

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

1	Интеграл	2
1.1	Определение интеграла	2
1.2	Предельный переход под знаком интеграла	5
1.3	Произведение мер	6
1.4	Замена переменных в интеграле	10
1.5	Функции распределения	12
2	Поверхностные интегралы	13
2.1	Поверхностный интеграл I рода	13
2.2	Поверхностный интеграл II рода	15
3	Основные интегральные формулы	17
3.1	Формула Грина	17
3.2	Формула Стокса	17
3.3	Формула Гаусса-Остроградского	17
3.4	Примеры дифференциальных операторов	18
4	Ряды Фурье	20
4.1	Пространство L^p	20
4.2	Гильбертовы пространства	23
4.3	Ряды Фурье	23
4.4	Базис в Гильбертовом пространстве	23

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна}\}.$$

Определение. Пусть $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E \cap E_k.$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
- $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Определение. Пусть $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, d\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, d\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leq \int f \, d\mu \leq +\infty$.
- $0 \leq g \leq f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.
- $0 \leq g \leq f$, f, g измеримы, тогда $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

Определение. Пусть f — измеримая функция X , причем хотя бы один из интегралов срезов конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезов конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

- Измеримая $f \geq 0 \implies$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
- f суммируема $\iff \int |f| \, d\mu < +\infty$.
- Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:

$$f \leq g \implies \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

- $\int_E 1 \, d\mu = \mu(E)$, $\int_E 0 \, d\mu = 0$.
- Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

- $\int -f \, d\mu = - \int f \, d\mu, \forall c > 0 \int c \cdot f \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu.$

- Пусть $\exists \int_E f \, d\mu$, Тогда

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

- Пусть f измерима на E , $\mu(E) < +\infty, \forall x \in E A \leq f(x) \leq B$, тогда

$$A \cdot \mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq B \cdot \mu(E).$$

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i, A, A_i \in \mathcal{A}, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g \geq 0$, ступенчатая. Тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i, A, A_i \in \mathcal{A}, f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$, измерима на A . Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Следствие 1.1.6. Пусть $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$, измерима. Зададим отображение:

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{A} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ E &\mapsto \int_E f \, d\mu \end{aligned}$$

Тогда ν – мера.

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x .

Тогда $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$

1.2 Пределный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)

Пусть $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n$ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geq 0$, измеримы на E . Тогда

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E . Тогда $f + g$ суммируема, причем

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Определение. $\mathcal{L}(X) = \{ f \mid f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \int |f| \, d\mu < +\infty \}$

Лемма 1.2.4. $\mathcal{L}(X)$ – линейное пространство.

Теорема 1.2.5. Пусть $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $u_n \geq 0$ почти везде, u_n измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n \, d\mu.$$

Следствие 1.2.6. Пусть u_n измеримы, причем $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| \, d\mu < +\infty$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \, d\mu$ сходится абсолютно почти везде на E .

Теорема 1.2.7. (Абсолютная непрерывность интеграла)

Пусть f – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{A}: \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Следствие 1.2.8. Пусть $e_n \in \mathcal{A}$, $\mu(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, f – суммируемая функция, тогда

$$\int_{e_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$, $\langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$ строим пространство $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu \rangle$.

Лемма 1.3.1. \mathcal{A} , \mathcal{B} – полукольца, тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – полукольцо.

Определение. \mathcal{A} , \mathcal{B} – полукольца, назовем тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ полукольцом измеримых прямоугольников. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0: \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

Теорема 1.3.2.

- m_0 – мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- Если μ , ν σ -конечны, тогда m_0 тоже σ -конечна.

Определение. Мы получили $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0 \rangle$ – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до σ -алгебры, которую будем обозначать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

Теорема 1.3.3. Произведение мер ассоциативно.

Теорема 1.3.4. $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$.

Определение. Пусть $C \subseteq X \times Y$. Тогда *сечением* для произвольного $x \in X$ назовем множество

$$C_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}.$$

Замечание. Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_{\alpha})_x.$$

Теорема 1.3.5. (Принцип Кавальери)

Пусть μ , ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, тогда

- При почти всех x $C_x \in \mathcal{B}$.
- Отображение $x \mapsto \nu(C_x)$ измеримо на X .
- $m(C) = \int_X \nu(C_x) d\mu.$

Следствие 1.3.6. Пусть $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $p_1(C) \in \mathcal{A}$, тогда

$$m(C) = \int_{p_1(C)} \nu(C_x) d\mu.$$

Следствие 1.3.7. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

Замечание. Пусть $f \geq 0$, измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

Определение. Пусть $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$. Зафиксируем $x \in X$ и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим $f_y : C_y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.3.8. (Тонелли)

Пусть μ, ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, **измерима** по мере m . Тогда

- При почти всех x f_x **измерима** на Y .
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$ **измеримо** на X .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

Теорема 1.3.9. (Фубини)

Пусть μ, ν – σ -конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, **суммируема**. Тогда

- При почти всех x f_x **суммируема** на Y .
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$ **суммируемо** на X .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

Следствие 1.3.10. Если $p_1(C)$ измеримо, то

$$\int_C f dm = \int_{X \times Y} f \chi_C dm = \int_X \left(\int_Y f \chi_C d\nu \right) d\mu = \int_{p_1(C)} \left(\int_{\tilde{C}_x} f d\nu \right) d\mu.$$

Замечание. Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

$$1. f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \rightarrow 0.$$

$$2. \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Оказывается, верно $2 \implies 1$, но без дополнительных требований неверно $1 \implies 2$.

Теорема 1.3.11. (Лебега о мажорированной сходимости)

Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $\exists g$:

- $\forall n |f_n| \leq g$ при почти всех x .
- g суммируема на X .

В такой ситуации g называется *Мажорантой*. Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Следствие 1.3.12. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Теорема 1.3.13. Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \rightarrow f$ почти везде, $\exists g$:

- $\forall n |f_n| \leq g$.
- g суммируема на X .

Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Следствие 1.3.14. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Теорема 1.3.15. (Фату)

Пусть $f_n \geq 0$, f_n измеримы, $f_n \rightarrow f$ почти везде. Если

$$\exists c > 0: \forall n \int_X f_n d\mu \leq c.$$

то

$$\int_X f d\mu \leq c.$$

Следствие 1.3.16. Теорема Фату верна и в случае $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Следствие 1.3.17. Пусть $f_n \geq 0$, f_n измеримы, тогда

$$\int_X \varliminf f_n d\mu \leq \varliminf \int_X f_n d\mu.$$

1.4 Замена переменных в интеграле

Определение. Отображение $\Phi: X \rightarrow Y$ называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

Лемма 1.4.1. $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$ – σ -алгебра.

Определение. При фиксированном измеримом $\Phi: X \rightarrow Y$ отображение

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры μ при отображении Φ* .

Лемма 1.4.2. Образ меры при отображении является мерой.

Замечание. $\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, d\mu$

Замечание. Если функция $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно \mathcal{B} , то $f \circ \Phi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно \mathcal{A} .

Определение. Пусть $\omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$, измерима. В этом контексте ω называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры μ с весом ω* называется мера

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu$$

Теорема 1.4.3. (Об интегрировании по взвешенному образу меры)

Пусть $\Phi: X \rightarrow Y$ – измеримое отображение, $0 \leq \omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – весовая функция, измерима на X , ν – взвешенный образ меры μ с весом ω . Тогда для любой измеримой $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ верно:

- $f \circ \Phi$ измерима на X .
- $\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu$

Следствие 1.4.4. Пусть f суммируема на Y , $B \in \mathcal{B}$, тогда в условиях теоремы:

$$\int_B f \, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

Определение. В ситуации $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \text{id}$, если $\omega \geq 0$ измерима, причем $\nu(B) = \int_B \omega \, d\mu$, ω называется *плотностью меры ν относительно меры μ* . В таком случае

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \omega \, d\mu.$$

Теорема 1.4.5. (Критерий плотности)

Пусть ν – мера на \mathcal{A} , $\omega \geq 0$ измерима, тогда верно, что ω – плотность ν относительно μ тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu(A) \leq \nu(A) \leq \sup_A \omega \cdot \mu(A).$$

Лемма 1.4.6. Пусть f, g – суммируемые на X функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu.$$

Тогда $f = g$ почти везде.

Лемма 1.4.7. (Об образе малых кубических ячеек)

Пусть \mathcal{O} открыто, $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$, Φ дифференцируемо в \mathbf{a} , $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$, $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 \quad \forall Q - \text{куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \quad \lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

Лемма 1.4.8. Пусть \mathcal{O} открыто, $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\mathcal{O})$, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq Q$, Q – куб, причем $\text{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$. Тогда

$$\inf_{\substack{A \subseteq G \\ G \text{ открыто}}} \left(\lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

Теорема 1.4.9. Пусть \mathcal{O} открыто, $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq \mathcal{O}$, тогда

$$\lambda \Phi(A) = \int_A |\det \Phi'| \, d\lambda_m.$$

Теорема 1.4.10. Пусть \mathcal{O} открыто, $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$, f – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int_{\mathcal{O}^1} f(y) \, dy = \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| \, dx.$$

Замечание. То же верно и в случае, когда f суммируема.

1.5 Функции распределения

Определение. Пусть $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, причем $\forall t \in \mathbb{R} \mu_X(h < t) < +\infty$. Тогда функция $H(t) = \mu_X(h < t)$ называется *функцией распределения h по мере μ* .

Замечание. $H(t)$ не убывает.

Замечание. Пусть h измерима, тогда для любого борелевского $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $h^{-1}(B)$ измерим.

Определение. Стандартное продолжение $\mu_H([a, b)) = H(b-0) - H(a-0)$ называется *мерой Бореля-Стилтьеса*.

Лемма 1.5.1. Пусть $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения. Тогда на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu_H = H(\mu)$.

Теорема 1.5.2. Пусть $0 \leq f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, измеримая по Борелю, $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения, μ_H – мера Бореля-Стилтьеса для H . Тогда

$$\int_X f \circ h \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_H.$$

Глава 2

Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностный интеграл I рода

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3 , $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – параметризация M , тогда $E \subseteq M$ называется *измеримым*, если $\varphi^{-1}E \in \mathcal{M}^2$.

Определение. Введем обозначение:

$$\mathcal{A}_M \stackrel{\text{def}}{=} \{E \subseteq M \mid E \text{ измеримо}\}.$$

Замечание. \mathcal{A}_M – σ -алгебра.

Определение. На \mathcal{A}_M заведем меру:

$$\begin{aligned} S: \mathcal{A}_M &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ E &\mapsto \iint_{\varphi^{-1}(E)} \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv. \end{aligned}$$

Замечание. Замкнутые, открытые, компактные $E \subset M$ измеримы.

Лемма 2.1.1. S не зависит от выбора параметризации.

Определение. $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима по мере S , если $f \circ \varphi$ измерима на \mathcal{O} по мере λ .

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие, φ – его параметризация, $0 \leq f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима по S , тогда *поверхностным интегралом I рода* назовем интеграл

$$\iint_M f \, dS.$$

Или развернуто, пользуясь теоремой об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\iint_M f \, dS = \iint_{\varphi^{-1}(M)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv.$$

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^3$ назовем *кусочно-гладким многообразием в \mathbb{R}^3* , если M представляется в виде конечного дизъюнктного объединения объектов вида

- простое гладкое двумерное многообразие.
- простое гладкое одномерное многообразие (носитель гладкого пути).
- точка.

Определение. Мера S на кусочно-гладком многообразии $E = \bigsqcup_i M_i$ вычисляется следующим образом:

$$S(E) = \sum_i S(E \cap M_i).$$

2.2 Поверхностный интеграл II рода

Определение. Поверхностью будем называть простое гладкое двумерное многообразие.

Определение. Стороной поверхности называется непрерывное векторное поле единичных нормалей к этой поверхности.

Определение. Поверхность называется двусторонней, если для неё существует непрерывное поле нормалей. Иначе она называется односторонней.

Пример. Лента Мебиуса – односторонняя поверхность.

Определение. Репером называется пара линейно независимых касательных векторов.

Определение. Пусть Ω – двусторонняя поверхность в \mathbb{R}^3 , $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $n_0: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – сторона поверхности. Тогда интегралом II рода функции F по поверхности Ω назовем интеграл

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS.$$

Замечание.

- Смена стороны на противоположную влечет замену знака.
- Интеграл II рода не зависит от параметризации.
- Пусть $F = \langle P, Q, R \rangle$. Тогда интеграл II рода записывают так:

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS = \int_{\Omega} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

- Пусть поверхность задана параметризацией $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$. Получим нормальный вектор, перемножив векторно касательные векторы:

$$n = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right)^T.$$

Мера S выглядит следующим образом:

$$dS = \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| du dv = \|n\| du dv.$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS &= \iint_{\tilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\|n\|} \cdot \|n\| du dv = \\ &= \iint_{\tilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) du dv \end{aligned}$$

Замечание. Посчитаем интеграл поля $\langle 0, 0, R \rangle$ по поверхности Ω , заданной графиком (то есть, имеющей параметризацию вида $x, y, z(x, y)$).

$$\iint_{\Omega^+} R \, dx \, dy = \iint_{\tilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) du \, dv = \iint_{\tilde{\Omega}} R(x, y, z(x, y)) du \, dv$$

Замечание. Попробуем посчитать объём фигуры Ω , ограниченной графиками z_1, z_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_3(\Omega) &= \iint_{\tilde{\Omega}} (z_1(x, y) - z_2(x, y)) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{\Omega}} z_1(x, y) \, dx \, dy - \iint_{\tilde{\Omega}} z_2(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\partial\Omega^+} z \, dx \, dy \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались предыдущим замечанием и тем, что у нижней части фигуры (ограниченной z_1) нормали направлены в другую сторону.

Замечание. Пусть γ – гладкая кривая в \mathbb{R}^2 (лежит в плоскости xy), Ω – цилиндр над γ . Тогда

$$\iint_{\Omega} R \, dx \, dy = 0.$$

Доказательство.

Первое доказательство: по формуле из первого замечания мы собираемся интегрировать какую-то функцию по носителю пути по двумерной мере. Носитель гладкого пути по такой мере всегда имеет меру 0.

Второе доказательство: мы пытаемся интегрировать $\langle F, n_0 \rangle$. Заметим, что у F не равна нулю только третья координата (R), тогда как вектор нормали к цилиндру над xy всегда имеет $z = 0$. Таким образом, мы интегрируем функцию, тождественно равную нулю. ■

Глава 3

Основные интегральные формулы

3.1 Формула Грина

Замечание. В данном контексте рассматривается D : компактное, связное, односвязное множество в \mathbb{R}^2 , ограниченное кусочно-гладкой кривой. При этом граница ∂D направлена против часовой стрелки (фигура всегда находится слева).

Теорема 3.1.1. (Формула Грина)

Пусть P, Q – гладкие векторные поля в $U(D)$. Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Замечание. Формула "аддитивна" по фигуре.

3.2 Формула Стокса

Замечание. В данном контексте рассматривается Ω – двусторонняя поверхность с границей. n_0 – её сторона. $\partial \Omega$ – кусочно-гладкая кривая, согласованная по ориентации со стороной поверхности.

Теорема 3.2.1. (Формула Стокса)

Пусть $\langle P, Q, R \rangle$ – гладкое векторное поле в $U(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\partial \Omega} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Omega} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dy + (Q'_x - P'_y) dx dy$$

Замечание. Формула "аддитивна" по фигуре.

3.3 Формула Гаусса-Остроградского

Замечание. В данном контексте рассматриваются

$$V = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, f(x, y) \leq z \leq F(x, y) \}.$$

Здесь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ – замкнутое множество, $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая в \mathbb{R}^2 , $f, F \in C^1(\Omega)$. Рассматриваем внешнюю сторону фигуры.

Теорема 3.3.1. (Формула Гаусса-Остроградского)

Пусть $R: U(V) \rightarrow \mathbb{R}$, $R \in C^1(U(V))$. Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} R dx dy.$$

Следствие 3.3.2. В условиях формулы Гаусса-Остроградского, верно

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial V^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Следствие 3.3.3. Пусть l – фиксированное направление в \mathbb{R}^3 . Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} f \cdot \langle l, n_0 \rangle dS.$$

3.4 Примеры дифференциальных операторов

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R \rangle$ – векторное поле в \mathbb{R}^3 . Тогда *дивергенцией* A называется

$$\operatorname{div} A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Замечание. Дивергенцию поля в точке можно вычислять так:

$$\operatorname{div} A(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iiint_{B(a,r)} \operatorname{div} A dx dy dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iint_{S(a,r)} \langle A, n_0 \rangle dS.$$

Последнюю формулу можно интерпретировать как величину потока, проходящего через сферу с центром в данной точке достаточно малого радиуса. То есть, дивергенция характеризует точку как “источник” поля.

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R \rangle$ – векторное поле в \mathbb{R}^3 . Тогда *ротом* A называется

$$\operatorname{rot} A \stackrel{\text{def}}{=} \langle R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y \rangle.$$

Замечание. $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$, \mathcal{O} – односвязная область, $\operatorname{rot} V = 0$. Тогда V потенциально.

Замечание. $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$, \mathcal{O} – односвязная область, $\operatorname{rot} V = 0$. Тогда

- Если γ – петля, то

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = 0.$$

- Если γ – путь, то интеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

зависит только от начальной и конечной точек пути.

Замечание. Если \mathcal{O} не односвязна, но $\operatorname{rot} V = 0$, то все равно интеграл по пути не зависит от самого пути.

Если в поле нет источников, то откуда может взяться поток через поверхность?

Замечание. $\operatorname{div} V = 0$, тогда для любой “разумной” фигуры Ω выполнено

$$\iint_{\partial\Omega} \langle V, n_0 \rangle dS = 0.$$

Определение. Поле V называется *соленоидальным* в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, если у него существует векторный потенциал, то есть $\exists B$ – векторное поле такое, что $\operatorname{rot} B = V$ на Ω .

Теорема 3.4.1. (Критерий соленоидальности поля)

A соленоидально в $\Omega \iff \operatorname{div} A = 0$ на Ω

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Пространство L^p

Определение. Комплексное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ назовем *измеримым*, если $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$, причем g, h измеримы.

Определение. Аналогично определим *суммируемые* комплексные отображения.

Определение. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда определим интеграл:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E g \, d\mu + i \int_E h \, d\mu.$$

Замечание.

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

Теорема 4.1.1. (Интегральное неравенство Гёльдера)

Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримые почти везде заданные функции. Тогда

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 4.1.2. (Интегральное неравенство Минковского)

Пусть $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$, $p \geq 1$, тогда

$$\left(\int_X |f + g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. Пусть $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой. Тогда для $1 \leq p < +\infty$ положим

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \text{п.в. } X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима, } \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ – линейное пространство.

Определение. Зададим на \mathcal{L}^p отношение эквивалентности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ почти везде. Положим

$$L^p(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^p(X, \mu) / \sim.$$

Определение. В L^p заведем норму: $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$

Определение. Пусть $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ задана почти везде. Тогда *существенным супремумом* f называется

$$\operatorname{ess\,sup}_X f \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq A \text{ п.в.}\}.$$

Теорема 4.1.3. (Свойства существенного супремума)

- $\operatorname{ess\,sup}_X f \leq \sup_X f.$
- $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_X f$ при почти всех $x.$
- $\left| \int_X f g d\mu \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_X |f| \cdot \int_X |g|.$

Определение. Для $p = \infty$:

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \text{п.в. } X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима, } \operatorname{ess\,sup}_X f < +\infty \right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ – линейное пространство.

Определение. Пространство L^∞ зададим аналогично конечному случаю. Нормой на этом пространстве положим $\operatorname{ess\,sup}$.

Теорема 4.1.4. (О вложении пространств L^p)

Пусть $\mu(X) < +\infty$, $1 \leq r < s \leq +\infty$. Тогда

- $L^r(X, \mu) \subset L^s(X, \mu).$
- $\|f\|^s \leq \mu(X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r.$

Следствие 4.1.5. Пусть $\mu(E) < +\infty$, $1 \leq s < r \leq +\infty$, $f_n, f \in L^s$, $f_n \xrightarrow{L^r} f$, тогда $f_n \xrightarrow{L^s} f$.

Теорема 4.1.6. (О сходимости в L^p и по мере)

Пусть $1 \leq r < +\infty$, $f_n, f \in L^p$, тогда

- $f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$, либо $f_n \rightarrow f$ почти везде, тогда если $\exists g \in L^p: |f_n| \leq g$, то $f_n \xrightarrow{L^p} f.$

Замечание. L^∞ – полное метрическое пространство.

Теорема 4.1.7. (Полнота пространств L^p)

$\forall 1 \leq p \leq \infty$ L^p полно.

Определение. Пусть X – топологическое пространство, тогда множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если $\text{Cl}(A) = X$. Иначе говоря, $\text{Int}(X \setminus A) = \emptyset$, или $\forall x \in X \forall U(x) U(x) \cap A \neq \emptyset$.

Определение. Множество всех ступенчатых функций $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ обозначим $St(X)$.

Лемма 4.1.8. Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, тогда множество $St(X) \cap L^p$ полно в L^p .

Определение. (Четвертая аксиома отделимости)

Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нем любые два замкнутые непересекающиеся множества отделимы, причем любое одноточечное множество замкнуто.

Лемма 4.1.9. (Урысон)

Пусть X – нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует непрерывная функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

- $0 \leq f \leq 1$.
- $f|_{F_0} = 0$.
- $f|_{F_1} = 1$.

4.2 Гильбертовы пространства

4.3 Ряды Фурье

4.4 Базис в Гильбертовом пространстве