

# Математическая статистика

19 июня 2020 г.

## Содержание

1	Постановка задач математической статистики	4
1.1	Задачи теории вероятностей . . . . .	4
1.2	Задачи математической статистики . . . . .	4
2	Частота как оценка вероятности события и её свойства. Построение доверительного интервала для вероятности события на базе асимптотической нормальности частоты.	6
3	Постановка выборочной статистической модели. Точечная оценка параметра и характеристики.	8
4	Функции потерь и функции риска, состоятельность оценки характеристики, достаточное условие для состоятельности оценки.	9
5	Вид квадратичного риска в случае одномерной характеристики.	11
6	Постановка задачи доверительного оценивания, доверительный интервал.	12
7	Определение несмещенности и асимптотической нормальности оценки характеристики. Построение доверительного интервала для характеристики на базе асимптотической нормальности ее оценки.	13
8	Постановка задачи проверки гипотез	14
9	Ошибки первого и второго рода и их вероятности как критерий качества критерия (теста) проверки гипотез. Подход Неймана-Пирсона.	15
10	Асимптотический вариант задачи проверки гипотез. Состоятельный тест асимптотического уровня значимости $\alpha$ .	16
11	Эмпирическая функция распределения (ЭФР). Построение, свойства ЭФР при фиксированном значении аргумента (использовать свойства частоты).	17

<b>12 Свойства ЭФР в целом. Расстояние Колмогорова, Смирнова. Теоремы Гливленко-Кантелли, Колмогорова, Мизеса-Смирнова. Построение доверительной полосы для функции распределения.</b>	<b>18</b>
<b>13 Критерии согласия Колмогорова и Мизеса-Смирнова.</b>	<b>20</b>
13.1 Критерий согласия Колмогорова . . . . .	20
13.2 Критерий Мизеса-Смирнова . . . . .	20
13.3 Прикладной алгоритм . . . . .	21
<b>14 Выборочный метод построения оценок одномерных характеристик. Асимптотическая нормальность оценки. Построение асимптотического доверительного интервала на базе асимптотической нормальности.</b>	<b>22</b>
14.1 Описание выборочного метода . . . . .	22
14.2 Асимптотическая нормальность, свойства асимптотической нормальности оценок . . . . .	22
<b>15 Основные выборочные оценки и их свойства. Выборочное математическое ожидание. Выборочная дисперсия. Выборочные моменты. Выборочные медиана и квантили. Выборочные оценки ковариации и коэффициента корреляции.</b>	<b>24</b>
15.1 Выборочное среднее / М.О. . . . .	24
15.2 Выборочная дисперсия . . . . .	25
15.3 Несмещенная выборочная дисперсия . . . . .	25
15.4 Выборочные моменты . . . . .	26
15.4.1 Выборочные начальные моменты . . . . .	26
15.4.2 Выборочные центральные моменты . . . . .	26
15.5 Выборочная медиана . . . . .	26
15.6 Выборочная ковариация и корреляция . . . . .	27
15.6.1 Выборочная ковариация . . . . .	27
15.7 Выборочная корреляция . . . . .	28
<b>16 Гистограмма как оценка плотности распределения. Статистические свойства гистограммы. Теорема Пирсона. Критерий хи-квадрат для проверки гипотезы о виде распределения генеральной совокупности</b>	<b>29</b>
16.1 Построение . . . . .	29
16.2 Статистические свойства гистограммы . . . . .	30
16.3 Критерий хи-квадрат . . . . .	31
16.3.1 Дискретная случайная величина . . . . .	31
16.3.2 Критерий хи-квадрат для случайной величины общего вида . . . . .	32
<b>17 Метод моментов и его свойства.</b>	<b>33</b>
17.1 Идея метода подстановки . . . . .	33
17.2 Метод моментов . . . . .	33
<b>18 Метод максимального правдоподобия и его свойства.</b>	<b>35</b>

<b>19 О сравнении качества оценок. Свойства функции правдоподобия (одномерный параметр). Неравенство Рао-Крамера и эффективные оценки.</b>	<b>37</b>
19.1 О сравнении качества оценок . . . . .	37
19.1.1 Минимаксный подход . . . . .	37
19.1.2 Асимптотически минимаксные оценки . . . . .	37
19.2 Свойства функции правдоподобия (одномерный параметр) . . . . .	38
19.3 Неравенство Рао-Крамера и эффективные оценки . . . . .	38
<b>20 Наиболее мощные тесты, лемма Неймана – Пирсона для проверки простой гипотезы против простой альтернативы. Равномерно наиболее мощные тесты.</b>	<b>40</b>
20.1 Подход Неймана-Пирсона . . . . .	40
20.2 Лемма Неймана-Пирсона . . . . .	40
20.3 Равномерно наиболее мощные тесты . . . . .	40
<b>21 Примеры построения наиболее мощных и равномерно наиболее мощных тестов.</b>	<b>42</b>
21.1 Пример 1 . . . . .	42
<b>22 Доверительное оценивание и проверка гипотез на основе оценок максимального правдоподобия.</b>	<b>43</b>
22.1 Доверительное оценивание . . . . .	43
22.2 Проверка гипотез . . . . .	43
<b>23 Общая линейная модель или задачи регрессии</b>	<b>45</b>
<b>24 Простейшие случайные процессы. Общие определения. Примеры. Моменты.</b>	<b>47</b>
<b>25 Цепи Маркова. Марковская зависимость. Переходные вероятности. Предельные вероятности. Схемы блужданий.</b>	<b>49</b>
25.1 Марковская зависимость . . . . .	49
25.2 Предельные вероятности . . . . .	50
25.3 Схемы блужданий . . . . .	53
25.3.1 Блуждание по отрезку с поглощением на концах . . . . .	53
25.3.2 Блуждание по отрезку с отражением на концах . . . . .	54

# 1 Постановка задач математической статистики

*Сравним задачи теории вероятностей и математической статистики*

## 1.1 Задачи теории вероятностей

Заданы:

- Вероятностное пространство  $\langle \Omega, \Sigma, P \rangle$ .
- Случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Требуется получить различного рода характеристики величины  $X$  и величин, получающихся из  $X$ .

## 1.2 Задачи математической статистики

**Определение.** *Статистическим экспериментом* называется четверка

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{A}, P_\theta, \Theta \rangle.$$

Здесь:

- $\mathcal{X}$  – множество наблюдений.
- $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\mathcal{X}$ .
- $P_\theta$  – известная с точностью до неизвестного параметра  $\theta$  вероятностная мера – закон распределения наблюдаемых данных.
- $\Theta$  – множество допустимых значений неизвестного параметра, то есть  $\theta \in \Theta$ .

*Задачей математической статистики является получение той или иной информации о законе распределения наблюдаемых данных  $P = P_\theta$ .*

**Определение.** *Статистикой* называется измеримая функция

$$f : \mathcal{X} \rightarrow A.$$

Для произвольного  $A$ .

**Определение.** Пусть

$$\bar{X} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle.$$

Где  $X_i \sim X$  – одинаково распределенные случайные величины. Соответствующая модель называется *моделью независимой однородной выборки*.

**Определение.** *Гипотезой*  $H$  называется подмножество  $\Theta$ :

$$H \subseteq \Theta.$$

Перечислим некоторые задачи математической статистики.

- Оценивание параметра  $\theta$  или какой-либо функции  $g(\theta)$ , то есть построение статистики  $\hat{g}: \mathcal{X} \rightarrow \Theta$ . Оценивание может быть:
  - *точечным*, то есть указание численной оценки  $g(\theta)$
  - *доверительным*, то есть указание множества, с фиксированной вероятностью содержащего  $g(\theta)$
- Проверка гипотез. Пусть имеется разбиение  $\Theta$  на гипотезы:  $\Theta = \bigsqcup_{n \in N} H_n$ . Тогда проверкой гипотезы назовем построение *теста (критерия)*, то есть отображения

$$\varphi: \mathcal{X} \rightarrow N.$$

Которое по наблюдению выдает номер гипотезы, которому это наблюдение “соответствует”.

Естественно, перечисленные задачи можно оценивать с точки зрения качества. В этом смысле всегда требуется с точки зрения какой-либо метрики построить “лучшую” оценку.

## 2 Частота как оценка вероятности события и её свойства. Построение доверительного интервала для вероятности события на базе асимптотической нормальности частоты.

**Теорема 2.1.** (Яков, Бернулли)

Пусть имеется  $\xi_i \sim \xi$  – последовательность одинаково распределенных и попарно независимых случайных величин. Пусть

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{k_n}{n}.$$

Тогда

$$\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} p.$$

**Теорема 2.2.** (Центральная предельная теорема, простейший вариант)

Пусть случайные величины  $X_i \sim X$  независимы и одинаково распределены, причем  $\exists E(X), D(X)$ . Тогда для случайной величины

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sigma(\bar{X}_n)}.$$

Верно:

$$F_{Y_n} \xrightarrow[\mathbb{R}]{} F_{N(0,1)}.$$

**Теорема 2.3.** (Свойства частоты как оценки  $p$ )

Пусть  $\xi \sim B(p)$ . Тогда

$$\hat{p} = \frac{k_n}{n}$$

Является несмещенной асимптотически нормальной оценкой  $p$ , то есть

$$E(\hat{p}) = p,$$

$$\sqrt{n} \cdot (\hat{p} - p) = Y_n \xrightarrow{P_{n,\theta}} Y \sim N(0, \Delta^2(p)), \Delta^2(p) = p(1-p).$$

*Доказательство.*

- Покажем несмещенность:

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{k_n}{n}\right) = \frac{1}{n}np = p.$$

- Асимптотическая нормальность с нормирующим множителем  $\Delta^2(p) = p(1-p)$  следует непосредственно из центральной предельной теоремы.

■

На базе асимптотической нормальности можно построить доверительный интервал. Проделаем это на примере частоты. Выпишем определение асимптотической нормальности:

$$Y_n = \frac{\sqrt{n} \cdot (\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow N(0, 1).$$

Это буквально означает:

$$P_{n,\theta}(Y_n < t) \rightarrow F_{N(0,1)}(t).$$

Раскроем определение  $Y_n$ , возьмем его по модулю и воспользуемся квантилью:

$$P_{n,\theta}\left(\left|\frac{\sqrt{n} \cdot (\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right| < t_\gamma\right) \rightarrow \gamma \iff P_{n,\theta}\left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}t_\gamma + \hat{p} > p > -\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}t_\gamma + \hat{p}\right) \rightarrow \gamma.$$

Здесь  $\gamma = P(|\xi| < t_\gamma)$ ,  $\xi \sim N(0, 1)$ .

### 3 Постановка выборочной статистической модели. Точечная оценка параметра и характеристики.

**Определение.** Напомним, что *точечной оценкой* параметра  $\theta$  или какой-либо функции  $g(\theta)$  называют численную оценку этой величины.

Пусть  $\hat{g}$  является некоторой точечной оценкой  $g = g(\theta)$ .

**Определение.**  $\hat{g}$  называется *несмещенной*, если  $E(\hat{g}) = g(\theta)$ .

**Определение.** При асимптотическом подходе оценка  $\hat{g}$  называется *состоятельной*, если  $\hat{g} \xrightarrow[p]{} g(\theta)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение.**  $\hat{g}_n$  называется *асимптотически нормальной*, если

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{g}_n - g(\theta))}{\sigma(g(\theta))} \xrightarrow{P_{n,\theta}} N(0, 1).$$

**Определение.**  $\hat{g}_n$  называется *эффективной* в классе оценок  $K$ , если для любой другой оценки  $\hat{g}_n^* \in K$  имеет место неравенство:

$$E(\hat{g}_n - g(\theta))^2 \leq E(\hat{g}_n^* - g(\theta))^2.$$



## 4 Функции потерь и функции риска, состоятельность оценки характеристики, достаточное условие для состоятельности оценки.

**Определение.** Оценкой  $g(\theta)$  называется статистика вида

$$\hat{g}: \mathcal{X} \rightarrow g(\Theta).$$

**Определение.** Пусть  $\hat{g}(\theta)$  – оценка  $g(\theta)$ . Тогда функцией потерь называется неотрицательная функция  $l(\hat{g}, g(\theta))$ , характеризующая “близость” оценки к настоящему значению.

**Замечание.** Обычно в качестве функции потерь рассматривают функцию вида

$$l(\hat{g}, g(\theta)) = \omega(\|\hat{g}, g(\theta)\|).$$

Здесь  $\omega$  – неотрицательная монотонно возрастающая функция,  $\omega(0) = 0$ .

**Замечание.**  $l$  является случайной величиной.

**Определение.** Риском называется функция

$$R(\hat{g}, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} E_{\theta}(l(\hat{g}, g(\theta))).$$

**Замечание.** Риск – функция параметра  $\theta$  и способа оценивания  $\hat{g}$ .

Опишем самые важные для нас виды функции потерь и риска.

**Определение.** Определим функцию потерь индикатором отклонений:

$$l^{\delta}(\hat{g}, g(\theta)) = \omega^{\delta}(\|\hat{g}, g(\theta)\|).$$

Где

$$\omega(t) = \mathbb{1}_{\delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < \delta \\ 1, & t \geq \delta \end{cases}.$$

Соответствующий риск будет вероятностью отклонения:

$$R^{\delta}(\hat{g}, \theta) = E_{\theta}(l^{\delta}(\hat{g}, g(\theta))) = 0 \cdot P_{\theta}(\|\hat{g}, g(\theta)\| < \delta) + 1 \cdot P_{\theta}(\|\hat{g}, g(\theta)\| \geq \delta) = P_{\theta}(\|\hat{g}, g(\theta)\| \geq \delta).$$

**Определение.** При асимптотическом подходе оценка называется *состоятельной*, если

$$\forall \delta > 0 \quad R^{\delta}(\hat{g}_n, \theta) = P_{n, \theta}(\|\hat{g}_n, g(\theta)\| \geq \delta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Или, что то же самое:

$$\hat{g}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P_{n, \theta}} g(\theta).$$

**Определение.** Квадратичной функцией потерь называется функция

$$l_2(\hat{g}, g(\theta)) = \|\hat{g}, g(\theta)\|^2.$$

Соответствующий ей риск называется квадратичным:

$$R_2(\hat{g}, \theta) = E_\theta(\|\hat{g}, g(\theta)\|^2).$$

**Теорема 4.1.** (Достаточное условие для состоятельности оценки)

В случае одномерной оценки  $R_2(\hat{g}_n, \theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies$  оценка состоятельна.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 \quad R^\delta(\hat{g}_n, \theta) &= P(\|\hat{g}_n - g(\theta)\| \geq \delta) = P(\|\hat{g}_n - g(\theta)\|^2 \geq \delta^2) \\ &\leq \frac{E_\theta(\|\hat{g}_n - g(\theta)\|^2)}{\delta^2} = \frac{R_2(\hat{g}_n, \theta)}{\delta^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

## 5 Вид квадратичного риска в случае одномерной характеристики.

**Определение.** Смещением оценки называется величина

$$b(\hat{g}, \theta) = g(\theta) - E_{\theta}(\hat{g}).$$

**Определение.** Оценка называется несмещенной, если  $b(\hat{g}, \theta) = 0$ .

**Теорема 5.1.**  $R_2(\hat{g}, \theta) = D_{\theta}(\hat{g}) + b^2(\hat{g}, \theta)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} R_2(\hat{g}, \theta) &= E_{\theta}(\|\hat{g} - g(\theta)\|^2) = E_{\theta}(\hat{g} - E_{\theta}(\hat{g}) - (g(\theta) - E_{\theta}(\hat{g})))^2 \\ &= E_{\theta}(\hat{g} - E_{\theta}(\hat{g}))^2 + (g(\theta) - E_{\theta}(\hat{g}))^2 - \underbrace{2(g(\theta) - E_{\theta}(\hat{g}))(E_{\theta}\hat{g} - E_{\theta}\hat{g})}_0 \\ &= D_{\theta}(\hat{g}) + b^2(\hat{g}, \theta). \end{aligned}$$

■

**Следствие 5.2.** Для одномерных несмещенных оценок квадратичный риск в точности равен дисперсии оценки:

$$R_2(\hat{g}, \theta) = D_{\theta}(\hat{g}).$$

## 6 Постановка задачи доверительного оценивания, доверительный интервал.

При оценивании параметров или характеристик распределений мы в качестве результата получаем числовое значение  $\hat{g}(X) \in g(\Theta)$ . Такой способ оценивания мы называем *точечной оценкой*. Заранее не понятно, насколько результат соответствует действительности. Для того, чтобы можно было оценивать качество результата, нужно предъявлять не точку, а подмножество в  $g(\Theta)$ , содержащее в некотором смысле наиболее подходящие значения.

Задача доверительного оценивания ставится следующим образом: задана величина  $\gamma \in (0, 1)$ , называемая *уровнем надежности*. По заданному наблюдению  $X$  и значению надежности требуется построить доверительную область надежности.

**Определение.** Доверительной областью надежности называется  $\tilde{G}_\gamma \subseteq G = g(\Theta)$ , обладающая свойством:

$$\forall \theta \in \Theta P_\theta(g(\theta) \in \tilde{G}_\gamma) \geq \gamma.$$

То есть множество, с достаточной вероятностью содержащее оцениваемую величину.

**Определение.** В случае одномерной оценки чаще всего доверительные области надежности выбирают в виде промежутков, которые называются *доверительными интервалами*.

**Определение.** В асимптотическом случае (когда имеется последовательность оценок и статистических экспериментов) последовательность *асимптотических областей надежности*  $\tilde{G}_{n,\gamma}$  задается условием:

$$\forall \theta \in \Theta \lim P_{n,\theta}(g(\theta) \in \tilde{G}_{n,\gamma}) \geq \gamma.$$

**Определение.** Аналогично задается последовательность асимптотических доверительных интервалов в случае одномерной характеристики.

## 7 Определение несмещенности и асимптотической нормальности оценки характеристики. Построение доверительного интервала для характеристики на базе асимптотической нормальности ее оценки.

**Определение.** Напомним, оценка называется *несмещенной*, если

$$b(\hat{g}, \theta) = g(\theta) - E_{\theta}(\hat{g}) = 0.$$

**Определение.** Последовательность оценок  $\hat{g}_n$  называется *асимптотически нормальной*, если

$$\sqrt{n} \cdot (\hat{g}_n - g(\theta)) = Y_n \xrightarrow{P_{n,\theta}} Y \sim N(0, \Delta^2(\theta)).$$

**Определение.** Величина  $\Delta(\theta)$  из определения асимптотически нормальной оценки называется *нормирующим множителем*.

**Замечание.** Определение асимптотически нормальной оценки можно переписать так:

$$\frac{\sqrt{n} \cdot (\hat{g}_n - g(\theta))}{\Delta(\theta)} \xrightarrow{P_{n,\theta}} Y \sim N(0, 1).$$

На базе асимптотической нормальности можно построить доверительный интервал. Выпишем определение асимптотической нормальности:

$$Y_n = \frac{\sqrt{n} \cdot (\hat{g} - g(\theta))}{\Delta(\theta)} \rightarrow N(0, 1).$$

Это буквально означает:

$$P_{n,\theta}(Y_n < t) \rightarrow F_{N(0,1)}(t).$$

Раскроем определение  $Y_n$ , возьмем его по модулю и воспользуемся квантилью:

$$P_{n,\theta}\left(\left|\frac{\sqrt{n} \cdot (\hat{g} - g(\theta))}{\Delta(\theta)}\right| < t_{\gamma}\right) \rightarrow \gamma \iff P_{n,\theta}\left(\frac{\Delta(\theta)}{\sqrt{n}}t_{\gamma} + \hat{g} > g(\theta) > -\frac{\Delta(\theta)}{\sqrt{n}}t_{\gamma} + \hat{g}\right) \rightarrow \gamma.$$

Здесь  $\gamma = P(|\xi| < t_{\gamma})$ ,  $\xi \sim N(0, 1)$ .

## 8 Постановка задачи проверки гипотез

**Определение.** *Гипотезой* называется множество предполагаемых зафиксированных значений некоторого подмножества неизвестных параметров:

$$H : \theta \in \Theta_H \subseteq \Theta.$$

**Определение.** Гипотезу называют *простой*, если  $|H| = 1$ .

**Определение.** Гипотезу называют *сложной*, если  $|H| > 1$ .

**Определение.** Гипотезами *согласия* называют набор из двух гипотез: основной  $H_0$  и альтернативы  $H_1$ , причем  $H_0 = \overline{H_1}$ .

**Определение.** Правило принятия или отклонения основной гипотезы  $H_0$  называют *тестом (критерием)* проверки гипотезы:

$$\varphi(X) : X_n \rightarrow \{0, 1\}.$$

При этом:

- $X_{n,0}$  называют *допустимым множеством*.
- $X_{n,1}$  называют *критическим множеством*.
- $X_{n,0} \sqcup X_{n,1} = X_n$ .

**Определение.** Случайная величина  $L(\bar{X}) : X_n \rightarrow \mathbb{R}$  называется *тестовой статистикой*, если она служит порогом для правила принятия или отклонения основной гипотезы:

$$\varphi(\bar{X}) = \begin{cases} 0, & L(\bar{X}) < T(H_0) \\ 1, & L(\bar{X}) \geq T(H_0) \end{cases}.$$

Где  $T$  называют *порогом принятия решения*.

## 9 Ошибки первого и второго рода и их вероятности как критерий качества критерия (теста) проверки гипотез. Подход Неймана-Пирсона.

**Определение.** *Ошибкой I рода* называют отклонение основной гипотезы, в то время как она была верна.

**Определение.** *Ошибкой II рода* называют принятие основной гипотезы, в то время как она не была верна.

**Определение.**  $\alpha$  называют *вероятностью ошибки I рода*:

$$\alpha(\varphi, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} P_{\theta}(X_{n,1}), \quad \theta \in \Theta_{H_0}.$$

**Определение.** *Уровнем значимости теста* называют верхнюю границу вероятности ошибки I рода по всем возможным наблюдаемым значениям неизвестных параметров, отвечающих основной гипотезе:

$$\alpha(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\theta \in \Theta_{H_0}} \alpha(\varphi, \theta).$$

**Определение.**  $\beta$  называют *вероятностью ошибки II рода*:

$$\beta(\varphi, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} P_{\theta}(X_{n,0}), \quad \theta \in \Theta_{H_1}.$$

**Определение.** *Мощностью теста* называют следующую величину:

$$\gamma(\varphi, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \beta(\varphi, \theta).$$

### Подход Неймана-Пирсона.

Зафиксируем  $\alpha \in (0, 1)$  (обычно выбирают малое значение). Будем считать это значение минимальной допустимой величиной ошибки I рода (*допустимый уровень значимости*).

Рассмотрим множество всех тестов таких, что:

$$\overline{\Phi}_{\alpha} = \{\varphi = \varphi(x) \mid \alpha(\varphi) \leq \alpha\}.$$

Среди этих тестов выбирается тест с минимальным значением  $\beta$ .

В асимптотических задачах ограничения накладываются на предельные значения.

## 10 Асимптотический вариант задачи проверки гипотез. Состоятельный тест асимптотического уровня значимости $\alpha$ .

При асимптотическом подходе последовательность тестов  $\varphi = \varphi_n$  называют просто тестом и проводят исследование асимптотических (предельных) свойств тестов  $\varphi = \{\varphi_n\}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение.** Тест  $\varphi = \{\varphi_n\}$  имеет асимптотический уровень значимости  $\alpha(\varphi)$ ,  $\alpha(\varphi) \in [0, 1]$ , если:

$$\alpha_n(\varphi_n) = \sup_{\theta \in \Theta_{H_0}} \alpha(\varphi_n, \theta) \rightarrow \alpha(\varphi), \quad n \rightarrow \infty.$$

При использовании подхода Неймана-Пирсона в асимптотическом варианте ограничение накладывается на асимптотический уровень значимости:  $\alpha(\varphi) = \alpha$ .

**Определение.** При асимптотическом подходе тест  $\varphi = \{\varphi_n\}$  называется *состоятельным*, если для любого  $\theta \in \Theta_{H_1}$ :

$$\beta(\varphi_n, \theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Определение.** Мерой близости альтернативы  $\theta \in \Theta_{H_1}$  и гипотезы  $H_0$  называют следующую величину:

$$\rho(\theta, \Theta_{H_0}) = \inf_{\theta_0 \in \Theta_{H_0}} \|\theta - \theta_0\|.$$

**Определение.** Тест  $\varphi = \{\varphi_n\}$  называется  $\sqrt{n}$ -состоятельным, если:

$$\beta(\varphi_n, \theta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Для такой последовательности  $\theta_n \in \Theta_{H_1}$ , что:

$$\sqrt{n}\rho(\theta_n, \Theta_{H_0}) \rightarrow \infty.$$



## 11 Эмпирическая функция распределения (ЭФР). Построение, свойства ЭФР при фиксированном значении аргумента (использовать свойства частоты).

**Определение.** Эмпирической функцией распределения (ЭФР) называют следующую оценку функции распределения генеральной совокупности:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, t]}.$$

Иными словами, значение ЭФР в точке  $t$  равно отношению числа наблюдений, меньших  $t$ , к их общему числу  $n$ .

**Свойства ЭФР:**

1. ЭФР кусочно-постоянна.
2. Скачки ЭФР имеют вид  $\frac{k}{n}$  для некоторого  $k \in (1; n)$ .
3. Область принимаемых значений:  $[0; 1]$ .
4. Частота может служить как оценка функции распределения генеральной совокупности. При фиксированном  $t = t_0$ :

$$F_x(t_0) \approx F_n(t_0) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \frac{k_n}{n} - \text{частота}.$$

5.  $F_n(t)$  является состоятельной оценкой:

$$F_n(t_0) = \bar{\xi}_n : F_n(t_0) \xrightarrow{p=1} F_x.$$

6.  $F_n(t)$  является асимптотически нормальной оценкой. Свойства частоты по типу нормальности рассмотрены в секции 2.

## 12 Свойства ЭФР в целом. Расстояние Колмогорова, Смирнова. Теоремы Гливленко-Кантелли, Колмогорова, Мизеса-Смирнова. Построение доверительной полосы для функции распределения.

Со свойствами ЭФР можно ознакомиться в предыдущем разделе.

**Определение.** Расстояние Колмогорова:

$$\rho_{\infty}(F_n, F_x) = \sup_t |F_n(t) - F_x(t)|.$$

**Определение.** Расстояние Смирнова:

$$\rho_2^2(F_n, F_x) = \int_{\mathbb{R}} (F_n(t) - F_x(t))^2 dF_x(t).$$

**Теорема 12.1.** (Гливленко-Кантелли)

Пусть  $\mathcal{F}$  – множество функций распределения. Тогда  $\forall F_x(t) \in \mathcal{F}$  с вероятностью 1 справедливо предельное неравенство:

$$\rho_{\infty}(F_n, F_x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Так как  $\rho_2 \leq \rho_{\infty}$ , то же верно для  $\rho_2$ .

**Замечание.**  $F_n(t)$  – состоятельная оценка  $F_x(t)$  в расстояниях Колмогорова и Смирнова.

Пусть  $\mathcal{F}_c$  – множество всех непрерывных функций распределения.

**Теорема 12.2.** (Колмогоров)

$$P_{n,F}(\sqrt{n}\rho_{\infty}(F_n, F_x) < u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}(u) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2(ju)^2}, & u > 0 \end{cases}.$$

**Теорема 12.3.** (Мизес, Смирнов)

$$P_{n,F}(\sqrt{n}\rho_2^2(F_n, F_x) < u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(u),$$

где  $\mathcal{S}(u)$  есть функция распределения следующей случайной величины:

$$\mathcal{U} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{j^2 \pi^2}, \quad \xi_j \sim N(0, 1), \text{ независимые.}$$

**Замечание.** Используя теорему Колмогорова, можно построить доверительную полосу для функции распределения.

**Определение.** Доверительной полосой называют часть плоскости, в которую с надежностью  $\gamma$  попадает функция распределения генеральной совокупности:

$$\begin{cases} F_n^-(t) = \max\left(0, F_n(t) - \frac{u_{\gamma}}{\sqrt{n}}\right) \\ F_n^+(t) = \min\left(1, F_n(t) + \frac{u_{\gamma}}{\sqrt{n}}\right) \end{cases}, \quad \text{где } \mathcal{K}(u_{\gamma}) = \gamma.$$

**Утверждение 12.4.**

$$P_x(F_n^-(t) \leq F_x(t) \leq F_n^+(t)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma.$$

*Доказательство.*  $0 \leq F_x(t) \leq 1$  всегда, тогда:

$$\begin{aligned} P_x(F_n^-(t) \leq F_x(t) \leq F_n^+(t)) &= P_x\left(F_n(t) - \frac{u_\gamma}{\sqrt{n}} \leq F_x(t) \leq F_n(t) + \frac{u_\gamma}{\sqrt{n}}\right) \stackrel{\forall t}{=} \\ &\stackrel{\forall t}{=} P_x(\sqrt{n}|F_x(t) - F_n(t)| \leq u_\gamma) \stackrel{\forall t}{=} \\ &\stackrel{\forall t}{=} P_x\left(\sqrt{n} \sup_t |F_x(t) - F_n(t)| \leq u_\gamma\right) \xrightarrow{\text{th. Колмогорова}} \mathcal{K}(u_\gamma) = \gamma. \end{aligned}$$

■

## 13 Критерии согласия Колмогорова и Мизеса-Смирнова.

Пусть  $F_0(t)$  – заданная непрерывная функция распределения.

Поставим задачу проверки согласия:

$$H_0 \equiv (F_x(t) \equiv F_0(t)).$$

### 13.1 Критерий согласия Колмогорова

Определим тестовую статистику:

$$L(\bar{X}) = \sqrt{n} \rho_{\infty}(F_0, F_n).$$

По th. Колмогорова:

$$P(L(\bar{X}) < z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}(z),$$

где  $\mathcal{K}$  – распределение Колмогорова. Тогда порогом принятия решения при уровне значимости  $\alpha$  является квантиль распределения Колмогорова порядка  $1 - \alpha$  (далее  $u_{1-\alpha}$ ).

Таким образом, определим тест:

$$\varphi(\bar{X}) = \begin{cases} 0, & \sqrt{n} \rho_{\infty}(F_0, F_n) < u_{1-\alpha} \\ 1, & \sqrt{n} \rho_{\infty}(F_0, F_n) \geq u_{1-\alpha} \end{cases}.$$

### 13.2 Критерий Мизеса-Смирнова

Определим тестовую статистику:

$$L(\bar{X}) = \sqrt{n} \rho_2(F_0, F_n).$$

По th. Мизеса-Смирнова:

$$P(L(\bar{X}) < z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(z),$$

где  $\mathcal{S}$  – распределение Мизеса-Смирнова. Тогда порогом принятия решения при уровне значимости  $\alpha$  является квантиль распределения Мизеса-Смирнова порядка  $1 - \alpha$  (далее  $s_{1-\alpha}$ ).

Таким образом, определим тест:

$$\varphi(\bar{X}) = \begin{cases} 0, & \sqrt{n} \rho_2^2(F_0, F_n) < w_{1-\alpha} \\ 1, & \sqrt{n} \rho_2^2(F_0, F_n) \geq w_{1-\alpha} \end{cases}.$$

### 13.3 Прикладной алгоритм

1. Строится ЭФР
2. Считается статистика критерия. Поскольку ЭФР является кусочно-постоянной, расстояние Колмогорова / Мизеса-Смирнова можно считать как верхнюю границу по соответствующим значениям расстояний в точках скачка.
3. Для заданного уровня значимости  $\alpha$  находится квантиль распределения Колмогорова / Мизеса-Смирнова порядка  $1 - \alpha$ .
4. Если значение тестовой статистики меньше полученного квантиля, следует принять нулевую гипотезу, иначе – отклонить.

## 14 Выборочный метод построения оценок одномерных характеристик. Асимптотическая нормальность оценки. Построение асимптотического доверительного интервала на базе асимптотической нормальности.

Есть три метода построения оценок:

1. Выборочный метод
2. Метод моментов
3. Метод максимального правдоподобия

### 14.1 Описание выборочного метода

Этот метод основывается на знании того, что ЭФР  $F_n(t)$  является “хорошей” оценкой функции распределения  $F_x(t)$ .

ЭФР  $F_n(t)$  является функцией распределения дискретной случайной величины  $Y$ , имеющей следующий ряд распределения:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} Y_i & x_{(1)} & x_{(2)} & \dots & x_{(n)} \\ \hline p_i & 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{array}$$

где  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  упорядоченная выборка:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

В основе выборочного метода лежит идея: любую характеристику генеральной совокупности  $X$  оценивать при помощи соответствующей характеристики случайной величины  $Y$ . Естественно полученные таким образом оценки нужно изучать, проверить их свойства. С точки зрения квадратического риска они не всегда являются лучшими в соответствующем классе распределений.

### 14.2 Асимптотическая нормальность, свойства асимптотической нормальности оценок

**Определение.** Последовательность оценок  $\hat{g}_n$  характеристики  $g(\theta)$  называется *асимптотически нормальной* с асимптотической дисперсией  $\Delta^2(\theta) > 0$ , если случайная величина  $Y_n = \sqrt{n}(\hat{g}_n - g(\theta))$  сходится по  $P_{n,\theta}$  - распределению к нормальной случайной величине  $Y$  с нулевым средним и дисперсией  $\Delta^2(\theta)$ :

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P_{n,\theta}} Y \sim N(0, \Delta^2(\theta)).$$

Это соотношение можно переписать в виде:

$$\hat{g}_n = g(\theta) + \frac{Y_n}{\sqrt{n}}, Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P_{n,\theta}} Y \sim N(0, \Delta^2(\theta)),$$

то есть  $\hat{g}_n - g(\theta)$  - отклонение оценки от неизвестного значения оцениваемой характеристики имеет приближенно нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $\frac{\Delta^2(\theta)}{n}$

**Определение.** Величина  $\Delta(\theta) > 0$  называется нормирующим множителем.

**Утверждение 14.1.**

- $\sqrt{n}b_{n,\theta}(\hat{g}_n) = E_{n,\theta}(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
- $nD_{n,\theta}(\hat{g}_n) = D_{n,\theta}(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Delta^2(\theta)$
- $nR_2(\hat{g}_n, \theta) = E_{n,\theta}(Y_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Delta^2(\theta)$

*Доказательство.*  $P_{n,\theta}(\frac{Y_n}{\Delta(\theta)} < t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_{N(0,1)}(t) \Rightarrow P_{n,\theta}(|\hat{g}_n - g(\theta)| < \frac{T(\Delta(\theta))}{\sqrt{n}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2\Phi(T) - 1 = \gamma,$

где  $\Phi$  - функция распределения стандартного нормального закона;  $T = \frac{1+\gamma}{2}$  - квантиль  $N(0, 1)$ ;  $\gamma$  - надежность;  $\delta_n = T_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\Delta(\theta)}{\sqrt{n}}$  - точность оценки.

$(\hat{g}_n - \delta_n, \hat{g}_n + \delta_n)$  - асимптотически доверительный интервал надежности  $\gamma$ .

Если при этом  $E_{n,\theta}(Y_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(Y^2) = \Delta^2(\theta)$  (тогда  $E_{n,\theta}(Y_n) \rightarrow E(Y) = 0$ ),

то  $E_{n,\theta}(Y_n) = \sqrt{n}(E_{n,\theta}\hat{g}_n - g(\theta)) = \sqrt{n}b_{n,\theta}(\hat{g}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  т. е. смещение стремится к нулю быстрее, чем  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  -  $\sqrt{n}$  несмещ  $\hat{g}_n$ .

$$D_{n,\theta}(Y_n) = E_{n,\theta}(Y_n^2) - (E_{n,\theta}(Y_n))^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Delta^2(\theta).$$

$$D_{n,\theta}(\sqrt{n}(\hat{g}_n - g(\theta))) = nD_{n,\theta}(\hat{g}_n),$$

- инвариантна относительно сдвига и вынесение  $\sqrt{n}$  из-под знака дисперсии, т. е.

$$nD_{n,\theta}(\hat{g}_n) \rightarrow \Delta^2(\theta)$$

$$\sqrt{n}\sigma_{n,\theta}(\hat{g}_n) \rightarrow \Delta(\theta),$$

средне квадратическое отклонение имеет порядок  $\frac{\Delta(\theta)}{\sqrt{n}}$ .

$$nR_2(\hat{g}_n, \theta) = n(b_{n,\theta}^2(\hat{g}_n) + D_{n,\theta}(\hat{g}_n)) \rightarrow 0 + \Delta^2(\theta),$$

т.е. для асимптотически нормальных оценок дисперсия и квадратический риск в асимптотике совпадают и равны  $\frac{\Delta^2(\theta)}{n}$ . ■

**Утверждение 14.2.** (Без доказательства) Оценки  $S_n^2$  и  $\sigma_n^2$  - асимптотически нормальны с  $\Delta^2(X) = E(X - EX)^4 - D^2(X)$ , если существуют четвертые центральные моменты, т. е.  $\frac{\sigma_n^2 - D(X)}{\Delta(X)} \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P_{n,x}} Y \sim N(0, 1)$  и точность выборочной дисперсии оценивается моментами 4-го порядка.

## 15 Основные выборочные оценки и их свойства. Выборочное математическое ожидание. Выборочная дисперсия. Выборочные моменты. Выборочные медиана и квантили. Выборочные оценки ковариации и коэффициента корреляции.

Здесь  $X$  – произвольная рассматриваемая случайная величина.

### 15.1 Выборочное среднее / М.О.

**Определение.** Случайную величину  $\bar{X}_n = EY = \sum_{i=1}^n X_{(i)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$  называют *выборочным средним* некоторой выборки  $X_{[n]}$  из генеральной совокупности  $X$ .

Выборочное среднее является выборочной точечной оценкой  $EX$ .

**Свойства.**

- Выборка является набором одинаково распределенных независимых случайных величин, из чего по закону больших чисел:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} EX, \text{ если } \exists EX.$$

Поэтому выборочное среднее является *состоятельной* оценкой  $EX$ .

- Выборочное среднее является *несмещенной* оценкой  $EX$ :

$$E_x \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = EX, \text{ оо св-ву М.О.}$$

- Если  $\exists EX, DX$ , то по центральной предельной теореме:

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - E_x(\bar{X}_n)}{\sigma_x(\bar{X}_n)} = \frac{\bar{X}_n - EX}{\sigma(X)} \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{F} Y \sim N(0, 1),$$

или

$$F_{Y_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} F_Y(t).$$

Из этого следует, что центрированное нормированное выборочное среднее сходится по распределению к стандартному нормальному распределению. Следовательно, выборочное среднее является *асимптотически нормальной* оценкой  $EX$ .



## 15.2 Выборочная дисперсия

**Определение.** Случайную величину  $S_n^2 = D(X_{[n]}) = \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - EY)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$  называют *выборочной дисперсией* некоторой выборки  $X_{[n]}$  из генеральной совокупности  $X$ .

Выборочная дисперсия является выборочной точечной оценкой  $DX$ .

**Свойства.**

- Выборочная дисперсия является *состоятельной* оценкой  $DX$ :

$$S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E(X^2) - (EX)^2 = DX.$$

- Выборочная дисперсия является *смещенной* оценкой  $DX$ .  
(Ниже, не теряя общности, будем считать  $EX = 0$ , инвариантность  $DX$  относительно сдвига):

$$E(X^2) = DX, \quad E_x(\bar{X}_n) = EX = 0$$

$$\Rightarrow E_x(\bar{X}_n^2) = D_x(\bar{X}_n) + (E_x(\bar{X}_n))^2 = \frac{DX}{n}$$

$$\Rightarrow E_x S_n^2 = E_x \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \right) = \frac{1}{n} n E(X^2) - \frac{DX}{n} = DX - \frac{DX}{n} = \frac{n-1}{n} DX.$$

- Выборочная дисперсия является *асимптотически нормальной* оценкой  $DX$  – без доказательства.

## 15.3 Несмещенная выборочная дисперсия

**Определение.** Чаще вместо  $S_n^2$  используют *несмещенную (исправленную) оценку дисперсии*:

$$\sigma_n^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2,$$

Несмещенная выборочная дисперсия является выборочной точечной оценкой  $DX$ .

**Свойства.**

- *Состоятельность* следует из состоятельности  $S_n^2$ :

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p=1} DX.$$

- *Несмещенность* очевидна из доказательства смещенности выборочного среднего.
- Несмещенная оценка дисперсии является *асимптотически нормальной* оценкой  $DX$  – без доказательства.

## 15.4 Выборочные моменты

### 15.4.1 Выборочные начальные моменты

**Определение.** Выборочным начальным моментом порядка  $k$  называется статистика:

$$m_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Эти выборочные характеристики можно считать выборочным средним для случайной величины  $Z = X^k$ :

$$m_{n,k} = \bar{Z}_k.$$

Следовательно, если  $\exists E(X^k)$ , то  $m_{n,k}$  является состоятельной и несмещенной оценкой  $E(X^k)$ .

Если существует  $E(X^{2k})$ , то  $m_{n,k}$  является асимптотически нормальной оценкой  $E(X^k)$  с асимптотической дисперсией  $\Delta^2 = E_x(Z^2) - (E_x(Z))^2$ .

### 15.4.2 Выборочные центральные моменты

**Определение.** Выборочным центральным моментом порядка  $k$  называется статистика:

$$\mu_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^k.$$

Данные статистики являются состоятельными, смещенными оценками соответствующих центральных моментов генеральной совокупности.

## 15.5 Выборочная медиана

**Определение.** Медианой  $t_0$  случайной величины  $X$  ( $med(x)$ ) называют такое значение аргумента функции распределения  $F_x(t)$ , что для него выполняются неравенства:

$$\begin{cases} P(X \geq t_0) \geq \frac{1}{2} \\ P(X \leq t_0) \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Если  $F_x(t) \in C(\mathbb{R})$ , то  $F_x(t_0) = \frac{1}{2}$ .

**Определение.** Пусть  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  — упорядоченная выборка (вариационный ряд), тогда выборочной медианой  $med_n$  называется следующая случайная величина:

$$med_n = \begin{cases} X_{(k)} = X_{\frac{n-1}{2}}, & \text{при } n = 2k - 1 \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, & \text{при } n = 2k \end{cases}.$$

**Свойства.** Пусть генеральная совокупность является непрерывной случайной величиной и  $T = \{t : 0 < F_X(t) < 1\}$ . Если  $f_X(t)$  непрерывна и положительна при  $t \in T$ , то плотность распределения случайной величины  $Y = f_Y(t)$ , где

$$Y = 2\sqrt{n}f_X(t_0)(\text{med}_n - t_0), \quad t_0 = \text{med}(X)$$

при  $n \rightarrow \infty$  стремится к  $f_{N(0,1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{t^2}{2}$ , а

$$P(a < Y < b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

- Следовательно, выборочная медиана является *состоятельной* оценкой  $\text{med}(X)$ .
- Также видно, что выборочная медиана является *асимптотически нормальной* оценкой  $\text{med}(x)$  с асимптотической дисперсией  $\Delta^2 = \frac{1}{rf_X^2(t_0)}$ .

- Выборочная медиана является  $\sqrt{n}$ -несмещенной оценкой  $\text{med}(X)$ . То есть:

$$\sqrt{n}b_{n,\theta}(\text{med}_n) = \sqrt{n}(E_x(\text{med}_n) - \text{med}(X)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## 15.6 Выборочная ковариация и корреляция

Выборочная ковариация и корреляция используются при решении вопроса о наличии зависимости между случайными величинами  $X$  и  $Y$ .

В этом случае рассматривается выборка из случайного вектора  $(X, Y)$ . Здесь пары  $\{X_i, Y_i\}_i$  независимы и одинаково распределены. Если случайные величины  $X$  и  $Y$  не являются линейно зависимыми ( $r(X, Y) \neq 1$ ), то для последовательности  $\{X_i, Y_i\}_i$  справедливо утверждение аналогичное центральной предельной теореме.

### 15.6.1 Выборочная ковариация

**Определение.** Выборочной ковариацией называется статистика:

$$K_n = K_n(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X}_n \bar{Y}_n.$$

**Свойства.**

- *Состоятельная* оценка.  $X$  и  $Y$ .
- *Смещенная* оценка. Аналогично выборочной дисперсии, можно показать:

$$E_x(K_n) = \frac{n-1}{n} K(X, Y).$$

- *Асимптотически нормальная* оценка.

**Определение.** В приложениях обычно рассматривают *несмещенную* оценку ковариации:

$$\tilde{K}_n = \frac{n}{n-1} K_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)).$$

## 15.7 Выборочная корреляция

**Определение.** Выборочной корреляцией  $X$  и  $Y$  называется статистика:

$$r_n = r_n(X, Y) = \frac{K_n}{S_{n,X}S_{n,Y}} = \frac{\tilde{K}_n}{\sigma_{n,X}\sigma_{n,Y}}.$$

**Замечание.** В определении выше предполагается существование всех необходимых моментов:  $EX, EY, K(X, Y), \dots$

**Свойства.**

- *Состоятельная оценка.*
- *Несмещенная оценка.*
- *Асимптотически нормальная оценка.*

## 16 Гистограмма как оценка плотности распределения. Статистические свойства гистограммы. Теорема Пирсона. Критерий хи-квадрат для проверки гипотезы о виде распределения генеральной совокупности

### 16.1 Построение

Основной идеей, использующейся в этом методе, является идея *группировки данных*. Пусть распределение абсолютно непрерывно с непрерывной плотностью распределения  $f(x)$ . Тогда значение плотности распределения в точке  $t$  можно оценить как отношение вероятности попадания значения в полуинтервал  $\Delta = [t_1, t_2) \ni t$  к длине этого полуинтервала  $t_2 - t_1 = |\Delta|$ . Иными словами:

$$f(t) \approx \frac{P(\Delta)}{|\Delta|}.$$

Это приближение можно объяснить следующим образом, пользуясь теоремой Лагранжа:

$$P(\Delta) = \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx = f(t_1 + \theta|\Delta|)|\Delta| \approx f(t)|\Delta|.$$

Построим наконец оценку, взяв в качестве  $P(x < t_i) = F(t_i)$  выборочное значение:

$$P(\Delta) = F(t_2) - F(t_1) \approx F_n(t_2) - F_n(t_1) = k(\Delta).$$

За  $k(\Delta)$  обозначим число элементов выборки, попавших в отрезок  $\Delta$ .

**Определение.** *Интервалами группировки* называется разбиение  $\{\Delta_0, \Delta_{\pm 1}, \Delta_{\pm 2}, \dots\}$  отрезка  $[a, b]$  на дизъюнктные интервалы фиксированной длины  $h > 0$ .

**Определение.** *Гистограммой* называется функция  $f_n(t)$ , принимающая постоянные значения на заданных интервалах группировки:

$$t \in \Delta_m \implies f_n(t) = f_{n,m} = \frac{k(\Delta_m)}{nh}.$$

**Замечание.** Гистограмма – кусочно постоянная функция.

**Теорема 16.1.** Гистограмма является плотностью распределения.

*Доказательство.*  $f_n(t) \geq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \sum_m \int_{\Delta_m} f_n(t) dt = \sum_m h f_{n,m} = n^{-1} \sum_m k(\Delta_m) = 1.$$

■

**Замечание.** На практике удобно выбирать границы  $[a, b]$  в виде максимума и минимума элементов выборки.

## 16.2 Статистические свойства гистограммы

Гистограмма является оценкой плотности распределения. Изучим её свойства как оценки. Для этого изучим квадратичное отклонение  $R_{n,2}(t)$ . В нашем случае  $g(\theta) = f(t)$ . Ранее было показано, что в случае одномерной оценки квадратичный риск представим в виде

$$R_{n,2}(t) = D_n(t) + b_n^2(t), \quad D_n(t) = D_F(f_n(t)), \quad b_n(t) = E_F(f_n(t)) - f(t).$$

Заметим, что при фиксированном  $t$   $k(\Delta_m)$  – случайная величина, имеющая биномиальное распределение  $k(\Delta_m) \sim B(n, p)$ ,  $p = p_{n,m} = P_F(\Delta_m)$ . Отсюда имеем:

$$E_F(k(\Delta_m)) = np, \quad D_F(k(\Delta_m)) = np(1-p).$$

Вычислим на основе этих знаний значения сдвига и дисперсии:

$$b_n(t) = \left( \frac{p}{h} - f(t) \right), \quad D_n(t) = \frac{p(1-p)}{nh^2} \leq \frac{p}{h} \frac{1}{nh}.$$

Имея непрерывность  $f(x)$  на отрезке  $\Delta_m$  по теореме Лагранжа имеем

$$\frac{p}{h} = \frac{1}{h_n} \int_{\Delta_m} f(x) dx = f(\tilde{t}), \quad \tilde{t} \in \Delta_m.$$

Отсюда при условиях  $h = h_n \rightarrow 0$ ,  $nh_n \rightarrow +\infty$  следует:

$$b_n(t) = f(\tilde{t}) - f(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$D_n(t) = \frac{f(\tilde{t})}{nh} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Отсюда вытекает:

$$R_{n,2}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

В этом случае по теореме о достаточном условии состоятельности оценки следует

**Теорема 16.2.** (Состоятельность гистограммы как оценки  $f$ )

Пусть задано абсолютно непрерывное распределение с плотностью  $f(x)$ , отрезок  $[a, b]$  и его разбиение с длинами интервалов  $h_n$  такими, чтобы выполнялись условия:

$$h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad nh_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Тогда соответствующая гистограмма является состоятельной оценкой плотности распределения.

**Теорема 16.3.** Наилучшая скорость убывания длины интервалов группировки в классе плотностей с условием

$$\exists C: \int_{\mathbb{R}} (f'(t))^2 dt \leq C^2$$

имеет порядок  $n^{-1/3}$ .

## 16.3 Критерий хи-квадрат

### 16.3.1 Дискретная случайная величина

Пусть генеральная совокупность  $X$  – дискретная случайная величина с распределением  $P_X(t = t_k) = p_k$ , где  $\bar{p}$  – набор неизвестных вероятностей. Пусть решается вопрос о справедливости гипотезы  $p = \bar{p}_0 = (p_{0,1}, p_{0,2}, \dots, p_{0,k})$ ,  $p_{0,j} > 0$ . Через  $\mathbb{P}$  обозначим множество:

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{R}^k \mid p_j \geq 0, \sum_j p_j = 1\}.$$

Поставим задачу проверки согласия с  $H_0 \equiv \bar{p} = \bar{p}_0$ . Пусть  $n_j$  – число элементов выборки  $X^{(n)}$ , принимающих значение  $t_j$ ,  $F_0(t)$  – функция распределения генеральной совокупности при условии  $H_0$ .

**Определение.** Статистикой хи-квадрат с  $k-1$  степенью свободы называется статистика

$$\chi_{n,k-1}^2(X^{(n)}) = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - np_{0,j})^2}{np_{0,j}}.$$

**Определение.** Функцией распределения хи-квадрат с  $k$  степенями свободы  $\chi_k^2$  называется функция распределения случайной величины

$$\tau_k = \sum_{i=1}^k \zeta_i^2, \quad \zeta_i \sim N(0, 1).$$

**Теорема 16.4.** (Пирсон)

Пусть справедливо  $\bar{p} = \bar{p}_0$ . Тогда справедливо

$$\sup_{u \in \mathbb{R}_{>0}} \left| P_{F_0}(\chi_{n,k-1}^2 < u) - \chi_{k-1}^2(u) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Определение.** Критерием хи-квадрат асимптотического уровня значимости  $\alpha$  для проверки согласия с гипотезой  $H_0 \equiv \bar{p} = \bar{p}_0$  называется последовательность тестов

$$\psi_n(X^{(n)}) = \begin{cases} 1, & \chi_{n,k-1}^2 \geq t_{k-1,\alpha} \\ 0, & \chi_{n,k-1}^2 < t_{k-1,\alpha} \end{cases}.$$

Здесь величина  $t_{k-1,\alpha}$  определяется из условия

$$\chi_{k-1}^2(t_{k-1,\alpha}) = 1 - \alpha.$$

**Теорема 16.5.** (Состоятельность критерия хи-квадрат)

Критерий хи-квадрат является состоятельным критерием асимптотического уровня значимости  $\alpha$ .

*Доказательство.*

- Оценим вероятность ошибки первого рода.

$$\alpha(\psi_n) = P_{n,F_0}(\chi_{n,k-1}^2 \geq t_{k-1,\alpha}) = 1 - P_{n,F_0}(\chi_{n,k-1}^2 < t_{k-1,\alpha}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \chi_{k-1}^2(t_{k-1,\alpha}) = \alpha.$$

Таким образом, критерий имеет асимптотический уровень значимости  $\alpha$ .

- Оценим ошибку второго рода. Зафиксируем альтернативу  $H_1 \equiv \bar{p} = \bar{p}_1 \neq \bar{p}_0$ . Пусть  $j_0: p_{1,j_0} \neq p_{0,j_0}, |p_{1,j_0} - p_{0,j_0}| = a$ . В силу закона больших чисел  $n_{j_0}/n \rightarrow p_{1,j_0}$  почти везде по мере  $P_F$ . Поэтому верно

$$(n_{j_0} - np_{0,j_0})^2 \sim n^2 a^2.$$

Откуда по определению следует

$$\chi_{n,k-1}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Поэтому:

$$\beta(\psi_n, F) = P_{n,F}(\chi_{n,k-1}^2 < t_{k-1,\alpha}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Таким образом, критерий является состоятельным. ■

### 16.3.2 Критерий хи-квадрат для случайной величины общего вида

Рассмотрим теперь случайную величину общего вида. Пусть основная гипотеза является простой и имеет вид  $H_0 \equiv F_X(x) = F_0(x)$ . Чтобы применить критерий хи-квадрат к такой задаче, используют *дискретизацию данных*. Множество значений  $X$  разбивается на  $k$  множеств, попадание в каждое из которых интерпретируется как значение дискретной случайной величины с  $k$  значениями. Для этой случайной величины мы уже умеем применять критерий хи-квадрат.



## 17 Метод моментов и его свойства.

### 17.1 Идея метода подстановки

Метод подстановки уже использовался нами в следующих задачах:

- Оценка характеристик распределения  $g(F)$  через характеристики выборочного распределения  $g(F_n)$ .
- Если  $\hat{\theta}_n$  – в определенном смысле хорошая оценка параметра распределения  $\theta$ , мы используем в качестве оценки  $g(\theta)$  значение  $g(\hat{\theta}_n)$ . (*подставляем вместо  $\theta$   $\hat{\theta}$* ).

К этому методу можно подойти и с другой стороны.

### 17.2 Метод моментов

Пусть мы ищем параметр распределения  $\theta$ , причем его можно задать как решение уравнения

$$E_{\theta}(H(X, \theta)) = 0.$$

Здесь  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – известная нам функция. Метод состоит в том, чтобы *заменить* математическое ожидание его выборочной оценкой, то есть в качестве оценки параметра  $\hat{\theta}(X^{(n)})$  взять решение уравнения

$$\sum_{i=1}^n H(X_i, \theta) = 0.$$

*Сформулируем эти идеи в более общем виде.*

Пусть распределение генеральной совокупности  $F_X$  известно нам с точностью до неизвестного параметра  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ . Понятно, что все числовые характеристики распределения  $g(F_X)$  можно выразить через неизвестный нам параметр  $\theta$ :  $g(F_X) = g(\theta)$ . Пусть выбранная нами характеристика  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  удовлетворяет следующим свойствам:

- Система уравнений относительно  $\theta$ :

$$g_i(\theta) = g_i^0, \quad i = 1..k,$$

где  $g^0 \in \mathbb{R}^k$  – теоретическое значение характеристики, имеет единственное решение.

- Система уравнений обладает свойством *устойчивости*, то есть отображение, ставящее в соответствие  $g^0$  решение непрерывно в окрестности  $g^0$ .

В таком случае, заменим  $g^0$  его выборочным аналогом  $\hat{g}_n^0$ . Решим ту же самую систему уравнений:

$$g_i(\theta) = \hat{g}_n^0, \quad i = 1..k.$$

Остается просто взять в качестве оценки неизвестного параметра  $\theta$  найденное нами решение  $\hat{\theta}_n$ .

**Теорема 17.1.** (Свойства метода моментов)

Из определения метода моментов сразу вытекают его основные свойства.

- Если  $\hat{g}_n$  – состоятельные оценки, то  $\hat{\theta}$  – состоятельная оценка.
- Аналогичное утверждение справедливо и для свойства асимптотической нормальности.

*Доказательство.*

- Это свойство – непосредственное следствие устойчивости системы.
- Асимптотическая нормальность  $\hat{g}_n$  означает

$$\hat{g}_n = g(\theta) + n^{-\frac{1}{2}}Y_n, \quad Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P_{n,\theta}} Y \sim N(0, \mathcal{K}(\theta)).$$

Здесь  $\mathcal{K}(\theta)$  – матрица ковариаций. Чтобы доказать утверждение, нам достаточно представить оценку в виде

$$\hat{\theta}_n = \theta + n^{-\frac{1}{2}}Z_n.$$

Где  $Z_n \sim N(0, \_)$ . По формуле Тейлора:

$$g\left(\theta + n^{-\frac{1}{2}}Z_n\right) = g(\theta) + g'(\theta)n^{-\frac{1}{2}}Z_n + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

С другой стороны, поскольку  $\hat{\theta}_n$  является решением соответствующей системы уравнений:

$$g(\hat{\theta}) = \hat{g}_n = g(\theta) + n^{-\frac{1}{2}}Y_n.$$

Приравнивая правые части последних двух уравнений, получаем

$$Z_n \approx (g'(\theta))^{-1}Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P_{n,\theta}} Z \sim N(0, R(\theta)).$$

Где

$$R(\theta) = (g'(\theta))^{-1}\mathcal{K}(\theta)(g'(\theta)^\top)^{-1}.$$

■

## 18 Метод максимального правдоподобия и его свойства.

Будем основывать метод на *принципе максимального правдоподобия*: в качестве оценки неизвестного параметра распределения выберем то значение, при котором наблюдаемые результаты наиболее вероятны.

Будем считать, что выполнено одно из двух:

- Распределение генеральной совокупности абсолютно непрерывно, то есть существует непрерывная плотность, задающая это распределение:

$$f(x, \theta) \Longleftrightarrow P_\theta.$$

- Распределение дискретно. В таком случае будем обозначать

$$f(x, \theta) = P_\theta(X = x).$$

**Определение.** *Функцией правдоподобия* называется функция

$$L(\theta, X) = f(X, \theta).$$

**Определение.** *Логарифмической функцией правдоподобия* называется функция

$$l(\theta, X) = \ln L(\theta, X) = \ln f(X, \theta).$$

**Замечание.** При фиксированном  $X \in \mathcal{X}$  функции правдоподобия – просто вещественные функции  $\theta$ . Если же считать  $X$  случайной величиной, то и функции правдоподобия становятся случайными величинами.

**Замечание.** В модели независимой однородной выборки функции правдоподобия принимают вид:

$$L(\theta, X^{(n)}) = \prod_{i=1}^n f(X^{(n)}, \theta), \quad l(\theta, X^{(n)}) = \sum_{i=1}^n \ln f(X^{(n)}, \theta).$$

**Определение.** *Оценкой максимального правдоподобия* называется значение

$$\theta^*(X) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L(\theta, X).$$

**Определение.** В случае, когда логарифмическая функция правдоподобия непрерывно дифференцируема, система уравнений

$$\frac{\partial l(\theta, X)}{\partial \theta_j} = 0$$

Называется *уравнениями максимального правдоподобия*. В этом случае  $\theta^*(X)$  является одним из решений этой системы.

**Определение.** Информацией Фишера называется функция

$$I(\theta) = E_{\theta}(l'(\theta, X))^2.$$

**Замечание.** Информация Фишера – числовая характеристика распределения, и не является случайной величиной.

**Определение.** Оценка называется  $\alpha(n)$ -несмещенной, если

$$\alpha(n)b_{n,\theta}(\hat{g}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Теорема 18.1.** (Свойства оценки максимального правдоподобия)

Пусть справедливы условия:

- $\theta \in \Theta = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ , то есть изучаемый параметр одномерный.
- $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ .
- Почти везде существуют частные производные логарифмической функции правдоподобия порядка  $k \leq 3$ .
- Выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial^k l(\theta, X)}{\partial \theta^k} \right| \leq G_k(x), \quad 1 \leq k \leq 3.$$

Причем  $G_k$  суммируемы и

$$\sup_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}} G_3(x) f(x, \theta) dx < +\infty.$$

- $\forall \theta > 0 \exists I(\theta) > 0$ .

Тогда соответствующая оценка максимального правдоподобия обладает свойствами:

- Состоятельность.
- $\sqrt{n}$ -несмещенность.
- Асимптотическая нормальность с  $\Delta^2(\theta) = \frac{1}{I(\theta)}$ .

## 19 О сравнении качества оценок. Свойства функции правдоподобия (одномерный параметр). Неравенство Рао-Крамера и эффективные оценки.

Рассматриваются задачи оценки конечномерного параметра распределения  $P_\theta$ ,  $\theta \in \Theta \subset R^m$ , а также характеристик (функций)  $g(\theta)$  по наблюдениям  $X \in \mathcal{X}$ .

### 19.1 О сравнении качества оценок

Сравниваем различные оценки с помощью функции риска.

**Определение.** Оценка  $\hat{g}^1$  не хуже оценки  $\hat{g}^2$ , если  $R(\hat{g}^1, \theta) \leq R(\hat{g}^2, \theta)$ , для всех  $\theta \in \Theta$ . Обозначение:  $\hat{g}^1 \succeq \hat{g}^2$ .

**Определение.** Пусть  $G = \{\hat{g}\}$  – некоторый класс оценок. Оценка  $\hat{g}^*$  называется *эффективной* в классе  $G$ , если:

$$\hat{g}^* \succeq \hat{g}$$

для всех  $\hat{g} \in G$ .

В классе *всех* оценок не существует эффективной оценки. Для поиска эффективных оценок нужны ограничения на класс рассматриваемых оценок.

Отмеченные трудности вынуждают сравнивать не функции риска различных оценок, а какие-нибудь числовые величины от функций риска, которые характеризуют функцию риска.

#### 19.1.1 Минимаксный подход

Здесь качество оценки характеризуется максимальным значением риска:

$$R_{\max}(\hat{g}) = \sup_{\theta \in \Theta} R(\hat{g}, \theta).$$

**Определение.** Оценка  $\hat{g}$  называется *минимаксной*, если:

$$R_{\max}(\hat{g}) \leq R_{\max}(\tilde{g})$$

для любой оценки  $\tilde{g}$ .

Подход ориентирован на построение оценки с минимальным значением максимального риска.

#### 19.1.2 Асимптотически минимаксные оценки

**Определение.** Оценка  $\hat{g}_n$  называется *асимптотически минимаксной*, если:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{R_{\max}(\hat{g}_n)}{R_{\max}(\tilde{g}_n)} \right) \leq 1$$

для любой оценки  $\tilde{g}$ .

**Определение.** Оценка  $\hat{g}_n$  называется *локально асимптотически минимаксной* в точке  $\theta_0 \in \Theta$ , если для достаточно малых  $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sup_{|\theta - \theta_0| \leq \varepsilon} R(\hat{g}_n, \theta)}{\sup_{|\theta - \theta_0| \leq \varepsilon} R(\tilde{g}_n, \theta)} \right) \leq 1$$

для любой оценки  $\tilde{g}$ .

## 19.2 Свойства функции правдоподобия (одномерный параметр)

TODO

## 19.3 Неравенство Рао-Крамера и эффективные оценки

Пусть  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$  – несмещенная оценка одномерного параметра, выполнены условия регулярности и  $I(\theta) > 0$  для всех  $\theta \in \Theta$ .

**Теорема 19.1.** (Неравенство Рао-Крамера)

Для любого  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$

$$D_\theta(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)}.$$

*Доказательство.*

- Будем считать, что наблюдения  $X$  имеют непрерывное распределение. Запишем условие несмещенности:

$$\int_{\mathbb{X}} \hat{\theta}(x) f(x, \theta) dx = \theta$$

- Продифференцируем это равенство:

$$\int_{\mathbb{X}} \hat{\theta}(x) l'(\theta, x) f(x, \theta) dx = 1$$

- Умножая 19.2.3 на  $\theta$  и вычитая из п.2:

$$\int_{\mathbb{X}} (\hat{\theta}(x) - \theta) l'(\theta, x) f(x, \theta) dx = 1$$

- Рассмотрим функции:

$$g_1(x) = (\hat{\theta}(x) - \theta)(f(x, \theta))^{\frac{1}{2}}, \quad g_2(x) = l'(x, \theta)(f(x, \theta))^{\frac{1}{2}}$$

- Возведем в квадрат п.3 и воспользуемся интегральным неравенством Коши-Буняковского для функций п.4:

$$1 \leq \int_{\mathbb{X}} (\hat{\theta}(x) - \theta)^2 f(x, \theta) dx \int_{\mathbb{X}} (l'(\theta, x))^2 f(x, \theta) dx = D_\theta(\hat{\theta}) I(\theta).$$



Неравенство Рао-Крамера дает нижнюю границу для дисперсии и квадратичного риска несмещенных оценок.

**Определение.** Оценка, на которой достигается нижняя граница Рао-Крамера, называется *эффективной*.

**Замечание.** Неравенство Рао-Крамера справедливо и для смещенных оценок (со смещением  $b'_\theta(\hat{\theta})$ ) в форме:

$$D_\theta(\hat{\theta}) \geq \frac{(1 + b'_\theta(\hat{\theta}))^2}{I(\theta)}.$$

## 20 Наиболее мощные тесты, лемма Неймана – Пирсона для проверки простой гипотезы против простой альтернативы. Равномерно наиболее мощные тесты.

Проверка простой гипотезы  $H_0 : \theta = \theta_0$  против простой альтернативы  $H_1 : \theta = \theta_1$  по независимой выборке  $X_1, \dots, X_n$  из генеральной совокупности  $X$ .

### 20.1 Подход Неймана-Пирсона

Пусть  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\alpha$  мало - допустимый уровень значимости критерия. Рассмотрим множество критериев:

$$\Phi_\alpha = \{\psi : \alpha(\psi, \theta_0) \leq \alpha\}.$$

**Определение.**  $\psi_\alpha^*$  называется наиболее мощным критерием (НМК) уровня значимости  $\alpha$ , если:

1.  $\psi_\alpha^* \in \Phi_\alpha$
2.  $\gamma(\psi_\alpha^*, \theta_1) \geq \gamma(\psi, \theta_1) \forall \psi \in \Phi_\alpha$ , где  $\gamma(\psi_\alpha^*, \theta_1) = 1 - \beta(\psi_\alpha^*, \theta_1)$  - мощность критерия,  $\beta(\psi_\alpha^*, \theta_1)$  - ошибка второго рода.

### 20.2 Лемма Неймана-Пирсона

Пусть  $L(x) = \frac{f_x(x, \theta_1)}{f_x(x, \theta_0)}$  - отклонение правдоподобия ( $f_x(x, \theta_1)$  - плотность или вероятность соответствующих значений).  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\alpha$  мало, фиксированно; обозначим  $\gamma = 1 - \alpha$  и  $\exists T_\gamma : P_{\theta_0}(L(x) < T_\gamma) = \gamma$  (функция распределения статистики  $L(x)$ ), тогда НМК имеет вид:

$$\psi_\alpha^* = \begin{cases} 1, & L(x) \geq T_\gamma \\ 0, & L(x) < T_\gamma \end{cases},$$

при этом  $\alpha(\psi_\alpha^*, \theta_0) = P_{\theta_0}(L(x) \geq T_\gamma) = 1 - P_{\theta_0}(L(x) < T_\gamma) = 1 - \gamma = \alpha$ .

$P_{\theta_0}(L(x) \geq T_\gamma)$  - вероятность отвергнуть  $H_0$ , когда она верна, то есть мы принимаем  $H_0$ , если  $f_x(x, \theta_0) > \frac{1}{T_\gamma} f_x(x, \theta_1)$

### 20.3 Равномерно наиболее мощные тесты

$H_0 : \theta = \theta_0; H_1 : \theta \in \Theta_1$

**Определение.**  $\psi_\alpha^*$  - РНМК, если:

1.  $\psi_\alpha^* \in \Phi_\alpha$
2.  $\gamma(\psi_\alpha^*, \theta_1) \geq \gamma(\psi, \theta_1) \forall \theta_1 \in \Theta_1$  и  $\psi \in \Phi_\alpha$

**Определение.**  $\psi_{n,\alpha}^*$  - АРМНК, если:



$$1. \psi_{n,\alpha}^* \in \Phi_\alpha^{(A)}$$

$$2. \gamma(\psi_{n,\alpha}^*, \theta_1) \geq \gamma(\psi_n, \theta_1) + \delta_{n,1} \quad \forall \{\psi_n\} \in \Phi_\alpha^{(A)}, \quad \theta_1 \in \Theta_1, \delta_{n,1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где:

$$\Phi_\alpha^{(A)} = \{\psi_{n,\alpha} : \alpha(\psi_{n,\alpha}, \theta) \leq \alpha + \delta_{n,0}, \quad \delta_{n,0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}.$$

## 21 Примеры построения наиболее мощных и равномерно наиболее мощных тестов.

### 21.1 Пример 1

Имеется выборка  $X_1, \dots, X_n$  из нормального распределения со средним 0 и дисперсией  $\sigma^2$ ,  $\sigma > 0$ . Построим наиболее мощный критерий размера  $\varepsilon$  для проверки гипотезы  $H_1 = \sigma = \sigma_1$  против альтернативы  $H_2 = \sigma = \sigma_2$ , где  $\sigma_1 < \sigma_2$ .

Отношение правдоподобия имеет абсолютно непрерывное распределение при любой из гипотез, поэтому критерий отношения правдоподобия будет нерандомизированным. Его критическая область  $\delta(X) = H_2$  определяется неравенством:

$$T(X) = \frac{\sigma_1^n}{\sigma_2^n} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\sum_{i=1}^n X_i^2\right),$$

что эквивалентно неравенству  $\overline{X^2} \geq c_1$ . Найдем  $c_1$ , при котором размер критерия равен  $\varepsilon$ :

$$\alpha_1(\delta) = P_{H_1}(\overline{X^2} \geq c_1) = P_{H_1}\left(\frac{n\overline{X^2}}{\sigma_1^2} \geq \frac{nc_1}{\sigma_1^2}\right) = 1 - H_n\left(\frac{nc_1}{\sigma_1^2}\right) = \varepsilon.$$

Отсюда  $n\frac{c_1}{\sigma_1^2} = h_{1-\varepsilon}$  – квантиль  $\chi^2$ -распределения с  $n$  степенями свободы уровня  $1 - \varepsilon$ . Тогда  $c_1 = \frac{h_{1-\varepsilon}\sigma_1^2}{n}$  и НМК размера  $\varepsilon$  имеет вид  $\delta(X) = H_2$  при:

$$\overline{X^2} > \frac{h_{1-\varepsilon}\sigma_1^2}{n}.$$

## 22 Доверительное оценивание и проверка гипотез на основе оценок максимального правдоподобия.

### 22.1 Доверительное оценивание

Напомним утверждение, сформулированное ранее.

**Теорема 22.1.** При достаточно общих условиях оценка максимального правдоподобия одномерного параметра обладает свойством асимптотической нормальности с  $\Delta^2(\theta) = \frac{1}{I(\theta)}$ .

Обладая этой информацией, нетрудно построить доверительный интервал на основе оценки  $\hat{g}$ , полученной методом максимального правдоподобия. Действительно, мы только что сформулировали тот факт, что

$$\sqrt{n} \cdot (\hat{g} - g(\theta)) = Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P_{n,\theta}} Y \sim N(0, \Delta^2(\theta)).$$

Откуда вытекает

$$P_{n,\theta}(|Y_n/\Delta(\theta)| \leq t_\gamma) \rightarrow \gamma.$$

Здесь  $t_\gamma: P_{N(0,1)}(|\xi| < t_\gamma) = \gamma$ ,  $\xi \sim N(0, 1)$ . Чтобы в явном виде получить доверительный интервал, раскроем определение  $Y_n$  и подставим значение  $\Delta(\theta)$ :

$$\begin{aligned} P_{n,\theta} \left( \left| \sqrt{n} \cdot (\hat{g} - g(\theta)) \cdot \sqrt{I(\theta)} \right| \leq t_\gamma \right) &\rightarrow \gamma \\ \iff P_{n,\theta}(\hat{g} - \delta \leq g(\theta) \leq \hat{g} + \delta) &\rightarrow \gamma, \quad \delta = \frac{t_\gamma}{\sqrt{nI(\theta)}}. \end{aligned}$$

### 22.2 Проверка гипотез

Пусть сформулирована гипотеза  $H_0 \equiv \theta = \theta_0$  и альтернатива  $H_1 \equiv \theta = \theta_1 > \theta_0$  (Такая альтернатива называется *правосторонней*). Пусть также имеется оценка  $\hat{\theta}$ , полученная методом максимального правдоподобия. Рассмотрим тест:

$$\psi_{n,\alpha}^* = \begin{cases} 1, & \sqrt{nI(\theta)} \cdot (\hat{\theta} - \theta_0) \geq c_{1-\alpha} \\ 0, & \sqrt{nI(\theta)} \cdot (\hat{\theta} - \theta_0) < c_{1-\alpha} \end{cases}.$$

Здесь  $c_\gamma: P(\xi < c_\gamma) = \gamma$ ,  $\xi \sim N(0, 1)$ .

**Теорема 22.2.**  $\psi_{n,\alpha}^*$  является состоятельным тестом асимптотического уровня значимости  $\alpha$ .

*Доказательство.*

- Вычислим уровень значимости критерия:

$$\alpha(\psi_{n,\alpha}^*) = P_{n,\theta_0} \left( \sqrt{nI(\theta)} \cdot (\hat{\theta} - \theta_0) \geq c_{1-\alpha} \right) = 1 - P_{n,\theta_0} \left( \sqrt{nI(\theta)} \cdot (\hat{\theta} - \theta_0) < c_{1-\alpha} \right) \rightarrow \alpha.$$

Последнее верно по свойству асимптотической нормальности оценки.

- Проверим состоятельность теста:

$$\begin{aligned}\beta(\psi_{n,\alpha}^*) &= P_{n,\theta_1}(\sqrt{nI(\theta)} \cdot (\hat{\theta} - \theta_0) < c_{1-\alpha}) \\ &= P_{n,\theta_1}\left(\sqrt{nI(\theta)} \cdot (\hat{\theta} - \theta_1) < \underbrace{\sqrt{nI(\theta)} \cdot (\theta_0 - \theta_1)}_{\rightarrow -\infty} + c_\gamma\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.\end{aligned}$$

■

## 23 Общая линейная модель или задачи регрессии

В приложениях часто возникают задачи о наблюдениях, зависящих от изменяющихся параметров эксперимента. Пусть проводится  $n$  экспериментов с  $m$  изменяющимися параметрами, причем в  $i$ -м из них набор параметров выглядит следующим образом:

$$x_i = (x_{i,1} \ x_{i,2} \ \dots \ x_{i,m}).$$

Тогда всем экспериментам сразу соответствует матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,m} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не является набором случайных чисел.

**Определение.** Задачи регрессии или общие линейные модели соответствуют предположению, что наблюдаемые в  $i$ -м эксперименте данные  $y_i$  зависят от параметров линейно с точностью до нормально распределенной с нулевым матожиданием ошибки  $\xi_i \sim N(0, \sigma^2)$ , причем  $\xi_i$  независимы:

$$y_i = \sum_{k=1}^m \theta_k x_{i,k} + \xi_i.$$

Или в матричном виде сразу для всех  $n$  экспериментов:

$$Y = X\theta + \xi.$$

В рамках задачи регрессии требуется по данным  $X, Y$  восстановить набор коэффициентов  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ .

**Определение.** В рамках текущей задачи  $X$  называется *регрессором*, а  $Y$  – *откликом*.

**Определение.** Можно поставить задачу линейной регрессии по-другому. Пусть имеется  $m$  функций  $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и одномерный параметр  $z_i$ . Тогда нужно восстановить зависимость такого вида:

$$y_i = \sum_{k=1}^m \theta_k \varphi_k(z_i) + \xi_i.$$

Построим решение задачи линейной регрессии со следующими дополнительными условиями:

- $Y_i \sim N(m_i, \sigma^2)$ .
- Набор параметров  $X$  подобран таким образом, чтобы его столбцы были линейно независимы.

Для оценивания коэффициентов  $\theta_i$  применим метод максимального правдоподобия. Вычислим функцию правдоподобия:

$$L(Y) = \left( \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - m_i)^2 \right), \quad m_i = \sum_{k=1}^m \theta_k x_{i,k}.$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(Y) = \ln L(Y) = C - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \sum_{k=1}^m \theta_k x_{i,k} \right)^2.$$

Для минимизации функции правдоподобия осталось найти наименее удаленную от  $Y$  точку в пространстве  $\mathcal{L}$ , натянутом на  $x_1, \dots, x_m$ . Обозначим искомую точку за  $\beta = X\theta^*$ . Тогда необходимым условием минимума является:

$$Y - \beta \perp \mathcal{L}.$$

Это условие эквивалентно системе

$$\forall k \quad Y - \beta \perp x_k.$$

Раскрываем ортогональность:

$$\forall k \quad \langle Y - \beta, x_k \rangle = 0.$$

И переписываем в матричном виде:

$$X^\top \cdot (Y - X\theta^*) = 0.$$

Выражаем  $\theta^*$ :

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} \cdot X^\top Y.$$

Матрица  $X^\top X$  положительно определена в случае линейной независимости  $x_i$ , поэтому решение существует и единственно.

## 24 Простейшие случайные процессы. Общие определения. Примеры. Моменты.

**Определение.** Случайным процессом называется семейство случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве, параметризованное  $t \in T$ :

$$\mathcal{P} = \{ \xi_t(\omega) \mid t \in T \}.$$

**Пример.**

- Последовательность независимых случайных величин есть случайный процесс с  $T = \mathbb{N}$ . Процессы, в которых  $T \subseteq \mathbb{Z}$ , называются *дискретными*.
- Эмпирическая функция распределения – случайный процесс с  $T = \mathbb{R}$ .
- Случайная величина – частный случай случайного процесса с  $T = \{1\}$ .

**Определение.** При заданном  $\omega_0 \in \Omega$  *траекторией* называется функция

$$\xi(t) = \xi_t(\omega_0).$$

**Определение.** При заданном  $t_0 \in T$  *сечением* называется случайная величина

$$\xi(\omega) = \xi_{t_0}(\omega).$$

**Пример.**

- Пусть  $X \sim U(-1, 1)$ , тогда рассмотрим процесс

$$Y(t, \omega) = X(\omega)e^{-t}.$$

В ситуации, когда случайная величина входит в качестве параметра, процесс называется *простейшим*, или *элементарным*. Траектории устроены следующим образом:

$$\xi(t) = ae^{-t}, \quad a = X(\omega_0).$$

Сечение выглядят так:

$$\xi(\omega) = X(\omega)a, \quad a = e^{-t_0}.$$

- Пусть  $X \sim N(a, \sigma^2)$ ,  $Y(t, \omega) = X(\omega)e^{-t}$ . Найдем моменты сечений:
  - $E_Y(t) = E(Xe^{-t}) = e^{-t} \cdot a$ .
  - $D_Y(t) = D(Xe^{-t}) = e^{-2t} \cdot \sigma^2$ .
  - $\dot{Y}(t) = Y(t) - E_Y(t) = (X - a)e^{-t} = \dot{X}e^{-t}$ .
  - $K_Y(t, t') = E(\dot{Y}(t) \cdot \dot{Y}(t')) = e^{-t-t'} \cdot E(\dot{X}^2) = e^{-t-t'} \cdot \sigma^2$ . Эта функция называется *корреляционной функцией случайного процесса  $Y(t)$* .
  - $r_Y(t, t') = \frac{\sigma^2 e^{-t-t'}}{\sigma_Y(t) \cdot \sigma_Y(t')} = \frac{\sigma^2 e^{-t-t'}}{\sigma e^{-t} \sigma e^{-t'}} = 1$ . В данном случае получается, что зависимость между сечениями имеет линейный вид.

Найдем распределение сечения.  $Y(t_0, \omega) = X e^{-t_0}$  – нормальная случайная величина:

$$Y(t_0, \omega) \sim N(a e^{-t_0}, \sigma^2 e^{-2t_0}).$$

С соответствующим распределением:

$$f_{Y, t_0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma e^{-t_0}} \left( \exp - \frac{1}{2} \left( \frac{y - a e^{-t_0}}{\sigma e^{-t_0}} \right)^2 \right).$$



## 25 Цепи Маркова. Марковская зависимость. Переходные вероятности. Предельные вероятности. Схемы блужданий.

### 25.1 Марковская зависимость

Пусть  $G$  – эксперимент с конечным числом исходов  $E_i$ . Будем неограниченно повторять эксперимент  $G$ . Рассмотрим связанную с этим процессом последовательность случайных величин  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ . Будем для краткости обозначать  $E_i = i$  там, где это удобно.

**Определение.** Последовательность случайных величин  $X_i$  образует *цепь Маркова*, если выполнено

$$P(X_l = j \mid X_0 = k_0, \dots, X_{l-1} = i) = P(X_l = j \mid X_{l-1} = i) \stackrel{\text{def}}{=} p_{i,j}^{(l)}.$$

**Определение.** Начальное состояние цепи Маркова задается распределением  $X_0$ :

$$P(X_0 = i) = p_i(0).$$

**Замечание.** Отличие марковской цепи от других дискретных процессов состоит в том, что результат очередного эксперимента зависит исключительно от результата предыдущего эксперимента.

**Определение.** Вероятности перейти из одного состояния в другое за один шаг можно представить в виде *матрицы переходов*

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}.$$

**Замечание.** Отметим пару очевидных свойств матрицы переходов:

- $p_{i,j} \geq 0$ .
- $\forall i \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$ .

**Определение.** Матрица, удовлетворяющая вышеперечисленным свойствам, называется *стохастической*.

**Замечание.** Понятно, что любая матрица переходов является стохастической. Кроме того, любая стохастическая матрица является матрицей переходов соответствующей марковской цепи.

**Определение.** Обозначим  $p_{i,j}(k)$  – вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  за  $k$  шагов:

$$p_{i,j}(k) = P(X_{k+l} = j \mid X_l = i) = P(X_k = j \mid X_0 = i).$$

Матрицу из таких вероятностей обозначим  $P_k$ .

**Теорема 25.1.**  $P_k = P^k$ .

*Доказательство.* По формуле полной вероятности при  $k > 1$  имеем

$$p_{i,j}(k+1) = \sum_{l=1}^n P(X_k = l \mid X_0 = i) p_{l,j} = \sum_{l=1}^n p_{i,l}(k) p_{l,j}.$$

В матричном виде

$$P_{k+1} = P_k \cdot P.$$

Откуда по индукции с базой  $P_1 = P$  получаем требуемое. ■

**Замечание.** Если задано начальное распределение  $p_i(0) = P(X_0 = i)$ , то аналогичным образом можно получить распределение вероятностей для произвольного момента  $t$ :

$$p_i(t) = P(X_t = i) = \sum_{l=1}^n p_l(0) p_{l,i}(t).$$

## 25.2 Предельные вероятности

**Определение.** Цепь Маркова, для которой для всех  $j$  существует предел

$$p_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{i,j}(t).$$

называется *эргодической*.

**Теорема 25.2.** Если цепь Маркова является эргодической, то система уравнений

$$x_j = \sum_{l=1}^n x_l p_{l,j}, \quad \sum_{l=1}^n x_l = 1$$

имеет единственное решение

$$x_j = p_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{i,j}(t).$$

*Доказательство.*

- Покажем, что  $x_j = p_j$  действительно решение системы. Для этого выпишем равенства из доказательства теоремы  $P_k = P^k$ :

$$p_{i,j}(k+1) = \sum_{l=1}^n p_{i,l}(k) p_{l,j}.$$

И перейдем в нём к предельному переходу при  $k \rightarrow +\infty$ :

$$p_j = \sum_{l=1}^n p_l p_{l,j}.$$

Для проверки последнего уравнения системы перейдем к пределу при  $k \rightarrow +\infty$  в уравнении

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j}(k) = 1.$$

- Проверим теперь, что это решение единственное, то есть если  $x_l$  – решение системы, то  $x_l = p_l$ . Используя индукцию и первые уравнения системы легко показать, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad x_j = \sum_{k=1}^n x_k p_{k,j}(m).$$

Действительно, при  $m = 1$  имеем  $p_{l,j}(1) = p_{l,j}$ . Предположим, что утверждение справедливо при  $m = l$ , подставим вместо  $x_k$  выражение из первого уравнения системы имеем

$$x_j = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_i p_{i,k} p_{k,j}(l) = \sum_{i=1}^n x_i p_{i,j}(l+1).$$

Осталось перейти к пределу при  $m \rightarrow +\infty$ :

$$x_j = \sum_{k=1}^n x_k p_j = p_j \cdot \sum_{k=1}^n x_k = p_j \cdot 1 = p_j.$$

■

**Теорема 25.3.** Если все элементы матрицы  $P$  строго положительны, то соответствующая цепь маркова является эргодической.

*Доказательство.* Обозначим

$$M_j(t) = \max_{1 \leq i \leq n} p_{i,j}(t), \quad m_j(t) = \min_{1 \leq i \leq n} p_{i,j}(t).$$

Выполнено:

$$p_{i,j}(t+1) = \sum_{k=1}^n p_{i,k} p_{k,j}(t), \quad m_j(t) \leq p_{k,j}(t) \leq M_j(t).$$

Следовательно, для любого  $i$  имеем:

$$m_j(t) = m_j(t) \sum_{k=1}^n p_{i,k} \leq p_{i,j}(t+1) \leq M_j(t) \sum_{k=1}^n p_{i,k} = M_j(t).$$

Обозначим за  $k, l$  индексы, при которых для фиксированного  $j$  достигается  $M_j(t+1)$  и  $m_j(t+1)$  соответственно:

$$p_{k,j}(t+1) = M_j(t+1), \quad p_{l,j}(t+1) = m_j(t+1).$$

Пользуясь предыдущим неравенством, получаем:

$$m_j(t) \leq m_j(t+1) \leq M_j(t+1) \leq M_j(t).$$

Поскольку последовательности  $m_j(t)$  и  $M_j(t)$  ограничены и монотонны, существуют пределы:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_j(t) = M_j, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} m_j(t) = m_j.$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_j(t) - m_j(t) = 0.$$

Действительно, тогда  $p_{i,j}(t)$  окажется зажатой между двумя последовательностями, сходящимися к одному числу, то есть будет иметь предел. Имеем

$$\begin{aligned} M_j(t+1) - m_j(t+1) &= p_{k,j}(t+1) - p_{l,j}(t+1) = \sum_{m=1}^n p_{k,m} p_{m,j}(t) - \sum_{m=1}^n p_{l,m} p_{m,j}(t) \\ &= \sum_{m=1}^n (p_{k,m} - p_{l,m}) p_{m,j}(t) \\ &= \sum_{m=1}^{n^+} (p_{k,m} - p_{l,m}) p_{m,j}(t) + \sum_{m=1}^{n^-} (p_{k,m} - p_{l,m}) p_{m,j}(t). \end{aligned}$$

$\sum^+$  – сумма положительных слагаемых,  $\sum^-$  – сумма отрицательных. Верно неравенство

$$m_j(t) \leq p_{m,j}(t) \leq M_j(t).$$

Поэтому:

$$M_j(t+1) - m_j(t+1) \leq M_j(t) \sum_{m=1}^{n^+} (p_{k,m} - p_{l,m}) + m_j(t) \sum_{m=1}^{n^-} (p_{k,m} - p_{l,m}).$$

Поскольку

$$0 = 1 - 1 = \sum_{m=1}^n (p_{k,m} - p_{l,m}) = \sum_{m=1}^{n^+} (p_{k,m} - p_{l,m}) + \sum_{m=1}^{n^-} (p_{k,m} - p_{l,m}), \quad \min p_{i,j} > 0$$

имеем

$$d_{l,k} = \sum_{m=1}^{n^+} (p_{k,m} - p_{l,m}) = \sum_{m=1}^{n^-} (p_{k,m} - p_{l,m}) = d < 1.$$

Тогда получаем

$$M_j(t+1) - m_j(t+1) = d \cdot (M_j(t) - m_j(t)).$$

Отсюда имеем

$$M_j(t) - m_j(t) \leq d^t \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

■

**Следствие 25.4.** Пусть при некотором  $N$  все элементы матрицы  $P^N$  строго положительны. Тогда соответствующая цепь Маркова является эргодической.

*Доказательство.* Рассмотрим марковскую цепь с  $Q = P^N$ . Тогда по предыдущей теореме верно

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} q_{i,j}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{i,j}(Nt) = p_j.$$

Вычислим требуемый предел:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{i,j}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{i,j}(k + Nt) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \sum_{l=1}^n p_{i,l}(k) p_{l,j}(Nt) \right) = p_j \cdot \sum_{l=1}^n p_{i,l}(k) = p_j.$$

■

## 25.3 Схемы блужданий

### 25.3.1 Блуждание по отрезку с поглощением на концах

Пусть частица движется по целым точкам отрезка  $[0, N]$  по одной точке за раз. Состояние  $X(t)$  определяется текущей координатой частицы. Рассмотрим следующее правило изменения состояний: если текущая точка – крайняя точка отрезка, то с вероятностью 1 частица в ней и останется. Иначе с вероятностью  $p$  частица движется на 1 ячейку вправо, и с вероятностью  $q = 1 - p$  – влево. Этот процесс – марковский, со следующей матрицей переходов:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q & 0 & p & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем  $p_{x,0}(t)$  и  $p_{x,N}(t)$  – вероятности поглощения за время  $t$  при условии, что  $X(0) = x$ . Имеем

$$\begin{aligned} p_{x,0}(t) &= P(X(t+1) = 0 \mid X(0) = x) = P(X(t+1) = 0 \mid X(1) = x+1)P(X(1) = x+1 \mid X(0) = x) \\ &\quad + P(X(t+1) = 0 \mid X(1) = x-1)P(X(1) = x-1 \mid X(0) = x) \\ &= pp_{x+1,0}(t) + qp_{x-1,0}(t). \end{aligned}$$

$p_{y,0}$  ограничена и возрастает при  $t \rightarrow +\infty$ , поэтому существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{y,0}(t) = p_{y,0}(\infty).$$

Совершая такой же предельный переход в предыдущем равенстве, получаем

$$p_{x,0}(\infty) = pp_{x+1,0}(\infty) + qp_{x-1,0}(\infty).$$

Кроме того,

$$p_{0,0} = p_{0,0}(\infty) = 1, \quad p_{N,0} = p_{N,0}(\infty) = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в конечных разностях второго порядка. При  $q \neq p$  его решение имеет вид

$$p_{x,0}(\infty) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad p_{x,N}(\infty) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

При  $q = p = \frac{1}{2}$  решение имеет вид

$$p_{x,0}(\infty) = 1 - \frac{x}{N}, \quad p_{x,N}(\infty) = \frac{x}{N}.$$

### 25.3.2 Блуждание по отрезку с отражением на концах

Изменим поведение частицы на концах. Пусть она не поглощается, а отражается с определенной вероятностью. Тогда матрица переходов этого процесса устроена следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q & 0 & p & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & \dots & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 25.5.** При  $p \in (0, 1)$   $\exists N$ :  $P^N$  – эргодическая матрица.

*Доказательство.* Пусть  $i < j$ ,  $i + j < N$ . Рассмотрим траекторию  $\omega$ :

$$\underbrace{i \rightarrow (i-1) \rightarrow \dots \rightarrow 1}_{i \text{ шагов}} \rightarrow \underbrace{0 \rightarrow \dots \rightarrow 0}_{N-(i+j) \text{ шагов}} \rightarrow \underbrace{1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow j}_{j \text{ шагов}}.$$

Вычислим вероятность такой траектории:

$$p_{i,j}(\omega) = p^i q^{N-i-j} p^j > 0.$$

Кроме того, очевидно, что  $p_{i,j}(N) > p_{i,j}(\omega) > 0$ . Аналогично можно показать, что  $p_{i,j}(N) > 0$  и в случае  $i \geq j$ . ■

Получается, что построенная цепь является эргодической. Раз так, существуют пределы

$$p_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{i,j}(t),$$

которые можно определить из системы уравнений

$$p_j = \sum_{i=0}^N p_i p_{i,j}, \quad \sum_{j=0}^N p_j = 1.$$

Решая эту систему методом индукции в нашем случае, получаем

$$p_1 = \frac{p}{q} p_0, \quad p_2 = \frac{p^2}{q^2} p_0, \quad \dots$$

$p_0$  определим из условия нормировки:

$$1 = \sum_{i=0}^N p_i = p_0 \sum_{i=0}^N \frac{p^i}{q^i} \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^N \frac{p^i}{q^i}} = \frac{\frac{p}{q} - 1}{\left(\frac{p}{q}\right)^{N+1} - 1}.$$

Устремляя  $N \rightarrow +\infty$ , получим результат для счётных марковских цепей.

$$p_k = \frac{p^k}{q^k} \left(1 - \frac{p}{q}\right).$$