Математический анализ IIII

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна} \}.$$

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E \cap E_k.$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
- $f \leqslant g \Longrightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int g \, \mathrm{d}\mu$.

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0\leqslant g\leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leqslant \int f \,\mathrm{d}\mu \leqslant +\infty$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int f \,\mathrm{d}\mu$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, f, g измеримы, тогда $\int g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Определение. Пусть f — измеримая функция X, причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_- \,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f \cdot \chi_E \,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

- Измеримая $f \geqslant 0 \Longrightarrow$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
- f суммируема $\Longleftrightarrow \int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.
- Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

- $\int_E 1 \,\mathrm{d}\mu = \mu(E)$, $\int_E 0 \,\mathrm{d}\mu = 0$.
- Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- $\displaystyle\int -f \,\mathrm{d}\mu = -\int f \,\mathrm{d}\mu$, $\forall c > 0$ $\displaystyle\int c \cdot f \,\mathrm{d}\mu = c \cdot \int f \,\mathrm{d}\mu$.
- Пусть $\exists \displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu$, Тогда
$$\left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$
- Пусть f измерима на E, $\mu(E) < +\infty$, $\forall x \in E$ $A \leqslant f(x) \leqslant B$, тогда
$$A \cdot \mu(E) \leqslant \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leqslant B \cdot \mu(E).$$

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \geqslant 0$, ступенчата. Тогда
$$\int_A g \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \int_{A_i} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима на A. Тогда
$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.1.6. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима. Зададим отображение:
$$\begin{aligned} \nu \colon \mathcal{A} &\to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0} \\ E &\mapsto \int_E f \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$
Тогда ν – мера.

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x. Тогда $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

1.2 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)
Пусть $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n\ 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geqslant 0$, измеримы на E. Тогда

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E. Тогда $f+g$ суммируема, причем

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. $\mathcal{L}(X) = \left\{ f \mid f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \int |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$

Лемма 1.2.4. $\mathcal{L}(X)$ – линейное пространство.

Теорема 1.2.5. Пусть $u_n\colon X \to \mathbb{R}$, $u_n \geqslant 0$ почти везде, u_n измеримы на E. Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.2.6. Пусть u_n измеримы, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n\,\mathrm{d}\mu$ сходится абсолютно почти везде на E.

Теорема 1.2.7. (Абсолютная непрерывность интеграла)
Пусть f – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathcal{A}\colon\ \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f\,\mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Следствие 1.2.8. Пусть $e_n \in \mathcal{A}$, $\mu(e_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, f – суммируемая функция, тогда

$$\int_{e_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$, $\langle Y, \mathcal{B}, \nu\rangle$ *строим пространство* $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu\rangle$.

Лемма 1.3.1. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – полукольцо.

Определение. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, назовем тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *полукольцом измеримых прямоугольников*. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0 \colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

Теорема 1.3.2.

- m_0 – мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- Если μ, ν σ-конечны, тогда m_0 тоже σ-конечна.

Определение. Мы получили $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0\rangle$ – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до σ-алгебры, которую будем обозначать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

Теорема 1.3.3. Произведение мер ассоциативно.

Теорема 1.3.4. $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$.

Определение. Пусть $C \subseteq X \times Y$. Тогда *сечением* для произвольного $x \in X$ назовем множество

$$C_x \overset{def}{=} \{\, y \in Y \mid (x, y) \in C \,\}.$$

Замечание. Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcup_\alpha (C_\alpha)_x.$$

Теорема 1.3.5. (Принцип Кавальери)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, тогда

- При почти всех x $C_x \in \mathcal{B}$.
- Отображение $x \mapsto \nu(C_x)$ измеримо на X.
- $m(C) = \displaystyle\int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu$.

Следствие 1.3.6. Пусть $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $p_1(C) \in \mathcal{A}$, тогда

$$m(C) = \int\limits_{p_1(C)} \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.3.7. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Замечание. Пусть $f \geqslant 0$, измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Определение. Пусть $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$. Зафиксируем $x \in X$ и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\to \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим $f_y : C_y \to \overline{\mathbb{R}}$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.3.8. (Тонелли)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **измерима** по мере m. Тогда

- При почти всех x f_x **измерима** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu = \int_Y f_x\,\mathrm{d}\nu$ **измеримо** на X.
- $\displaystyle\int_{X\times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}m = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$

Теорема 1.3.9. (Фубини)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **суммируема**. Тогда

- При почти всех x f_x **суммируема** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu = \int_Y f_x\,\mathrm{d}\nu$ **суммируемо** на X.
- $\displaystyle\int_{X\times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}m = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$

Следствие 1.3.10. Если $p_1(C)$ измеримо, то

$$\int_C f\,\mathrm{d}m = \int_{X\times Y} f\chi_C\,\mathrm{d}m = \int_X \left(\int_Y f\chi_C\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \int_{p_1(C)} \left(\int_{C_x} f\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu.$$

Замечание. Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

1. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \to 0$.
2. $\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$.

Оказывается, верно $2 \Longrightarrow 1$, но без дополнительных требований неверно $1 \Longrightarrow 2$.

Теорема 1.3.11. (Лебега о мажорированной сходимости)
Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, $\exists g$:

- $\forall n\ |f_n| \leqslant g$ при почти всех x.
- g суммируема на X.

В такой ситуации g называется *Мажорантой*. Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\displaystyle\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$.

Следствие 1.3.12. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.3.13. Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \to f$ почти везде, $\exists g$:

- $\forall n\ |f_n| \leqslant g$.
- g суммируема на X.

Тогда

- f_n, f суммируемы.
- $\displaystyle\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$.

Следствие 1.3.14. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.3.15. (Фату)
Пусть $f_n \geqslant 0$, f_n измеримы, $f_n \to f$ почти везде. Если

$$\exists c > 0\colon\ \forall n \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

то

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant c.$$

Следствие 1.3.16. Теорема Фату верна и в случае $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.

Следствие 1.3.17. Пусть $f_n \geqslant 0$, f_n измеримы, тогда

$$\int\limits_X \varliminf f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

1.4 Замена переменных в интеграле

Определение. Отображение $\Phi\colon X \to Y$ называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

Лемма 1.4.1. $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$ – σ-алгебра.

Определение. При фиксированном измеримом $\Phi\colon X \to Y$ отображение

$$\begin{aligned} \nu\colon \mathcal{B} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры μ при отображении* Φ.

Лемма 1.4.2. Образ меры при отображении является мерой.

Замечание. $\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} 1\,\mathrm{d}\mu$

Замечание. Если функция $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathcal{B}$, то $f \circ \Phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathcal{A}$.

Определение. Пусть $\omega\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geqslant 0$, измерима. В этом контексте ω называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры μ с весом ω* называется мера

$$\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega\,\mathrm{d}\mu$$

Теорема 1.4.3. (Об интегрировании по взвешенному образу меры)
Пусть $\Phi\colon X \to Y$ – измеримое отображение, $0 \leqslant \omega\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – весовая функция, измерима на X, ν – взвешенный образ меры μ с весом ω. Тогда для любой измеримой $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ верно:

- $f \circ \Phi$ измерима на X.
- $\int\limits_Y f\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X (f \circ \Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu$

Следствие 1.4.4. Пусть f суммируема на Y, $B \in \mathcal{B}$, тогда в условиях теоремы:

$$\int\limits_B f\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi)\,\omega\,\mathrm{d}\mu.$$

Определение. В ситуации $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \mathrm{id}$, если $\omega \geqslant 0$ измерима, причем $\nu(B) = \int\limits_B \omega \, \mathrm{d}\mu$, ω называется *плотностью меры ν относительно меры μ*. В таком случае

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X f \omega \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.4.5. (Критерий плотности)
Пусть ν – мера на $\mathcal{A}$, $\omega \geqslant 0$ измерима, тогда верно, что ω – плотность ν относительно μ тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{A} \ \inf_A \omega \cdot \mu(A) \leqslant \nu(A) \leqslant \sup_A \omega \cdot \mu(A).$$

Лемма 1.4.6. Пусть f, g – суммируемые на X функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \ \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Тогда $f = g$ почти везде.

Лемма 1.4.7. (Об образе малых кубических ячеек)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$, Φ дифференцируемо в $\mathbf{a}$, $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$, $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 \ \forall Q \text{ – куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \ \lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

Лемма 1.4.8. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathcal{O})$, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq Q$, Q – куб, причем $\mathrm{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$. Тогда

$$\inf_{\substack{A \subset G \\ G \text{ открыто}}} \left(\lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

Теорема 1.4.9. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $A \in \mathfrak{M}^m$, $A \subseteq \mathcal{O}$, тогда

$$\lambda\Phi(A) = \int\limits_A |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\lambda_m.$$

Теорема 1.4.10. Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $\Phi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм, $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$, f – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}^1} f(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{\mathcal{O}} f(\Phi(x)) \, |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Замечание. То же верно и в случае, когда f суммируема.

1.5 Функции распределения

Определение. Пусть $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, причем $\forall t \in \mathbb{R}\ \mu X(h < t) < +\infty$. Тогда функция $H(t) = \mu X(h < t)$ называется *функцией распределения h по мере μ*.

Замечание. $H(t)$ не убывает.

Замечание. Пусть h измерима, тогда для любого борелевского $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $h^{-1}(B)$ измерим.

Определение. Стандартное продолжение $\mu_H([a, b)) = H(b-0) - H(a-0)$ называется *мерой Бореля-Стилтьеса*.

Лемма 1.5.1. Пусть $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения. Тогда на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu_H = H(\mu)$.

Теорема 1.5.2. Пусть $0 \leqslant f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, измеримая по Борелю, $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая и почти везде конечная функция, H – её функция распределения, μ_H – мера Бореля-Стилтьеса для H. Тогда

$$\int\limits_X f \circ h \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu_H.$$

1.6 Поверхностные интегралы

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$, $\varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ – параметризация M, тогда $E \subseteq M$ называется *измеримым*, если $\varphi^{-1}E \in \mathfrak{M}^2$.

Определение. Введем обозначение:

$$\mathcal{A}_M \overset{def}{=} \{E \subseteq M \mid E \text{ измеримо}\}.$$

Замечание. $\mathcal{A}_M$ – σ-алгебра.

Определение. На $\mathcal{A}_M$ заведем меру:

$$\begin{aligned} S\colon \mathcal{A}_M &\to \overline{\mathbb{R}} \\ E &\mapsto \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Замечание. Замкнутые, открытые, компактные $E \subset M$ измеримы.

Лемма 1.6.1. S не зависит от выбора параметризации.

Определение. $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по мере S, если $f \circ \varphi$ измерима на $\mathcal{O}$ по мере λ.

Определение. Пусть M – простое гладкое двумерное многообразие, φ – его параметризация, $0 \leqslant f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по S, тогда *поверхностным интегралом I рода* назовем интеграл

$$\iint\limits_M f \,\mathrm{d}S.$$

Или развернуто, пользуясь теоремой об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\iint\limits_M f \,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\varphi^{-1}(M)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left\|\varphi'_u \times \varphi'_v\right\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^3$ назовем *кусочно-гладким многообразием в* $\mathbb{R}^3$, если M представляется в виде конечного дизъюнктного объединения объектов вида

- простое гладкое двумерное многообразие.
- простое гладкое одномерное многообразие (носитель гладкого пути).
- точка.

Определение. Мера S на кусочно-гладком многообразии $E = \bigsqcup_i M_i$ вычисляется следующим образом:

$$S(E) = \sum_i S(E \cap M_i).$$

Глава 2

Ряды Фурье

2.1 Пространство L^p

Определение. Комплексное отображение $f : X \to \mathbb{C}$ назовем *измеримым*, если $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h : X \to \mathbb{R}$, причем g, h измеримы.

Определение. Аналогично определим *суммируемые* комплексные отображения.

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) + ih(x)$, $g, h : X \to \mathbb{R}$. Тогда определим интеграл:

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu + i\int\limits_E h\,\mathrm{d}\mu.$$

Замечание.

$$\left|\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_E |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 2.1.1. (Интегральное неравенство Гёльдера)
Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g : X \to \mathbb{C}$ – измеримые почти везде заданные функции. Тогда

$$\int\limits_X |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_X |g|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 2.1.2. (Интегральное неравенство Минковского)
Пусть $f, g : X \to \mathbb{C}$, $p \geqslant 1$, тогда

$$\left(\int\limits_X |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_X |g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. Пусть $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$ – пространство с мерой. Тогда для $1 \leqslant p < +\infty$ положим

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) \overset{def}{=} \left\{ f : \text{п.в. } X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима}, \int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ – линейное пространство.

Определение. Зададим на $\mathcal{L}^p$ отношение эквивалентности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ почти везде. Положим

$$L^p(X,\mu) \overset{def}{=} \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim.$$

Определение. В L^p заведем норму: $\|[f]\| \overset{def}{=} \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Определение. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ задана почти везде. Тогда *существенным супремумом* f называется

$$\operatorname*{ess\,sup}_X f \overset{def}{=} \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leqslant A \text{ п.в.}\}.$$

Теорема 2.1.3. (Свойства существенного супремума)

- $\operatorname{ess\,sup}_X f \leqslant \sup_X f$.
- $f(x) \leqslant \operatorname{ess\,sup}_X f$ при почти всех x.
- $\left|\int_X f g \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_X |f| \cdot \int_X |g|$.

Определение. Для $p = \infty$:

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \overset{def}{=} \left\{f : \text{п.в. } X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ измерима}, \operatorname*{ess\,sup}_X f < +\infty\right\}.$$

Замечание. $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ – линейное пространство.

Определение. Пространство L^∞ зададим аналогично конечному случаю. Нормой на этом пространстве положим $\operatorname{ess\,sup}$.

Теорема 2.1.4. (О вложении пространств L^p)
Пусть $\mu(X) < +\infty$, $1 \leqslant r < s \leqslant +\infty$. Тогда

- $L^r(X,\mu) \subset L^s(X,\mu)$.
- $\|f\|^s \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$.

Следствие 2.1.5. Пусть $\mu(E) < +\infty$, $1 \leqslant s < r \leqslant +\infty$, $f_n, f \in L^s$, $f_n \underset{L^r}{\longrightarrow} f$, тогда $f_n \underset{L^s}{\longrightarrow} f$.

Теорема 2.1.6. (О сходимости в L^p и по мере)
Пусть $1 \leqslant r < +\infty$, $f_n, f \in L^p$, тогда

- $f_n \underset{L^p}{\longrightarrow} f \Longrightarrow f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, либо $f_n \to f$ почти везде, тогда если $\exists g \in L^p:\ |f_n| \leqslant g$, то $f_n \underset{L^p}{\longrightarrow} f$.

Замечание. L^∞ – полное метрическое пространство.

Теорема 2.1.7. (Полнота пространств L^p)
$\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty$ L^p полно.

Определение. Пусть X – топологическое пространство, тогда множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если $\mathrm{Cl}(A) = X$. Иначе говоря, $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$, или $\forall x \in X$ $\forall U(x)$ $U(x) \cap A \neq \varnothing$.

Определение. Множество всех ступенчатых функций $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим $St(X)$.

Лемма 2.1.8. Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, тогда множество $St(X) \cap L^p$ полно в L^p.

Определение. (Четвертая аксиома отделимости)
Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нем любые два замкнутые непересекающиеся множества отделимы, причем любое одноточечное множество замкнуто.

Лемма 2.1.9. (Урысон)
Пусть X – нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, такая, что

- $0 \leqslant f \leqslant 1$.
- $f\big|_{F_0} = 0$.
- $f\big|_{F_1} = 1$.