

Математическая статистика

13 июня 2020 г.

Содержание

1	Постановка задач математической статистики	2
1.1	Задачи теории вероятностей	2
1.2	Задачи математической статистики	2

1 Постановка задач математической статистики

Сравним задачи теории вероятностей и математической статистики

1.1 Задачи теории вероятностей

Заданы:

- Вероятностное пространство $\langle \Omega, \Sigma, P \rangle$.
- Случайная величина $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Требуется получить различного рода характеристики величины X и величин, получающихся из X .

1.2 Задачи математической статистики

Определение. Статистическим экспериментом называется четверка

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{A}, P_\theta, \Theta \rangle.$$

Здесь:

- \mathcal{X} – множество наблюдений.
- \mathcal{A} – σ -алгебра подмножеств \mathcal{X} .
- P_θ – известная с точностью до неизвестного параметра θ вероятностная мера – закон распределения наблюдаемых данных.
- Θ – множество допустимых значений неизвестного параметра, то есть $\theta \in \Theta$.

Задачей математической статистики является получение той или иной информации о законе распределения наблюдаемых данных $P = P_\theta$.

Определение. Статистикой называется измеримая функция

$$f : \mathcal{X} \rightarrow A.$$

Для произвольного A .

Определение. Пусть

$$\bar{X} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle.$$

Где $X_i \sim X$ – одинаково распределенные случайные величины. Соответствующая модель называется моделью независимой однородной выборки.

Определение. Гипотезой H называется подмножество Θ :

$$H \subseteq \Theta.$$

Перечислим некоторые задачи математической статистики.

- Оценивание параметра θ или какой-либо функции $g(\theta)$, то есть построение статистики $\hat{g}: \mathcal{X} \rightarrow \Theta$. Оценивание может быть:
 - *точечным*, то есть указание численной оценки $g(\theta)$
 - *длительным*, то есть указание множества, с фиксированной вероятностью содержащего $g(\theta)$
- Проверка гипотез. Пусть имеется разбиение Θ на гипотезы: $\Theta = \bigsqcup_{n \in N} H_n$. Тогда проверкой гипотезы назовем построение *теста (критерия)*, то есть отображения

$$\varphi: \mathcal{X} \rightarrow N.$$

Которое по наблюдению выдает номер гипотезы, которому это наблюдение “соответствует”.

Естественно, перечисленные задачи можно оценивать с точки зрения качества. В этом смысле всегда требуется с точки зрения какой-либо метрики построить “лучшую” оценку.