# Основы топологии

# Оглавление

# Глава 1

# Основные понятия

## 1.1 Метрическое пространство

**Определение.** *Метрикой* на множестве $X$ называют $\rho : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам метрики:

- $\rho(x) \geqslant 0$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

**Определение.** Пару $\langle X, \rho \rangle$, где $\rho$ — метрика на $X$, называют *метрическим пространством*

**Примеры.**

- Стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$: $\rho(x, y) = |x, y|_2$, где $d_k(x, y) \stackrel{def}{=} |x, y|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^k}$
- $|.,.|_k$ является метрикой на $\mathbb{R}$ при любых $k \geqslant 1$
- $|x, y|_\infty = \max_{i=1}^{n}(x_i - y_i)$ — метрика на $\mathbb{R}$
- $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ иначе — метрика, порождающая дискретное пространство.

*Далее, если не указано, речь идет о метрическом пространстве $X$*

**Определение.** *Шаром* радиуса $r$ с центром в точке $x$ называется

$$B_r(x) \stackrel{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) < r \,\}$$

**Определение.** *Замкнутым шаром* радиуса $r$ с центром в точке $x$ называется

$$\overline{B_r}(x) \stackrel{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r \,\}$$

**Определение.** *Расстоянием* от точки $x$ до множества $A$ называется

$$\rho(x, A) \stackrel{def}{=} \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

**Определение.** *Диаметром* множества $A$ называется

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\,\rho(x,y) \mid x,y \in A\}$$

**Определение.** В метрическом пространстве *открытыми* называют множества $A$ такие, что

$$\forall x \in A\ \exists B_r(x) \subset A$$

Иначе говоря, любая точка открытого множества входит в него с некоторым шаром.

**Определение.** Множество $A$ называют *ограниченным*, если $\operatorname{diam}(A) < +\infty$

**Теорема 1.1.1.** Множество $A$ ограниченно $\iff$ его можно вписать в шар

*Доказательство.*

$\implies$ Пусть $m = \operatorname{diam}(A)$. Покажем, что $A$ можно вписать в шар радиуса $m+1$. Возьмем произвольную точку $x \in A$. Тогда $\forall y \in A\ \rho(x,y) \leqslant m < m+1 \implies y \in B_{m+1}(x)$

$\impliedby$ Пусть $y,z \in A$ и $A$ можно вписать в шар $B_r(x)$. Тогда $2r > \rho(x,y) + \rho(x,z) \geqslant \rho(y,z) \implies \rho(y,z) < 2r \implies A$ ограничено.

■

**Теорема 1.1.2.**

- Произольное объединение открытых множеств открыто
- Пересечение двух (а значит, и произвольного конечного числа) открытых множеств открыто.

*Доказательство.*

- Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство открытых множеств. Тогда

$$x \in \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \implies x \in G_\alpha \implies \exists U(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$$

- Пусть $A$ и $B$ — открытые множества. Тогда

$$\begin{gathered} x \in A \cap B \implies x \in A\ \wedge\ x \in B \implies \\ \exists B_{r_1}(x) \subset A\ \wedge\ B_{r_2}(x) \subset B \implies \\ x \in B_{\min(r_1,r_2)}(x) \subset A \cap B \end{gathered}$$

■

**Определение.** *Липшицево эквивалентными* называют отображения $f$ и $g$ в $\mathbb{R}$, такие, что $\exists c_1, c_2\colon\ c_1 f \leqslant g \leqslant c_2 f$

**Пример.** В $\mathbb{R}^n$ метрики $d_1$ и $d_2$ липшицево эквивалентны

## 1.2 Топологическое пространство

**Определение.** *Топологией* на множестве $X$ называют $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- $\varnothing, X \in \Omega$
- $A, B \in \Omega \Longrightarrow A \cap B \in \Omega$
- $\{X_\alpha \in \Omega\}_{\alpha \in A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_a \in \Omega$

Иными словами, топология замкнута относительно конечных пересечений и произвольных объединений её элементов.

**Определение.** Пара $\langle X, \Omega \rangle$, где $\Omega$ — топология на $X$, называется *топологическим пространством*.

**Определение.** Элементы топологии называются *открытыми множествами*. Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми множествами*.

**Примеры.**

- $\Omega = \mathcal{P}(X)$ — дискретная топология
- $\Omega = \{\varnothing, X\}$ — антидискретная топология
- Все метрические пространства являются топологическими пространствами, порожденными метрикой.
- $\Omega = \varnothing \cup \{\text{все дополнения конечных множеств}\}$

**Определение.** *Метризуемым* называется топологическое пространство, топология которого может быть порождена метрикой.

**Примеры.**

- Дискретная топология метризуема
- Антидискретная топология не метризуема

**Определение.** *Окрестностью* точки $x$ называют любое открытое множество, содержащее $x$. Далее окрестность точки $x$ будет обозначаться $U(x)$.

**Определение.** Точка $x$ называется *внутренней* для множества $A$, если она входит в него с некоторой окрестностью:

$$\exists U(x) \colon\ U(x) \subset A$$

**Определение.** Точка $x$ называется *граничной* точкой множества $A$, если любая окрестность точки $x$ имеет непустое пересечение как с $A$, так и с его дополнением:

$$\forall U(x)\ \ A \cap U(x) \neq \varnothing \wedge (X \setminus A) \cap U(x) \neq \varnothing$$

**Определение.** Точка $x$ называется *внешней* точкой $A$, если

$$\exists U(x) \ \ A \cap U(x) = \varnothing$$

**Определение.** Точка $x$ называется *точкой прикосновения (предельной точкой)* множества $A$, если

$$\forall U(x) \ \ A \cap U(x) \neq \varnothing$$

**Замечание.** Точка прикосновения и внешняя точка — формальные отрицания друг друга.

**Теорема 1.2.1.**

- $\varnothing$, $X$ замкнуты
- $A$, $B$ замкнуты $\implies A \cup B$ замкнуто
- если $C_\alpha$ замнкнуты, то $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ замкнуто

*Доказательство.*

- $X = X \setminus \varnothing$ — замкнуто по опделелению. Аналогично $\varnothing = X \setminus X$
- $A \cup B$ замкнуто $\iff X \setminus (A \cap B)$ открыто $\iff (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ открыто $\impliedby (X \setminus A)$, $(X \setminus B)$ открыты $\iff A$, $B$ замкнуты.
- Аналогично ii

■

**Теорема 1.2.2.** $A$ открыто, $B$ замкнуто. Тогда

- $A \setminus B$ открыто
- $B \setminus A$ замкнуто

*Доказательство.*

- $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ — открыто
- $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$ — замкнуто

■

## 1.3 Внутренность и замыкание

**Определение.** *Внутренностью* множества $A$ называют наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в $A$, иначе говоря:

$$\mathrm{Int}(A) \overset{def}{=} \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} U$$

**Определение.** *Замыканием* множества $A$ называют наименьшее по включению замкнутое множество, сожержащее $A$, иначе говоря:

$$\mathrm{Cl}(A) \overset{def}{=} \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ cl_X(C)}} C$$

**Теорема 1.3.1.** (Свойства Int)

- $\mathrm{Int}(A)$ открыто
- $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$
- $open_X(B)$, $B \subseteq A \Longrightarrow B \subseteq \mathrm{Int}(A)$
- $\mathrm{Int}(A) = A \Longleftrightarrow open_X(A)$
- $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = A$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$
- $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$
- $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$

*Доказательство.*

- $\mathrm{Int}(A)$ открыто как объединение открытых
- В объединения входят только подмножества $A$, поэтому $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$
- $B$ по определению войдет в объединение
- $\Longrightarrow$ по пункту (i). $\Longleftarrow$ по пункту (iii)
- см. пункт (iv)
- Все открытые подмножества $A$ являются открытыми подмножествами $B$
- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B \Longrightarrow$
  $\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}(A), \mathrm{Int}(B) \Longrightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

  $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A) \subseteq A$, аналогично $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq B$, поэтому $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq A \cap B \Longrightarrow \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)) = \mathrm{Int}(A \cap B) \Longrightarrow \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cap B)$

∎

**Теорема 1.3.2.** (Свойства Cl)

- $\mathrm{Cl}(A)$ замкнуто
- $\mathrm{Cl}(A) \supseteq A$
- $cl_X(B), B \supseteq A \Longrightarrow B \supseteq \mathrm{Cl}(A)$
- $\mathrm{Cl}(A) = A \Longleftrightarrow cl_X(A)$
- $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = A$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$
- $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$
- $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$

*Доказательство.* Можно доказать аналогично предыдущей теореме, а можно доказать, пользуясь переходом к дополнению в предыдущей теореме. ∎

**Теорема 1.3.3.** (Связь Int и Cl)

- $X \setminus \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Cl}(X \setminus A)$
- $X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(X \setminus A)$

*Доказательство.*

- $$X \setminus \mathrm{Int}(A) \overset{def}{=} X \setminus \Big( \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} U \Big) = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} X \setminus U \overset{def}{=} \mathrm{Cl}(X \setminus A)$$

  так как множества вида $X \setminus U$ суть замкнутые множества, содержащие $A$
- Аналогично

∎

**Определение.** *Границей* множества $A$ называется

$$\mathrm{Fr}(A) \overset{def}{=} \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$$

**Теорема 1.3.4.** (Свойства Fr)

- $\mathrm{Fr}(A)$ замкнуто
- $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$
- $A$ замкнуто $\Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \subseteq A$
- $A$ открыто $\Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$

*Доказательство.*

- Очевидно в свете предыдущих теорем
- $A$ замкнуто $\iff \mathrm{Cl}(A) = A \iff \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A) \subseteq A$
- $A$ открыто $\iff \mathrm{Int}(A) = A \iff \mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A \iff \mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$

■

**Теорема 1.3.5.** (Характеризация внутренности)
$\mathrm{Int}(A)$ — множество всех внутренних точек $A$.

*Доказательство.* Докажем, что $x \in \mathrm{Int}(A) \iff x$ — внутренняя точка $A$

$\implies$ $x \in \mathrm{Int}(A)$ — открыто $\implies U(x) = \mathrm{Int}(A) \subseteq A \implies x$ — внутренняя точка $A$

$\impliedby$ $x$ — внутренняя для $A \implies \exists U(x) \subseteq A \implies x \in \mathrm{Int}(A)$ так как по определению $\mathrm{Int}(A)$ — это объединение всех открытых множеств, содержащихся в $A$, в том числе и $U(x)$. ■

**Следствие 1.3.6.** $A$ открыто $\iff \forall x \in A$ $x$ — внутренняя точка $A$

**Теорема 1.3.7.** (Характеризация замыкания)
$\mathrm{Cl}(A)$ — множество всех точек прикосновения $A$.

*Доказательство.*

$$X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(X \setminus A) = \{\text{внешние точки } A\} = X \setminus \{\text{точки прикосновения } A\}$$

■

**Определение.** Множество $A$ называется *всюду плотным*, если $\mathrm{Cl}(A) = X$.

**Определение.** Топологическое пространство $X$ называют *сепарабельным*, если в нем существует не более чем счетное всюду плотное множество.

**Замечание.** Всюду плотность множества $A$ эквивалентна

- $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$.
- $\forall open_X(D)\ D \cap A \neq \varnothing$.

*Доказательство.*

- $\mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
- Если это условие не выполнилось для какого-то непустого $D$, то любая его точка является внешней для множества $A$, а значит, не входит в замыкание. Если же это условие выполнилось для всех $D$, то любая окрестность любой точки пересекается с $A$ (надо взять $D =$ этой окрестности), значит, любая точка является точкой прикосновения $A$, о есть $A$ всюду плотно.

■

**Определение.** Множество $A \subseteq X$ называют *нигде не плотным*, если внутренность его замыкание пуста: $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$.

**Замечание.** Нигде не плотность множества $A$ эквивалентна тому, что в любом непустом открытом множестве найдется открытое подмножество, не пересекающееся с $A$.

**Теорема 1.3.8.** В сепарабельном пространстве не существует более чем счетного дизъюнктного набора непустых открытых множеств.

*Доказательство.* Пусть $U_i$ — более чем счетный дизъюнктный набор непустых открытых множеств. Выберем тогда из каждого $U_i$ точку $p_i$, которая лежит в пересечение $U_i \cap S$, где $S$ — какое-нибудь счетное всюду плотное множество. Получим, что $\{p_i\} \subseteq S$, то есть $S$ более, чем счетно. ■

## 1.4 Сравнение топологий

**Определение.** Пусть $\Omega_1$, $\Omega_2$ — топологии на $X$. Говорят, что топология $\Omega_1$ *слабее* топологии $\Omega_2$, если $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

**Теорема 1.4.1.** (Сравнение метрических топологий)
Пусть $d_1$, $d_2$ — метрики на $X$, $Top(d)$ — топология, порожденная метрикой $d$. Тогда $Top(d_1) \subseteq Top(d_2)$ тогда и только тогда, когда в любом шаре по $d_1$ содержится шар по $d_2$ с таким же центром.

*Доказательство.*

- $\Longrightarrow$ Раз $Top(d_1) \subseteq Top(d_2)$, то шар $B_1(x,r)$ по метрике $d_1$ открыт в $Top(d_2)$, значит любая его точка, включая $x$, входит в $B_1(x,r)$ с некоторой окрестностью $B_2(x,r')$ во второй топологии.

- $\Longleftarrow$ Проверим, что открытое в первой топологии множество $U$ открыто во второй топологии. Для этого проверим, что все его точки — внутренние по второй метрике. $U$ открыто в $Top(d_1) \Longrightarrow \forall x \in U\ \exists\ B_1(x,r) \subseteq U \Longrightarrow \exists\ B_2(x,r) \subseteq U$.

■

**Следствие 1.4.2.** $d_1 \leqslant d_2 \Longrightarrow Top(d_1) \subseteq Top(d_2)$.

**Следствие 1.4.3.** $\exists c > 0\colon\ d_1 \leqslant c d_2 \Longrightarrow Top(d_1) \subseteq Top(d_2)$.

**Следствие 1.4.4.** $d_1$, $d_2$ липшицево эквивалентны $\Longrightarrow Top(d_1) = Top(d_2)$.

## 1.5 База топологии

**Определение.** *Базой топологии* $\Omega$ называют $\Sigma \subseteq \Omega$ такое, что

$$\forall U \in \Omega\ \exists \lambda_\alpha \in \Sigma\colon\ U = \bigcup \lambda_\alpha$$

**Теорема 1.5.1.** $\Sigma$ — база топологиии $\Omega$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in X\ \forall U(x)\ \exists V \in \Sigma\colon x \in V \subseteq U$$

*Доказательство.*

$\Longrightarrow$ $\Sigma$ — база топологии, поэтому

$$\exists \lambda_\alpha \in \Sigma\colon\ U(x) = \bigcup \lambda_\alpha$$

Поэтому $\exists \alpha\colon x \in \lambda_\alpha$.

$\Longleftarrow$ Пусть $A$ открыто, тогда

$$A = \bigcup_{x \in A} V(x)$$

■

**Определение.** $\Sigma_x$ называется *базой топологии в точке* $x$, если

- $\forall V \in \Sigma_x\ x \in V$.
- $\forall U \in \Omega\colon\ x \in U\ \exists V \in \Sigma_x\colon x \in V \subseteq U$.

**Замечание.** $\Sigma$ — база топологии тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in X\ \Sigma_x = \{U \in \Sigma \mid x \in U\} \text{ — база топологии в } x$$

**Замечание.** $\forall x\ \Sigma_x$ — базы в точках, тогда $\bigcup \Sigma_x$ — база топологии.

**Теорема 1.5.2.** $\Sigma$ — база некоторой топологии тогда и только тогда, когда

- $X = \bigcup \Sigma$.
- $\forall U, V \in \Sigma\ U \cap V$ представляется в виде объединения элементов $\Sigma$.

*Доказательство.* $\Longrightarrow$ $X$ открыто, поэтому обязательно выполнено первое условие. Второе условие выполнено потому, что $U \cap V$ открыто, то есть по определению должно представляться в виде объединения элементов $\Sigma$.

$\Longleftarrow$ Назначим $\Omega$ как всевозможные объединения множеств из $\Sigma$. Проверим, что $\Omega$ — топология.

- $\varnothing, X \in \Omega$ — очевидно.
- $\bigcup U \in X$ по построению.
- $U \cap V = \left(\bigcup U_i\right) \cap \left(\bigcup V_i\right) = \bigcup U_i \cap V_i$. $U_i \cap V_i$ открыто по посылке, поэтому $U \cap V$ открыто.

■

## 1.6 Индуцированная топология

**Определение.** Пусть $X$ — топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда на $Y$ можно завести топологию, которую называют *индуцированной*: множество $A \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда $\exists B \in \Omega(X)\colon\ A = B \cap Y$. В таком случае топологическое пространство $\langle Y, \Omega(Y)\rangle$ называют *подпространством*.

**Теорема 1.6.1.** (База подпространства в точке)
Пусть $X$ — топологическое пространство, $Y \subset X$ — его подпространство, $y \in Y$, $\Sigma_y$ — база $X$ в точке $y$. Тогда

$$\{U \cap Y\}_{U \in \Sigma_y}$$

является базой индуцированной топологии в точке $y$.

*Доказательство.* Пусть $y \in A$ открыто в $Y$. Тогда по определению индуцированной топологии $\exists U \in \Omega(X)\colon\ A = U \cap Y \ni y$. Тогда по определению базы в точке $\exists V \in \Sigma_y\colon\ y \in V \subseteq U$. Тогда $y \in V \cap Y \subseteq U \cap Y$, что и требовалось. ∎

**Следствие 1.6.2.** Пусть $\Sigma$ — база $\Omega(X)$, $Y$ — подпространство $X$. Тогда

$$\{V \cap Y \mid V \in \Sigma\} \text{ — база } \Omega(Y)$$

**Теорема 1.6.3.** Пусть $X$ — т.п., $Y \subset X$ — его подпространство, $A \subseteq Y$. Тогда

- $open_X(A) \Longrightarrow open_Y(A)$.
- $cl_Y(A) \Longleftrightarrow \exists cl_X(B)\colon\ B \cap Y = A$.
- $cl_X(A) \Longrightarrow cl_Y(A)$.
- $open_X(Y) \Longleftrightarrow (open_Y(A) \Longleftrightarrow open_X(A))$.
- $cl_X(Y) \Longleftrightarrow (cl_Y(A) \Longleftrightarrow cl_X(A))$.

**Теорема 1.6.4.** (О транзитивности индуцирования)
Пусть $X$ — т.п., $X \supset Y \supset Z$, тогда топологии $Y \to Z$, $X \to Z$ совпадают.

*Доказательство.*

$$open_{X\to Z}(A) \Longleftrightarrow \exists open_X(U)\colon\ A = U \cap Z \Longleftrightarrow A = \underbrace{(U \cap Y)}_{open_Y} \cap Z \Longleftrightarrow open_{Y\to Z}(A).$$

∎

**Замечание.**

- $\mathrm{Cl}_X(A) \cap Y = \mathrm{Cl}_Y(A)$.
- $\mathrm{Int}_X(A) \cap Y \neq \mathrm{Int}_Y(A)$ (вообще говоря).