.3.10. Если $p_1(C)$ измеримо, то

$$\int_C f dm = \int_{X \times Y} f \chi_C dm = \int_X \left(\int_Y f \chi_C d\nu \right) d\mu = \int_{p_1(C)} \left(\int_{\tilde{C}_x} f d\nu \right) d\mu.$$

Замечание. Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

$$1. f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \rightarrow 0.$$

$$2. \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Оказывается, верно $2 \implies 1$, но без дополнительных требований неверно $1 \implies 2$.

Теорема 1.3.11. (Лебега о мажорированной сходимости)

Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $\exists g$:

- $\forall n |f_n| \leq g$ при почти всех x .
- g суммируема на X .

В такой ситуации g называется *Мажорантой*. Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Следствие 1.3.12. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Теорема 1.3.13. Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \rightarrow f$ почти везде, $\exists g$:

- $\forall n |f_n| \leq g$.
- g суммируема на X .

Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Следствие 1.3.14. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Теорема 1.3.15. (Фату)

Пусть $f_n \geq 0$, f_n измеримы, $f_n \rightarrow f$ почти везде. Если

$$\exists c > 0: \forall n \int_X f_n d\mu \leq c.$$

то

$$\int_X f d\mu \leq c.$$

Следствие 1.3.16. Теорема Фату верна и в случае $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Следствие 1.3.17. Пусть $f_n \geq 0$, f_n измеримы, тогда

$$\int_X \varliminf f_n d\mu \leq \varliminf \int_X f_n d\mu.$$

1.4 Замена переменных в интеграле

Определение. Отображение $\Phi: X \rightarrow Y$ называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

Лемма 1.4.1. $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$ – σ -алгебра.

Определение. При фиксированном измеримом $\Phi: X \rightarrow Y$ отображение

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры μ при отображении Φ* .

Лемма 1.4.2. Образ меры при отображении является мерой.

Замечание. $\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, d\mu$

Замечание. Если функция $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно \mathcal{B} , то $f \circ \Phi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно \mathcal{A} .

Определение. Пусть $\omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$, измерима. В этом контексте ω называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры μ с весом ω* называется мера

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu$$

Теорема 1.4.3. (Об интегрировании по взвешенному образу меры)

Пусть $\Phi: X \rightarrow Y$ – измеримое отображение, $0 \leq \omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – весовая функция, измерима на X , ν – взвешенный образ меры μ с весом ω . Тогда для любой измеримой $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ верно:

- $f \circ \Phi$ измерима на X .
- $\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu$

Следствие 1.4.4. Пусть f суммируема на Y , $B \in \mathcal{B}$, тогда в условиях теоремы:

$$\int_B f \, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

Определение. В ситуации $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \text{id}$, если $\omega \geq 0$ измерима, причем $\nu(B) = \int_B \omega \, d\mu$, ω называется *плотностью меры ν относительно меры μ* . В таком случае

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \omega \, d\mu.$$