Математический анализ IIII

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$ — пространство с мерой

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна}\}.$$

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E \cap E_k.$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
- $f \leqslant g \Longrightarrow \int f \leqslant \int g$.

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0\leqslant g\leqslant f\\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leqslant \int f \leqslant +\infty$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \leqslant \int f$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, f, g измеримы, тогда $\int g \leqslant \int f$.

Определение. Пусть f — измеримая функция X, причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f_+\mathrm{d}\mu - \int_X f_-\mathrm{d}\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f\cdot\chi_E\,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

- Измеримая $f \geqslant 0 \Longrightarrow$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
- f суммируема $\Longleftrightarrow \int |f| < +\infty$.
- Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

- $\int_E 1\,\mathrm{d}\mu = \mu(E)$, $\int_E 0\mathrm{d}\mu = 0$.
- Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда

$$\int_E f = 0.$$

- $\int -f = -\int f$, $\forall c > 0$ $\int c \cdot f = c \cdot \int f$.
- Пусть $\exists \int_E f$, Тогда
$$\left|\int_E f\right| \leqslant \int_E |f|.$$
- Пусть f измерима на E, $\mu(E) < +\infty$, $\forall x \in E$ $A \leqslant f(x) \leqslant B$, тогда
$$A \cdot \mu(E) \leqslant \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leqslant B \cdot \mu(E).$$

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \geqslant 0$, ступенчата. Тогда
$$\int_A g \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \int_{A_i} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима на A. Тогда
$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.1.6. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима. Зададим отображение:
$$\begin{aligned} \nu \colon \mathcal{A} &\to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0} \\ E &\mapsto \int_E f \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Тогда ν – мера.

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x. Тогда $\int f = \int g$.

1.2 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)
Пусть $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n\ 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geqslant 0$, измеримы на E. Тогда

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E. Тогда $f+g$ суммируема, причем

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$