Основы топологии

Оглавление

Глава 1

Основные понятия

1.1 Метрическое пространство

Определение. *Метрикой* на множестве X называют $\rho : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам метрики:

- $\rho(x) \geqslant 0$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Определение. Пару $\langle X, \rho \rangle$, где ρ — метрика на X, называют *метрическим пространством*

Примеры.

- Стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$: $\rho(x, y) = |x, y|_2$, где $d_k(x, y) \overset{def}{=} |x, y|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^k}$
- $|.,.|_k$ является метрикой на $\mathbb{R}$ при любых $k \geqslant 1$
- $|x, y|_\infty = \max_{i=1}^n (x_i - y_i)$ — метрика на $\mathbb{R}$
- $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ иначе — метрика, порождающая дискретное пространство.

Далее, если не указано, речь идет о метрическом пространстве X

Определение. *Шаром* радиуса r с центром в точке x называется

$$B_r(x) \overset{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) < r \,\}$$

Определение. *Замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке x называется

$$\overline{B_r}(x) \overset{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r \,\}$$

Определение. *Расстоянием* от точки x до множества A называется

$$\rho(x, A) \overset{def}{=} \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

Определение. *Диаметром* множества A называется

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\,\rho(x,y) \mid x, y \in A\,\}$$

Определение. В метрическом пространстве *открытыми* называют множества A такие, что

$$\forall x \in A\ \exists B_r(x) \subset A$$

Иначе говоря, любая точка открытого множества входит в него с некоторым шаром.

Определение. Множество A называют *ограниченным*, если $\operatorname{diam}(A) < +\infty$

Теорема 1.1.1. Множество A ограниченно $\Longleftrightarrow$ его можно вписать в шар

Доказательство.

- $\Longrightarrow$ Пусть $m = \operatorname{diam}(A)$. Покажем, что A можно вписать в шар радиуса $m+1$. Возьмем произвольную точку $x \in A$. Тогда $\forall y \in A\ \rho(x,y) \leqslant m < m+1 \Longrightarrow y \in B_{m+1}(x)$
- $\Longleftarrow$ Пусть $y, z \in A$ и A можно вписать в шар $B_r(x)$. Тогда $2r > \rho(x,y) + \rho(x,z) \geqslant \rho(y,z) \Longrightarrow \rho(y,z) < 2r \Longrightarrow A$ ограничено.

■

Теорема 1.1.2.

- Произольное объединение открытых множеств открыто
- Пересечение двух (а значит, и произвольного конечного числа) открытых множеств открыто.

Доказательство.

- Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство открытых множеств. Тогда

$$x \in \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \Longrightarrow x \in G_\alpha \Longrightarrow \exists U(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$$

- Пусть A и B — открытые множества. Тогда

$$\begin{gathered} x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \ \wedge\ x \in B \Longrightarrow \\ \exists B_{r_1}(x) \subset A \ \wedge\ B_{r_2}(x) \subset B \Longrightarrow \\ x \in B_{\min(r_1,r_2)}(x) \subset A \cap B \end{gathered}$$

■

Определение. *Липшицево эквивалентными* называют отображения f и g в $\mathbb{R}$, такие, что $\exists c_1, c_2\colon\ c_1 f \leqslant g \leqslant c_2 f$

Пример. В $\mathbb{R}^n$ метрики d_1 и d_2 липшицево эквивалентны

1.2 Топологическое пространство

Определение. *Топологией* на множестве X называют $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- $\varnothing, X \in \Omega$
- $A, B \in \Omega \Longrightarrow A \cap B \in \Omega$
- $\{X_\alpha \in \Omega\}_{\alpha \in A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_a \in \Omega$

Иными словами, топология замкнута относительно конечных пересечений и произвольных объединений её элементов.

Определение. Пара $\langle X, \Omega \rangle$, где Ω — топология на X, называется *топологическим пространством*.

Определение. Элементы топологии называются *открытыми множествами*. Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми множествами*.

Примеры.

- $\Omega = \mathcal{P}(X)$ — дискретная топология
- $\Omega = \{\varnothing, X\}$ — антидискретная топология
- Все метрические пространства являются топологическими пространствами, порожденными метрикой.
- $\Omega = \varnothing \cup \{$все дополнения конечных множеств$\}$

Определение. *Метризуемым* называется топологическое пространство, топология которого может быть порождена метрикой.

Примеры.

- Дискретная топология метризуема
- Антидискретная топология не метризуема

Определение. *Окрестностью* точки x называют любое открытое множество, содержащее x. Далее окрестность точки x будет обозначаться $U(x)$.

Определение. Точка x называется *внутренней* для множества A, если она входит в него с некоторой окрестностью:

$$\exists U(x) : \; U(x) \subset A$$

Определение. Точка x называется *граничной* точкой множества A, если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение как с A, так и с его дополнением:

$$\forall U(x) \;\; A \cap U(x) \neq \varnothing \wedge (X \setminus A) \cap U(x) \neq \varnothing$$

Определение. Точка x называется *предельной* точкой множества A, если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение с A:

$$\forall U(x) \ \ A \cap U(x) \neq \varnothing$$

Определение. Точка x называется *внешней* точкой A, если

$$\exists U(x) \ \ A \cap U(x) = \varnothing$$

Определение. Точка x называется *точкой прикосновения* множества A, если

$$\forall U(x) \ \ A \cap U(x) \neq \varnothing$$

Замечание. Точка прикосновения и внешняя точка — формальные отрицания друг друга.

Теорема 1.2.1.

- $\varnothing$, X замкнуты
- A, B замкнуты $\Longrightarrow A \cup B$ замкнуто
- если C_α замнкнуты, то $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ замкнуто

Доказательство.

- $X = X \setminus \varnothing$ — замкнуто по опделелению. Аналогично $\varnothing = X \setminus X$
- $A \cup B$ замкнуто $\Longleftrightarrow X \setminus (A \cap B)$ открыто $\Longleftrightarrow (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ открыто $\Longleftarrow (X \setminus A)$, $(X \setminus B)$ открыты $\Longleftrightarrow A$, B замкнуты.
- Аналогично ii

■

Теорема 1.2.2. A открыто, B замкнуто. Тогда

- $A \setminus B$ открыто
- $B \setminus A$ замкнуто

Доказательство.

- $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ — открыто
- $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$ — замкнуто

■

1.3 Внутренность и замыкание

Определение. *Внутренностью* множества A называют наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A, иначе говоря:

$$\operatorname{Int}(A) \overset{def}{=} \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} U$$

Определение. *Замыканием* множества A называют наименьшее по включению замкнутое множество, сожержащее A, иначе говоря:

$$\operatorname{Cl}(A) \overset{def}{=} \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ cl_X(C)}} C$$

Теорема 1.3.1. (Свойства Int)

- $\operatorname{Int}(A)$ открыто
- $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$
- $open_X(B)$, $B \subseteq A \Longrightarrow B \subseteq \operatorname{Int}(A)$
- $\operatorname{Int}(A) = A \Longleftrightarrow open_X(A)$
- $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = A$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{Int}(A) \subseteq \operatorname{Int}(B)$
- $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$
- $\operatorname{Int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B)$

Доказательство.

- $\operatorname{Int}(A)$ открыто как объединение открытых
- В объединения входят только подмножества A, поэтому $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$
- B по определению войдет в объединение
- $\Longrightarrow$ по пункту (i). $\Longleftarrow$ по пункту (iii)
- см. пункт (iv)
- Все открытые подмножества A являются открытыми подмножествами B
- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B \Longrightarrow$
  $\operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int}(A), \operatorname{Int}(B) \Longrightarrow \operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$

  $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \subseteq \operatorname{Int}(A) \subseteq A$, аналогично $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \subseteq B$, поэтому $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \subseteq A \cap B \Longrightarrow \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)) = \operatorname{Int}(A \cap B) \Longrightarrow \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \subseteq \operatorname{Int}(A \cap B)$

■

Теорема 1.3.2. (Свойства Cl)

- $\mathrm{Cl}(A)$ замкнуто
- $\mathrm{Cl}(A) \supseteq A$
- $cl_X(B),\, B \supseteq A \Longrightarrow B \supseteq \mathrm{Cl}(A)$
- $\mathrm{Cl}(A) = A \Longleftrightarrow cl_X(A)$
- $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = A$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$
- $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$
- $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$

Доказательство. Можно доказать аналогично предыдущей теореме, а можно доказать, пользуясь переходом к дополнению в предыдущей теореме. ■

Теорема 1.3.3. (Связь Int и Cl)

- $X \setminus \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Cl}(X \setminus A)$
- $X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(X \setminus A)$

Доказательство.

- $$X \setminus \mathrm{Int}(A) \overset{def}{=} X \setminus \Big(\bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} U \Big) = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} X \setminus U \overset{def}{=} \mathrm{Cl}(X \setminus A)$$

  так как множества вида $X \setminus U$ суть замкнутые множества, содержащие A
- Аналогично

■

Определение. *Границей* множества A называется

$$\mathrm{Fr}(A) \overset{def}{=} \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$$

Теорема 1.3.4. (Свойства Fr)

- $\mathrm{Fr}(A)$ замкнуто
- $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$
- A замкнуто $\Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \subseteq A$
- A открыто $\Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$

Доказательство.

- Очевидно в свете предыдущих теорем
- A замкнуто $\iff \mathrm{Cl}(A) = A \iff \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A) \subseteq A$
- A открыто $\iff \mathrm{Int}(A) = A \iff \mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A \iff \mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$

■

Теорема 1.3.5. (Характеризация внутренности)
$\mathrm{Int}(A)$ — множество всех внутренних точек A.

Доказательство. Докажем, что $x \in \mathrm{Int}(A) \iff x$ — внутренняя точка A

$\implies$ $x \in \mathrm{Int}(A)$ — открыто $\implies U(x) = \mathrm{Int}(A) \subseteq A \implies x$ — внутренняя точка A

$\impliedby$ x — внутренняя для $A \implies \exists U(x) \subseteq A \implies x \in \mathrm{Int}(A)$ так как по определению $\mathrm{Int}(A)$ — это объединение всех открытых множеств, содержащихся в A, в том числе и $U(x)$. ■

Следствие 1.3.6. A открыто $\iff \forall x \in A\ x$ — внутренняя точка A

Теорема 1.3.7. (Характеризация замыкания)
$\mathrm{Cl}(A)$ — множество всех точек прикосновения A.

Доказательство.

$$X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(X \setminus A) = \{\text{внешние точки } A\} = X \setminus \{\text{точки прикосновения } A\}$$

■

Определение. Множество A называется *всюду плотным*, если $\mathrm{Cl}(A) = X$.

Определение. Топологическое пространство X называют *сепарабельным*, если в нем существует не более чем счетное всюду плотное множество.