Математическая статистика

13 июня 2020 г.

Содержание

1 Постановка задач математической статистики

Сравним задачи теории вероятностей и математической статистики

1.1 Задачи теории вероятностей

Заданы:

- Вероятностное пространство $\langle \Omega, \Sigma, P \rangle$.
- Случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Требуется получить различного рода характеристики величины X и величин , получающихся из X.

1.2 Задачи математической статистики

Определение. *Статистическим экспериментом* называется четверка

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{A}, P_\theta, \Theta \rangle.$$

Здесь:

- $\mathcal{X}$ – множество *наблюдений*.
- $\mathcal{A}$ – σ-алгебра подмножеств $\mathcal{X}$.
- P_θ – известная с точностью до неизвестного параметра θ вероятностная мера – закон распределения наблюдаемых данных.
- Θ – множество допустимых значений неизвестного параметра, то есть $\theta \in \Theta$.

Задачей математической статистики является получение той или иной информации о законе распределения наблюдаемых данных $P = P_\theta$.

Определение. *Статистикой* называется измеримая функция

$$f : \mathcal{X} \to A.$$

Для произвольного A.

Определение. Пусть

$$\overline{X} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle.$$

Где $X_i \sim X$ – одинаково распределенные случайные величины. Соответствующая модель называется *моделью независимой однородной выборки*.

Определение. *Гипотезой H* называется подмножество Θ:

$$H \subseteq \Theta.$$

Перечислим некоторые задачи математической статистики.

- Оценивание параметра θ или какой-либо функции $g(\theta)$, то есть построение статистики $\hat{g} : \mathcal{X} \to \Theta$. Оценивание может быть:

  - *точечным*, то есть указание численной оценки $g(\theta)$
  - *длительным*, то есть указание множества, с фиксированной вероятностью содержащего $g(\theta)$

- Проверка гипотез. Пусть имеется разбиение Θ на гипотезы: $\Theta = \bigsqcup_{n \in N} H_n$. Тогда проеркой гипотезы назовем построение *теста* (*критерия*), то есть отображения
$$\varphi : \mathcal{X} \to N.$$
  Которое по наблюдению выдает номер гипотезы, которому это наблюдение "соответствует".

Естественно, перечисленные задачи можно оценивать с точки зрения качества. В этом смысле всегда требуется с точки зрения какой-либо метрики построить "лучшую" оценку.

2 Частота как оценка вероятности события и её свойства. Построение доверительного интервала для вероятности события на базе асимптотической нормальности частоты.

Теорема 2.1. (Яков, Бернулли)
Пусть имеется $\xi_i \sim \xi$ – последовательность одинаково распределенных и попарно независимых случайных величин. Пусть

$$\overline{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_n = \frac{k_n}{n}.$$

Тогда

$$\overline{\xi}_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} p.$$

Теорема 2.2. (Центральная предельная теорема, простейший вариант)
Пусть случайные величины $X_i \sim X$ независимы и одинаково распределены, причем $\exists E(X), D(X)$. Тогда для случайной величины

$$Y_n = \frac{\overline{X}_n - E\big(\overline{X}_n\big)}{\sigma\big(\overline{X}_n\big)}.$$

Верно:

$$F_{Y_n} \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} F_{N(0,1)}.$$

Теорема 2.3. (Свойства частоты как оценки p)
Пусть $\xi \sim B(p)$. Тогда

$$\hat{p} = \frac{k_n}{n}$$

Является несмещенной асимптотически нормальной оценкой p, то есть

$$E(\hat{p}) = p,$$

$$\sqrt{n}\cdot(\hat{p}-p) = Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y \sim N(0,\Delta^2(p)),\ \ \Delta^2(p) = p(1-p).$$

Доказательство.

- Покажем несмещенность:

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{k_n}{n}\right) = \frac{1}{n}np = p.$$

- Асимптотическая нормальность с нормирующим множителем $\Delta^2(p) = p(1-p)$ следует непосредственно из центральной предельной теоремы.

∎

На базе асимптотической нормальности можно построить доверительный интервал. Проделаем это на примере частоты. Выпишем определение асимптотической нормальности:

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}\cdot(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \to N(0,1).$$

Это буквально означает:

$$P_{n,\theta}(Y_n < t) \to F_{N(0,1)}(t).$$

Раскроем определение Y_n, возьмем его по модулю и воспользуемся квантилью:

$$P_{n,\theta}\left(\left|\frac{\sqrt{n}\cdot(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right| < t_\gamma\right) \to \gamma \Longleftrightarrow P_{n,\theta}\left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}t_\gamma + \hat{p} > p > -\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}t_\gamma + \hat{p}\right) \to \gamma.$$

Здесь $\gamma = P(|\xi| < t_\gamma),\ \xi \sim N(0,1)$.