Математический анализ IIII

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Интеграл

1.1 Собственно, интеграл

Общий контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ *— пространство с мерой*

Определение. Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0(X) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ измерима и п.в. конечна} \}$$

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — ступенчатая функция, то есть

$$f = \sum_{fin} \lambda_k \chi_{E_k}$$

Причем все E_k измеримы. Интеграл такой функции определим следующим образом:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E_k$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \overset{def}{=} \sum_k \lambda_k \mu E \cap E_k$$

Теорема 1.1.1. (Свойства интеграла ступенчатой функции)

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения.
- $f \leqslant g \Longrightarrow \int f \leqslant \int g$.

Определение. Пусть $0 \leqslant f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Интеграл такой функции определим так:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

Определение. Аналогично определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \text{ ступенч.}}} \int_E g \, \mathrm{d}\mu$$

Теорема 1.1.2. (Свойства интеграла измеримой функции)

- Если функция ступенчатая, то интеграл совпадает с интегралом, определенным для ступенчатых функций.
- $0 \leqslant \int f \leqslant +\infty$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая, f измеримая, тогда $\int g \leqslant \int f$.
- $0 \leqslant g \leqslant f$, f, g измеримы, тогда $\int g \leqslant \int f$.

Определение. Пусть f — измеримая функция X, причем хотя бы один из интегралов срезок конечен. Для такой функции определим интеграл:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f_+ \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \mathrm{d}\mu$$

Определение. Определим интеграл по измеримому множеству:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int_X f \cdot \chi_E \mathrm{d}\mu$$

Определение. Назовем функцию *суммируемой*, если интегралы её срезок конечны.

Теорема 1.1.3. (Свойства интеграла)

- Измеримая $f \geqslant 0 \Longrightarrow$ интеграл совпадает с предыдущим определением.
- f суммируема $\Longleftrightarrow \int |f| < +\infty$.