

# **Математический анализ III**

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Интеграл</b>	<b>2</b>
1.1	Определение интеграла . . . . .	2
1.2	Предельный переход под знаком интеграла . . . . .	5
1.3	Произведение мер . . . . .	6
1.4	Замена переменных в интеграле . . . . .	10

# Глава 1

## Интеграл

### 1.1 Определение интеграла

Общий контекст:  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  — пространство с мерой

**Определение.** Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна}\}.$$

**Определение.** Пусть  $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все  $E_k$  измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

**Определение.** Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E \cap E_k.$$

**Теорема 1.1.1.** (Свойства интеграла ступенчатой функции)

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
- $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ .

**Определение.** Пусть  $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, d\mu.$$

**Определение.** Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, d\mu.$$

**Теорема 1.1.2.** (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leq \int f \, d\mu \leq +\infty$ .
- $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  ступенчатая,  $f$  измеримая, тогда  $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ .
- $0 \leq g \leq f$ ,  $f, g$  измеримы, тогда  $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ .

**Определение.** Пусть  $f$  — измеримая функция  $X$ , причем хотя бы один из интегралов срезов конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

**Определение.** Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu.$$

**Определение.** Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезов конечны.

**Теорема 1.1.3.** (Свойства интеграла)

- Измеримая  $f \geq 0 \implies$  интеграл совпадает с предыдущим определением.
- $f$  суммируема  $\iff \int |f| \, d\mu < +\infty$ .
- Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых  $f, g$  верно:

$$f \leq g \implies \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

- $\int_E 1 \, d\mu = \mu(E)$ ,  $\int_E 0 \, d\mu = 0$ .
- Пусть  $\mu(E) = 0$ ,  $f$  измерима. Тогда

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

- $\int -f \, d\mu = - \int f \, d\mu, \forall c > 0 \int c \cdot f \, d\mu = c \cdot \int f \, d\mu.$

- Пусть  $\exists \int_E f \, d\mu$ , Тогда

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

- Пусть  $f$  измерима на  $E$ ,  $\mu(E) < +\infty, \forall x \in E A \leq f(x) \leq B$ , тогда

$$A \cdot \mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq B \cdot \mu(E).$$

**Лемма 1.1.4.** Пусть  $A = \bigsqcup_i A_i, A, A_i \in \mathcal{A}, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g \geq 0$ , ступенчатая. Тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

**Теорема 1.1.5.** Пусть  $A = \bigsqcup_i A_i, A, A_i \in \mathcal{A}, f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ , измерима на  $A$ . Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

**Следствие 1.1.6.** Пусть  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ , измерима. Зададим отображение:

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{A} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ E &\mapsto \int_E f \, d\mu \end{aligned}$$

Тогда  $\nu$  – мера.

**Лемма 1.1.7.** Пусть  $f$  суммируема,  $g$  измерима, причем  $f = g$  при почти всех  $x$ .

Тогда  $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$

## 1.2 Пределный переход под знаком интеграла

**Теорема 1.2.1.** (Леви)

Пусть  $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , измеримы,  $\forall n$   $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  при почти всех  $x \in X$ . Пусть  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$ . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $f, g \geq 0$ , измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

**Следствие 1.2.3.** Пусть  $f, g$  суммируемы на  $E$ . Тогда  $f + g$  суммируема, причем

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

**Определение.**  $\mathcal{L}(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \int |f| \, d\mu < +\infty\}$

**Лемма 1.2.4.**  $\mathcal{L}(X)$  – линейное пространство.

**Теорема 1.2.5.** Пусть  $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_n \geq 0$  почти везде,  $u_n$  измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n \, d\mu.$$

**Следствие 1.2.6.** Пусть  $u_n$  измеримы, причем  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| \, d\mu < +\infty$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \, d\mu$  сходится абсолютно почти везде на  $E$ .

**Теорема 1.2.7.** (Абсолютная непрерывность интеграла)

Пусть  $f$  – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{A}: \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

**Следствие 1.2.8.** Пусть  $e_n \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $f$  – суммируемая функция, тогда

$$\int_{e_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

## 1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ ,  $\langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$  строим пространство  $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu \rangle$ .

**Лемма 1.3.1.**  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – полукольца, тогда  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  – полукольцо.

**Определение.**  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – полукольца, назовем тогда  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  полукольцом измеримых прямоугольников. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0: \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

**Теорема 1.3.2.**

- $m_0$  – мера на полукольце  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .
- Если  $\mu$ ,  $\nu$   $\sigma$ -конечны, тогда  $m_0$  тоже  $\sigma$ -конечна.

**Определение.** Мы получили  $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0 \rangle$  – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до  $\sigma$ -алгебры, которую будем обозначать  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

**Теорема 1.3.3.** Произведение мер ассоциативно.

**Теорема 1.3.4.**  $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$ .

**Определение.** Пусть  $C \subseteq X \times Y$ . Тогда *сечением* для произвольного  $x \in X$  назовем множество

$$C_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}.$$

**Замечание.** Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left( \bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_{\alpha})_x.$$

**Теорема 1.3.5.** (Принцип Кавальери)

Пусть  $\mu$ ,  $\nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu$ ,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , тогда

- При почти всех  $x$   $C_x \in \mathcal{B}$ .
- Отображение  $x \mapsto \nu(C_x)$  измеримо на  $X$ .
- $m(C) = \int_X \nu(C_x) d\mu.$

**Следствие 1.3.6.** Пусть  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $p_1(C) \in \mathcal{A}$ , тогда

$$m(C) = \int_{p_1(C)} \nu(C_x) d\mu.$$

**Следствие 1.3.7.** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C$ , тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

**Замечание.** Пусть  $f \geq 0$ , измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

**Определение.** Пусть  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $C \in X \times Y$ . Зафиксируем  $x \in X$  и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Аналогично определим  $f_y : C_y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  для всех  $y \in Y$ .

**Теорема 1.3.8.** (Тонелли)

Пусть  $\mu, \nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu$ ,  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , **измерима** по мере  $m$ . Тогда

- При почти всех  $x$   $f_x$  **измерима** на  $Y$ .
- Отображение  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$  **измеримо** на  $X$ .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

**Теорема 1.3.9.** (Фубини)

Пусть  $\mu, \nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu$ ,  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , **суммируема**. Тогда

- При почти всех  $x$   $f_x$  **суммируема** на  $Y$ .
- Отображение  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$  **суммируемо** на  $X$ .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

**Следствие 1.3.10.** Если  $p_1(C)$  измеримо, то

$$\int_C f dm = \int_{X \times Y} f \chi_C dm = \int_X \left( \int_Y f \chi_C d\nu \right) d\mu = \int_{p_1(C)} \left( \int_{\tilde{C}_x} f d\nu \right) d\mu.$$



**Замечание.** Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

$$1. f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \rightarrow 0.$$

$$2. \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Оказывается, верно  $2 \implies 1$ , но без дополнительных требований неверно  $1 \implies 2$ .

**Теорема 1.3.11.** (Лебега о мажорированной сходимости)

Пусть  $f_n, f$  измеримы и почти везде конечны,  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ,  $\exists g$ :

- $\forall n |f_n| \leq g$  при почти всех  $x$ .
- $g$  суммируема на  $X$ .

В такой ситуации  $g$  называется *Мажорантой*. Тогда

- $f_n, f$  суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ .

**Следствие 1.3.12.** В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

**Теорема 1.3.13.** Пусть  $f_n, f$  измеримы и почти везде конечны,  $f_n \rightarrow f$  почти везде,  $\exists g$ :

- $\forall n |f_n| \leq g$ .
- $g$  суммируема на  $X$ .

Тогда

- $f_n, f$  суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ .

**Следствие 1.3.14.** В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

**Теорема 1.3.15. (Фату)**

Пусть  $f_n \geq 0$ ,  $f_n$  измеримы,  $f_n \rightarrow f$  почти везде. Если

$$\exists c > 0: \forall n \int_X f_n d\mu \leq c.$$

то

$$\int_X f d\mu \leq c.$$

**Следствие 1.3.16.** Теорема Фату верна и в случае  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ .

**Следствие 1.3.17.** Пусть  $f_n \geq 0$ ,  $f_n$  измеримы, тогда

$$\int_X \varliminf f_n d\mu \leq \varliminf \int_X f_n d\mu.$$

## 1.4 Замена переменных в интеграле

**Определение.** Отображение  $\Phi: X \rightarrow Y$  называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

**Лемма 1.4.1.**  $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$  –  $\sigma$ -алгебра.

**Определение.** При фиксированном измеримом  $\Phi: X \rightarrow Y$  отображение

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

назовем *образом меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$* .

**Лемма 1.4.2.** Образ меры при отображении является мерой.

**Замечание.**  $\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, d\mu$

**Замечание.** Если функция  $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима относительно  $\mathcal{B}$ , то  $f \circ \Phi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима относительно  $\mathcal{A}$ .

**Определение.** Пусть  $\omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$ , измерима. В этом контексте  $\omega$  называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры  $\mu$  с весом  $\omega$*  называется мера

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu$$

**Теорема 1.4.3.** (Об интегрировании по взвешенному образу меры)

Пусть  $\Phi: X \rightarrow Y$  – измеримое отображение,  $0 \leq \omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – весовая функция, измерима на  $X$ ,  $\nu$  – взвешенный образ меры  $\mu$  с весом  $\omega$ . Тогда для любой измеримой  $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  верно:

- $f \circ \Phi$  измерима на  $X$ .
- $\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu$

**Следствие 1.4.4.** Пусть  $f$  суммируема на  $Y$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , тогда в условиях теоремы:

$$\int_B f \, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

**Определение.** В ситуации  $X = Y$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ,  $\Phi = \text{id}$ , если  $\omega \geq 0$  измерима, причем  $\nu(B) = \int_B \omega \, d\mu$ ,  $\omega$  называется *плотностью меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$* . В таком случае

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \omega \, d\mu.$$

**Теорема 1.4.5.** (Критерий плотности)

Пусть  $\nu$  – мера на  $\mathcal{A}$ ,  $\omega \geq 0$  измерима, тогда верно, что  $\omega$  – плотность  $\nu$  относительно  $\mu$  тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu(A) \leq \nu(A) \leq \sup_A \omega \cdot \mu(A).$$

**Лемма 1.4.6.** Пусть  $f, g$  – суммируемые на  $X$  функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu.$$

Тогда  $f = g$  почти везде.

**Лемма 1.4.7.** (Об образе малых кубических ячеек)

Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$ ,  $\Phi$  дифференцируемо в  $\mathbf{a}$ ,  $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$ ,  $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$ . Тогда

$$\exists \delta > 0 \quad \forall Q - \text{куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \quad \lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

**Лемма 1.4.8.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C(\mathcal{O})$ ,  $A \in \mathfrak{M}^m$ ,  $A \subseteq Q$ ,  $Q$  – куб, причем  $\text{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$ . Тогда

$$\inf_{\substack{A \subseteq G \\ G \text{ открыто}}} \left( \lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

**Теорема 1.4.9.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – диффеоморфизм,  $A \in \mathfrak{M}^m$ ,  $A \subseteq \mathcal{O}$ , тогда

$$\lambda \Phi(A) = \int_A |\det \Phi'| \, d\lambda_m.$$

**Теорема 1.4.10.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – диффеоморфизм,  $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$ ,  $f$  – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int_{\mathcal{O}^1} f(y) \, dy = \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| \, dx.$$

**Замечание.** То же верно и в случае, когда  $f$  суммируема.