Математический анализ IIII

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Интеграл

1.1 Определение интеграла

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ *— пространство с мерой*

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна} \}.$$

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}.$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E \cap E_k.$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
- $f \leqslant g \Longrightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int g \, \mathrm{d}\mu$.

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \; \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \; \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leqslant \int f \; \mathrm{d}\mu \leqslant +\infty$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \; \mathrm{d}\mu \leqslant \int f \; \mathrm{d}\mu$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, f, g измеримы, тогда $\int g \; \mathrm{d}\mu \leqslant \int f \; \mathrm{d}\mu$.

Определение. Пусть f — измеримая функция X, причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f_+ \; \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \; \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \; \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f \cdot \chi_E \; \mathrm{d}\mu.$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

- Измеримая $f \geqslant 0 \Longrightarrow$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
- f суммируема $\Longleftrightarrow \int |f| \; \mathrm{d}\mu < +\infty$.
- Интеграл монотонен по функции, то есть для измеримых f, g верно:

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_E f \; \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \; \mathrm{d}\mu.$$

- $\displaystyle\int_E 1 \; \mathrm{d}\mu = \mu(E), \int_E 0 \; \mathrm{d}\mu = 0.$
- Пусть $\mu(E) = 0$, f измерима. Тогда

$$\int_E f \; \mathrm{d}\mu = 0.$$

- $\displaystyle\int -f\ \mathrm{d}\mu = -\int f\ \mathrm{d}\mu$, $\forall c > 0$ $\displaystyle\int c \cdot f\ \mathrm{d}\mu = c \cdot \int f\ \mathrm{d}\mu$.
- Пусть $\exists \displaystyle\int_E f\ \mathrm{d}\mu$, Тогда
$$\left|\int_E f\ \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f|\ \mathrm{d}\mu.$$
- Пусть f измерима на E, $\mu(E) < +\infty$, $\forall x \in E\ A \leqslant f(x) \leqslant B$, тогда
$$A \cdot \mu(E) \leqslant \int_E f\ \mathrm{d}\mu \leqslant B \cdot \mu(E).$$

Лемма 1.1.4. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \geqslant 0$, ступенчата. Тогда
$$\int_A g\ \mathrm{d}\mu = \sum_i \int_{A_i} g\ \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.1.5. Пусть $A = \bigsqcup_i A_i$, $A, A_i \in \mathcal{A}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима на A. Тогда
$$\int_A f\ \mathrm{d}\mu = \sum_i \int_{A_i} f\ \mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.1.6. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима. Зададим отображение:
$$\begin{aligned} \nu \colon \mathcal{A} &\to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0} \\ E &\mapsto \int_E f\ \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$
Тогда ν – мера.

Лемма 1.1.7. Пусть f суммируема, g измерима, причем $f = g$ при почти всех x. Тогда $\displaystyle\int f\ \mathrm{d}\mu = \int g\ \mathrm{d}\mu$.

1.2 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 1.2.1. (Леви)
Пусть $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримы, $\forall n$ $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ при почти всех $x \in X$. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 1.2.2. Пусть $f, g \geqslant 0$, измеримы на E. Тогда

$$\int_E (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.2.3. Пусть f, g суммируемы на E. Тогда $f+g$ суммируема, причем

$$\int_E (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение. $\mathcal{L}(X) = \left\{ f \mid f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \int |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$

Лемма 1.2.4. $\mathcal{L}(X)$ – линейное пространство.

Теорема 1.2.5. Пусть $u_n \colon X \to \mathbb{R}$, $u_n \geqslant 0$ почти везде, u_n измеримы на E. Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.2.6. Пусть u_n измеримы, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \, \mathrm{d}\mu$ сходится абсолютно почти везде на E.

Теорема 1.2.7. (Абсолютная непрерывность интеграла)
Пусть f – суммируемая функция. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall E \in \mathcal{A} \colon \ \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Следствие 1.2.8. Пусть $e_n \in \mathcal{A}$, $\mu(e_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, f – суммируемая функция, тогда

$$\int_{e_n} |f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1.3 Произведение мер

В этом разделе мы начинаем с того, что по двум пространствам $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$, $\langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$ строим пространство $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu \rangle$.

Лемма 1.3.1. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – полукольцо.

Определение. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – полукольца, назовем тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *полукольцом измеримых прямоугольников*. Заведем отображение:

$$\begin{aligned} m_0 \colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\to \overline{\mathbb{R}} \\ A \times B &\mapsto \mu(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

Теорема 1.3.2.

- m_0 – мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- Если μ, ν σ-конечны, тогда m_0 тоже σ-конечна.

Определение. Мы получили $\langle X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, m_0 \rangle$ – пространство с мерой на полукольце. Продолжим её, пользуясь теоремой о продолжении, до σ-алгебры, которую будем обозначать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Результирующее пространство назовем *произведением пространств с мерой*, а полученную меру – *произведением мер*.

Теорема 1.3.3. Произведение мер ассоциативно.

Теорема 1.3.4. $\lambda_{m+n} = \lambda_m \times \lambda_n$.

Определение. Пусть $C \subseteq X \times Y$. Тогда *сечением* для произвольного $x \in X$ назовем множество

$$C_x \overset{def}{=} \{\, y \in Y \mid (x, y) \in C \,\}.$$

Замечание. Для сечений верны формулы, связанные с операциями над множествами, подобные этой:

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_\alpha \right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_\alpha)_x.$$

Теорема 1.3.5. (Принцип Кавальери)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, тогда

- При почти всех x $C_x \in \mathcal{B}$.
- Отображение $x \mapsto \nu(C_x)$ измеримо на X.
- $m(C) = \displaystyle\int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu$.

Следствие 1.3.6. Пусть $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $p_1(C) \in \mathcal{A}$, тогда

$$m(C) = \int\limits_{p_1(C)} \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Следствие 1.3.7. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f\ \mathrm{d}\lambda_1.$$

Замечание. Пусть $f \geqslant 0$, измерима, тогда

$$\lambda_2 \Pi\Gamma(f,[a,b]) = \int\limits_{[a,b]} f\ \mathrm{d}\lambda_1.$$

Определение. Пусть $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$. Зафиксируем $x \in X$ и определим отображение:

$$\begin{aligned} f_x : C_x &\to \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

Аналогично определим $f_y : C_y \to \overline{\mathbb{R}}$ для всех $y \in Y$.

Теорема 1.3.8. (Тонелли)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **измерима** по мере m. Тогда

- При почти всех x f_x **измерима** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu = \int_Y f_x\ \mathrm{d}\nu$ **измеримо** на X.
- $\displaystyle\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu.$

Теорема 1.3.9. (Фубини)
Пусть μ, ν – σ-конечные полные меры, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, **суммируема**. Тогда

- При почти всех x f_x **суммируема** на Y.
- Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu = \int_Y f_x\ \mathrm{d}\nu$ **суммируемо** на X.
- $\displaystyle\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu.$

Следствие 1.3.10. Если $p_1(C)$ измеримо, то

$$\int\limits_C f\ \mathrm{d}m = \int\limits_{X\times Y} f\chi_C\ \mathrm{d}m = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f\chi_C\ \mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu = \int\limits_{p_1(C)} \left(\int\limits_{C_x} f\ \mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu.$$

Замечание. Посмотрим на два вида сходимости: по мере и в смысле интеграла:

1. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \Longleftrightarrow \mu X(|f_n - f| < \varepsilon) \to 0.$
2. $\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$

Оказывается, верно $2 \Longrightarrow 1$, но без дополнительных требований неверно $1 \Longrightarrow 2$.

Теорема 1.3.11. (Лебега о мажорированной сходимости)
Пусть f_n, f измеримы и почти везде конечны, $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, $\exists g$:

- $\forall n \ |f_n| \leqslant g$ при почти всех x.
- g суммируема на X.

В такой ситуации g называется *Мажорантой*. Тогда

- f_n, f суммируемы
- $$\int\limits_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$$

Следствие 1.3.12. В условиях предыдущей теоремы верно

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$