

# **Математический анализ III**

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Интеграл</b>	<b>2</b>
1.1	Определение интеграла . . . . .	2
1.2	Предельный переход под знаком интеграла . . . . .	7
1.3	Произведение мер . . . . .	10
1.4	Замена переменных в интеграле . . . . .	19
1.5	Функции распределения . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Поверхностные интегралы</b>	<b>28</b>
2.1	Поверхностный интеграл I рода . . . . .	28
2.2	Поверхностный интеграл II рода . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Основные интегральные формулы</b>	<b>34</b>
3.1	Формула Грина . . . . .	34
3.2	Формула Стокса . . . . .	35
3.3	Формула Гаусса-Остроградского . . . . .	38
3.4	Примеры дифференциальных операторов . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Интегралы, зависящие от параметра</b>	<b>43</b>
4.1	Несобственный интеграл . . . . .	43
4.2	Действия над интегралами с параметром . . . . .	44
4.3	Действия над несобственными интегралами с параметром . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>52</b>
5.1	Пространство $L^p$ . . . . .	52

# Глава 1

## Интеграл

### 1.1 Определение интеграла

Общий контекст:  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  — пространство с мерой

**Определение.** Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна}\}.$$

**Определение.** Пусть  $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{f \text{ in}} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все  $E_k$  измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

**Определение.** Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \lambda_k \mu(E \cap E_k).$$

**Теорема 1.1.1.** (Свойства интеграла ступенчатой функции)

1. Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
2.  $f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $f = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k} = \sum_j \alpha_j \chi_{F_j}$ . Тогда  $f = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j} = \sum_{k,j} \alpha_j \chi_{E_k \cap F_j}$ . Пользуясь этим, перепишем интеграл:

$$\int_1 f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \sum_k \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int_2 f.$$

2. Воспользуемся общим допустимым разбиением:

$$\int f = \sum_k \lambda_k \mu E_k = \sum_{k,j} \lambda_k \mu(E_k \cap F_j) \leq \sum_{k,j} \alpha_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_j \alpha_j \mu F_j = \int g.$$

■

**Определение.** Пусть  $0 \leq f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, d\mu.$$

**Определение.** Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, d\mu.$$

**Теорема 1.1.2.** (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leq \int f \, d\mu \leq +\infty$ .
- $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  ступенчатая,  $f$  измеримая, тогда  $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ .
- $0 \leq g \leq f$ ,  $f, g$  измеримы, тогда  $\int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ .

*Доказательство.*

1. Очевидно, так как супремум реализуется на самой интегрируемой функции.
3. Поскольку  $g$  – ступенчатая и  $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  входит в супремум из определения интеграла  $f$ , поэтому автоматически  $\int g \leq \int f$ .
2. Все ступенчатые функции, супремум по которым берется в определении интеграла функции  $g$ , входят так же и в супремум для интеграла  $f$ , так как  $0 \leq h \leq g \leq f$ .

■

**Определение.** Пусть  $f$  — измеримая функция  $X$ , причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

**Определение.** Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu.$$

**Определение.** Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

**Теорема 1.1.3.** (Свойства интеграла)

1. Измеримая  $f \geq 0 \implies$  интеграл совпадает с предыдущим определением.
2.  $f$  суммируема  $\iff \int |f| d\mu < +\infty$ .
3. Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых  $f, g$  верно:

$$f \leq g \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

$$4. \int_E 1 d\mu = \mu(E), \int_E 0 d\mu = 0.$$

5. Пусть  $\mu(E) = 0$ ,  $f$  измерима. Тогда

$$\int_E f d\mu = 0.$$

$$6. \int -f d\mu = - \int f d\mu, \forall c > 0 \int c \cdot f d\mu = c \cdot \int f d\mu.$$

7. Пусть  $\exists \int_E f d\mu$ , Тогда

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

8. Пусть  $f$  измерима на  $E$ ,  $\mu(E) < +\infty$ ,  $\forall x \in E A \leq f(x) \leq B$ , тогда

$$A \cdot \mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq B \cdot \mu(E).$$

*Доказательство.*

2. Следует из аддитивности интеграла по функции, что будет доказано позже.
1. Для неотрицательных  $f, g$  это уже было доказано. Для произвольных воспользуемся определением и тем соображением, что  $f^+ \leq g^+$  и  $f^- \geq g^-$ :

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \leq \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g.$$

5. Если  $f$  ступенчатая, то утверждение очевидно. Если  $f \geq 0$  и измерима, то супремум из определения равен нулю. Если  $f$  – произвольная измеримая функция, то  $\int f = \int f^+ - \int f^- = 0$ .

2. Очевидным образом следует из определений и того, что  $\sup cA = c \sup A$ .

3.  $-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$ .

■

**Лемма 1.1.4.** Пусть  $A = \bigsqcup_i A_i$ ,  $A, A_i \in \mathcal{A}$ ,  $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $g \geq 0$ , ступенчатая. Тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

*Доказательство.* Пусть  $g = \sum_k \lambda_k \chi_{E_k}$ , тогда

$$\int_A g \, d\mu = \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A).$$

Воспользуемся счетной аддитивностью меры:

$$\sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i).$$

Последний ряд сходится абсолютно, поэтому можно переставить порядок суммирования:

$$\sum_k \lambda_k \sum_i \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \sum_k \lambda_k \mu(E_k \cap A_i) = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu.$$

■

**Теорема 1.1.5.** Пусть  $A = \bigsqcup_i A_i$ ,  $A, A_i \in \mathcal{A}$ ,  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , измерима на  $A$ . Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

*Доказательство.*

( $\leq$ ) Левая часть равенства аппроксимируется ступенчатыми функциями  $0 \leq g \leq f$ . Для них имеем:

$$\int_A g \, d\mu = \sum_i \int_{A_i} g \, d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Теперь имеем:

$$\int_A f \, d\mu = \sup \int_A g \, d\mu \leq \sum_i \int_{A_i} f \, d\mu.$$

( $\geq$ ) Для начала рассмотрим случай, когда  $A = A_1 \sqcup A_2$ . Рассмотрим ступенчатую функцию  $0 \leq g \leq f$  и функции  $g_1, g_2$  такие, что  $g_i|_{A_i} = g$ ,  $g_i|_{A_i^c} = 0$ . Очевидно, что  $g_1 + g_2 = g$  на  $A$ . Тогда по построению:

$$\int_{A_1} g_1 d\mu + \int_{A_2} g_2 d\mu = \int_A (g_1 + g_2) d\mu = \int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

Возьмём супремум от обеих частей сначала по  $g_1$ , потом по  $g_2$ :

$$\int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

Теперь разберемся с бесконечным случаем. Пусть  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$ , где  $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$ . Тогда, пользуясь уже доказанным фактом для конечных разбиений, имеем:

$$\int_A f d\mu \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f d\mu + \int_{B_n} f d\mu \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f d\mu.$$

Совершая предельный переход при  $n \rightarrow +\infty$ , имеем:

$$\int_A f d\mu \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

■

**Следствие 1.1.6.** Пусть  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , измерима. Зададим отображение:

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{A} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ E &\mapsto \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

Тогда  $\nu$  – мера.

*Доказательство.* Единственное, что нужно проверить, это счетную аддитивность. Она как раз и проверена в теореме. ■

**Лемма 1.1.7.** Пусть  $f$  суммируема,  $g$  измерима, причем  $f = g$  при почти всех  $x$ .

Тогда  $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ .

*Доказательство.* Пусть  $e \in \mathcal{A}$ :  $\mu e = 0$ ,  $f = g$  на  $E \setminus e$ . Тогда

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus e} f d\mu + \int_e f d\mu = \int_{E \setminus e} f d\mu = \int_{E \setminus e} g d\mu = \int_{E \setminus e} g d\mu + \int_e g d\mu = \int_E g d\mu.$$

■

## 1.2 Пределный переход под знаком интеграла

**Теорема 1.2.1.** (Леви)

Пусть  $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , измеримы,  $\forall n$   $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  при почти всех  $x \in X$ . Пусть  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$ . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

*Доказательство.* Для начала отметим, что  $f$  измерима, как предел измеримых функций, поэтому её интеграл имеет смысл.

( $\geq$ ) Очевидно, поскольку  $f(x) \geq f_n(x)$ .

( $\leq$ ) Докажем, что  $\forall g: 0 \leq g \leq f$ ,  $g$  – ступенчатая,  $\forall c \in (0, 1)$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X g \, d\mu$ . Пусть  $E_n = X(f_n \geq cg)$ . Очевидно, что  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ . Кроме того,  $\bigcup E_n = X$ , потому что либо  $\forall x$   $f(x) > g(x)$  или  $f(x) = g(x)$ , но  $c < 1$ , поэтому всегда  $f(x) > cg(x)$ .

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{E_n} g \, d\mu.$$

Совершим переход при  $n \rightarrow +\infty$  в неравенстве:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} g \, d\mu.$$

Воспользуемся тем, что  $E \mapsto \int_E g \, d\mu$  – мера, то есть обладает свойством непрерывности снизу:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq c \int_X g \, d\mu.$$

Из этого неравенства очевидно следует:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X g \, d\mu.$$

Возьмем теперь супремум по  $g$  от обеих частей и получим требуемое. ■

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $f, g \geq 0$ , измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$



*Доказательство.* Аппроксимируем  $f, g$  ступенчатыми функциями  $f_n, g_n$ . Теорема об аппроксимации поставяет такие  $f_n, g_n$ , что  $0 \leq f_n \leq f$  и  $0 \leq g_n \leq g$ .  $f_n, g_n$  ступенчатые, поэтому

$$\int_E (f_n + g_n) d\mu = \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu.$$

По теореме Леви переходим к пределу при  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

■

**Следствие 1.2.3.** Пусть  $f, g$  суммируемы на  $E$ . Тогда  $f + g$  суммируема, причем

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

*Доказательство.*

- $(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|$ , поэтому интегралы

$$\int_E (f + g)_\pm d\mu$$

конечны, то есть  $f + g$  суммируема.

- Пусть  $h = f + g$ :

$$\begin{aligned} h_+ - h_- &= f_+ - f_- + g_+ - g_- \implies h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \implies \\ \int h_+ + \int f_- + \int g_- &= \int h_- + \int f_+ + \int g_+ \implies \\ \int_E (f + g) d\mu &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

■

**Определение.**  $\mathcal{L}(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \int |f| d\mu < +\infty\}$

**Лемма 1.2.4.**  $\mathcal{L}(X)$  – линейное пространство.

**Теорема 1.2.5.** Пусть  $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_n \geq 0$  почти везде,  $u_n$  измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

**Доказательство.** Пусть  $S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)$ ,  $0 \leq S_n(x) \leq S_{n+1}(x)$  почти везде,  $S(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ . Тогда по теореме Леви:

$$\int_E S \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_n(x) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \int_E u_i(x) \, d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E u_i(x) \, d\mu.$$

■

**Следствие 1.2.6.** Пусть  $u_n$  измеримы, причем  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| \, d\mu < +\infty$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  сходится абсолютно почти везде на  $E$ .

**Доказательство.**

$$\int_E \sum_{i=1}^{+\infty} |u_i| \, d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E |u_i| \, d\mu < +\infty.$$

Поэтому ряд под первым интегралом сходится.

■

**Теорема 1.2.7.** (Абсолютная непрерывность интеграла)

Пусть  $f$  – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{A}: \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Пусть  $X_n = X(f \geq n)$ . Тогда  $X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \dots$ . Кроме того, поскольку  $f$  суммируема, она не может быть бесконечной на множестве меры, отличной от нуля, то есть  $\mu(\bigcap X_n) = 0$ .

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon: \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Это выполнено потому, что отображение  $A \mapsto \int_A |f|$  – мера, то есть непрерывно сверху:

$$\int_{X_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\bigcap X_n} |f| \, d\mu = 0.$$

- По  $\varepsilon$  положим  $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ . Пусть теперь  $\mu E < \delta$ , вычислим интеграл:

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu + \int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| \, d\mu + n_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

■

**Следствие 1.2.8.** Пусть  $e_n \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $f$  – суммируемая функция, тогда

$$\int_{e_n} |f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

## 1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ ,  $\langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$  строим пространство  $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu \rangle$ .

**Лемма 1.3.1.**  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – полукольца, тогда  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  – полукольцо.

**Определение.**  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – полукольца, назовем тогда  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  полукольцом измеримых прямоугольников. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0: \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B). \end{aligned}$$

**Теорема 1.3.2.**

- $m_0$  – мера на полукольце  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .
- Если  $\mu$ ,  $\nu$   $\sigma$ -конечны, тогда  $m_0$  тоже  $\sigma$ -конечна.

*Доказательство.*

- Достаточно доказать счетную аддитивность. Пусть  $P = \bigsqcup P_i$ ,  $P, P_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ,  $P = A \times B$ ,  $P_i = A_i \times B_i$ . Заметим, что верны утверждения:

$$\chi_P(x, y) = \sum_i \chi_{P_i}(x, y), \quad \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_i \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y).$$

Проинтегрируем последнее равенство по мере  $\nu$  в  $Y$ :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) \cdot \int_B \chi_B(y) d\nu &= \sum_i \chi_A(x) \cdot \int_B \chi_{B_i}(y) d\nu \\ \chi_A(x) \cdot \nu B &= \sum_i \chi_A(x) \cdot \nu B_i. \end{aligned}$$

Интегрируя второй раз по переменной  $x$  по мере  $\mu$ , получаем:

$$\mu A \nu B = \sum_i \mu A_i \nu B_i.$$

- Пусть  $X = \bigcup X_i$ ,  $Y = \bigcup Y_i$ ,  $\mu X_k < +\infty$ ,  $\nu Y_k < +\infty$ , тогда

$$X \times Y = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j, \quad m_0(X_k \times Y_j) = \mu X_k \nu Y_j < +\infty.$$

■

**Определение.** Мы получили  $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0 \rangle$  – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до  $\sigma$ -алгебры, которую будем обозначать  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

**Теорема 1.3.3.** Произведение мер ассоциативно.

**Теорема 1.3.4.**  $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$ .

**Определение.** Пусть  $C \subseteq X \times Y$ . Тогда *сечением* для произвольного  $x \in X$  назовем множество

$$C_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}.$$

**Замечание.** Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha}\right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_{\alpha})_x.$$

**Теорема 1.3.5.** (Принцип Кавальери)

Пусть  $\mu, \nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu$ ,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , тогда

1. При почти всех  $x$   $C_x \in \mathcal{B}$ .
2. Отображение  $x \mapsto \nu C_x$  измеримо на  $X$ .

$$3. m(C) = \int_X \nu C_x d\mu.$$

*Доказательство.* Пусть множество  $D \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  – элементы  $X \times Y$ , для которых принцип Кавальери верен.

- Запасем какие-нибудь простые множества в  $D$ . А именно,  $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$  верно, что  $C = A \times B \in D$ . Проверим это:

1.  $C_x = B \in \mathcal{B}$  или  $\emptyset$ , в обоих случаях измеримо.
2.  $x \mapsto \nu C_x = \nu B \chi_A(x)$  – очевидно измерима.
3. Вычислим интеграл:

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu B \chi_A(x) d\mu = \int_A \nu B d\mu = \mu A \nu B = mC.$$

- Пусть теперь  $E = \bigsqcup_i E_i$ ,  $E_i \in D$ . Тогда  $E \in D$ .

1.  $E_x = \bigsqcup_i (E_i)_x$  – измеримо почти везде, потому что  $(E_i)_x$  измеримы почти везде.
2.  $x \mapsto \nu E_x = \sum_i \nu(E_i)_x$  – измерима как сумма измеримых функций.
3. Считаем:

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \sum_i \nu(E_i)_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum_i m(E_i) = mE.$$

- Пусть  $E_i \in D$ ,  $E_1 \supseteq \dots$ ,  $\bigcap E_i = E$ ,  $mE_i < +\infty$ . Тогда  $E \in D$ . Для начала заметим, что

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty.$$

Поэтому почти везде  $\nu(E_i)_x < +\infty$ .

1. При почти всех  $x$  одновременно измеримы все  $(E_i)_x$ , поэтому измеримо множество  $\bigcap (E_i)_x = E_x$ .
2. Пользуясь непрерывностью меры сверху получаем, что функция  $x \mapsto \nu E_x = \lim \nu(E_i)_x$  измерима как предел измеримых функций.
3. Считаем:

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim \nu(E_i)_x d\mu.$$

По теореме Лебега, которую мы пока не знаем, можно вынести предел из под знака интеграла в случае, когда подынтегральное выражение можно мажорировать суммируемой функцией, не зависящей от  $i$ :

$$\nu(E_i)_x \leq \nu(E_1)_x.$$

Последняя функция суммируема, поэтому

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim \nu(E_i)_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim m(E_i) = mE.$$

Последнее равенство верно в силу непрерывности меры  $m$  сверху.

- Если  $A_{i,j} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , то  $\bigcap_j \bigcup_i A_{i,j} \in D$ . Сделаем множества  $A_{i,j}$  дизъюнктными (пользуясь стандартной техникой, мы останемся в полукольце), а затем сделаем множества  $\bigcup_i \hat{A}_{i,j}$  убывающими, взяв в  $\tilde{A}_0 = \hat{A}_{i,j}, \dots, \tilde{A}_n = \bigcup_{i=1}^n \hat{A}_{i,j}$ .
- Покажем, что если  $mE = 0$ , то  $E \in D$ . Аппроксимируем  $E$  сериями прямоугольников  $P_{i,j}$  (из теоремы о стандартном продолжении меры): пусть  $H = \bigcap_i \bigcup_j P_{i,j}$ , очевидно, что  $E \subset H \in D$ ,  $mH = 0$ . Обладая этими знаниями, проверим, что  $E \in D$ :

1. Поскольку  $H \in D$ :

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \implies \nu H_x = 0 \text{ при п.в. } x.$$

Пользуясь полнотой меры  $\nu$  и тем фактом, что  $E_x \subset H_x$ , получаем, что  $\nu E_x = 0$  при почти всех  $x$ .

2. Отображение  $x \mapsto \nu E_x$  измеримо как отображение, почти всюду равное нулю.

3. Поскольку  $\nu E_x = 0$  почти везде, очевидно, что  $\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$ .

- Покажем, что если  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $mC < +\infty$ , то  $C \in D$ .  $\exists e: me = 0$ ,  $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{i,j}$ ,  $H = C \setminus e$ ,  $mC = mH$  (как в предыдущем пункте, из теоремы о стандартном продолжении меры).

1.  $C_x = H_x \setminus e_x$  – измеримо как разность измеримых множеств.

2.  $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$  – измерима как разность измеримых функций.

3. Считаем:

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = \int_X \nu e_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC.$$

- Пусть, наконец,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Пусть  $X = \bigsqcup_i X_i$ ,  $Y = \bigsqcup_j Y_j$  (пользуемся  $\sigma$ -конечностью мер), тогда:

$$C = \bigsqcup_{i,j} C \cap (X_i \times Y_j) \in D.$$

■

**Следствие 1.3.6.** Пусть  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $p_1(C) \in \mathcal{A}$ , тогда

$$m(C) = \int_{p_1(C)} \nu(C_x) d\mu.$$

**Следствие 1.3.7.** Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C$ , тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

*Доказательство.* Достаточно доказать утверждение для  $f \geq 0$ . Поскольку  $f$  непрерывна, множество  $C = \Pi\Gamma(f, [a, b])$  измеримо в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда  $C_x = [0, f(x)]$  – измеримо,  $\lambda_1 C_x = f(x)$ . Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1.$$

■

**Замечание.** Пусть  $f \geq 0$ , измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

**Определение.** Пусть  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $C \in X \times Y$ . Зафиксируем  $x \in X$  и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x, y). \end{aligned}$$

Аналогично определим  $f_y : C_y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  для всех  $y \in Y$ .

**Теорема 1.3.8. (Тонелли)**

Пусть  $\mu, \nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu$ ,  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , **измерима** по мере  $m$ . Тогда

- При почти всех  $x$   $f_x$  **измерима** на  $Y$ .
- Отображение  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$  **измеримо** на  $X$ .

$$\bullet \int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

*Доказательство.*

- Пусть  $f = \chi_C$ ,  $C \subseteq X \times Y$ . Тогда
  1.  $f_x = \chi_{C_x}$  – измерима при почти всех  $x$  потому, что  $C_x$  измеримо при почти всех  $x$  (принцип Кавальери).
  2.  $\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) d\nu = \nu_{C_x}$  – измеримо по принципу Кавальери.
  3.
 
$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu_{C_x} d\mu = mC = \int_{X \times Y} \chi_C dm.$$
- Пусть  $f = \sum_k a_k \chi_{C_k} \geq 0$ ,  $C_k$  измеримы,  $k < +\infty$ . Тогда:
  1.  $f_x = \sum_k a_k \chi_{C_k}$  – измеримо почти как линейная комбинация измеримых почти везде функций.
  2.  $\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu = \sum_k a_k \nu(C_k)_x$  – измеримо почти везде по аналогичной причине.
  3.
 
$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_k a_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum_k a_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm.$$
- Пусть  $f \geq 0$ ,  $g_n$  – ступенчатые функции, аппроксимирующие  $f$ ,  $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$ ,  $\lim g_n = f$ . Тогда
  1.  $f_x = \lim (g_n)_x$  – измерима как предел измеримых функций.

2.  $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \lim_Y \int_Y (g_n)_x d\nu = \lim_Y \int_Y \varphi_n(y) d\nu$  – измерима как предел измеримых функций. Второе равенство справедливо как следствие теоремы Леви.

3.

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \lim \int_X \varphi_n(x) d\mu = \lim \int_{X \times Y} g_n dm = \int_{X \times Y} f dm.$$

Здесь дважды применена теорема Леви.

■

### Теорема 1.3.9. (Фубини)

Пусть  $\mu, \nu$  –  $\sigma$ -конечные полные меры,  $m = \mu \times \nu, f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ , суммируема. Тогда

- При почти всех  $x$   $f_x$  **суммируема** на  $Y$ .
- Отображение  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu = \int_Y f_x d\nu$  **суммируемо** на  $X$ .
- $$\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu.$$

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству теоремы Тонелли.

■

**Следствие 1.3.10.** Если  $p_1(C)$  измеримо, то

$$\int_C f dm = \int_{X \times Y} f \chi_C dm = \int_X \left( \int_Y f \chi_C d\nu \right) d\mu = \int_{p_1(C)} \left( \int_{C_x} f d\nu \right) d\mu.$$

**Замечание.** Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

1.  $f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \rightarrow 0.$
2.  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$

Оказывается, верно  $2 \implies 1$ , но без дополнительных требований неверно  $1 \implies 2$ .

**Лемма 1.3.11.** Пусть  $g$  суммируема. Тогда  $\exists A \in \mathcal{A} : \mu A < +\infty, \int_{X \setminus A} g d\mu < \varepsilon.$

*Доказательство.*

$$\int_X g d\mu = \sup \left\{ \int_X h d\mu, h - \text{суммируема} \right\}.$$



Выберем ступенчатую  $h_0$  такую, что  $\int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon$ . Тогда пусть

$$A = \text{supp } h_0 = \{x \mid h(x) \neq 0\}.$$

$$\int_{X \setminus A} g + \int_A g - h_0 = \int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon.$$

$\mu A < +\infty$ , так как  $g$  суммируема. ■

**Теорема 1.3.12.** (Лебега о мажорированной сходимости)

Пусть  $f_n, f$  измеримы и почти везде конечны,  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ ,  $\exists g$ :

- $\forall n \ |f_n| \leq g$  при почти всех  $x$ .
- $g$  суммируема на  $X$ .

В такой ситуации  $g$  называется *мажорантой*. Тогда

- $f_n, f$  суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ .

*Доказательство.*

- $f_n$  суммируема по первому пункту условия
- По следствию из теоремы Рисса,  $f \leq g$ . Поэтому  $f$  тоже суммируема.
- Пусть теперь  $\mu X < +\infty$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  положим  $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$ .  
 $f_n \xrightarrow[\mu]{} f \implies \mu X_n \rightarrow 0$ .

$$\int_X |f - f_n| d\mu = \int_{X_n} |f - f_n| d\mu + \int_{X \setminus X_n} |f - f_n| d\mu < \int_{X_n} 2g d\mu + \int_{X \setminus X_n} \varepsilon d\mu.$$

Первый интеграл стремится к нулю по теореме об абсолютной сходимости интеграла. Второй интеграл оценивается сверху:

$$\int_{X \setminus X_n} \varepsilon d\mu \leq \int_X \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu X \rightarrow 0.$$

- Пусть  $\mu X = +\infty$ . По предыдущей лемме  $\exists A: \mu A < +\infty, \int_X g < \varepsilon$ , тогда

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| d\mu + 2\varepsilon \rightarrow 0.$$

Первый интеграл стремится к нулю по предыдущему пункту ( $\mu A < +\infty$ ).

Следствие 1.3.13. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Доказательство.

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f - f_n| d\mu \rightarrow 0.$$

**Теорема 1.3.14.** Пусть  $f_n, f$  измеримы и почти везде конечны,  $f_n \rightarrow f$  почти везде,  $\exists g$ :

- $\forall n |f_n| \leq g$ .
- $g$  суммируема на  $X$ .

Тогда

- $f_n, f$  суммируемы.
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ .

Доказательство.

- Первый пункт доказывается аналогично предыдущей теореме.
- Положим

$$h_n = \sup_{j \geq n} |f_j - f|.$$

Очевидно, что  $h_n$  убывает с ростом  $n$ , и  $0 \leq h_n \leq 2g$  почти везде. Кроме того, по определению,  $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| \rightarrow 0$  почти везде, потому что  $f_n \rightarrow f$  почти везде. Функция  $2g - h_n$  неотрицательна и возрастает с ростом  $n$ , поэтому подходит под теорему Леви:

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \implies \int_X h_n \rightarrow 0.$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \leq \int_X h_n d\mu \rightarrow 0.$$

**Следствие 1.3.15.** В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

**Теорема 1.3.16.** (Фату)

Пусть  $f_n \geq 0$ ,  $f_n$  измеримы,  $f_n \rightarrow f$  почти везде. Если

$$\exists c > 0: \forall n \int_X f_n d\mu \leq c.$$

то

$$\int_X f d\mu \leq c.$$

*Доказательство.* Пусть  $g_n = \inf_{j \geq n} f_j$ . Очевидно, что  $g_n$  возрастает с ростом  $n$  и  $g_n \geq 0$ . Кроме того,

$$\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f.$$

Тогда  $g_n$  подходит под теорему Леви:

$$\int_X f d\mu \leftarrow \int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq c.$$

■

**Следствие 1.3.17.** Теорема Фату верна и в случае  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ .

*Доказательство.* Сразу следует из теоремы Рисса. ■

**Следствие 1.3.18.** Пусть  $f_n \geq 0$ ,  $f_n$  измеримы, тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu.$$

*Доказательство.* Выберем последовательность  $n_k$  такую, что

$$\lim \int_X f_{n_k} d\mu = \underline{\lim} \int_X f_n d\mu.$$

Положим  $g_n = \inf_{j \geq n} f_j$ . Аналогично тому, как мы делали в доказательстве теоремы Фату:

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leftarrow \int_X g_{n_k} d\mu \leq \int_X f_{n_k} d\mu \rightarrow \underline{\lim} \int_X f_n d\mu.$$

■

## 1.4 Замена переменных в интеграле

**Определение.** Отображение  $\Phi: X \rightarrow Y$  называется *измеримым*, если

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Иначе говоря, прообраз измеримого множества измерим.

**Лемма 1.4.1.**  $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$  –  $\sigma$ -алгебра.

**Определение.** При фиксированном измеримом  $\Phi: X \rightarrow Y$  отображение

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(\Phi^{-1}(B)). \end{aligned}$$

назовем *образом меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$* .

**Лемма 1.4.2.** Образ меры при отображении является мерой.

**Замечание.**  $\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} 1 \, d\mu$

**Лемма 1.4.3.** Если функция  $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима относительно  $\mathcal{B}$ , то  $f \circ \Phi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима относительно  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.*

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \in \mathcal{A}.$$

■

**Определение.** Пусть  $\omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$ , измерима. В этом контексте  $\omega$  называется *весовой функцией*. Тогда *взвешенным образом меры  $\mu$  с весом  $\omega$*  называется мера

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu.$$

**Теорема 1.4.4.** (Об интегрировании по взвешенному образу меры)

Пусть  $\Phi: X \rightarrow Y$  – измеримое отображение,  $0 \leq \omega: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – весовая функция, измерима на  $X$ ,  $\nu$  – взвешенный образ меры  $\mu$  с весом  $\omega$ . Тогда для любой измеримой  $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  верно:

- $f \circ \Phi$  измерима на  $X$ .
- $\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu$

*Доказательство.*

- $(f \circ \Phi)$  измерима по предыдущей лемме.

- Пусть  $f = \chi_B$ ,  $B \in \mathcal{B}$ . Тогда

$$(f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu = \nu B = \int_Y f \, d\nu.$$

- Пусть теперь  $f$  – ступенчатая функция. Тогда:

$$\int_Y f \, d\nu = \sum_{k=1}^n \int_Y f_k \, d\nu = \sum_{k=1}^n \int_X (f_k \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

- Докажем утверждение для измеримой неотрицательной  $f$ . Аппроксимируем  $f$  ступенчатыми  $f_n$  так, чтобы  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ . Тогда справедлива теорема Леви:

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \lim \int_X (f_n \circ \Phi) \omega \, d\mu = \lim \int_Y f_n \, d\nu = \int_Y f \, d\nu.$$

- Проверим утверждение для произвольной суммируемой функции  $f$ . Интеграл её модуля конечен, кроме того, срезки мажирируются модулем, поэтому их интегралы тоже конечны. Таким образом, мы имеем право писать все формулы, использующие срезки.

$$\int_X (f \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_X (f_+ \circ \Phi) \omega \, d\mu - \int_X (f_- \circ \Phi) \omega \, d\mu = \int_Y f_+ \, d\nu - \int_Y f_- \, d\nu = \int_Y f \, d\nu.$$

■

**Следствие 1.4.5.** Пусть  $f$  суммируема на  $Y$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , тогда в условиях теоремы:

$$\int_B f \, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega \, d\mu.$$

**Определение.** В ситуации  $X = Y$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ,  $\Phi = \text{id}$ , если  $\omega \geq 0$  измерима, причем  $\nu(B) = \int_B \omega \, d\mu$ ,  $\omega$  называется *плотностью меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$* . В таком случае

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \omega \, d\mu.$$

**Теорема 1.4.6.** (Критерий плотности)

Пусть  $\nu$  – мера на  $\mathcal{A}$ ,  $\omega \geq 0$  измерима, тогда верно, что  $\omega$  – плотность  $\nu$  относительно  $\mu$  тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu(A) \leq \nu(A) \leq \sup_A \omega \cdot \mu(A).$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ )  $\forall A \in \mathcal{A}$ :

$$\inf_A \omega \cdot \mu A \leq \int_A \omega d\mu = \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A.$$

( $\Leftarrow$ ) – Пусть  $\omega > 0$ ,  $q \in (0, 1)$ ,  $A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1})$ . Тогда посылке теоремы имеем:

$$q^j \cdot \mu A_j \leq_1 \nu A_j \leq_2 q^{j-1} \cdot \mu A_j.$$

Кроме того, из простейших свойств интеграла следует:

$$q^j \cdot \mu A_j \leq_3 \int_{A_j} \omega d\mu \leq_4 q^{j-1} \cdot \mu A_j.$$

Воспользуемся этим:

$$q \int_A \omega d\mu = q \sum_j \int_{A_j} \omega d\mu \leq_4 \sum_j q^j \cdot \mu A_j \leq_1 \nu A \leq_2 \frac{1}{q} \sum_j q^j \cdot \mu A_j \leq_3 \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu.$$

Устремляя  $q$  к единице, получаем требуемое.

– Пусть теперь  $\omega \geq 0$ ,  $e = X(\omega = 0)$ . Тогда  $\nu e = 0$  по условию. Получается, что

$$\nu e = 0 = \int_e \omega d\mu.$$

Проверим теперь утверждение для произвольного измеримого  $A$ :

$$\nu A = \int_{X \setminus e} \omega d\mu + 0 = \int_{X \setminus e} \omega d\mu + \int_e \omega d\mu = \int_X \omega d\mu.$$

■

**Лемма 1.4.7.** Пусть  $f, g$  – суммируемые на  $X$  функции, причем

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f d\mu = \int_A g d\mu.$$

Тогда  $f = g$  почти везде.

*Доказательство.* Проверим, что  $h = f - g = 0$  при почти всех  $x$ . По условию,  $\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A h d\mu = \int_A (f - g) d\mu = 0$ . Положим  $A_+ = X(h \geq 0)$ ,  $A_- = X(h < 0)$ . Тогда  $X = A_+ \sqcup A_-$  и

$$\int_{A_+} |h| d\mu = \int_{A_+} h d\mu = 0.$$

$$\int_{A_-} |h| d\mu = - \int_{A_-} h d\mu = 0.$$

Получается,

$$\int_X |h| d\mu = 0 + 0 = 0.$$

Поэтому  $h = 0$  за исключением, может быть, множества меры ноль. ■

**Замечание.** Из последней леммы очевидно следует, что плотность одной меры относительно другой определена однозначно с точностью до равенства почти везде.

**Лемма 1.4.8.** (Об образе малых кубических ячеек)

Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{a} \in \mathcal{O}$ ,  $\Phi$  дифференцируемо в  $U(\mathbf{a})$ ,  $\det \Phi'(\mathbf{a}) \neq 0$ ,  $c > |\det \Phi'(\mathbf{a})| > 0$ . Тогда

$$\exists \delta > 0 \forall Q - \text{куб}, Q \subset B(\mathbf{a}, \delta) \lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda(Q).$$

*Доказательство.* Обозначим  $L = \Phi'(\mathbf{a})$  – обратимый линейный оператор. Выпишем определение дифференцируемости:

$$\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{a}) = L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Умножим обе части на  $L^{-1}$  и перенесем через знак равенства:

$$\underbrace{\mathbf{a} + L^{-1}(\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{a}))}_{\Psi(\mathbf{x})} = \mathbf{x} + o(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Получается, что  $\Psi$  близок к тождественному отображению. Из последней формулы очевидно следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon(\mathbf{a})$ :

$$|\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Пусть теперь  $Q \subset B_\varepsilon(\mathbf{a})$  – куб со стороной  $h$ . Тогда  $\forall \mathbf{x} \in Q$

$$|\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon h, \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i| < h.$$

Попытаемся понять, что делает с  $Q$  отображение  $\Psi$ . Пусть  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\Psi(\mathbf{x})_i - \Psi(\mathbf{y})_i| &\leq |\Psi(\mathbf{x})_i - \mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| + |\Psi(\mathbf{y})_i - \mathbf{y}_i| \\ &\leq |\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| + h + |\Psi(\mathbf{y}) - \mathbf{y}| \\ &\leq (1 + 2\varepsilon)h. \end{aligned}$$

Получается, что  $\Psi(Q)$  содержится в кубе со стороной  $(1 + 2\varepsilon)h$ . Тогда:

$$\lambda\Psi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q.$$

Отображение  $\Psi$  отличается от отображения  $\Phi$  только однократным применением оператора  $L$  и парой сдвигов. Поэтому:

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q.$$

Подберем такое  $\varepsilon$  чтобы выполнялось неравенство

$$|\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m < c.$$

И выберем в качестве  $\delta$  радиус шара  $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ . ■

**Лемма 1.4.9.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C(\mathcal{O})$ ,  $A \in \mathfrak{M}^m$ ,  $A \subseteq Q$ ,  $Q$  – куб, причем  $\text{Cl}(Q) \subseteq \mathcal{O}$ . Тогда

$$\inf_{\substack{A \subseteq G \\ G \text{ открыто}}} \left( \lambda(G) \cdot \sup_G f \right) = \lambda(A) \cdot \sup_A f.$$

**Теорема 1.4.10.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – диффеоморфизм,  $A \in \mathfrak{M}^m$ ,  $A \subseteq \mathcal{O}$ , тогда

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'| d\lambda_m.$$

*Доказательство.*

- Пусть  $\nu A = \lambda\Phi(A)$ . Это мера, потому что  $\Phi$  – диффеоморфизм. Надо проверить, что  $J_\Phi = |\det \Phi'|$  – плотность меры  $\nu$  относительно меры  $\lambda$ . Для этого будем проверять критерий плотности:  $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

- Проверим второе неравенство. Пусть  $Q$  – кубическая ячейка, причем  $\overline{Q} \subseteq \mathcal{O}$ . Предположим противное:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu Q.$$

Возьмем  $c > \sup_Q J_\Phi$  такое, чтобы

$$\lambda Q \cdot c < \nu Q.$$

Запустим процесс половинного деления. На каждом шаге найдется часть  $Q_i$ , для которой верно

$$\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i.$$

Это верно потому, что иначе по аддитивности меры не было бы выполнено аналогичное неравенство на предыдущем шаге. По теореме Кантора

$$\exists! \mathbf{a} \in \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{Q_n}.$$

То есть, мы имеем кубы с центром в точке  $\mathbf{a}$  со сколь угодно малой стороной. Это противоречит лемме об образе малых кубических ячеек, которая для достаточно малых кубов устанавливает неравенство

$$\nu Q = \lambda\Phi(Q) > c \cdot \lambda Q.$$



- Пусть теперь  $A$  – открытое множество. Представим его в виде дизъюнктного объединения кубических ячеек  $Q_i$ :  $\overline{Q_i} \subseteq \mathcal{O}$ . Тогда

$$\nu A = \sum_i \nu Q_i \leq \sum_i \sup_{Q_i} J_\Phi \cdot \lambda Q_i \leq \sum_i \sup_A J_\Phi \cdot \lambda Q_i = \sup_A J_\Phi \cdot \sum_i \lambda Q_i = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

- Пусть наконец  $A$  – измеримое множество. Пользуясь предыдущей леммой имеем

$$\lambda A \cdot \sup_A J_\Phi = \inf_{G \supset A} \left( \lambda G \cdot \sup_G J_\Phi \right) \geq \inf_{G \supset A} \nu G \geq \inf_{G \supset A} \nu A = \nu A.$$

- Таким образом, мы доказали второе неравенство из критерия плотности. Докажем левую часть, перейдя к  $\hat{A} = \Phi(A)$ ,  $\hat{\Phi} = \Phi^{-1}$ :

$$\lambda \hat{\Phi}(\hat{A}) = \nu \hat{A} \leq \sup_{\hat{A}} J_{\hat{\Phi}} \cdot \lambda \hat{A} \implies \lambda A \leq \frac{1}{\inf_A J_\Phi} \cdot \lambda \Phi(A) \implies \nu A = \lambda \Phi(A) \geq \inf_A J_\Phi \cdot \lambda A.$$

■

**Теорема 1.4.11.** Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $\Phi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – диффеоморфизм,  $\mathcal{O}^1 = \Phi(\mathcal{O})$ ,  $f$  – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int_{\mathcal{O}^1} f(y) dy = \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx.$$

*Доказательство.* По предыдущей теореме,  $J_\Phi = |\det \Phi'(x)|$  – плотность меры  $\nu = \lambda \circ \Phi$ . Тогда теорема напрямую следует из теоремы об интегрировании по взвешенному образу меры. ■

**Замечание.** То же верно и в случае, когда  $f$  суммируема.

**Пример.**

- Полярные координаты в  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \implies \det J = r.$$

- Цилиндрические координаты в  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \implies \det J = r.$$

- Сферические координаты в  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \implies \det J = r^2 \cos \varphi.$$

- Сферические координаты в  $\mathbb{R}^m$ .

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1 \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ \dots \\ x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\ x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \end{cases}$$

Вычислим  $\det J$  для этого типа замены координат. Для начала сделаем замену по последним двум координатам:

$$\begin{cases} x_i = x_i, \quad i = 1..n-2 \\ x_{n-1} = \rho_{n-1} \cos \varphi_{n-1} \\ x_n = \rho_{n-1} \sin \varphi_{n-1} \end{cases}.$$

Теперь заменим  $\rho_{n-1}$  и  $x_{n-2}$ :

$$\begin{cases} x_i = x_i, \quad i = 1..n-3 \\ \rho_{n-1} = \rho_{n-2} \sin \varphi_{n-2} \\ x_{n-2} = \rho_{n-2} \cos \varphi_{n-2} \end{cases}.$$

Продолжим этот процесс по индукции, в конце получим (вместо  $\rho_1$  пишем  $r$ ):

$$\begin{cases} \dots \\ \rho_2 = r \sin \varphi_1 \\ x_1 = r \cos \varphi_1 \end{cases}.$$

Видно, что получившаяся серия замен, которая совпадает со сферической заменой. Вычислим интеграл единицы по какому-нибудь простому множеству  $\mathcal{O}$ , находящемуся в положительном октанте ( $\forall i \ x_i > 0$ ):

$$\begin{aligned} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \int \rho_{n-1} dx_1 \dots dx_{n-2} d\rho_{n-1} d\varphi_{n-1} \\ &= \int \rho_{n-2}^2 \sin \varphi_{n-2} dx_1 \dots dx_{n-3} d\rho_{n-2} d\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} \\ &= \int (\rho_{n-3} \sin \varphi_{n-3})^2 \sin \varphi_{n-2} \rho_{n-3} dx_1 \dots dx_{n-4} d\rho_{n-3} d\varphi_{n-3} d\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} \\ &= \dots \\ &= \int r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-1} \varphi_2 \dots \sin^1 \varphi_{n-2} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-1} dr. \end{aligned}$$

Выражение, получившееся под знаком интеграла и есть якобиан преобразования (по теореме о единственности плотности).

**Определение.** При  $s, t > 0$  функция, задаваемая формулой

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx.$$

называется *бета-функцией*.

**Теорема 1.4.12.**  $\forall s, t > 0 \quad B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \left( \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \right) \left( \int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left( \int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx \\ &\stackrel{y=u-x}{=} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left( \int_x^{+\infty} (u-x)^{t-1} e^{x-u} dy \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} du \int_0^u x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} dx \\ &\stackrel{x=uv}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{s-1} v^{s-1} u^{t-1} (1-v)^{t-1} e^{-u} u dv \\ &= \left( \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} du \right) \left( \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) = \Gamma(s+t) B(s, t). \end{aligned}$$

■

**Теорема 1.4.13.** (Объём шара в  $\mathbb{R}^m$ )  $\lambda_m B(0, R) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}.$

*Доказательство.* Вычислим для начала вспомогательный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^{n-k-1} \varphi_k d\varphi_k &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-k-1} \varphi_k d\varphi_k \stackrel{\sin^2 \varphi_k = t}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} t^{\frac{n-k-1}{2}} \\ &= B\left(\frac{n-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-k}{2} + \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

$$\lambda_m B(0, R) = \int_{x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2} 1 d\lambda_m = \int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \dots \int_0^{2\pi} r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} R^m.$$

■

## 1.5 Функции распределения

**Определение.** Пусть  $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измеримая и почти везде конечная функция, причем  $\forall t \in \mathbb{R} \mu X(h < t) < +\infty$ . Тогда функция  $H(t) = \mu X(h < t)$  называется *функцией распределения  $h$  по мере  $\mu$* .

**Замечание.**  $H(t)$  не убывает.

**Замечание.** Пусть  $h$  измерима, тогда для любого борелевского  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $h^{-1}(B)$  измерим.

**Определение.** Стандартное продолжение  $\mu_H([a, b)) = H(b-0) - H(a-0)$  называется *мерой Бореля-Стилтьеса*.

**Определение.** В текущем контексте обозначим  $h(\mu) = \nu: \nu A = \mu h^{-1}(A)$ .

**Лемма 1.5.1.** Пусть  $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измеримая и почти везде конечная функция,  $H$  – её функция распределения. Тогда на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$   $\mu_H = h(\mu)$ .

*Доказательство.* Проверим равенство на ячейках, чего будет достаточно для совпадения функций на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

$$\mu_H[a, b) = H(b-0) - H(a-0) = H(b) - H(a) = \mu X(a \leq h < b) = \mu h^{-1}([a, b)).$$

Второе равенство выполнено как следствие непрерывности меры снизу:

$$\bigcup_{t < b} X(h < t) = X(h < b) \implies H(b-0) = \lim_{t \rightarrow b-} H(t) = \mu X(h < b) = H(b).$$

■

**Теорема 1.5.2.** Пусть  $0 \leq f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, измеримая по Борелю,  $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измеримая и почти везде конечная функция,  $H$  – её функция распределения,  $\mu_H$  – мера Бореля-Стилтьеса для  $H$ . Тогда

$$\int_X f \circ h \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_H.$$

*Доказательство.* Пусть  $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi = h$ ,  $w = 1$ . Кроме того, нам по определению известно, что для  $\nu = h(\mu)$  верно

$$\nu A = \mu h^{-1}(A).$$

Это значит, что  $\nu$  есть взвешенный (с весом 1) образ меры  $\mu$  при отображении  $h$ . Поэтому справедлива теорема об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\nu = \int_X f \circ \Phi \, d\mu.$$

Заменив  $\nu$  на  $\mu_H$  по предыдущей лемме и вернув  $h = \Phi$  получаем

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_H = \int_X f \circ h \, d\mu.$$

■

## Глава 2

# Поверхностные интегралы

### 2.1 Поверхностный интеграл I рода

**Определение.** Пусть  $M$  – простое гладкое двумерное многообразие в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – параметризация  $M$ , тогда  $E \subseteq M$  называется *измеримым*, если  $\varphi^{-1}(E) \in \mathcal{M}^2$ .

**Определение.** Введем обозначение:

$$\mathcal{A}_M \stackrel{def}{=} \{E \subseteq M \mid E \text{ измеримо}\}.$$

**Замечание.**  $\mathcal{A}_M$  –  $\sigma$ -алгебра.

**Определение.** На  $\mathcal{A}_M$  заведем меру:

$$\begin{aligned} S: \mathcal{A}_M &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ E &\mapsto \iint_{\varphi^{-1}(E)} \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv. \end{aligned}$$

**Замечание.** Замкнутые, открытые, компактные  $E \subset M$  измеримы.

**Лемма 2.1.1.**  $S$  не зависит от выбора параметризации.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi: \mathcal{O}_1 \rightarrow M$ ,  $\psi: \mathcal{O}_2 \rightarrow M$  – параметризации  $M$ . Тогда они отличаются на диффеоморфизм  $(u, v)$ :

$$\varphi(s, t) = \psi(u(s, t), v(s, t)).$$

Вычислим для начала  $\|\psi'_s \times \psi'_t\|$ :

$$\begin{aligned} \|\psi'_s \times \psi'_t\| &= \|(\varphi'_u u'_s + \varphi'_v v'_s) \times (\varphi'_u u'_t + \varphi'_v v'_t)\| = \|(\varphi'_u \times \varphi'_v) \cdot (u'_s v'_t - u'_t v'_s)\| \\ &= \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \cdot |u'_s v'_t - u'_t v'_s| = \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \cdot |\det J|. \end{aligned}$$

Проверим совпадение интегралов:

$$\iint_{\psi^{-1}(E)} \|\psi'_s \times \psi'_t\| \, ds dt = \iint_{\psi^{-1}(E)} \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| |\det J| \, ds dt = \iint_{\varphi^{-1}(E)} \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du dv.$$

■

**Определение.**  $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима по мере  $S$ , если  $f \circ \varphi$  измерима на  $\mathcal{O}$  по мере  $\lambda$ .

**Определение.** Пусть  $M$  – простое гладкое двумерное многообразие,  $\varphi$  – его параметризация,  $0 \leq f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима по  $S$ , тогда *поверхностным интегралом  $I$  рода* назовем интеграл

$$\iint_M f \, dS.$$

Или развернуто, пользуясь теоремой об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\iint_M f \, dS = \iint_{\varphi^{-1}(M)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| \, du \, dv.$$

**Определение.**  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  назовем *кусочно-гладким многообразием в  $\mathbb{R}^3$* , если  $M$  представляется в виде конечного дизъюнктного объединения объектов вида

- простое гладкое двумерное многообразие.
- простое гладкое одномерное многообразие (носитель гладкого пути).
- точка.

**Определение.** Мера  $S$  на кусочно-гладком многообразии  $E = \bigsqcup_i M_i$  вычисляется следующим образом:

$$S(E) = \sum_i S(E \cap M_i).$$

## 2.2 Поверхностный интеграл II рода

**Определение.** Поверхностью будем называть простое гладкое двумерное многообразие.

**Определение.** Стороной поверхности называется непрерывное векторное поле единичных нормалей к этой поверхности.

**Определение.** Поверхность называется двусторонней, если для неё существует непрерывное поле нормалей. Иначе она называется односторонней.

**Пример.** Лента Мебиуса – односторонняя поверхность.

**Определение.** Репером называется пара линейно независимых касательных векторов.

**Пример.**

- Пусть поверхность задается гладкой параметризацией  $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow M$ . Тогда можно задать поле нормалей, пользуясь репером:

$$n = \Phi'_u \times \Phi'_v.$$

Этот вектор пока не является единичной нормалью. Исправим это:

$$n_0 = \frac{n}{\|n\|}.$$

- Сторону поверхности можно задать другим способом. Рассмотрим петлю  $\gamma$  на нашей поверхности  $M$ . У этой петли есть вектор скорости  $\gamma'$ , а так же вектор, нормальный петле  $\tau$ . Перемножая эти векторы, получаем нормаль:

$$n = \tau \times \gamma'.$$

Таким способом удобно задавать стороны поверхностей, ограниченных кривой. В таких ситуациях предполагается, что задано направление пути, и нормаль должна быть направлена таким образом, чтобы при обходе пути по заданному направлению поверхность оставалась слева, если смотреть на картинку сверху по отношению к нормали.

**Замечание.** Для гладкой параметризации способ задания поля нормалей действительно задаёт корректное поле в том смысле, что нормаль всегда направлена в одну сторону относительно поверхности. Действительно, поскольку параметризация гладкая, соответственно её производные непрерывны, отображение, сопоставляющее точке нормаль, непрерывно. Пусть случился разворот репера (как на рисунке). Тогда понятно, что между этими состояниями было состояние, в котором нормали были направлены в противоположные стороны, то есть линейно зависимы, чего не может быть в случае гладкой параметризации (мы требуем, чтобы ранг якобиана был всегда максимальным).

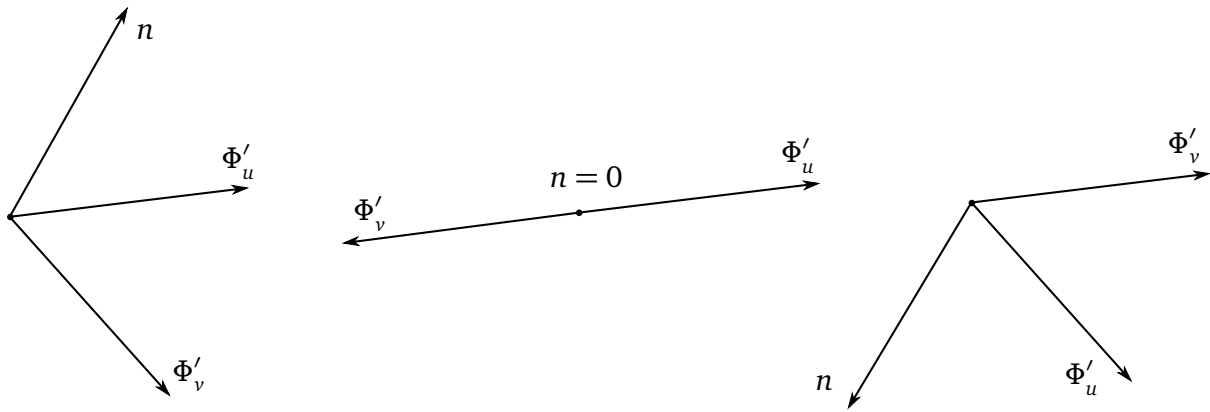


Рис. 2.1: Задание нормали через касательные векторы.

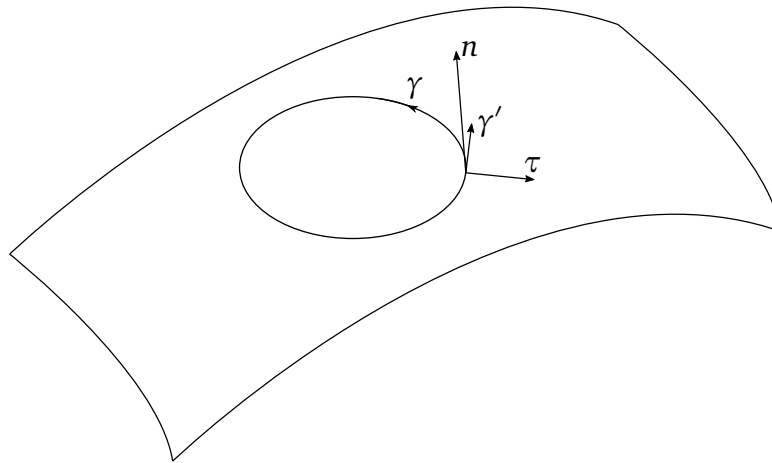


Рис. 2.2: Задание нормали через петли.

**Определение.** Пусть  $\Omega$  – двусторонняя поверхность в  $\mathbb{R}^3$ ,  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $n_0: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – сторона поверхности. Тогда *интегралом II рода функции  $F$  по поверхности  $\Omega$*  назовем интеграл

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS.$$

**Замечание.**

- Смена стороны на противоположную влечет замену знака.
- Интеграл II рода не зависит от параметризации.



- Пусть  $F = \langle P, Q, R \rangle$ . Тогда интеграл II рода записывают так:

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS = \int_{\Omega} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

- Пусть поверхность задана параметризацией  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ . Получим нормальный вектор, перемножив векторно касательные векторы:

$$n = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \left( \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right)^T.$$

Мера  $S$  выглядит следующим образом:

$$dS = \|\varphi'_u \times \varphi'_v\| dudv = \|n\| dudv.$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle dS &= \iint_{\tilde{\Omega}} \left( P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\|n\|} \cdot \|n\| dudv = \\ &= \iint_{\tilde{\Omega}} \left( P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) dudv. \end{aligned}$$

**Замечание.** Посчитаем интеграл поля  $\langle 0, 0, R \rangle$  по поверхности  $\Omega$ , заданной графиком (то есть, имеющей параметризацию вида  $x, y, z(x, y)$ ).

$$\iint_{\Omega^+} R dxdy = \iint_{\tilde{\Omega}} \left( P \begin{vmatrix} y'_u y'_v \\ z'_u z'_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z'_u z'_v \\ x'_u x'_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \right) dudv = \iint_{\tilde{\Omega}} R(x, y, z(u, v)) dudv.$$

**Замечание.** Попробуем посчитать объём фигуры  $\Omega$ , ограниченной графиками  $z_1, z_2$ :

$$\begin{aligned} \lambda_3(\Omega) &= \iint_{\tilde{\Omega}} (z_1(x, y) - z_2(x, y)) dxdy = \iint_{\tilde{\Omega}} z_1(x, y) dxdy - \iint_{\tilde{\Omega}} z_2(x, y) dxdy \\ &= \iint_{\partial\Omega^+} z dxdy. \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались предыдущим замечанием и тем, что у нижней части фигуры (ограниченной  $z_1$ ) нормали направлены в другую сторону.

**Замечание.** Пусть  $\gamma$  – гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$  (лежит в плоскости  $xy$ ),  $\Omega$  – цилиндр над  $\gamma$ . Тогда

$$\iint_{\Omega} R dxdy = 0.$$

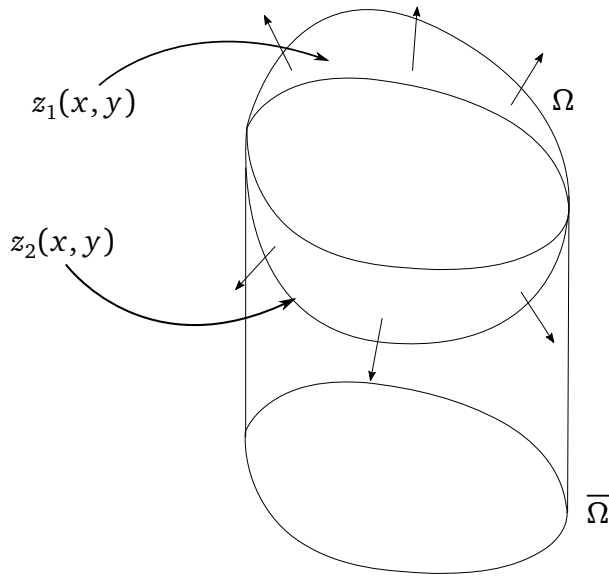


Рис. 2.3: Вычисление объёма через интеграл II рода.

*Доказательство. Первое доказательство:* по формуле из первого замечания мы собираемся интегрировать какую-то функцию по носителю пути по двумерной мере. Носитель гладкого пути по такой мере всегда имеет меру 0.

*Второе доказательство:* мы пытаемся интегрировать  $\langle F, n_0 \rangle$ . Заметим, что у  $F$  не равна нулю только третья координата ( $R$ ), тогда как вектор нормали к цилиндру над  $x, y$  всегда имеет  $z = 0$ . Таким образом, мы интегрируем функцию, тождественно равную нулю. ■

## Глава 3

# Основные интегральные формулы

### 3.1 Формула Грина

**Замечание.** В данном контексте рассматривается  $D$ : компактное, связное, односвязное множество в  $\mathbb{R}^2$ , ограниченное кусочно-гладкой кривой. При этом граница  $\partial D$  направлена против часовой стрелки (фигура всегда находится слева).

**Теорема 3.1.1.** (Формула Грина)

Пусть  $P, Q$  – гладкие векторные поля в  $U(D)$ . Тогда

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

*Доказательство.* Докажем, что

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D} P dx.$$

Из этого очевидно следует утверждение теоремы. Будем рассматривать простой случай. Пусть  $D$  – криволинейный четырёхугольник относительно осей  $x$  и  $y$  (как на рисунке). Тогда

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, f_1(x)) dx - \int_a^b P(x, f_2(x)) dx.$$

С другой стороны,

$$\int_{\partial D} P dx = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3}.$$

Параметризуем путь  $\gamma_1$ : Пусть  $\gamma_1(t) = (t, f_1(t))$ ,  $\gamma_2(t) = (b-t, f_2(b-t))$ . Тогда имеем:

$$\int_{\partial D} P dx = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3} = \int_a^b P(t, f_1(t)) dt - \int_a^b P(t, f_2(t)) dt = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

■

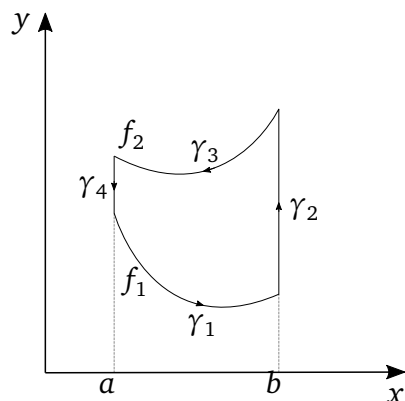


Рис. 3.1: Формула Грина.

**Замечание.** Формула "аддитивна" по фигуре.

*Доказательство.* Пусть фигура  $D$  представляется в виде объединения фигур  $D_1$ ,  $D_2$ , пересекающихся по кривой  $\gamma$ , для которых формула верна. Тогда:

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_{\partial D_1} + \int_{\partial D_2} = \int_{\partial D} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_3^-} = \int_{\partial D}.$$

■

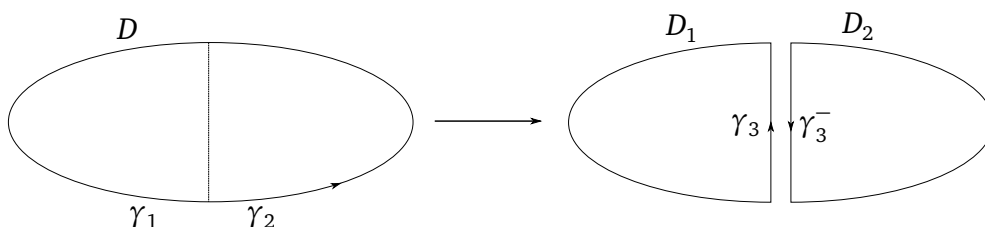


Рис. 3.2: Аддитивность формулы Грина по фигуре.

## 3.2 Формула Стокса

**Замечание.** В данном контексте рассматривается  $\Omega$  – двусторонняя поверхность с границей.  $n_0$  – её сторона.  $\partial\Omega$  – кусочно-гладкая кривая, согласованная по ориентации со стороной поверхности.

**Теорема 3.2.1.** (Формула Стокса)

Пусть  $\langle P, Q, R \rangle$  – гладкое векторное поле в  $U(\Omega)$ . Тогда

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Omega} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy..$$

*Доказательство.* Будем считать, что  $\Omega$  –  $C^2$ -гладкое. Достаточно проверить, что

$$\int_{\partial\Omega} P dx = \iint_{\Omega} P'_z dz dx - P'_y dx dy.$$

Пуст  $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  – параметризация  $\Omega$ , причем она продолжается до границы  $\partial\Omega = L$  таким образом, что  $\varphi(L) = \partial\Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} P dx &= \int_L P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) = \int_L P x'_u du + P x'_v dv \\ &\stackrel{\text{Грин}}{=} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial u} (P x'_v) - \frac{\partial}{\partial v} (P x'_u) \right) du dv \\ &= \iint_{\Omega} ((P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v + P x''_{uv} - (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u - P x''_{vu}) du dv \\ &= \iint_{\Omega} (P'_x (x'_u x'_v - x'_v x'_u) + P'_y (y'_u x'_v - y'_v x'_u) + P'_z (z'_u x'_v - z'_v x'_u)) du dv \\ &= \iint_{\Omega} (P'_y (y'_u x'_v - y'_v x'_u) + P'_z (z'_u x'_v - z'_v x'_u)) du dv.. \end{aligned}$$

Первое равенство легко получается, если попробовать посчитать левую и правую часть через параметризацию  $L$ . С другой стороны:

$$\iint_{\Omega} P'_z dz dx - P'_y dx dy = \iint_{\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ P'_z \\ -P'_y \end{pmatrix}, n_0 \right\rangle dS.$$

Подберем такую параметризацию  $\varphi$ , которая отвечает согласованию стороны при попытке рассматривать  $n = \tau_u \times \tau_v$  (направление  $L$  должно соответствовать правильной ориентации):

$$n = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \tau_u \times \tau_v.$$

Тогда

$$\iint_{\Omega} P'_z dz dx - P'_y dx dy = \iint_{\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ P'_z \\ -P'_y \end{pmatrix}, \tau_u \times \tau_v, d \right\rangle du dv = \int_{\partial\Omega} P dx.$$

■

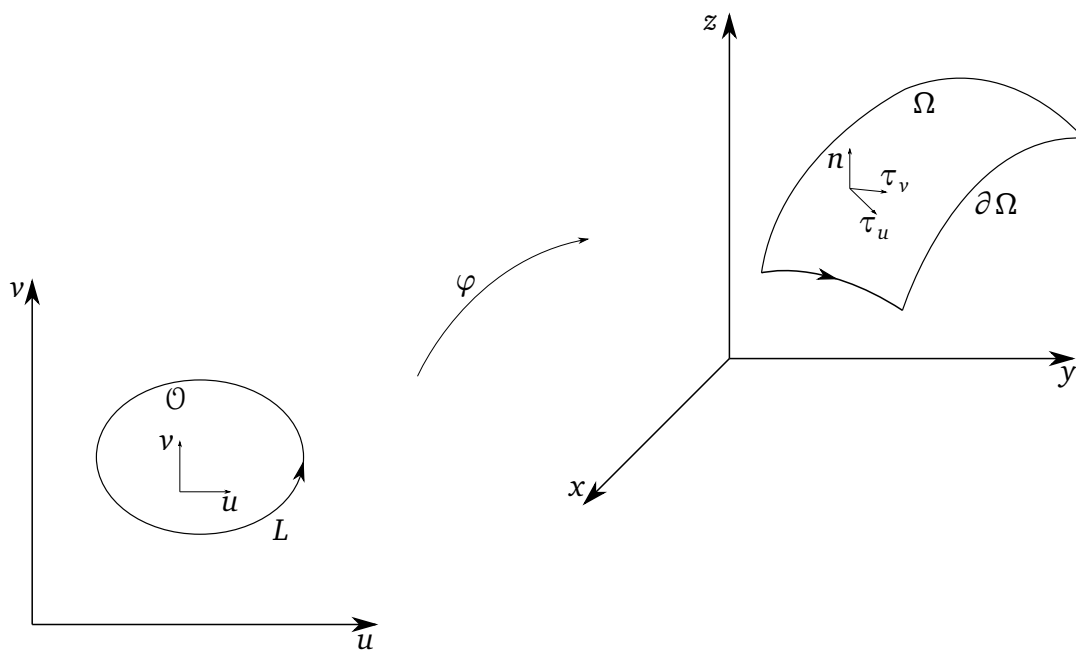


Рис. 3.3: Формула Стокса.

**Замечание.** Формула "аддитивна" по фигуре.

*Доказательство.* Доказательство целиком аналогично доказательству аддитивности формулы Грина по фигуре. ■

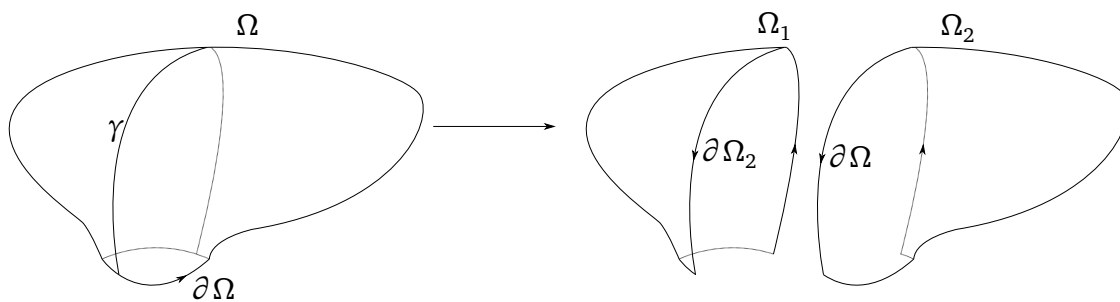


Рис. 3.4: Аддитивность формулы Стокса по фигуре.

### 3.3 Формула Гаусса-Остроградского

**Замечание.** В данном контексте рассматриваются

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}.$$

Здесь  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  – замкнутое множество,  $\partial\Omega$  – кусочно-гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$ ,  $f, F \in C^1(\Omega)$ . Рассматриваем внешнюю сторону фигуры.

**Теорема 3.3.1.** (Формула Гаусса-Остроградского)

Пусть  $R: U(V) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R \in C^1(U(V))$ . Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} R dx dy.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\Omega} dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{\Omega} R(x, y, F(x, y)) dx dy - \iint_{\Omega} R(x, y, f(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{\Gamma_F} R dx dy + \iint_{\Gamma_f} R dx dy + \iint_C R dx dy \\ &= \iint_{\partial V^+} R dx dy. \end{aligned}$$

■

**Следствие 3.3.2.** В условиях формулы Гаусса-Остроградского, верно

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial V^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

**Следствие 3.3.3.** Пусть  $l$  – фиксированное направление в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} f \cdot \langle l, n_0 \rangle dS.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dx dy dz &= \iiint_V (l_1 \frac{\partial f}{\partial x} + l_2 \frac{\partial f}{\partial y} + l_3 \frac{\partial f}{\partial z}) dx dy dz \\ &= \iint_{\partial V^+} f l_1 dy dz + f l_2 dz dx + f l_3 dx dy = \iint_{\partial V^+} f \cdot \langle l, n_0 \rangle dS. \end{aligned}$$

■

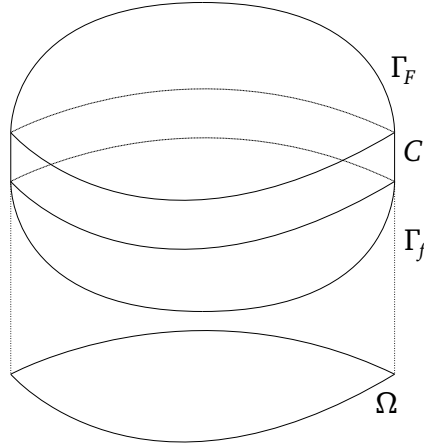


Рис. 3.5: Формула Гаусса-Остроградского.

### 3.4 Примеры дифференциальных операторов

**Определение.** Пусть  $C^1 \ni A = \langle P, Q, R \rangle$  – векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда *дивергенцией*  $A$  называется

$$\operatorname{div} A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

**Замечание.** (Бескоординатное определение дивергенции)  
Дивергенцию поля в точке можно вычислять так:

$$\operatorname{div} A(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iiint_{B(a,r)} \operatorname{div} A \, dx dy dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iint_{S(a,r)} \langle A, n_0 \rangle \, dS.$$

Последнюю формулу можно интерпретировать как величину потока, проходящего через сферу с центром в данной точке достаточно малого радиуса. То есть, дивергенция характеризует точку как “источник” поля.

**Определение.** Пусть  $C^1 \ni A = \langle P, Q, R \rangle$  – векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда *ротором*  $A$  называется

$$\operatorname{rot} A \stackrel{\text{def}}{=} \langle R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y \rangle.$$

**Замечание.**  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{O}$  – односвязная область,  $\operatorname{rot} V = 0$ . Тогда  $V$  потенциально.

**Замечание.**  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{O}$  – односвязная область,  $\operatorname{rot} V = 0$ . Тогда

- Если  $\gamma$  – петля, то

$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = 0.$$



- Если  $\gamma$  – путь, то интеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

зависит только от начальной и конечной точек пути.

**Замечание.** Если  $\mathcal{O}$  не односвязна, но  $\operatorname{rot} V = 0$ , то все равно интеграл по пути не зависит от самого пути.

*Доказательство.* Зафиксируем две петли  $\gamma_1, \gamma_2$  (как на рисунке). Обозначим фигуру, границами которой являются  $\gamma_1, \gamma_2$ . Тогда по формуле Стокса:

$$0 = \iint_{\Omega} \operatorname{rot} V = \int_{\gamma_1} V - \int_{\gamma_2} V.$$

Минус появился потому, что  $\gamma_2$  не согласован по ориентации с  $\gamma_1$ . ■

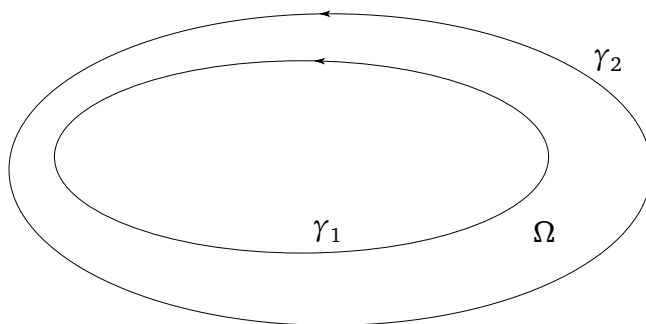


Рис. 3.6: Равенство интегралов вдоль гомотопных путей.

*Если в поле нет источников, то откуда может взяться поток через поверхность?*

**Замечание.**  $\operatorname{div} V = 0$ , тогда для любой “разумной” фигуры  $\Omega$  выполнено

$$\iint_{\partial\Omega} \langle V, n_0 \rangle dS = 0.$$

**Замечание.** Пусть  $U_1, U_2$  – поверхности с одной границей  $\partial U$ . Тогда

$$\iint_{U_1^+} \langle V, n_0 \rangle dS = \iint_{U_2^+} \langle V, n_0 \rangle dS.$$

*Доказательство.* Пусть  $V$  – фигура, ограниченная поверхностями  $U_1, U_2$ . Тогда

$$0 = \iint_{\partial V} \langle V, n_0 \rangle dS = \iint_{U_1^+} \langle V, n_0 \rangle dS + \iint_{U_2^-} \langle V, n_0 \rangle dS.$$

■

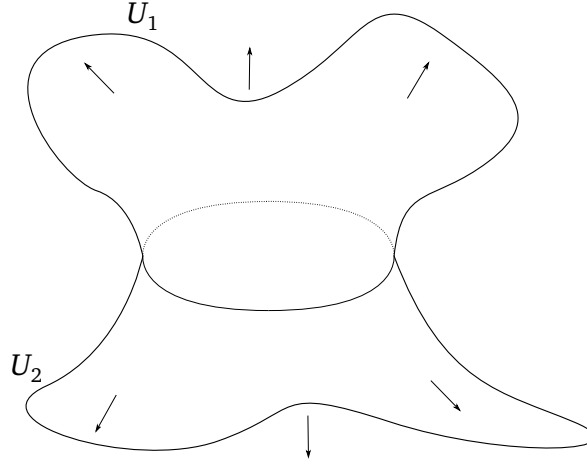


Рис. 3.7: Равенство интегралов по поверхностям с общей границей.

**Определение.** Поле  $V$  называется *соленоидальным* в  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , если у него существует векторный потенциал, то есть  $\exists B$  – векторное поле такое, что  $\text{rot } B = V$  на  $\Omega$ .

**Теорема 3.4.1.** (Критерий соленоидальности поля)

$A$  соленоидально в  $\Omega \iff \text{div } A = 0$  на  $\Omega$

*Доказательство.*

$\implies \text{div } A = \text{div rot } B = 0$ , последнее равенство проверяется непосредственно.

$\impliedby$  Пусть  $A = (A_1, A_2, A_3)$ . Будем искать  $B$  в виде  $(P, Q, 0)$ . Зафиксируем точку  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  и параллелепипед, содержащий эту точку и лежащий целиком в  $\Omega$ . Тогда справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} R'_y - Q'_z = A_1 \\ P'_z - R'_x = A_2 \\ Q'_x - P'_y = A_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -Q'_z = A_1 \\ P'_z = A_2 \\ Q'_x - P'_y = A_3 \end{cases}.$$

Восстановим из второго уравнения  $P$ :

$$P(x, y, z) = \int_{z_0}^z A_2(x, y, t) dt + \psi(x, y).$$

Здесь мы пользуемся наличием параллелепипеда (по  $z$ ) вокруг нашей точки. Выберем  $\psi(x, y) = 0$ . Аналогично восстановим из первого уравнения  $Q$ :

$$Q(x, y, z) = - \int_{z_0}^z A_1(x, y, t) dt + \varphi(x, y).$$

Подставим результаты в третье уравнение. Будем считать, что  $A \in C^1$ , что позволит нам воспользоваться правилом Лейбница дифференцирования по параметру:

$$-\int_{z_0}^z \frac{\partial A_1}{\partial x} dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^z \frac{\partial A_2}{\partial y} dz = A_3.$$

Пользуемся условием:

$$\varphi'_x + \int_{z_0}^z \frac{\partial A}{\partial z} dz = A_3.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) + A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) &= A_3(x, y, z) \implies \varphi'_x(x, y) = A_3(x, y, z_0) \\ \implies \varphi(x, y) &= \int_{x_0}^x A_3(t, y, z_0) dt. \end{aligned}$$

■

## Глава 4

# Интегралы, зависящие от параметра

### 4.1 Несобственный интеграл

**Определение.** Пусть  $f : [a, b) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  локально суммируема на  $[a, b)$ , то есть  $\forall a \leq B < b$   $f$  суммируема на  $[a, B]$ . Тогда несобственным интегралом  $f$  на  $[a, b)$  называется

$$\int_a^{\rightarrow b} f \, d\lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f \, d\lambda_1.$$

**Теорема 4.1.1.**  $\int_a^{\rightarrow b} f \, d\lambda_1$  сходится абсолютно тогда и только тогда, когда  $f$  суммируема на  $[a, b)$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Интеграл неотрицательной функции монотонен по множеству, поэтому:

$$\int_a^B |f| \, d\lambda_1 \leq \int_{[a, b)} |f| \, d\lambda_1 < +\infty.$$

По этой же причине  $\int_a^B |f| \, d\lambda_1$  монотонен по  $B$ . Поэтому существует предел

$$\lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B |f| \, d\lambda \leq \int_{[a, b)} |f| \, d\lambda_1 < +\infty.$$

$\Rightarrow$  По непрерывности меры  $E \mapsto \int_E |f| \, d\lambda_1$  снизу имеем

$$+\infty > \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B |f| \, d\lambda_1 = \int_{[a, b)} |f| \, d\lambda_1.$$

■

## 4.2 Действия над интегралами с параметром

Далее общий контекст такой:  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $X$  – пространство с мерой,  $Y$  – метризуемое пространство,  $\forall y_0$   $f(x, y_0)$  суммируема на  $X$ .

**Теорема 4.2.1.** (О предельном переходе при равномерной сходимости)

Пусть  $\mu X < +\infty$ ,  $y_0$  – предельная точка  $Y$ ,  $\exists \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ :  $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$  при  $y \rightarrow y_0$ . Тогда  $\varphi$  суммируема на  $X$  и более того

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu = \int_X \varphi(x) d\mu.$$

*Доказательство.*

- Из равномерной сходимости следует, что

$$\exists U(y_0): \forall x \forall y \in U |f(x, y) - \varphi(x)| < 1.$$

Тогда  $\varphi$  суммируема:

$$\int_X |\varphi| d\mu \leq \int_X (|f| + 1) d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \mu X < +\infty.$$

- Проверим, что интеграл сходится туда, куда мы ожидаем:

$$\left| \int_X f d\mu - \int_X \varphi d\mu \right| \leq \int_X |f - \varphi| d\mu \leq \sup_X |f - \varphi| \cdot \mu X \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

■

**Определение.**  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $y_0$  – предельная точка  $Y$ . Тогда  $f$  удовлетворяет условию  $L$ -локальности в точке  $y_0$  ( $f \in L_{loc}(y_0)$ ), если  $\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – суммируемая на  $X$ ,  $\exists U(y_0)$ : для почти всех  $x \in X$ ,  $\forall y \in U(y_0) \cap Y$   $|f(x, y)| \leq g(x)$ .

**Теорема 4.2.2.** (О предельном переходе при условии  $L_{loc}$ )

Пусть  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$  при почти всех  $x$ ,  $f \in L_{loc}(y_0)$ . Тогда  $\varphi$  суммируема на  $X$  и более того

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu = \int_X \varphi d\mu.$$

*Доказательство.*

- Будем доказывать по Гейне. Пусть  $g$  – функция из условия  $L_{loc}$  для  $f$ . Тогда вдоль любой последовательности  $y_n \rightarrow y_0$ :

$$|f(x, y_n)| \leq g(x).$$

Что при предельном переходе по  $n \rightarrow \infty$  влечет

$$|\varphi(x)| \leq g(x).$$

Отсюда получаем, что  $\varphi$  суммируема на  $X$ .

- Положим  $f_n = f(x, y_n)$ . Имеем  $f_n \rightarrow \varphi$ ,  $|f_n| \leq g$ ,  $g$  суммируема. Применяя теорему Лебега о мажорированной сходимости в случае сходимости почти везде, получаем:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu.$$

■

**Следствие 4.2.3.** (Теорема Лебега о непрерывности интеграла по параметру)

В условиях предыдущей теоремы, если  $f$  непрерывно по  $y$  в точке  $y_0$ , то функция

$$J(y) = \int_X f(x, y) \, d\mu(x).$$

непрерывна в  $y_0$ .

**Пример.**  $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x} \, dx$  непрерывна по  $y$  на  $(0, +\infty)$ .

*Доказательство.* Проверим условие  $\Gamma \in L_{loc}(y_0)$ . Пусть  $0 < \alpha < y_0 < \beta < +\infty$ . Тогда

$$\forall x \in (0, +\infty) \quad \forall y \in (\alpha, \beta) \quad |x^{y-1} e^{-x}| \leq g(x) = \begin{cases} x^{\beta-1} e^{-x}, & x > 1 \\ x^{\alpha-1} e^{-x}, & x \leq 1 \end{cases}.$$

$g(x)$ , очевидно, суммируема. ■

**Теорема 4.2.4.** (Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру)

Пусть  $Y \subset \mathbb{R}$  – промежуток,  $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\forall y \, f(x, y)$  суммируема на  $X$ ,  $y_0 \in Y$ ,  $J(y) = \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$ . Кроме того:

- Для почти всех  $x$ ,  $\forall y \in Y \, \exists f'_y(x, y)$ .
- $f'_y(x, y) \in L_{loc}(y_0)$ .

Тогда  $J(y)$  дифференцируема в  $y_0$ , причем

$$J'(y) = \int_X f'_y(x, y) \, d\mu(x).$$

*Доказательство.* Положим

$$F(x, h) = \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} \rightarrow f'_y(x, y_0).$$

Тогда выражение для производной  $J(y)$  можно записать так:

$$\frac{J(y_0 + h) - J(y_0)}{h} = \int_X F(x, h) d\mu(x).$$

Проверим, что  $F(x, h) \in L_{loc}(y_0)$ :

$$|F(x, h)| = \left| f'_y(x, y + \theta h) \cdot h \cdot h^{-1} \right| = \left| f'_y(x, y + \theta h) \right|.$$

Последнее выражение мажорируется суммируемой функцией по условию  $f'_y \in L_{loc}$ . Воспользуемся теперь предыдущей теоремой:

$$\frac{J(y_0 + h) - J(y_0)}{h} = \int_X F(x, h) d\mu(x) \rightarrow \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x).$$

■

**Пример.**  $\Gamma(y) \in C^\infty$ .

*Доказательство.* Проверим, что  $\Gamma(y)$  дифференцируема. Сначала формально найдем производную по  $y$ :

$$\Gamma'(y_0) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} \ln x e^{-x} dx.$$

Проверим условие  $L_{loc}$ : пусть  $0 < \alpha < y_0 < \beta < +\infty$ . Тогда

$$|x^{y-1} \ln x e^{-x}| \leq g(x) = \begin{cases} x^{\beta-1} \ln x e^{-x}, & x \geq 1 \\ x^{\alpha-1} |\ln x| e^{-x}, & x < 1 \end{cases}.$$

Понятно, что  $g(x)$  суммируема. Более того, она была бы суммируема, даже если бы логарифм был не в первой, а в любой степени, не меньшей единицы. Этот факт сразу даёт аналогичный способ доказательства того факта, что  $\Gamma \in C^k$  для любого  $k$ , откуда получается, что  $\Gamma \in C^\infty$ . ■

**Пример.** (Интеграл Дирихле)

Пусть  $J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ . Тогда  $J(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$ .

*Доказательство.* Продифференцируем  $J(y)$ :

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} -e^{-xy} \sin x dx = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Обоснуем это действие. Для этого проверим,  $L_{loc}(y_0)$  для  $0 < \alpha < y_0 < \beta < +\infty$ :

$$|e^{-xy} \sin x| \leq e^{-\alpha x}.$$

Мы получили, что  $J(y) = C - \arctan y$ . Чтобы найти константу, найдем предел

$$\lim_{y \rightarrow \infty} J(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \left( e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0.$$

Чтобы обосновать предельный переход под знаком интеграла, проверим  $L_{loc}$ :

$$\left| e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-\alpha x}.$$

Таким образом, имеем равенство:

$$C - \frac{\pi}{2} = 0 \implies C = \frac{\pi}{2}.$$

■

### 4.3 Действия над несобственными интегралами с параметром

Здесь контекст такой:  $J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) d\mu(x)$ ,  $f : \langle a, b \rangle \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f$  локально суммируема.

**Определение.** Интеграл  $J(y)$  равномерно сходится на  $Y$ , если

$$\int_a^t f(x, y) dx \rightrightarrows J(y), \quad t \rightarrow b_-.$$

Или, что то же самое:

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_a^t f(x, y) dx - J(y) \right| = \sup_{y \in Y} \left| \int_t^{\rightarrow b} f(x, y) dx \right| \xrightarrow{t \rightarrow b_-} 0.$$

**Теорема 4.3.1.** (Признак Вейерштрасса)

Пусть  $\forall x, y \in \langle a, b \rangle \times Y$   $|f(x, y)| \leq g(x)$ , причем  $g(x)$  суммируема на  $X$ . Тогда  $J(y)$  сходится равномерно.

*Доказательство.*

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx \leq \int_a^{\rightarrow b} |g(x)| dx = \int_a^b |g(x)| dx < +\infty.$$

■



Обобщим определение равномерной сходимости.

**Определение.** Пусть  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq X$ ,  $y_0$  – предельная точка  $Y$ .  $X$ ,  $Y$  – хаусдорфовы топологические пространства. Тогда  $f$  равномерно сходится к  $\varphi$  при  $y \rightarrow y_0$  на  $E$ , если

$$\sup_{x \in E} |f(x, y) - \varphi(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

**Замечание.** В определении изменилось только то, что раньше было  $Y = \mathbb{N}$ , и  $y_0 = +\infty$ . Заметим, что ни в каких теоремах, связанных с равномерной сходимостью, мы на самом деле не пользовались конкретно  $Y = \mathbb{N}$ . Поэтому все соответствующие теоремы остаются справедливыми и в новой формулировке.

**Теорема 4.3.2.** (О перестановке предельных переходов)

Пусть  $f: T \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T \subseteq \tilde{T}$ ,  $Y \subseteq \tilde{Y}$  – метризуемые пространства,  $t_0$  – предельная точка  $T$ ,  $y_0$  – предельная точка  $Y$ . Кроме того:

- $\forall t \in T \exists +\infty > L(t) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(t, y).$
- $\forall y \in Y \exists +\infty > J(y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, y).$
- Хотя бы один из этих пределов равномерный.

Тогда существуют и конечны пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} L(t) = \lim_{y \rightarrow y_0} J(y).$$

**Теорема 4.3.3.** (О предельном переходе в несобственном интеграле)

Пусть  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y \subseteq \tilde{Y}$ ,  $y_0 \in \tilde{Y}$  – предельная точка  $Y$ . Кроме того:

1. При почти всех  $x \exists f_0(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$

2.  $f$  локально суммируема и выполняется:

$$\forall t < b \int_a^t f(x, y) dx = \int_a^t f_0(x) dx.$$

3.  $\forall y \exists J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx$ , причем сходится равномерно на  $Y$ .

Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^{\rightarrow b} f_0(x) dx.$$

**Доказательство.** Это в точности предыдущая теорема с точностью до замен:

- $T = (a, b)$ ,  $\tilde{T} = \mathbb{R}$ ,  $t_0 = b$ ,  $Y = Y$ ,  $y_0 = y_0$ .

- $f(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx.$
- $L(t) = \int_a^t f_0(x) dx.$
- $J(y) = J(y)$ , равномерен именно этот предел.

■

**Следствие 4.3.4.** Если в последней теореме заменить первое условие на условие  $y \mapsto f(x, y) \in C(y_0)$ , то получится теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру.

**Теорема 4.3.5.** (Об интегрировании несобственного интеграла по параметру) Пусть

1.  $f: (a, b) \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – суммируемая на множествах вида  $(a, t) \times Y$  при  $t < b$  функция.
2.  $\mu Y < +\infty$ .
3.  $J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx$  сходится равномерно.

Тогда

1.  $J(y)$  суммируема на  $Y$ .
2. Сходится интеграл

$$\int_a^{\rightarrow b} \int_Y f(x, y) dy dx.$$

3. Выполняется

$$\int_a^{\rightarrow b} \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx dy.$$

*Доказательство.*

1. Положим

$$J_t(y) = \int_a^t f(x, y) dx.$$

По теореме Фубини,  $J_t$  суммируема на  $Y$ . Из равномерной сходимости  $J(y)$  следует, что при  $t$  достаточно близких к  $b$  выполняется:

$$|J(y) - J_t(y)| = \left| \int_t^{\rightarrow b} f(x, y) dx \right| \leq 1.$$

Отсюда сразу следует суммируемость  $J(y)$  на  $Y$ :

$$\int_Y |J(y)| dy \leq \int_Y |J_t(y)| + \mu Y < +\infty.$$

2. Функция  $x \mapsto \int_Y f(x, y) dy$  суммируема на  $(a, b)$  по теореме Фубини. По той же теореме Фубини, справедливо:

$$\int_a^t \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_a^t f(x, y) dx dy = \int_Y \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx dy - \int_Y \int_t^{\rightarrow b} f(x, y) dx dy.$$

Последнее выражение имеет смысл (а вместе с этим, первый интеграл существует) потому, что:

(а) Интеграл

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx = J(y).$$

Является суммируемой на  $Y$  функцией.

(b) Интеграл

$$\int_t^{\rightarrow b} f(x, y) dx = J(y) - \int_a^t f(x, y) dx.$$

Является суммируемой на  $Y$  функцией.

3. Проверим последние 2 пункта теоремы:

$$\left| \int_a^t \int_Y f - \int_Y \int_a^{\rightarrow b} f \right| \leq \left| \int_Y \int_t^{\rightarrow b} f \right| \leq \sup_{y \in Y} \left| \int_t^{\rightarrow b} f \right| \cdot \mu Y \xrightarrow{t \rightarrow b_-} 0.$$

■

**Теорема 4.3.6.** (Правило Лейбница для несобственного интеграла)

Пусть

$$1. f : [a, b) \times \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \in C.$$

$$2. \forall y J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx \text{ сходится.}$$

$$3. \forall x \forall y \exists f'_y(x, y), f'_y \in C.$$

$$4. I(y) = \int_a^{\rightarrow b} f'_y(x, y) dx \text{ сходится равномерно.}$$

Тогда

$$1. J(y) \in C^1(\langle c, d \rangle).$$

$$2. J'(y) = I(y).$$

*Доказательство.*

- По теореме о непрерывности несобственного интеграла  $I(y)$  непрерывно зависит от  $y$ .
- Зафиксируем  $s_0, s \in \langle c, d \rangle$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^s I(y) dy &= \int_{s_0}^s \int_a^{\rightarrow b} f'_y dx dy = \int_a^{\rightarrow b} \int_{s_0}^s f'_y(x, y) dy dx \\ &= \int_a^{\rightarrow b} (f(x, s) - f(x, s_0)) dx = J(s) - J(0). \end{aligned}$$

Первый интеграл существует потому, что  $I$  непрерывна и  $\mu Y < +\infty$ . Множества вида  $[a, t] \times [s_0, s]$  компактны.  $f'_y$  непрерывна, поэтому суммируема на таких множествах. Поэтому работает предыдущая теорема. Мы получили, что  $J(s)$  дифференцируема. Кроме того, по теореме Барроу, последнее равенство означает, что  $J'(s) = I(s)$ .

■

# Глава 5

## Ряды Фурье

### 5.1 Пространство $L^p$

**Определение.** Комплексное отображение  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  назовем *измеримым*, если  $f(x) = g(x) + ih(x)$ ,  $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$ , причем  $g, h$  измеримы.

**Определение.** Аналогично определим *суммируемые* комплексные отображения.

**Определение.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = g(x) + ih(x)$ ,  $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда определим интеграл:

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E g \, d\mu + i \int_E h \, d\mu.$$

**Замечание.**

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

**Теорема 5.1.1.** (Интегральное неравенство Гёльдера)

Пусть  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$  – измеримые почти везде заданные функции. Тогда

$$\int_X |f g| \, d\mu \leq \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Теорема 5.1.2.** (Интегральное неравенство Минковского)

Пусть  $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p \geq 1$ , тогда

$$\left( \int_X |f + g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Определение.** Пусть  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой. Тогда для  $1 \leq p < +\infty$  положим

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{R} \mid f \text{ измерима, } \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

**Замечание.**  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$  – линейное пространство.

**Определение.** Зададим на  $\mathcal{L}^p$  отношение эквивалентности:  $f \sim g$  тогда и только тогда, когда  $f = g$  почти везде. Положим

$$L^p(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^p(X, \mu) / \sim.$$

**Определение.** В  $L^p$  заведем норму:  $\| [f] \| \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  задана почти везде. Тогда *существенным супремумом*  $f$  называется

$$\operatorname{ess\,sup}_X f \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq A \text{ п.в.} \}.$$

**Теорема 5.1.3.** (Свойства существенного супремума)

- $\operatorname{ess\,sup}_X f \leq \sup_X f.$
- $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_X f$  при почти всех  $x.$
- $\left| \int_X f g d\mu \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_X |f| \cdot \int_X |g|.$

*Доказательство.*

- Супремум есть в множестве, по которому берется инфимум в определении существенного супремума.
- Пусть  $M = \operatorname{ess\,sup}_X f.$  Тогда по определению инфимума:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) \leq M + \frac{1}{n}$$

при почти всех  $x.$  Объединяем все эти неравенства (их счетное число) и получаем требуемое.

- По предыдущему пункту  $f$  может быть больше  $\operatorname{ess\,sup}_X f$  только на множестве  $e$  меры 0. Поэтому

$$\left| \int_X f g d\mu \right| \leq \int_X |f g| d\mu \leq \underbrace{\int_e |f g| d\mu}_{=0} + \int_{X \setminus e} |f g| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_X f \cdot \int_X |g| d\mu.$$

■

**Определение.** Для  $p = \infty$ :

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{R} \mid f \text{ измерима, } \operatorname{ess\,sup}_X f < +\infty \right\}.$$

**Замечание.**  $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$  – линейное пространство.

**Определение.** Пространство  $L^\infty$  зададим аналогично конечному случаю. Нормой на этом пространстве положим  $\text{ess sup}$ .

**Теорема 5.1.4.** (О вложении пространств  $L^p$ )

Пусть  $\mu(X) < +\infty$ ,  $1 \leq s < r \leq +\infty$ . Тогда

- $L^r(X, \mu) \subset L^s(X, \mu)$ .
- $\|f\|_s \leq \mu(X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$ .

*Доказательство.*

- Первый пункт очевидным образом следует из второго.
- Пусть  $r = +\infty$ . Тогда

$$\|f\|_s = \left( \int_X |f|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left( \int_X \|f\|_\infty^s \right)^{\frac{1}{s}} = \|f\|_\infty \cdot \mu(X)^{\frac{1}{s}}.$$

Неравенство выполнено потому, что функция почти везде не превосходит свой существенный супремум. Пусть теперь  $r < +\infty$ :

$$\|f\|_s^s = \int_X |f|^s \cdot 1 \, d\mu \underset{\text{Гельдер}}{\leq} \left( \int_X (|f|^s)^{\frac{r}{s}} \right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left( \int_X 1 \right)^{\frac{r-s}{s}} = \left( \int_X |f|^r \right)^{\frac{s}{r}} \cdot \mu(X)^{1 - \frac{s}{r}} = \|f\|_r^s \cdot \mu(X)^{1 - \frac{s}{r}}.$$

■

**Следствие 5.1.5.** Пусть  $\mu(E) < +\infty$ ,  $1 \leq s < r \leq +\infty$ ,  $f_n, f \in L^s$ ,  $f_n \xrightarrow{L^r} f$ , тогда  $f_n \xrightarrow{L^s} f$ .

**Теорема 5.1.6.** (О сходимости в  $L^p$  и по мере)

Пусть  $1 \leq r < +\infty$ ,  $f_n, f \in L^p$ , тогда

- $f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$ .
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , либо  $f_n \rightarrow f$  почти везде, тогда если  $\exists g \in L^p$ :  $|f_n| \leq g$ , то  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ .

*Доказательство.*

- Обозначим

$$X_n(\varepsilon) = X(|f_n - f| \geq \varepsilon).$$

Тогда на  $X_n(\varepsilon)$  выполнено:

$$1 \leq \frac{|f_n - f|^p}{\varepsilon^p}.$$

Проверим сходимость по мере:

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 \, d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p \, d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- Из сходимости по мере имеем сходимость почти везде вдоль подпоследовательности:

$$\exists n_k: f_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$$

при почти всех  $x$ . Поскольку  $f_{n_k} \rightarrow f$ ,  $|f_{n_k}| \leq g$ , верно:

$$|f| \leq g.$$

Поэтому:

$$|f_n - f|^p \leq (2g)^p.$$

Интеграл последней функции конечен, так как  $g \in L^p$ . В таком случае по теореме Лебега заключаем

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

■

**Замечание.**  $L^\infty$  – полное метрическое пространство.

**Теорема 5.1.7.** (Полнота пространств  $L^p$ )

$\forall 1 \leq p \leq \infty$   $L^p$  полно.

*Доказательство.* Докажем утверждение для конечных  $p$ .

- Пусть  $f_n$  – фундаментальная в  $L^p$  последовательность, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n, k > N_\varepsilon \|f_n - f_k\|_p < \varepsilon.$$

Пользуясь этим фактом, построим последовательности индексов  $k_i, n_i$  следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{2^i} \exists N_i: k_i > n_i > N_i \implies \|f_{n_i} - f_{k_i}\|_p < \varepsilon.$$

Выделим из  $n_i$  возрастающую последовательность:

$$n_k = \max_{1 \leq i \leq k} n_i.$$

Тогда верно неравенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 1.$$

- Зафиксируем функции  $f_i$  – представители соответствующих классов эквивалентности в  $\mathcal{L}^p$ . Положим

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in [0, +\infty].$$



Оценим частичные суммы ряда:

$$\|S_N\|_p \underset{\Delta}{\leq} \sum_{i=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1.$$

Из этой оценки следует:

$$\int_X S_N^p \leq 1.$$

Из чего по теореме Фату получаем:

$$\int_X S^p \leq 1.$$

Поэтому  $S^p$  суммируема, а значит,  $S(x)$  конечна почти везде.

- Пусть

$$f(x) = f_{n_1} + \sum_{k \geq 1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

При этом

$$\sum_{1 \leq k \leq m-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_m}.$$

Помня про сходимость соответствующего ряда, получаем

$$f_{n_m} \rightarrow f$$

при почти всех  $x$ .

- Проверим наконец сходимость последовательности. Из равномерной сходимости имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m = n_k > N \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Поэтому справедливо:

$$\varepsilon^p > \|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_{n_k} - f_n|^p d\mu.$$

Отсюда по теореме Фату получаем:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

■

**Определение.** Пусть  $X$  – топологическое пространство, тогда множество  $A \subset X$  называется всюду плотным, если  $\text{Cl}(A) = X$ . Иначе говоря,  $\text{Int}(X \setminus A) = \emptyset$ , или  $\forall x \in X \forall U(x) U(x) \cap A \neq \emptyset$ .

**Определение.** Множество всех ступенчатых функций  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  обозначим  $St(X)$ .

**Лемма 5.1.8.** Пусть  $1 \leq p \leq +\infty$ , тогда множество  $St(X)$  плотно в  $L^p$ .

*Доказательство.*

- Пусть  $p = +\infty$ . Подменим  $f \in L^\infty$  на множестве меры ноль так, чтобы

$$\operatorname{ess\,sup}_X f = \sup_X f.$$

Тогда по теореме об аппроксимации существуют последовательности ступенчатых функций  $\varphi_n, \psi_n$  такие, что

$$\varphi_n \rightrightarrows f_+, \quad \psi_n \rightrightarrows f_-.$$

Из равномерной сходимости получаем

$$\|\varphi_n - f_+\|_\infty \rightarrow 0, \quad \|\psi_n - f_-\|_\infty \rightarrow 0.$$

- Пусть теперь  $p$  конечно. Рассмотрим неотрицательную  $f \in L^p$ . По теореме об аппроксимации

$$\exists \varphi_n \rightarrow f,$$

причем  $\varphi_n$  возрастают с номером  $n$  и неотрицательны. Проверим, что эта последовательность ступенчатых функций аппроксимирует  $f$  в смысле  $L^p$ . Для этого заметим, что поскольку  $\varphi_n \leq f$ , верно

$$|\varphi_n - f|^p \leq |f|^p.$$

При этом,  $|f|^p$  суммируема. Значит, по теореме Лебега о мажорированной сходимости справедливо:

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p d\mu \rightarrow 0.$$

■

**Определение.** (Четвертая аксиома отделимости)

Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нем любые два замкнутые непересекающиеся множества отделимы, причем любое одноточечное множество замкнуто.

**Лемма 5.1.9.** (Урысон)

Пусть  $X$  – нормальное топологическое пространство,  $F_0, F_1$  – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует непрерывная функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что

- $0 \leq f \leq 1$ .
- $f|_{F_0} = 0$ .

- $f|_{F_1} = 1$ .

Доказательство.

- Переформулируем определение нормальности с точностью до дополнения: для любого замкнутого  $F$  и открытого  $G$  таких, что  $F \subset G$ , верно

$$\exists U(F): U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G.$$

- Из нормальности и дизъюнктности  $F_0, F_1$  очевидно включение

$$F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \overline{U(F_0)} \subset \underbrace{F_1^C}_{G_1}.$$

Повторим, заменив  $F_0$  на  $\overline{G_0}$ :

$$\overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{1/2}} \subset \overline{U(\overline{G_0})} \subset G_1.$$

Аналогичным образом между  $\overline{G_0}$  и  $G_{1/2}$ ,  $\overline{G_{1/2}}$  и  $G_1$  получим  $G_{1/4}$  и  $G_{3/4}$  соответственно. Продолжая этот процесс, определим  $G_p$  для всех двоично-рациональных  $p$ .

- Пусть наконец

$$f(x) = \inf \{ q \mid x \in G_q \}.$$

Из определения  $f$  сразу следует

$$f|_{F_0} = 0, \quad f|_{F_1} = 1.$$

Осталось проверить непрерывность. Для этого проверим, что открыты все множества вида

$$f^{-1}(-\infty, s)$$

И замкнуты

$$f^{-1}(-\infty, s].$$

Тогда будет выполнено топологическое определение непрерывности для базы топологии, состоящей из интервалов:

$$f^{-1}(a, b) = f^{-1}(-\infty, b) \setminus f^{-1}(-\infty, a] - \text{открыто.}$$

- Проверим открытость  $f^{-1}(-\infty, s)$ . Для этого достаточно показать, что

$$f^{-1}(-\infty, s) = \bigcup_{\substack{q < s \\ q \text{ д.в. рац.}}} G_q.$$

Действительно, тогда  $f^{-1}(-\infty, s)$  открыто как объединение открытых множеств. Проверим равенство:

$$\supset x \in G_q \implies f(x) \leq q < s.$$

$\subset f(x) < s \implies f(x) < q_1 < s$ ,  $q$  – двоично-рациональное. Поскольку  $G_p$  монотонны по  $p$  и  $f(x) < q_1$ , получаем, что  $x \in G_{q_1}$ .

– Проверим замкнутость  $f^{-1}(-\infty, s]$ . Для этого покажем

$$f^{-1}(-\infty, s] = \bigcap_{\substack{q > s \\ q \text{ дв. рац.}}} G_q = \bigcap_{\substack{q > s \\ q \text{ дв. рац.}}} \overline{G_q}.$$

Последнее выражение – пересечение замкнутых множеств, замкнуто. Проверим первое равенство:

$\subset f(x) \leq s \implies \inf \{q \mid x \in G_q\} \leq s$ . Поэтому

$$\forall q > s \ x \in G_q \implies x \in \bigcap_{q > s} G_q.$$

$\supset$  Раз  $x \in G_q$  для любого двоично-рационального  $q > s$ , получаем

$$f(x) = \inf \{q \mid x \in G_q\} \leq s.$$

Проверим второе равенство:

$\subset$  Очевидно.

$\supset$  Зафиксируем двоично-рациональное  $r$  такое, что

$$s < r < s.$$

Тогда по построению

$$\overline{G_r} \subset G_q.$$

Отсюда получаем

$$\bigcap_{q > s} G_q \supset \bigcap_{q > r > s} \overline{G_r} \supset \bigcap_{r > s} \overline{G_r}.$$

■

**Определение.** Финитной функцией в  $\mathbb{R}^m$  называется функция  $f$  такая, что

$$\exists B(a, r): f|_{\overline{B}} = 0.$$

По умолчанию,  $f$  непрерывна. Множество непрерывных финитных функций обозначается  $C_0(\mathbb{R}^m)$ .

**Теорема 5.1.10.**  $C_0(\mathbb{R}^m)$  плотно в  $L^p(E, \lambda_m)$  при  $1 \leq p < +\infty$ ,  $E \in \mathfrak{M}^m$ .

*Доказательство.*

- Пусть  $g \in L^p(E, \lambda_m)$ . Нам нужно показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists f \in C_0(\mathbb{R}^m): \|g - f\|_E \|_{L^p(E, \lambda_m)} < \varepsilon.$$

Заменяем  $g$  на 0 на дополнении  $E$ . Это никак не скажется на норме в  $L^p(E, \lambda_m)$ .

Тогда

$$\|g - f\|_E \|_{L^p(E, \lambda_m)} \leq \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)}.$$

Сократим запись:  $\| \cdot \|_{L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)}$  обозначим как  $\| \cdot \|_p$ . Осталось построить функцию  $f$  такую, чтобы выполнялось

$$\|g - f\|_p < \varepsilon.$$

- Пользуясь теоремой об аппроксимации, приблизим срезки  $g$  ступенчатыми функциями:

$$\exists h_n: h_n \rightarrow g_+.$$

Имеем

$$h_n \leq g, \quad g \in L^p.$$

Отсюда по теореме о сходимости в  $L^p$  и по мере

$$\exists h: \|h - g_+\|_p < \varepsilon.$$

Пусть

$$h = \sum_k c_k \chi_{A_k}.$$

Приблизим характеристические функции ступенчатыми.  $A_k$  измеримы, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F_k \subset A_k \subset G_k: \lambda_m(G_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon^p}{|c_k|^p k^p}.$$

Здесь  $F_k$  замкнуто,  $G_k$  открыто. По лемме Урысона  $\exists f_k$  непрерывная такая, что

$$0 \leq f_k \leq 1, \quad f|_{G_k} = 1, \quad f|_{G_k^c} = 0.$$

Положим

$$f(x) = \sum_k c_k f_k(x).$$

- Убедимся, что  $f$  действительно хорошее приближение  $g_+$ , то есть

$$\|g_+ - f\| < \varepsilon.$$

Проделав аналогичное действие для  $g_-$ , получим требуемое приближение  $g$  по метрике в  $L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$ . Для начала оценим  $\|f_k - \chi_{A_k}\|_p$ :

$$\|f_k - \chi_{A_k}\|_p = \int_{\mathbb{R}^m} |f_k - \chi_{A_k}|^p \leq \int_{G_k \setminus F_k} 1^p < \frac{\varepsilon^p}{|c_k|^p k^p}.$$

Теперь покажем требуемое:

$$\begin{aligned} \|g_+ - f\|_p &\leq \|g_+ - \sum_k c_k \chi_{A_k}\|_p + \|\sum_k c_k \cdot (\chi_{A_k} - f_k)\|_p \\ &\leq \varepsilon + \sum_k |c_k| \cdot \|f_k - \chi_{A_k}\|_p \\ &\leq \varepsilon + \sum_k |c_k| \cdot \frac{\varepsilon}{|c_k| k} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

■

**Замечание.** Условие  $p \neq +\infty$  существенно.

**Определение.** Множество непрерывных  $T$ -периодических функций будем обозначать  $\tilde{C}([0, T])$ .

**Теорема 5.1.11.** (О непрерывности сдвига)

Пусть  $f_h(x) = f(x + h)$ . Тогда

1.  $f$  равномерно непрерывна в  $\mathbb{R}^m \implies \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
2.  $1 \leq p < +\infty, f \in L^p \implies \|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
3.  $f \in \tilde{C}([0, T]) \implies \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
4.  $1 \leq p < +\infty, f \in L^p([0, T]) \implies \|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

*Доказательство.*

1. Выпишем определение равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x, |h| < \delta \quad |f(x + h) - f(x)| = |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

То есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall |h| < \delta \quad \sup_x |f_h - f| \leq \varepsilon \implies \|f_h - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

2. Пользуясь теоремой о полноте  $C_0(\mathbb{R}^m)$  в  $L^p$  подберем финитную непрерывную  $g$  такую, что:

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда:

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g_h - f_h\|_p + \|g_h - g\|_p.$$

$\|f_h - g_h\| = \|f - g\|$ , поэтому:

$$\|f_h - f\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \|g_h - g\|_p.$$

Зафиксируем шар  $B(0, R + 1)$ , содержащий носитель  $g$ . Пусть  $|h| < 1$ . Тогда

$$\|g_h - g\|_p = \|g_h - g\|_{L^p(B(0, R+1))} \leq \|g_h - g\|_\infty \cdot \left( \int_B 1 \right)^{\frac{1}{p}} = \underbrace{\|g_h - g\|_\infty}_{\rightarrow 0} \cdot \lambda_m(B)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0.$$

3. Функция непрерывна на компакте, а поэтому равномерно непрерывна на нём. Раз так, работает первый пункт теоремы.
4. Проведем доказательство, аналогичное доказательству второго пункта с точностью до оценки

$$\|g_h - g\|_p \leq \|g_h - g\|_\infty \cdot \lambda_m([0, T])^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0.$$

■