Математический анализ IIII

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна} \}.$$

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu(E \cap E_k).$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

1. Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
2. $f \leqslant g \Longrightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int g \, \mathrm{d}\mu$.

Доказательство.

1. Пусть $f = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k} = \sum_j \alpha_j \chi_{F_j}$. Тогда $f = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap F_j}$. Пользуясь этим, перепишем интеграл:

$$\int_1 f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \sum_k \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int_2 f.$$

2. Воспользуемся общим допустимым разбиением:

$$\int f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_{k,j} \lambda_k \mu(E_k \cap F_j) \leqslant \sum_{k,j} \alpha_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int g.$$

■

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leqslant \int f \,\mathrm{d}\mu \leqslant +\infty$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int f \,\mathrm{d}\mu$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, f, g измеримы, тогда $\int g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство.

1. Очевидно, так как супремум реализуется на самой интегрируемой функции.
3. Поскольку g – ступенчатая и $0 \leqslant g \leqslant f$, g входит в супремум из определения интеграла f, поэтому автоматически $\int g \leqslant \int f$.
2. Все ступенчатые функции, супремум по которым берется в определении интеграла функции g, входят так же и в супремум для интеграла f, так как $0 \leqslant h \leqslant g \leqslant f$.

■

Определение. Пусть f — измеримая функция X, причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \int_X f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_- \,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \stackrel{def}{=} \int_X f \cdot \chi_E \,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

1. Измеримая $f \geqslant 0 \Longrightarrow$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
2. f суммируема $\Longleftrightarrow \int |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.
3. Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:
$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$
4. $\displaystyle\int_E 1\,\mathrm{d}\mu = \mu(E)$, $\displaystyle\int_E 0\,\mathrm{d}\mu = 0$.
5. Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда
$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0.$$
6. $\displaystyle\int -f\,\mathrm{d}\mu = -\int f\,\mathrm{d}\mu$, $\forall c > 0$ $\displaystyle\int c\cdot f\,\mathrm{d}\mu = c\cdot\int f\,\mathrm{d}\mu$.
7. Пусть $\exists \displaystyle\int_E f\,\mathrm{d}\mu$, Тогда
$$\left|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu.$$
8. Пусть f измерима на E, $\mu(E) < +\infty$, $\forall x \in E$ $A \leqslant f(x) \leqslant B$, тогда
$$A\cdot\mu(E) \leqslant \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant B\cdot\mu(E).$$

Доказательство.

2. Следует из аддитивности интеграла по функции, что будет доказано позже.
1. Для неотрицательных f, g это уже было доказано. Для произвольных воспользуемся определением и тем соображением, что $f^+ \leqslant g^+$ и $f^- \geqslant g^-$:
$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \leqslant \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g.$$
5. Если f ступенчата, то утверждение очевидно. Если $f \geqslant 0$ и измерима, то супремум из определения равен нулю. Если f – произвольная измеримая функция, то $\int f = \int f^+ - \int f^- = 0$.

2. Очевидным образом следует из определений и того, что $\sup cA = c\sup A$.
3. $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Longrightarrow -\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$.

■

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \geqslant 0$, ступенчата. Тогда

$$\int\limits_A g \, d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, d\mu.$$

Доказательство. Пусть $g = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k}$, тогда

$$\int\limits_A g \, d\mu = \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A).$$

Воспользуемся счетной аддитивностью меры:

$$\sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i).$$

Последний ряд сходится абсолютно, поэтому можно переставить порядок суммирования:

$$\sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, d\mu.$$

■

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима на A. Тогда

$$\int\limits_A f \, d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f \, d\mu.$$

Доказательство.

($\leqslant$) Левая часть равенства аппроксимируется ступенчатыми функциями $0 \leqslant g \leqslant f$. Для них имеем:

$$\int\limits_A g \, d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} g \, d\mu \leqslant \sum_i \int\limits_{A_i} f \, d\mu.$$

Теперь имеем:

$$\int\limits_A f \, d\mu = \sup \int\limits_A g \, d\mu \leqslant \sum_i \int\limits_{A_i} f \, d\mu.$$

($\geqslant$) Для начала рассмотрим случай, когда $A = A_1 \sqcup A_2$. Рассмотрим ступенчатую функцию $0 \leqslant g \leqslant f$ и функции g_1, g_2 такие, что $g_i\big|_{A_i} = g$, $g_i\big|_{\overline{A_i}} = 0$. Очевидно, что $g_1 + g_2 = g$ на A. Тогда по построению:

$$\int\limits_{A_1} g_1\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} g_2\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} (g_1 + g_2)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A} g\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Возьмём супремум от обеих частей сначала по g_1, потом по g_2:

$$\int\limits_{A_1} f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{A} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Теперь разберемся с бесконечным случаем. Пусть $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$. Тогда, пользуясь уже доказанным фактом для конечных разбиений, имеем:

$$\int\limits_{A} f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{B_n} f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Совершая предельный переход при $n \to +\infty$, имеем:

$$\int\limits_{A} f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} f\,\mathrm{d}\mu.$$

■

Следствие 1.1.6. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима. Зададим отображение:

$$\begin{aligned} \nu \colon \mathcal{A} &\to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0} \\ E &\mapsto \int_E f\,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Тогда ν – мера.

Доказательство. Единственное, что нужно проверить, это счетную аддитивность. Она как раз и проверена в теореме. ■

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x. Тогда $\int\limits_{E} f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E} g\,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{A} \colon\ \mu e = 0$, $f = g$ на $E \setminus e$. Тогда

$$\int\limits_{E} f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{e} f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} g\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\setminus e} g\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{e} g\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E} g\,\mathrm{d}\mu.$$

■

1.2 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)
Пусть $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n$ $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Для начала отметим, что f измерима, как предел измеримых функций, поэтому её интеграл имеет смысл.

($\geqslant$) Очевидно, поскольку $f(x) \geqslant f_n(x)$.

($\leqslant$) Докажем, что $\forall g\colon\ 0 \leqslant g \leqslant f$, g – ступенчатая, $\forall c \in (0,1)$ $\lim \int\limits_X f_n \geqslant c \int\limits_X g$. Пусть $E_n = X(f_n \geqslant cg)$. Очевидно, что $E_1 \subseteq E_2 \ldots$. Кроме того, $\bigcup E_n = X$, потому что либо $\forall x$ $f(x) > g(x)$ или $f(x) = g(x)$, но $c < 1$, поэтому всегда $f(x) > cg(x)$.

$$\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{E_n} f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant c \int\limits_{E_n} g\,\mathrm{d}\mu.$$

Совершим переход при $n \to +\infty$ в неравенстве:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant c \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{E_n} g\,\mathrm{d}\mu.$$

Воспользуемся тем, что $E \mapsto \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu$ – мера, то есть обладает свойством непрерывности снизу:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant c \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Из этого неравенства очевидно следует:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Возьмем теперь супремум по g от обеих частей и получим требуемое.

■

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geqslant 0$, измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Аппроксимируем f, g ступенчатыми фукнциями f_n, g_n. Теорема об аппроксимации поставляет такие f_n, g_n, что $0 \leqslant f_n \leqslant f$ и $0 \leqslant g_n \leqslant g$. f_n, g_n ступенчатые, поэтому

$$\int\limits_E (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_n\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g_n\,\mathrm{d}\mu.$$

По теореме Леви переходим к пределу при $n \to +\infty$:

$$\int\limits_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

■

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E. Тогда $f+g$ суммируема, причем

$$\int\limits_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

- $(f+g)_\pm \leqslant |f+g| \leqslant |f| + |g|$, поэтому интегралы

  $$\int\limits_E (f+g)_\pm\,\mathrm{d}\mu$$

  конечны, то есть $f+g$ суммируема.

- Пусть $h = f+g$:

  $$\begin{aligned}
  &h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_- \Longrightarrow h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \Longrightarrow\\
  &\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+ \Longrightarrow\\
  &\int\limits_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu
  \end{aligned}$$

■

Определение. $\mathcal{L}(X) = \left\{ f \mid f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \int |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$

Лемма 1.2.4. $\mathcal{L}(X)$ – линейное пространство.

Теорема 1.2.5. Пусть $u_n : X \to \mathbb{R}$, $u_n \geqslant 0$ почти везде, u_n измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_n(x)$, $0 \leqslant S_n(x) \leqslant S_{n+1}(x)$ почти везде, $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$. Тогда по теореме Леви:

$$\int\limits_E S\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_E S_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_E u_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

■

Следствие 1.2.6. Пусть u_n измеримы, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится абсолютно почти везде на E.

Доказательство.

$$\int\limits_E \sum_{i=1}^{+\infty} |u_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Поэтому ряд под первым интегралом сходится. ■

Теорема 1.2.7. (Абсолютная непрерывность интеграла)
Пусть f – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathcal{A}\colon\ \mu(E) < \delta \quad \left| \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $X_n = X(f \geqslant n)$. Тогда $X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$. Кроме того, поскольку f суммируема, она не может быть бесконечной на множестве меры, отличной от нуля, то есть $\mu(\bigcap X_n) = 0$.

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\colon \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Это выполнено потому, что отображение $A \mapsto \int\limits_A |f|$ – мера, то есть непрерывно сверху:

$$\int\limits_{X_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_{\bigcap X_n} |f|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- По ε положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Пусть теперь $\mu E < \delta$, вычислим интеграл:

$$\left| \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int\limits_E |f|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\cap X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{E\setminus X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f|\,\mathrm{d}\mu + n_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

■

Следствие 1.2.8. Пусть $e_n \in \mathcal{A}$, $\mu(e_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, f – суммируемая функция, тогда

$$\int\limits_{e_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$, $\langle Y, \mathcal{B}, \nu\rangle$ *строим пространство* $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu\rangle$.

Лемма 1.3.1. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – полукольцо.

Определение. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, назовем тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *полукольцом измеримых прямоугольников*. Заведем отображение:

$$m_0 \colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$A \times B \mapsto \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Теорема 1.3.2.

- m_0 – мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- Если μ, ν σ-конечны, тогда m_0 тоже σ-конечна.

Доказательство.

- Достаточно доказать счетную аддитивность. Пусть $P = \bigsqcup P_i$, $P, P_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ $P = A \times B$, $P_i = A_i \times B_i$. Зметим, что верны утверждения:

$$\chi_P(x, y) = \sum_i \chi_{P_i}(x, y), \quad \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_i \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y).$$

  Проинтегрируем последнее равенство по мере ν в Y:

$$\chi_A(x) \cdot \int\limits_B \chi_B(y)\,\mathrm{d}\nu = \sum_i \chi_A(x) \cdot \int\limits_B \chi_B(y)\,\mathrm{d}\nu$$
$$\chi_A(x) \cdot \nu B = \sum_i \chi_A(x) \cdot \nu B$$

  Интегрируя второй раз по переменной x по мере μ, получаем:

$$\mu A \nu B = \sum_i \mu A_i \nu B_i.$$

- Пусть $X = \bigcup X_i$, $Y = \bigcup Y_i$, $\mu X_k < +\infty$, $\nu Y_k < +\infty$, тогда

$$X = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j, \quad m_0(X_k \times Y_j) = \mu X_k \nu Y_j < +\infty$$

■

Определение. Мы получили $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0\rangle$ – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до σ-алгебры, которую будем обозначать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

Теорема 1.3.3. Произведение мер ассоциативно.

Теорема 1.3.4. $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$.

Определение. Пусть $C \subseteq X \times Y$. Тогда *сечением* для произвольного $x \in X$ назовем множество

$$C_x \overset{def}{=} \{ y \in Y \mid (x, y) \in C \}.$$

Замечание. Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha \right)_x = \bigcup_\alpha (C_\alpha)_x.$$

Теорема 1.3.5. (Принцип Кавальери)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, тогда

1. При почти всех x $C_x \in \mathcal{B}$.
2. Отображение $x \mapsto \nu C_x$ измеримо на X.
3. $m(C) = \int\limits_X \nu C_x \,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Пусть множество $D \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – элементы $X \times Y$, для которых принцип Кавальери верен.

- Запасем какие-нибудь простые множества в D. А именно, $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ верно, что $C = A \times B \in D$. Проверим это:
  1. $C_x = B \in \mathcal{B}$ или $\varnothing$, в обоих случаях измеримо.
  2. $x \mapsto \nu C_x = \nu B \chi_A(x)$ – очевидно измерима.
  3. Вычислим интеграл:

  $$\int\limits_X \nu C_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu B \chi_A(x) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A \nu B \,\mathrm{d}\mu = \mu A \nu B = mC.$$

- Пусть теперь $E = \bigsqcup E_i$, $E_i \in D$. Тогда $E \in D$.
  1. $E_x = \bigsqcup_i (E_i)_x$ – измеримо почти везде, потому что $(E_i)_x$ измеримы почти везде.
  2. $x \mapsto \nu E_x = \sum_i \nu(E_i)_x$ – измерима как сумма измеримых функций.
  3. Считаем:

  $$\int\limits_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \sum_i \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \int\limits_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = \sum_i m(E_i) = mE.$$

- Пусть $E_i \in D$, $E_1 \supseteq \ldots$, $\bigcap E_i = E$, $mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$. Для начала заметим, что

$$\int\limits_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = mE_i < +\infty.$$

Поэтому почти везде $\nu(E_i)_x < +\infty$.

1. При почти всех x одновременно измеримы все $(E_i)_x$, поэтому измеримо множество $\bigcap (E_i)_x = E_x$.
2. Пользуясь непрерывностью меры сверху получаем, что функция $x \mapsto \nu E_x = \lim \nu(E_i)_x$ измерима как предел измеримых функций.
3. Считаем:

$$\int\limits_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu.$$

По теореме Лебега, которую мы пока не знаем, можно вынести предел из под знака интеграла в случае, когда подынтегральное выражение можно мажорировать суммируемой функцией, не зависящей от i:

$$\nu(E_i)_x \leqslant \nu(E_1)_x.$$

Последняя функция суммируема, поэтому

$$\int\limits_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = \lim \int\limits_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = \lim m(E_i) = mE.$$

Последнее равенство верно в силу непрерывности меры m сверху.

- Если $A_{i,j} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap_j \bigcup_i A_{i,j} \in D$. Сделаем множества $A_{i,j}$ дизъюнктными (пользуясь стандартной техникой, мы останемся в полукольце), а затем сделаем множества $\bigsqcup_i \hat{A}_{i,j}$ убывающими, взяв в $\widetilde{A}_0 = \hat{A}_{i,j}, \ldots, \widetilde{A}_n = \bigsqcup_{i=1}^n \hat{A}_{i,j}$.

- Покажем, что если $mE = 0$, то $E \in D$. Аппроксимируем E сериями прямоугольников $P_{i,j}$ (из теоремы о стандартном продолжении меры): пусть $H = \bigcap_i \bigcup_j P_{i,j}$, очевидно, что $E \subset H \in D$, $mH = 0$. Обладая этими знаниями, проверим, что $E \in D$:

1. Поскольку $H \in D$:

$$0 = mH = \int\limits_X \nu H_x \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \nu H_x = 0 \text{ при п.в. } x.$$

Пользуясь полнотой меры ν и тем фактом, что $E_x \subset H_x$, получаем, что $\nu E_x = 0$ при почти всех x.
2. Отображение $x \mapsto \nu E_x$ измеримо как отображение, почти всюду равное нулю.

3. Поскольку $\nu E_x = 0$ почти везде, очевидно, что $\int\limits_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = 0 = mE$.

- Покажем, что если $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $mC < +\infty$, то $C \in D$. $\exists e\colon\ me = 0$, $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{i,j}$, $H = C \setminus e$, $mC = mH$ (как в предыдущем пункте, из теоремы о стандартном продолжении меры).

   1. $C_x = H_x\ e_x$ – измеримо как разность измеримых множеств.
   2. $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ – измерима как разность измеримых функций.
   3. Считаем:

$$\int\limits_X \nu C_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu H_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu e_x \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu H_x \,\mathrm{d}\mu = mH = mC.$$

- Пусть, наконец, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Пусть $X = \bigsqcup X_i$, $Y = \bigsqcup Y_i$ (пользуемся σ-конечностью мер), тогда:

$$C = \bigsqcup_{i,j} C \cap (X_i \times Y_j) \in D.$$

■

Следствие 1.3.6. Пусть $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $p_1(C) \in \mathcal{A}$, тогда

$$m(C) = \int\limits_{p_1(C)} \nu(C_x) \,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.3.7. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для $f \geqslant 0$. Поскольку f непрерывна, множество $C = \Pi\Gamma(f, [a,b])$ измеримо в $\mathbb{R}^2$. Тогда $C_x = [0, f(x)]$ – измеримо, $\lambda_1 C_x = f(x)$. Тогда:

$$\int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a,b]) = \int\limits_{[a,b]} f(x) \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

■

Замечание. Пусть $f \geqslant 0$, измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a,b]) = \int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Определение. Пусть $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$. Зафиксируем $x \in X$ и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x \colon C_x &\to \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим $f_y : C_y \to \overline{\mathbb{R}}$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.3.8. (Тонелли)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **измерима** по мере m. Тогда

- При почти всех x f_x **измерима** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f(x, y)\, \mathrm{d}\nu = \int\limits_Y f_x \,\mathrm{d}\nu$ **измеримо** на X.
- $$\int\limits_{X\times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

- Пусть $f = \chi C$, $C \subseteq X \times Y$. Тогда
  1. $f_x = \chi C_x$ – измерима при почти всех x потому, что C_x измеримо при почти всех x (принцип Кавальери).
  2. $\varphi(x) = \int\limits_Y \chi_{C_x}(y)\,\mathrm{d}\nu = \nu C_x$ – измеримо по принципу Кавальери.
  3. $$\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \nu C_x \,\mathrm{d}\mu = mC = \int\limits_{X\times Y} \chi_C \,\mathrm{d}m.$$
- Пусть $f = \sum_k a_k \chi_{C_k} \geqslant 0$, C_k измеримы, $k < +\infty$. Тогда:
  1. $f_x = \sum_k a_k \chi_{C_k}$ – измеримо почти как линейная комбинация измеримых почти везде функций.
  2. $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y)\,\mathrm{d}\nu = \sum_k a_k \nu(C_k)_x$ – измеримо почти везде по аналогичной причине.
  3. $$\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_k a_k \int\limits_X \nu(C_k)_x \,\mathrm{d}\mu = \sum_k a_k m C_k = \int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}m.$$
- Пусть $f \geqslant 0$, g_n – ступенчатые функции, аппроксимирующие f, $0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots$, $\lim g_n = f$. Тогда
  1. $f_x = \lim (g_n)_x$ – измерима как предел измеримых функций.
  2. $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x \,\mathrm{d}\nu = \lim \int\limits_Y (g_n)_x \,\mathrm{d}\nu = \lim \int\limits_Y \varphi_n(y)\,\mathrm{d}\nu$ – измерима как предел измеримых функций. Второе равенство справедливо как следствие теоремы Леви.

3.
$$\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim \int\limits_{X\times Y} g_n\,\mathrm{d}m = \int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}m.$$
Здесь дважды применена теорема Леви.

■

Теорема 1.3.9. (Фубини)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **суммируема**. Тогда

- При почти всех x f_x **суммируема** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_Y f_x\,\mathrm{d}\nu$ **суммируемо** на X.
- $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu.$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы Тонелли.

■

Следствие 1.3.10. Если $p_1(C)$ измеримо, то
$$\int\limits_C f\,\mathrm{d}m = \int\limits_{X\times Y} f\chi_C\,\mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f\chi_C\,\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu = \int\limits_{p_1(C)} \left(\int\limits_{C_x} f\,\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu.$$

Замечание. Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

1. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \to 0.$
2. $\int\limits_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0.$

Оказывается, верно $2 \Longrightarrow 1$, но без дополнительных требований неверно $1 \Longrightarrow 2$.

Лемма 1.3.11. Пусть g суммируема. Тогда $\exists A \in \mathcal{A}\colon\ \mu A < +\infty$, $\int\limits_{X\setminus A} g\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Доказательство.
$$\int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int\limits_X h\,\mathrm{d}\mu, h\text{– суммируема}\right\}.$$
Выберем ступенчатую h_0 такую, что $\int\limits_X g - \int\limits_X h_0 < \varepsilon$. Тогда пусть
$$A = \operatorname{supp} h_0 = \{\, x \mid h(x) \neq 0 \,\}.$$
$$\int\limits_{X\setminus A} g + \int\limits_A g - h_0 = \int\limits_X g - \int\limits_X h_0 < \varepsilon.$$
$\mu A < +\infty$, так как g суммируема. ■

Теорема 1.3.12. (Лебега о мажорированной сходимости)
Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, $\exists g$:

- $\forall n\ |f_n| \leqslant g$ при почти всех x.
- g суммируема на X.

В такой ситуации g называется *мажорантой*. Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int\limits_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0.$

Доказательство.

- f_n суммируема по первому пункту условия
- По следствию из теоремы Рисса, $f \leqslant g$. Поэтому f тоже суммируема.
- Пусть теперь $\mu X < +\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ положим $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$.
  $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \Longrightarrow \mu X_n \to 0$.

  $$\int\limits_X |f - f_n|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X_n} |f - f_n|\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{X \setminus X_n} |f - f_n|\,\mathrm{d}\mu < \int\limits_{X_n} 2g\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{X \setminus X_n} \varepsilon\,\mathrm{d}\mu.$$

  Первый интеграл стремится к нулю по теореме об абсолютной сходимости интеграла. Второй интеграл оценивается сверху:

  $$\int\limits_{X \setminus X_n} \varepsilon\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X \varepsilon\,\mathrm{d}\mu = \varepsilon \mu X \to 0.$$

- Пусть $\mu X = +\infty$. По предыдущей лемме $\exists A$: $\mu A < +\infty$, $\int\limits_X g < \varepsilon$, тогда

  $$\int\limits_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A + \int\limits_{X \setminus A} \leqslant \int\limits_A |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon \to 0.$$

  Первый интеграл стремится к нулю по предыдущему пункту ($\mu A < +\infty$).

$\blacksquare$

Следствие 1.3.13. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

■

Теорема 1.3.14. Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \to f$ почти везде, $\exists g:$

- $\forall n\ |f_n| \leqslant g$.
- g суммируема на X.

Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\int\limits_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0$.

Доказательство.

- Первый пункт доказывается аналогично предыдущей теореме.
- Положим
  $$h_n = \sup_{j\geqslant n} |f_j - f|.$$
  Очевидно, что h_n убывает с ростом n, и $0 \leqslant h_n \leqslant 2g$ почти везде. Кроме того, по определению, $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| \to 0$ почти везде, потому что $f_n \to f$ почти везде. Функция $2g - h_n$ неотрицательна и возрастает с ростом n, поэтому подходит под теорему Леви:
  $$\int\limits_X 2g - h_n \to \int\limits_X 2g \Longrightarrow \int\limits_X h_n \to 0.$$
  $$\int\limits_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X h_n\,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

■

Следствие 1.3.15. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.3.16. (Фату)
Пусть $f_n \geqslant 0$, f_n измеримы, $f_n \to f$ почти везде. Если

$$\exists c > 0\colon\ \forall n \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

то

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

Доказательство. Пусть $g_n = \inf_{j \geqslant n} f_n$. Очевидно, что g_n возрастает с ростом n и $g_n \geqslant 0$. Кроме того,

$$\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f.$$

Тогда g_n подходит под теорему Леви:

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leftarrow \int\limits_X g_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

■

Следствие 1.3.17. Теорема Фату верна и в случае $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.

Доказательство. Сразу следует из теоремы Рисса. ■

Следствие 1.3.18. Пусть $f_n \geqslant 0$, f_n измеримы, тогда

$$\int\limits_X \underline{\lim} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Выберем последовательность n_k такую, что

$$\lim \int\limits_X f_{n_k} \,\mathrm{d}\mu = \underline{\lim} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Положим $g_n = \inf_{j \geqslant n} f_j$. Аналогично тому, как мы делали в доказательстве теоремы Фату:

$$\int\limits_X \underline{\lim} f_n \,\mathrm{d}\mu \leftarrow \int\limits_X g_{n_k} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f_{n_k} \,\mathrm{d}\mu \to \underline{\lim} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

■

1.4 Замена переменных в интеграле

Определение. Отображение $\Phi \colon X \to Y$ называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

Лемма 1.4.1. $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$ – σ-алгебра.

Определение. При фиксированном измеримом $\Phi \colon X \to Y$ отображение

$$\begin{aligned} \nu \colon \mathcal{B} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры μ при отображении* Φ.

Лемма 1.4.2. Образ меры при отображении является мерой.

Замечание. $\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, \mathrm{d}\mu$

Замечание. Если функция $f \colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathcal{B}$, то $f \circ \Phi \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathcal{A}$.

Определение. Пусть $\omega \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geqslant 0$, измерима. В этом контексте ω называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры μ с весом ω* называется мера

$$\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, \mathrm{d}\mu$$

Теорема 1.4.3. (Об интегрировании по взвешенному образу меры)
Пусть $\Phi \colon X \to Y$ – измеримое отображение, $0 \leqslant \omega \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – весовая функция, измерима на X, ν – взвешенный образ меры μ с весом ω. Тогда для любой измеримой $f \colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ верно:

- $f \circ \Phi$ измерима на X.
- $\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X (f \circ \Phi)\, \omega \, \mathrm{d}\mu$

Следствие 1.4.4. Пусть f суммируема на Y, $B \in \mathcal{B}$, тогда в условиях теоремы:

$$\int\limits_B f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi)\, \omega \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. В ситуации $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \mathrm{id}$, если $\omega \geqslant 0$ измерима, причем $\nu(B) = \int\limits_B \omega \, \mathrm{d}\mu$, ω называется *плотностью меры ν относительно меры μ*. В таком случае

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X f \omega \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.4.5. (Критерий плотности)
Пусть ν – мера на $\mathcal{A}$, $\omega \geqslant 0$ измерима, тогда верно, что ω – плотность ν относительно μ тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{A} \ \inf_A \omega \cdot \mu(A) \leqslant \nu(A) \leqslant \sup_A \omega \cdot \mu(A).$$

Лемма 1.4.6. Пусть f, g – суммируемые на X функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \ \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Тогда $f = g$ почти везде.

Лемма 1.4.7. (Об образе малых кубических ячеек)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$, Φ дифференцируемо в $\mathbf{a}$, $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$, $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 \ \forall Q - \text{куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \ \lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

Лемма 1.4.8. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathcal{O})$, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq Q$, Q – куб, причем $\mathrm{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$. Тогда

$$\inf_{\substack{A \subset G \\ G \text{ открыто}}} \left(\lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

Теорема 1.4.9. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq \mathcal{O}$, тогда

$$\lambda\Phi(A) = \int\limits_A |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_m.$$

Теорема 1.4.10. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$, f – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}^1} f(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{\mathcal{O}} f(\Phi(x)) \, |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Замечание. То же верно и в случае, когда f суммируема.

1.5 Функции распределения

Определение. Пусть $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, причем $\forall t \in \mathbb{R}$ $\mu X(h < t) < +\infty$. Тогда функция $H(t) = \mu X(h < t)$ называется *функцией распределения h по мере μ*.

Замечание. $H(t)$ не убывает.

Замечание. Пусть h измерима, тогда для любого борелевского $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $h^{-1}(B)$ измерим.

Определение. Стандартное продолжение $\mu_H([a,b)) = H(b-0) - H(a-0)$ называется *мерой Бореля-Стилтьеса*.

Лемма 1.5.1. Пусть $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения. Тогда на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu_H = H(\mu)$.

Теорема 1.5.2. Пусть $0 \leqslant f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, измеримая по Борелю, $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения, μ_H – мера Бореля-Стилтьеса для H. Тогда

$$\int\limits_X f \circ h \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu_H.$$

Глава 2

Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностный интеграл I рода

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$, $\varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ – параметризация M, тогда $E \subseteq M$ называется *измеримым*, если $\varphi^{-1}E \in \mathfrak{M}^2$.

Определение. Введем обозначение:

$$\mathcal{A}_M \overset{def}{=} \{E \subseteq M \mid E \text{ измеримо}\}.$$

Замечание. $\mathcal{A}_M$ – σ-алгебра.

Определение. На $\mathcal{A}_M$ заведем меру:

$$\begin{aligned} S\colon \mathcal{A}_M &\to \overline{\mathbb{R}} \\ E &\mapsto \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Замечание. Замкнутые, открытые, компактные $E \subset M$ измеримы.

Лемма 2.1.1. S не зависит от выбора параметризации.

Определение. $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по мере S, если $f \circ \varphi$ измерима на $\mathcal{O}$ по мере λ.

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие, φ – его параметризация, $0 \leqslant f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по S, тогда *поверхностным интегралом I рода* назовем интеграл

$$\iint\limits_M f \, \mathrm{d}S.$$

Или развернуто, пользуясь теоремой об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\iint\limits_M f \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{\varphi^{-1}(M)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^3$ назовем *кусочно-гладким многообразием в* $\mathbb{R}^3$, если M представляется в виде конечного дизъюнктного объединения объектов вида

- простое гладкое двумерное многообразие.
- простое гладкое одномерное многообразие (носитель гладкого пути).
- точка.

Определение. Мера S на кусочно-гладком многобразии $E = \bigsqcup_i M_i$ вычисляется следующим образом:

$$S(E) = \sum_i S(E \cap M_i).$$

2.2 Поверхностный интеграл II рода

Определение. *Поверхностью* будем называть простое гладкое двумерное многообразие.

Определение. *Стороной поверхности* называется непрерывное векторное поле единичных нормалей к этой поверхности.

Определение. Поверхность называется *двусторонней*, если для неё существует непрерывное поле нормалей. Иначе она называется *односторонней*.

Пример. Лента Мебиуса – односторонняя поверхность.

Определение. *Репером* называется пара линейно независимых касательных векторов.

Определение. Пусть Ω – двусторонняя поверхность в $\mathbb{R}^3$, $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, $n_0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – сторона поверхности. Тогда *интегралом II рода функции F по поверхности Ω* назовем интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S.$$

Замечание.

- Смена стороны на противоположную влечет замену знака.
- Интеграл II рода не зависит от параметризации.
- Пусть $F = \langle P, Q, R\rangle$. Тогда интеграл II рода записывают так:

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} P \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Пусть поверхность задана параметризацией $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$. Получим нормальный вектор, перемножив векторно касательные векторы:

$$n = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right)^T.$$

  Мера S выгдялит следующим образом:

$$\mathrm{d}S = \left\| \varphi'_u \times \varphi'_v \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \|n\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

  Вычислим интеграл:

$$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0\rangle \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\|n\|} \cdot \|n\| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$\iint\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Замечание. Посчитаем интеграл поля $\langle 0,0,R\rangle$ по поверхности Ω, заданной графиком (то есть, имеющей параметризацию вида $x, y, z(x,y)$).

$$\iint\limits_{\Omega^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(P\begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v\end{vmatrix} + Q\begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v\end{vmatrix} + R\begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Замечание. Попробуем посчитать объём фигуры Ω, ограниченной графиками z_1, z_2:

$$\begin{aligned}\lambda_3(\Omega) &= \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} (z_1(x,y) - z_2(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} z_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\widetilde{\Omega}} z_2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\partial\Omega^+} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались предыдущим замечанием и тем, что у нижней части фигуры (ограниченной z_1) нормали направлены в другую сторону.

Замечание. Пусть γ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$ (лежит в плоскости xy), Ω – цилиндр над γ. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Доказательство.
Первое доказательство: по формуле из первого замечания мы собираемся интегрировать какую-то функцию по носителю пути по двумерной мере. Носитель гладкого пути по такой мере всегда имеет меру 0.
Второе доказательство: мы пытаемся интегрировать $\langle F, n_0\rangle$. Заметим, что у F не равна нулю только третья координата (R), тогда как вектор нормали к цилиндру над xy всегда имеет $z = 0$. Таким образом, мы интегрируем функцию, тождественно равную нулю. ■

Глава 3

Основные интегральные формулы

3.1 Формула Грина

Замечание. В данном контексте рассматривается D: компактное, связное, односвязное множество в $\mathbb{R}^2$, ограниченное кусочно-гладкой кривой. При этом граница ∂D направлена против часовой стрелки (фигура всегда находится слева).

Теорема 3.1.1. (Формула Грина)
Пусть P, Q – гладкие векторные поля в $U(D)$. Тогда

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

Замечание. Формула "аддитивна"по фигуре.

3.2 Формула Стокса

Замечание. В данном контексте рассматривается Ω – двусторонняя поверхность с границей. n_0 – её сторона. $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая, согласованная по ориентации со стороной поверхности.

Теорема 3.2.1. (Формула Стокса)
Пусть $\langle P, Q, R\rangle$ – гладкое векторное поле в $U(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Omega} (R'_y - Q'_z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P'_z - R'_x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (Q'_x - P'_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Замечание. Формула "аддитивна"по фигуре.

3.3 Формула Гаусса-Остроградского

Замечание. В данном контексте рассматриваются

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, f(x, y) \leqslant z \leqslant F(x, y)\}.$$

Здесь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ – замкнутое множество, $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $f,F \in C^1(\Omega)$. Рассматриваем внешнюю сторону фигуры.

Теорема 3.3.1. (Формула Гаусса-Остроградского)
Пусть $R\colon U(V) \to \mathbb{R}$, $R \in C^1(U(V))$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Следствие 3.3.2. В условиях формулы Гаусса-Остроградского, верно

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Следствие 3.3.3. Пусть l – фиксированное направление в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial l}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} f\cdot\langle l, n_0\rangle\,\mathrm{d}S.$$

3.4 Примеры дифференциальных операторов

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R\rangle$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда *дивергенцией* A называется

$$\operatorname{div} A \overset{def}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Замечание. Дивергенцию поля в точке можно вычислять так:

$$\operatorname{div} A(a) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_3 B}\iiint\limits_{B(a,r)} \operatorname{div} A\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_3 B}\iint\limits_{S(a,r)} \langle A, n_0\rangle\,\mathrm{d}S.$$

Последнюю формулу можно интерпретировать как величину потока, проходящего через сферу с центром в данной точке достаточно малого радиуса. То есть, дивергенция характеризует точку как "источник" поля.

Определение. Пусть $C^1 \ni A = \langle P, Q, R\rangle$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда *ротором* A называется

$$\operatorname{rot} A \overset{def}{=} \langle R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\rangle.$$

Замечание. $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{O}$ – односвязная область, $\operatorname{rot} V = 0$. Тогда V потенциально.

Замечание. $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{O}$ – односвязная область, $\operatorname{rot} V = 0$. Тогда

- Если γ – петля, то

$$\int\limits_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0.$$

- Если γ – путь, то интеграл

$$\int\limits_{\gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

  зависит только от начальной и конечной точек пути.

Замечание. Если $\mathcal{O}$ не односвязна, но $\operatorname{rot} V = 0$, то все равно интеграл по пути не зависит от самого пути.

Если в поле нет источников, то откуда может взяться поток через поверхность?

Замечание. $\operatorname{div} V = 0$, тогда для любой "разумной" фигуры Ω выполнено

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \langle V, n_0 \rangle\,\mathrm{d}S = 0.$$

Определение. Поле V называется *соленоидальным* в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, если у него существует векторный потенциал, то есть $\exists B$ – векторное поле такое, что $\operatorname{rot} B = V$ на Ω.

Теорема 3.4.1. (Критерий соленоидальности поля)
A соленоидально в $\Omega \iff \operatorname{div} A = 0$ на Ω

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Пространство L^p

Определение. Комплексное отображение $f: X \to \mathbb{C}$ назовем *измеримым*, если $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h: X \to \mathbb{R}$, причем g, h измеримы.

Определение. Аналогично определим *суммируемые* комплексные отображения.

Определение. Пусть $f: X \to \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h: X \to \mathbb{R}$. Тогда определим интеграл:

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu + i \int\limits_E h \,\mathrm{d}\mu.$$

Замечание.

$$\left| \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 4.1.1. (Интегральное неравенство Гёльдера)
Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g: X \to \mathbb{C}$ – измеримые почти везде заданные функции. Тогда

$$\int\limits_X |fg| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 4.1.2. (Интегральное неравенство Минковского)
Пусть $f, g: X \to \mathbb{C}$, $p \geqslant 1$, тогда

$$\left(\int\limits_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_X |g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. Пусть $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой. Тогда для $1 \leqslant p < +\infty$ положим

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \overset{def}{=} \left\{ f: \text{п.в. } X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима}, \int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ – линейное пространство.

Определение. Зададим на $\mathcal{L}^p$ отношение эквивалентности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ почти везде. Положим

$$L^p(X,\mu) \overset{def}{=} \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim.$$

Определение. В L^p заведем норму: $\|[f]\| \overset{def}{=} \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Определение. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ задана почти везде. Тогда *существенным супремумом* f называется

$$\operatorname*{ess\,sup}_X f \overset{def}{=} \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leqslant A \text{ п.в.}\}.$$

Теорема 4.1.3. (Свойства существенного супремума)

- $\operatorname{ess\,sup}_X f \leqslant \sup_X f$.
- $f(x) \leqslant \operatorname{ess\,sup}_X f$ при почти всех x.
- $\left|\int_X f\,g \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_X |f| \cdot \int_X |g|$.

Определение. Для $p = \infty$:

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \overset{def}{=} \left\{f : \text{п.в. } X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима}, \operatorname*{ess\,sup}_X f < +\infty\right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ – линейное пространство.

Определение. Пространство L^∞ зададим аналогично конечному случаю. Нормой на этом пространстве положим ess sup.

Теорема 4.1.4. (О вложении пространств L^p)
Пусть $\mu(X) < +\infty$, $1 \leqslant r < s \leqslant +\infty$. Тогда

- $L^r(X,\mu) \subset L^s(X,\mu)$.
- $\|f\|^s \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$.

Следствие 4.1.5. Пусть $\mu(E) < +\infty$, $1 \leqslant s < r \leqslant +\infty$, $f_n, f \in L^s$, $f_n \underset{L^r}{\longrightarrow} f$, тогда $f_n \underset{L^s}{\longrightarrow} f$.

Теорема 4.1.6. (О сходимости в L^p и по мере)
Пусть $1 \leqslant r < +\infty$, $f_n, f \in L^p$, тогда

- $f_n \underset{L^p}{\longrightarrow} f \Longrightarrow f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, либо $f_n \to f$ почти везде, тогда если $\exists g \in L^p :\ |f_n| \leqslant g$, то $f_n \underset{L^p}{\longrightarrow} f$.

Замечание. L^∞ – полное метрическое пространство.

Теорема 4.1.7. (Полнота пространств L^p)
$\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty$ L^p полно.

Определение. Пусть X – топологическое пространство, тогда множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если $\mathrm{Cl}(A) = X$. Иначе говоря, $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$, или $\forall x \in X$ $\forall U(x)$ $U(x) \cap A \neq \varnothing$.

Определение. Множество всех ступенчатых функций $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим $St(X)$.

Лемма 4.1.8. Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, тогда множество $St(X) \cap L^p$ плотно в L^p.

Определение. (Четвертая аксиома отделимости)
Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нем любые два замкнутые непересекающиеся множества отделимы, причем любое одноточечное множество замкнуто.

Лемма 4.1.9. (Урысон)
Пусть X – нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, такая, что

- $0 \leqslant f \leqslant 1$.
- $f\Big|_{F_0} = 0$.
- $f\Big|_{F_1} = 1$.

Определение. *Финитной функцией в* $\mathbb{R}^m$ называется функция f такая, что

$$\exists B(a,r):\ f\Big|_B = 0.$$

По умолчанию, f непрерывна.

Теорема 4.1.10. Множество финитных функций плотно в L^p при $1 \leqslant p < +\infty$.

Замечание. Условие $p \neq +\infty$ существенно.

Определение. Множество непрерывных T-периодических функций будем обозначать $\widetilde{C}([0,T])$.

Теорема 4.1.11. (О непрерывности сдвига)
Пусть $f_h(x) = f(x+h)$. Тогда

- f равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.
- $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p \Longrightarrow \|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.
- $f \in \widetilde{C}([0,T]) \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.
- $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p([0,T]) \Longrightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

4.2 Гильбертовы пространства

Определение. *Гильбертовым пространством* называется линейное пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением, полное как метрическое пространство с метрикой и нормой, порожденными скалярным произведением:

- $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
- $\|\ \| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$.
- $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

Далее $\mathcal{H}$ – Гильбертово пространство.

Определение. Ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \in \mathcal{H}$, называется *сходящимся*, если $S_N \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i$ таково, что $\exists S \in \mathcal{H}:\ \|S_N - S\| \to 0$. Иными словами, последовательность частичных сумм ряда сходится к элементу $\mathcal{H}$.

Определение. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Longleftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Определение. Пусть $A \subseteq \mathcal{H}$. Тогда по определению $\mathbf{x} \perp A \Longleftrightarrow \forall \mathbf{y} \in A\ \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$.

Определение. Ряд называется *ортогональным*, если все его элементы попарно ортогональны.

Теорема 4.2.1. (Свойства сходимости в Гильбертовых пространствах)
Пусть $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in \mathcal{H}$. Тогда

- $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}_0 \Longrightarrow \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle \to \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle$.
- Пусть ряд $\sum \mathbf{x}_k$ сходится. Тогда $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}\ \langle \sum \mathbf{x}_k, \mathbf{y} \rangle = \sum \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y} \rangle$.
- Пусть ряд $\sum \mathbf{x}_k$ ортогонален. Тогда $\sum \mathbf{x}_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum \|\mathbf{x}_k\|^2$ сходится. Более того, в этом случае $\left\|\sum \mathbf{x}_k\right\|^2 = \sum \|\mathbf{x}_k\|^2$.

Определение. *Ортогональным семейством векторов* называется $\{\, \mathbf{e}_k \,\} \subseteq \mathcal{H}$ такое, что $\mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_{j \neq k}$. Если более того $\|\mathbf{e}_k\| = 1$, то семейство называется *ортонормированным*.

Определение. $L_2 \overset{def}{=} L^2([0, 2\pi], \lambda_1)$.

Теорема 4.2.2. Пусть $\{\, \mathbf{e}_k \,\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \mathbf{e}_k$. Тогда

- ОС линейно независима.
- $c_k = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k, \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$.
- $c_k \mathbf{e}_k = \mathcal{P}^{\perp}_{\{t\mathbf{e}_k\}}$, то есть $\mathbf{x} = c_k \mathbf{e}_k + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \perp \mathbf{e}_k$.

4.3 Ряды фурье

Определение. Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, тогда числа $c_k(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$ называются *коэффициентами фурье вектора* $\mathbf{x}$ *по системе* $\mathbf{e}_k$.

Определение. Ряд $\sum_k c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k$ называется *рядом Фурье* $\mathbf{x}$ *по* $\mathbf{e}_k$.

Замечание. При перенормировке ОС ряд Фурье не меняется.

Теорема 4.3.1. (О свойстах частичных сумм ряда Фурье)
Пусть $\mathcal{L} = Lin(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Тогда

- $S_n = \mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$, то есть $\mathbf{x} = S_n + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \perp \mathcal{L}$.
- S_n – элемент наилучшего приближения $\mathbf{x}$ в $\mathcal{L}$, то есть $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{L}\ \|S_n - \mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.
- $\|S_n\| \leqslant \|\mathbf{x}\|$.

Следствие 4.3.2. (Неравенство Бесселя)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_l\|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

Теорема 4.3.3. (Рисс, Фишер)
Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ – ОС, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$. Тогда

- Ряд Фурье $\mathbf{x}$ сходится в $\mathcal{H}$.
- $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k + \mathbf{z}$, $\forall k\ \mathbf{z} \perp \mathbf{e}_k$.
- $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k \Longleftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2$.

Определение. *Равенство Парсиваля*, или *уравнение замкнутости*:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(\mathbf{x})|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2.$$

4.4 Базис в Гильбертовом пространстве

Определение. *Базисом* в Гильбертовом пространстве называется ОС $\{\mathbf{e}_k\}$, если выполняется условие:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}\ \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k.$$

Определение. ОС $\{\mathbf{e}_k\}$ называется *полной*, если

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}\colon\ \{\mathbf{e}_k\} \cup \mathbf{x} \text{ – не ОС}.$$

Определение. ОС $\{\mathbf{e}_k\}$ называется *замкнутой*, если для любого её элемента выполняется уравнение замкнутости.

Теорема 4.4.1. (Характеризация базиса)
Пусть $E = \{\mathbf{e}_k\}$ – ОС. Тогда эквивалентны утверждения:

- E – базис.
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\mathbf{x}) \cdot \overline{c_k(\mathbf{y})} \cdot \|\mathbf{e}_k\|^2$
- E замкнута.
- E полна.
- $Lin(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ плотно в $\mathcal{H}$.