Основы топологии

Оглавление

Глава 1

Основные понятия

1.1 Метрическое пространство

Определение. *Метрикой* на множестве X называют $\rho : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам метрики:

- $\rho(x) \geqslant 0$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Определение. Пару $\langle X, \rho \rangle$, где ρ — метрика на X, называют *метрическим пространством*

Примеры.

- Стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$: $\rho(x, y) = |x, y|_2$, где $d_k(x, y) \overset{def}{=} |x, y|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^k}$
- $|., .|_k$ является метрикой на $\mathbb{R}$ при любых $k \geqslant 1$
- $|x, y|_\infty = \max_{i=1}^{n}(x_i - y_i)$ — метрика на $\mathbb{R}$
- $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ иначе — метрика, порождающая дискретное пространство.

Далее, если не указано, речь идет о метрическом пространстве X

Определение. *Шаром* радиуса r с центром в точке x называется

$$B_r(x) \overset{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) < r \,\}$$

Определение. *Замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке x называется

$$\overline{B_r}(x) \overset{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r \,\}$$

Определение. *Расстоянием* от точки x до множества A называется

$$\rho(x, A) \overset{def}{=} \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

Определение. *Диаметром* множества A называется

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\,\rho(x, y) \mid x, y \in A\,\}$$

Определение. В метрическом пространстве *открытыми* называют множества A такие, что

$$\forall x \in A\ \exists B_r(x) \subset A$$

Иначе говоря, любая точка открытого множества входит в него с некоторым шаром.

Определение. Множество A называют *ограниченным*, если $\operatorname{diam}(A) < +\infty$

Теорема 1.1.1. Множество A ограниченно $\Longleftrightarrow$ его можно вписать в шар

Доказательство.

- $\Longrightarrow$ Пусть $m = \operatorname{diam}(A)$. Покажем, что A можно вписать в шар радиуса $m+1$. Возьмем произвольную точку $x \in A$. Тогда $\forall y \in A\ \rho(x, y) \leqslant m < m+1 \Longrightarrow y \in B_{m+1}(x)$
- $\Longleftarrow$ Пусть $y, z \in A$ и A можно вписать в шар $B_r(x)$. Тогда $2r > \rho(x, y) + \rho(x, z) \geqslant \rho(y, z) \Longrightarrow \rho(y, z) < 2r \Longrightarrow A$ ограничено.

■

Теорема 1.1.2.

- Произольное объединение открытых множеств открыто
- Пересечение двух (а значит, и произвольного конечного числа) открытых множеств открыто.

Доказательство.

- Пусть $\{\,G_\alpha\,\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых множеств. Тогда

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Longrightarrow x \in G_\alpha \Longrightarrow \exists U(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

- Пусть A и B — открытые множества. Тогда

$$\begin{gathered} x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A\ \wedge\ x \in B \Longrightarrow \\ \exists B_{r_1}(x) \subset A\ \wedge\ B_{r_2}(x) \subset B \Longrightarrow \\ x \in B_{\min(r_1, r_2)}(x) \subset A \cap B \end{gathered}$$

■

Определение. *Липшицево эквивалентными* называют отображения f и g в $\mathbb{R}$, такие, что $\exists c_1, c_2\colon\ c_1 f \leqslant g \leqslant c_2 f$

Пример. В $\mathbb{R}^n$ метрики d_1 и d_2 липшицево эквивалентны

1.2 Топологическое пространство

Определение. *Топологией* на множестве X называют $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- $\varnothing, X \in \Omega$
- $A, B \in \Omega \Longrightarrow A \cap B \in \Omega$
- $\{X_\alpha \in \Omega\}_{\alpha \in A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_a \in \Omega$

Иными словами, топология замкнута относительно конечных пересечений и произвольных объединений её элементов.

Определение. Пара $\langle X, \Omega \rangle$, где Ω — топология на X, называется *топологическим пространством*.

Определение. Элементы топологии называются *открытыми множествами*. Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми множествами*.

Примеры.

- $\Omega = \mathcal{P}(X)$ — дискретная топология
- $\Omega = \{\varnothing, X\}$ — антидискретная топология
- Все метрические пространства являются топологическими пространствами, порожденными метрикой.
- $\Omega = \varnothing \cup \{$все дополнения конечных множеств$\}$

Определение. *Метризуемым* называется топологическое пространство, топология которого может быть порождена метрикой.

Примеры.

- Дискретная топология метризуема
- Антидискретная топология не метризуема

Определение. *Окрестностью* точки x называют любое открытое множество, содержащее x. Далее окрестность точки x будет обозначаться $U(x)$.

Определение. Точка x называется *внутренней* для множества A, если она входит в него с некоторой окрестностью:

$$\exists U(x): \ U(x) \subset A$$

Определение. Точка x называется *граничной* точкой множества A, если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение как с A, так и с его дополнением:

$$\forall U(x) \ \ A \cap U(x) \neq \varnothing \wedge (X \setminus A) \cap U(x) \neq \varnothing$$

Определение. Точка x называется *внешней* точкой A, если

$$\exists U(x) \ \ A \cap U(x) = \varnothing$$

Определение. Точка x называется *точкой прикосновения (предельной точкой)* множества A, если

$$\forall U(x) \ \ A \cap U(x) \neq \varnothing$$

Замечание. Точка прикосновения и внешняя точка — формальные отрицания друг друга.

Теорема 1.2.1.

- $\varnothing$, X замкнуты
- A, B замкнуты $\Longrightarrow A \cup B$ замкнуто
- если C_α замнкнуты, то $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ замкнуто

Доказательство.

- $X = X \setminus \varnothing$ — замкнуто по опделелению. Аналогично $\varnothing = X \setminus X$
- $A \cup B$ замкнуто $\Longleftrightarrow X \setminus (A \cap B)$ открыто $\Longleftrightarrow (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ открыто $\Longleftarrow (X \setminus A)$, $(X \setminus B)$ открыты $\Longleftrightarrow A$, B замкнуты.
- Аналогично ii

■

Теорема 1.2.2. A открыто, B замкнуто. Тогда

- $A \setminus B$ открыто
- $B \setminus A$ замкнуто

Доказательство.

- $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ — открыто
- $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$ — замкнуто

■

1.3 Внутренность и замыкание

Определение. *Внутренностью* множества A называют наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A, иначе говоря:

$$\mathrm{Int}(A) \overset{def}{=} \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} U$$

Определение. *Замыканием* множества A называют наименьшее по включению замкнутое множество, сожержащее A, иначе говоря:

$$\mathrm{Cl}(A) \overset{def}{=} \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ cl_X(C)}} C$$

Теорема 1.3.1. (Свойства Int)

- $\mathrm{Int}(A)$ открыто
- $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$
- $open_X(B)$, $B \subseteq A \Longrightarrow B \subseteq \mathrm{Int}(A)$
- $\mathrm{Int}(A) = A \Longleftrightarrow open_X(A)$
- $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = A$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$
- $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$
- $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$

Доказательство.

- $\mathrm{Int}(A)$ открыто как объединение открытых
- В объединения входят только подмножества A, поэтому $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$
- B по определению войдет в объединение
- $\Longrightarrow$ по пункту (i). $\Longleftarrow$ по пункту (iii)
- см. пункт (iv)
- Все открытые подмножества A являются открытыми подмножествами B
- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B \Longrightarrow$
  $\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}(A), \mathrm{Int}(B) \Longrightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

  $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A) \subseteq A$, аналогично $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq B$, поэтому $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq A \cap B \Longrightarrow \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)) = \mathrm{Int}(A \cap B) \Longrightarrow \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cap B)$

■

Теорема 1.3.2. (Свойства Cl)

- $\mathrm{Cl}(A)$ замкнуто
- $\mathrm{Cl}(A) \supseteq A$
- $cl_X(B)$, $B \supseteq A \Longrightarrow B \supseteq \mathrm{Cl}(A)$
- $\mathrm{Cl}(A) = A \Longleftrightarrow cl_X(A)$
- $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = A$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$
- $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$
- $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$

Доказательство. Можно доказать аналогично предыдущей теореме, а можно доказать, пользуясь переходом к дополнению в предыдущей теореме. ■

Теорема 1.3.3. (Связь Int и Cl)

- $X \setminus \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Cl}(X \setminus A)$
- $X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(X \setminus A)$

Доказательство.

- $$X \setminus \mathrm{Int}(A) \overset{def}{=} X \setminus \Big(\bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} U \Big) = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} X \setminus U \overset{def}{=} \mathrm{Cl}(X \setminus A)$$

  так как множества вида $X \setminus U$ суть замкнутые множества, содержащие A
- Аналогично

■

Определение. *Границей* множества A называется

$$\mathrm{Fr}(A) \overset{def}{=} \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$$

Теорема 1.3.4. (Свойства Fr)

- $\mathrm{Fr}(A)$ замкнуто
- $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$
- A замкнуто $\Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \subseteq A$
- A открыто $\Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$

Доказательство.

- Очевидно в свете предыдущих теорем
- A замкнуто $\Longleftrightarrow \mathrm{Cl}(A) = A \Longleftrightarrow \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A) \subseteq A$
- A открыто $\Longleftrightarrow \mathrm{Int}(A) = A \Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A \Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$

■

Теорема 1.3.5. (Характеризация внутренности)
$\mathrm{Int}(A)$ — множество всех внутренних точек A.

Доказательство. Докажем, что $x \in \mathrm{Int}(A) \Longleftrightarrow x$ — внутренняя точка A

$\Longrightarrow$ $x \in \mathrm{Int}(A)$ — открыто $\Longrightarrow U(x) = \mathrm{Int}(A) \subseteq A \Longrightarrow x$ — внутренняя точка A

$\Longleftarrow$ x — внутренняя для $A \Longrightarrow \exists U(x) \subseteq A \Longrightarrow x \in \mathrm{Int}(A)$ так как по определению $\mathrm{Int}(A)$ — это объединение всех открытых множеств, содержащихся в A, в том числе и $U(x)$. ■

Следствие 1.3.6. A открыто $\Longleftrightarrow \forall x \in A\ x$ — внутренняя точка A

Теорема 1.3.7. (Характеризация замыкания)
$\mathrm{Cl}(A)$ — множество всех точек прикосновения A.

Доказательство.

$$X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(X \setminus A) = \{\text{внешние точки } A\} = X \setminus \{\text{точки прикосновения } A\}$$

■

Определение. Множество A называется *всюду плотным*, если $\mathrm{Cl}(A) = X$.

Определение. Топологическое пространство X называют *сепарабельным*, если в нем существует не более чем счетное всюду плотное множество.

Замечание. Всюду плотность множества A эквивалентна

- $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$.
- $\forall open_X(D)\ D \cap A \neq \varnothing$.

Доказательство.

- $\mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$.
- Если это условие не выполнилось для какого-то непустого D, то любая его точка является внешней для множества A, а значит, не входит в замыкание. Если же это условие выполнилось для всех D, то любая окрестность любой точки пересекается с A (надо взять $D =$ этой окрестности), значит, любая точка является точкой прикосновения A, о есть A всюду плотно.

■

Определение. Множество $A \subseteq X$ называют *нигде не плотным*, если внутренность его замыкание пуста: $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \varnothing$.

Замечание. Нигде не плотность множества A эквивалентна тому, что в любом непустом открытом множестве найдется открытое подмножество, не пересекающееся с A.

Теорема 1.3.8. В сепарабельном пространстве не существует более чем счетного дизъюнктного набора непустых открытых множеств.

Доказательство. Пусть U_i — более чем счетный дизъюнктный набор непустых открытых множеств. Выберем тогда из каждого U_i точку p_i, которая лежит в пересечение $U_i \cap S$, где S — какое-нибудь счетное всюду плотное множество. Получим, что $\{p_i\} \subseteq S$, то есть S более, чем счетно. ■

1.4 Сравнение топологий

Определение. Пусть Ω_1, Ω_2 — топологии на X. Говорят, что топология Ω_1 *слабее* топологии Ω_2, если $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Теорема 1.4.1. (Сравнение метрических топологий)
Пусть d_1, d_2 — метрики на X, $Top(d)$ — топология, порожденная метрикой d. Тогда $Top(d_1) \subseteq Top(d_2)$ тогда и только тогда, когда в любом шаре по d_1 содержится шар по d_2 с таким же центром.

Доказательство.

- $\Longrightarrow$ Раз $Top(d_1) \subseteq Top(d_2)$, то шар $B_1(x,r)$ по метрике d_1 открыт в $Top(d_2)$, значит любая его точка, включая x, входит в $B_1(x,r)$ с некоторой окрестностью $B_2(x,r')$ во второй топологии.

- $\Longleftarrow$ Проверим, что открытое в первой топологии множество U открыто во второй топологии. Для этого проверим, что все его точки — внутренние по второй метрике. U открыто в $Top(d_1) \Longrightarrow \forall x \in U\ \exists\ B_1(x,r) \subseteq U \Longrightarrow \exists\ B_2(x,r) \subseteq U$.

■

Следствие 1.4.2. $d_1 \leqslant d_2 \Longrightarrow Top(d_1) \subseteq Top(d_2)$.

Следствие 1.4.3. $\exists c > 0\colon\ d_1 \leqslant c d_2 \Longrightarrow Top(d_1) \subseteq Top(d_2)$.

Следствие 1.4.4. d_1, d_2 липшицево эквивалентны $\Longrightarrow Top(d_1) = Top(d_2)$.

1.5 База топологии

Определение. *Базой топологии* Ω называют $\Sigma \subseteq \Omega$ такое, что

$$\forall U \in \Omega\ \exists \lambda_\alpha \in \Sigma\colon\ U = \bigcup \lambda_\alpha$$

Теорема 1.5.1. Σ — база топологиии Ω тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in X\ \forall U(x)\ \exists V \in \Sigma\colon x \in V \subseteq U$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Σ — база топологии, поэтому

$$\exists \lambda_\alpha \in \Sigma\colon\ U(x) = \bigcup \lambda_\alpha$$

Поэтому $\exists \alpha\colon x \in \lambda_\alpha$.

$\Longleftarrow$ Пусть A открыто, тогда

$$A = \bigcup_{x \in A} V(x)$$

■

Определение. Σ_x называется *базой топологии в точке* x, если

- $\forall V \in \Sigma_x\ x \in V$.
- $\forall U \in \Omega\colon\ x \in U\ \exists V \in \Sigma_x\colon x \in V \subseteq U$.

Замечание. Σ — база топологии тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in X\ \Sigma_x = \{U \in \Sigma \mid x \in U\} \text{ — база топологии в } x$$

Замечание. $\forall x\ \Sigma_x$ — базы в точках, тогда $\bigcup \Sigma_x$ — база топологии.

Теорема 1.5.2. Σ — база некоторой топологии тогда и только тогда, когда

- $X = \bigcup \Sigma$.
- $\forall U, V \in \Sigma\ U \cap V$ представляется в виде объединения элементов Σ.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ X открыто, поэтому обязательно выполнено первое условие. Второе условие выполнено потому, что $U \cap V$ открыто, то есть по определению должно представляться в виде объединения элементов Σ.

$\Longleftarrow$ Назначим Ω как всевозможные объединения множеств из Σ. Проверим, что Ω — топология.

- $\varnothing, X \in \Omega$ — очевидно.
- $\bigcup U \in X$ по построению.
- $U \cap V = \left(\bigcup U_i\right) \cap \left(\bigcup V_i\right) = \bigcup U_i \cap V_i$. $U_i \cap V_i$ открыто по посылке, поэтому $U \cap V$ открыто.

■

1.6 Индуцированная топология

Определение. Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда на Y можно завести топологию, которую называют *индуцированной*: множество $A \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда $\exists B \in \Omega(X)\colon\ A = B \cap Y$. В таком случае топологическое пространство $\langle Y, \Omega(Y)\rangle$ называют *подпространством*.

Теорема 1.6.1. (База подпространства в точке)
Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$ — его подпространство, $y \in Y$, Σ_y — база X в точке y. Тогда

$$\{U \cap Y\}_{U \in \Sigma_y}$$

является базой индуцированной топологии в точке y.

Доказательство. Пусть $y \in A$ открыто в Y. Тогда по определению индуцированной топологии $\exists U \in \Omega(X)\colon\ A = U \cap Y \ni y$. Тогда по определению базы в точке $\exists V \in \Sigma_y\colon\ y \in V \subseteq U$. Тогда $y \in V \cap Y \subseteq U \cap Y$, что и требовалось. ∎

Следствие 1.6.2. Пусть Σ — база $\Omega(X)$, Y — подпространство X. Тогда

$$\{V \cap Y \mid V \in \Sigma\} \text{ — база } \Omega(Y)$$

Теорема 1.6.3. Пусть X — т.п., $Y \subset X$ — его подпространство, $A \subseteq Y$. Тогда

- $open_X(A) \Longrightarrow open_Y(A)$.
- $cl_Y(A) \Longleftrightarrow \exists cl_X(B)\colon\ B \cap Y = A$.
- $cl_X(A) \Longrightarrow cl_Y(A)$.
- $open_X(Y) \Longleftrightarrow (open_Y(A) \Longleftrightarrow open_X(A))$.
- $cl_X(Y) \Longleftrightarrow (cl_Y(A) \Longleftrightarrow cl_X(A))$.

Теорема 1.6.4. (О транзитивности индуцирования)
Пусть X — т.п., $X \supset Y \supset Z$, тогда топологии $Y \to Z$, $X \to Z$ совпадают.

Доказательство.

$$open_{X\to Z}(A) \Longleftrightarrow \exists open_X(U)\colon\ A = U \cap Z \Longleftrightarrow A = \underbrace{(U \cap Y)}_{open_Y} \cap Z \Longleftrightarrow open_{Y\to Z}(A).$$

∎

Замечание.

- $\mathrm{Cl}_X(A) \cap Y = \mathrm{Cl}_Y(A)$.
- $\mathrm{Int}_X(A) \cap Y \neq \mathrm{Int}_Y(A)$ (вообще говоря).

1.7 Аксиомы отделимости

Определение. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если

$$\forall x \neq y\ \exists\ U(x), U(y): \ U(x) \cap U(y) = \varnothing$$

Хаусдорфовость — вторая аксиома отделимости (Т2).

Замечание. Все метрические пространства являются хаусдорфовыми.

Определение. Топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости (Т1), если

$$\forall x \neq y\ \exists\ U(x): \ U(x) \not\ni y$$

Теорема 1.7.1. Т.п. X удовлетворяет Т1 тогда и только тогда, когда в нем любое одноточечное множество замкнуто.

Определение. Множества A, B называются отделимыми, если

$$\exists U(A), U(B): \ U(A) \cap U(B) = \varnothing$$

Определение. Топологическое пространство называется *регулярным* (Т3), если в нем выполняются свойства:

- Все одноточечные множества замкнуты (Т1).
- $\forall x\ \forall cl_X(A): \ x \notin A\ \ x$ отделима от A.

Замечание. Регулярность эквивалентна набору свойств

- Все одноточечные множества замкнуты (Т1).
- $\forall x\ \forall U(x)\ \exists V(x): \ \ \mathrm{Cl}(V) \subset U\ \ (U, V$ открыты).

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть $x \in A$ открыто, поэтому $\overline{A}$ замнкнуто, причем $x \notin \overline{A}$. Тогда x отделима от $\overline{A}$:

$$\exists U(\overline{A}), U(x): \ U(\overline{A}) \cap U(x) = \varnothing$$

Тогда можно взять $V = U(x)$: $\mathrm{Cl}(V) \cap \overline{A} = \varnothing$: если бы $\mathrm{Cl}(V) \cap \overline{A} \ni p$, то

$$\forall U(p)\ U(p) \cap U(x) \neq \varnothing$$

Но p — внутренняя точка $U(\overline{A})$, поэтому входит в нее с некоторой $U(p)$, которая пересекается с $U(x)$, чего быть не может.

$\Longleftarrow$ Снова перейдем к дополнению: множество $\overline{A}$ открыто, причем $x \in \overline{A}$. Тогда

$$\exists V(x): \ \ \mathrm{Cl}(V) \subset \overline{A}$$

Тогда можно отделить A и x множествами $X \setminus \mathrm{Cl}(V(x))$ и $V(x)$ соответственно.

■

Определение. Топологическое пространство называется *нормальным* (T4), если в нем любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы.

Теорема 1.7.2. (Нормальность метризуемых пространств)
Все метризуемые топологические пространства нормальны.

Доказательство. Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые множества. Тогда

$$\forall x \in A\ \exists r_x > 0\colon\ B(x, r_x) \cap B = \varnothing$$
$$\forall y \in B\ \exists r_y > 0\colon\ B(y, r_y) \cap A = \varnothing$$

Здесь мы воспользовались хаусдорфовостью метрических пространств. Положим

$$U = \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$$
$$V = \bigcup_{y \in B} B\left(y, \frac{r_y}{2}\right)$$

Эти множества открыты. Если мы докажем, что они не пересекаются, то множества A и B окажутся отделимыми. Пусть $U \cap V \neq \varnothing$, тогда (пусть $r_x \geqslant r_y$):

$$\exists r_x, r_y\colon\ B\left(x, \frac{r_x}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{r_y}{2}\right) \neq 0 \Longrightarrow$$
$$\exists z\colon\ |xz| < \frac{r_x}{2},\ |yz| < \frac{r_y}{2} \Longrightarrow |xy| < \frac{r_x + r_y}{2} \leqslant \max(r_x, r_y) = r_x \Longrightarrow$$
$$B(x, r_x) \ni y$$

■

Замечание. T1, T2, T3 наследуются подпространством. T4, вообще говоря, нет.

Замечание. T1 $\Longleftarrow$ T2 $\Longleftarrow$ T3 $\Longleftarrow$ T4.

1.8 Аксиомы счетности

Определение. Топологическое пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности* (1AC), если для любой точки $x \in X$ существует не более чем счетная база в этой точке.

Определение. Топологическое пространство X удовлетворяет *второй аксиоме счетности* (2AC), если существует не более чем счетная база X.

Теорема 1.8.1.

- 2AC $\Longrightarrow$ пространство сепарабельно.
- Метрическое пространство сепарабельно $\Longleftrightarrow$ оно удовлетворяет 2AC.

Доказательство.

- Пусть Σ — счетная база X. Выберем тогда из каждого элемента Σ по одной точке. Получим не более чем счетное всюду плотное множество.

- Пусть S — не более чем счетное всюду плотное множество. Тогда базой топологии можно назначить множество всевозможных шаров с центрами в точках S и радиусами $\frac{1}{n}$. Проверим, что это — действительно база топологии. Для этого достаточно проверить, что $\forall x \in X\ \forall U(x)\ \exists V \in \Sigma\colon\ x \in V \subset U$. U — открытое множество, поэтому x входит в него с некоторым шаром $B(x,r)$. Пусть $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, тогда поскольку S всюду плотно, $\exists s \in S : \rho(x,s) < \frac{1}{n}$. Проверим теперь, что $x \in B\left(s, \frac{1}{n}\right) \subset U$. $x \in B$ потому, что $\rho(x,s) < \frac{1}{n}$, из неравенства треугольника нетрудно получить, что $B \subset B(x,r) \subset U$.

■

Определение. *Покрытием* X называется набор множеств $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ такой, что

$$\bigcup \mathcal{A} \supseteq X$$

Определение. *Подпокрытием* называется подмножество покрытия.

Теорема 1.8.2. (Линделёфа) В пространстве со счетной базой из любого открытого покрытия можно выбрать не более чем счетное подпокрытие.

Доказательство. Любой элемент покрытия представляется в виде объединения элементов базы. Для каждого элемента базы поймем, входит ли он в какое-то множество покрытия. Возьмем теперь для каждого элемента базы по одному элементу покрытия, в разложение которой он входит (если такой элемент есть). Получим покрытие, мощность которого не превосходит мощности базы, то есть, не более чем счетное. ■

1.9 Непрерывность

Определение. Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ называется *непрерывным,* если прообраз любого открытого множества открыт.

Замечание. Открытость в определении можно заменить на замкнутость.

Замечание. $f : X \to Y$ непрерыно $\iff \forall B\ f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subseteq \mathrm{Int}(f^{-1}(B))$.

Доказательство.

$\implies$ $f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) = \mathrm{Int}(f^{-1}(\mathrm{Int}(B))) \subseteq \mathrm{Int}(f^{-1}(B))$

$\impliedby$ Пусть U открыто. Тогда $f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathrm{Int}(U)) \subseteq \mathrm{Int}(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(U)$. Поэтому $f^{-1}(U) = \mathrm{Int}(f^{-1}(U))$, что и означает, что $f^{-1}(U)$ открыто.

■

Определение. Отображение называется *открытым*, если образ открытого множества всегда открыт.

Замечание. $f : X \to Y$ открыто $\iff \forall A\ f(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Int}(f(A))$.

Доказательство. Аналогично подобному замечанию о непрерывных отображениях. ■

Определение. Пусть $X \subset Y$, X — подпространство Y, тогда отображение

$$in_{X\to Y} : X \to Y,\ in(x) = x$$

называется *вложением* X в Y.

Замечание. Вложение непрерывно.

Теорема 1.9.1. (Композиция непрерывных отображений)
Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ непрерывны. Тогда $g \circ f : X \to Z$ непрерывно.

Доказательство. Пусть U открыто в Z. Тогда

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

Открыто. ■

Замечание. Усиление и ослабление топологии оставляют непрерывные отображения непрерывными.

Теорема 1.9.2. (Непрерывность сужения)
Если $f : X \to Y$ непрерывно, $Z \subseteq X$ — подпространство X, тогда $f\big|_Z$ непрерывно.

Доказательство. $f\big|_Z = f \circ in_{Z\to X}$ непрерывно как композиция непрерывных отображений. ■

Теорема 1.9.3. $f : X \to Y$ непрерывно $\iff f(X) \subseteq Z \subseteq Y$, тогда $\hat{f} : X \to Z$, $\hat{f}(x) = f(x)$ непрерывно.

Доказательство.

$\Longleftarrow$ f непрерывно как композиция: $f = in_{Z\to Y} \circ \hat{f}$.

$\Longrightarrow$ Пусть V открыто в Z. Тогда $V = U \cap Z$, где U открыто в Y. Поэтому

$$\hat{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap Z) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(Z) = f^{-1}(U) \text{ — открыто в } X$$

■

Определение. $f : X \to Y$ непрерывно в $x \in X$, если

$$\forall U(f(x))\ \exists V(x):\ f(V) \subset U$$

Теорема 1.9.4. $f : X \to Y$ непрерывно $\iff \forall x \in X$ f непрерывно в x.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Для любой точки и ее окрестности U можно взять $V = f^{-1}(U)$.

$\Longleftarrow$ Пусть U открыто в Y, покажем, что $f^{-1}(U)$ открыто в X, то есть любая точка $f^{-1}(U)$ внутренняя.

$x \in f^{-1}(U) \Longrightarrow \exists V(x):\ f(V) \subset U \iff V \subset f^{-1}(U) \Longrightarrow x$ — внутренняя точка $f^{-1}(U)$

■

Теорема 1.9.5. (Непрерывность в точке в терминах баз)
Пусть $f : X \to Y$, Σ_x — база топологии в x, $\Lambda_{f(x)}$ — база топологии в $f(x)$. Тогда

$$f \text{ непрерывна в } x \iff \forall U \in \Lambda_{f(x)}\ \exists V \in \Sigma_x : f(V) \subset U$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть $U \in \Lambda_{f(x)}$, тогда $f^{-1}(U)$ открыт, то есть в нем есть элемент базы Σ_x, что нам и нужно.

$\Longleftarrow$ Пусть U открыто в Y, тогда в U есть базовая окрестность $\Lambda_i \ni f(x)$. Для этого элемента по посылке существует базовая окрестность $\Sigma_i \ni x:\ f(\Sigma_i) \subseteq \Lambda_i$. Эта Σ_i и подходит под определение непрерывности в точке.

■

Определение. *Липшицевым* называется отображение метрических пространств $f : X \to Y$ такое, что $\exists C:\ \forall x_1, x_2 \in X\ \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C \cdot \rho_X(x_1, x_2)$.

Теорема 1.9.6. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Зафиксируем базы топологий, состоящие из всевозможных шаров. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C}:\ f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$$

Что по теореме о непрерывности в терминах баз дает непрерывность в любой точке, а значит, и непрерывность на X. ■

Теорема 1.9.7. Пусть $f : \langle X, \Omega\rangle \to \langle Y, \Sigma\rangle$, $x \in X$. Топологическому пространству $\langle X, \Omega\rangle$ и точке x сопоставим топологическое пространство $\langle X, \Omega^x\rangle$:

$$\Omega^x = \{\varnothing, A \mid \exists U(x) \subseteq A\}$$

Аналогично поступим и для Y и $f(x)$. Тогда f можно понимать как отображение между этими топологическими пространствами $\hat{f}$. В таком случае, верно утверждение:

$$f \text{ непрерывно в } x \Longleftrightarrow \hat{f} \text{ непрерывно.}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть множество $B \subseteq Y$ открыто в $\Sigma^{f(x)}$. В таком случае, $\exists V(f(x)) \subseteq B$ открытое в Σ. Прообраз V открыт по предположению, что f непрерывно в точке, поэтому, раз

$$f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(B)$$

то множество $f^{-1}(B)$ открыто в Ω^x, что и требовалось.

$\Longleftarrow$ Пусть теперь множество $f(x) \in B \subseteq Y$ открыто в Σ. Тогда оно автоматически открыто и в $\Sigma^{f(x)}$. Раз так, по посылке прообраз B открыт в Ω^x, что по определению дает существование требуемой для непрерывности в точки окрестности x.

■

Следствие 1.9.8. Пусть f непрерывно в x, g непрерывно в $f(x)$. Тогда $g \circ f$ непрерывно в x.

1.10 Гомеоморфизм

Определение. *Гомеоморфизмом* топологических пространств X и Y называют биективное в обе стороны непрерывное отображение этих пространств. Другими словами, отображение сопоставляет открытым множествам открытые (биективно). X и Y в таком случае называют *гомеоморфными*.

Определение. $f : X \to Y$ называется *вложением* X в Y, если оно осуществляет гомеоморфизм между X и $f(X)$.

Определение. Покрытие Γ пространства X называется *фундаментальным*, если выполнено:

$$\forall A \subseteq X\ \ [\forall C \in \Gamma\ open_C(A \cap C) \Longrightarrow open_X(A)]$$

Замечание. В определении, как всегда, можно везде заменить открытость на замкнутость.

Теорема 1.10.1. Пусть Γ — фундаментальное покрытие X, $f : X \to Y$, $\forall C \in \Gamma\ f\big|_C$ непрерывно, тогда f непрерывно на X.

Доказательство. Пусть U открыто в Y. Проверим, что $f^{-1}(U)$ открыто в X:

$$\forall C \in \Gamma\ f^{-1}(U) \cap C = \left(f\big|_C\right)^{-1}(U)$$

Последнее множество открыто в C потому, что $f\big|_C$ непрерывно. Тогда по самому определению фундаментального покрытия имеем, что $f^{-1}(U)$ открыто. ■

Теорема 1.10.2.

- Все открытые покрытия фундаментальны.
- Все конечные замкнутые покрытия фундаментальны.
- Все локально конечные замкнутые покрытия фундаментальны.

Доказательство.

- $A \cap C$ открыто в C для всех $C \in \Gamma$, C открыто в X, поэтому $A \cap C$ открыто в X. Раз так, $A = \bigcup A \cap C$ открыто в X.
- Совершенно аналогично первому пункту (за исключением того, что пользуемся определением фундаментальности в терминах замкнутых множеств и того, что объединение только конечного числа замкнутых множеств замкнуто).
- За каждой точкой зафиксируем окрестность U_x, имеющую пересечение с конечным множеством множеств из Γ. U_x — фундаментальное покрытие X (так как открытое). Пусть теперь $\forall C \in \Gamma\ A \cap C$ открыто в C. Тогда $\forall C \in \Gamma\ \forall x \in X\ A \cap C \cap U_x$ открыто в $C \cap U_x$ по определению индуцированной в $C \cap U_x$ топологии. Тогда $(A \cap C) \cap (C \cap U_x)$ открыто в $C \cap U_x$, где $C \cap U_x$ образует конечное замкнутое покрытие U_x (по построению). Это покрытие фундаментально по второму пункту, поэтому по определению его фундаментальности, $A \cap U_x$ открыто в U_x. Применяя снова определение фундаментальности, только уже к покрытию U_x, получаем открытость A.

■

1.11 Прямое произведение топологических пространств

Определение. Пусть $\langle X, \Omega \rangle$, $\langle Y, \Sigma \rangle$ — топологические пространства. Тогда их прямым произведением называется топологическое пространство с носителем $X \times Y$, база топологии которого состоит из всевозможных множеств вида

$$A \times B,\ A \in \Omega, B \in \Sigma$$

Лемма 1.11.1. Только что определенная система множеств действительно является базой топологии. Для этого достаточно проверить (теорема 1.5.2), что пересечение элементов базы представляется в виде объединения элементов той же базы:

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$$

Здесь объединение состоит из одного элемента.

Теорема 1.11.2. Прямое произведение замкнутых A, B замкнуто в прямом произведении топологий. *Замечание: прямое произведение открытых множеств открыто просто по определению.*

Доказательство. Покажем, что $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ открыто:

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = (X \setminus A) \times Y \cap X \times (Y \setminus B)$$

■

Замечание. Пусть $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Тогда

- $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)$.
- $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$.

Доказательство. Докажем второе утверждение:

$$\mathrm{Int}(A \times B) = \bigcup_{\substack{open_{X\times Y}(C) \\ C \subseteq A \times B}} C = \bigcup_{\substack{open_{X\times Y}(A'\times B') \\ A'\times B' \subseteq A \times B}} A' \times B' = \bigcup_{\substack{A' \subseteq A \\ open_X(A')}} A' \times \bigcup_{\substack{B' \subseteq B \\ open_Y(B')}} B' = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$$

Первый переход можно сделать, потому что любое открытое множество C представляется в виде объединения множеств из базы. ■

Определение. Отображение

$$pr_x : X \times Y \to X, \ (x, y) \mapsto x$$

называется *проекцией* $X \times Y$ на X.

Теорема 1.11.3. Проекция непрерывна.

Доказательство. Пусть U открыто в X. Тогда $pr_X^{-1}(U) = U \times Y$ — открыто в $X \times Y$ по определению. ■

Теорема 1.11.4. Пусть X, Y, Z — топологические пространства, $f : Z \to X \times Y$, $f = (g, h)$, где $g : Z \to X$, $h : Z \to Y$. Тогда

$$f \text{ непрерывно } \iff g, h \text{ непрерывны}$$

Доказательство.

$\implies$ $g = pr_X \circ f$, $h = pr_Y \circ f$.

$\Longleftarrow$ Достаточно проверить открытость прообраза на базовых множествах:

$$f^{-1}(U \times V) = g^{-1}(U) \cap h^{-1}(V)$$

■

Следствие 1.11.5. *Координатный слой* гомеоморфен X:

$$X \times \{y_0\} \simeq X$$

Доказательство. Установим гомеоморфизм

$$f : X \to X \times \{y_0\},\ x \mapsto (x, y_0)$$

Тогда

$$f^{-1} = pr_X\big|_{X \times \{y_0\}}$$

И оба предъявленных отображения непрерывны. ■

Теорема 1.11.6. Пусть X — т.п., $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны. Тогда $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ (при $g \neq 0$) непрерывны.

Доказательство. Будем пользоваться тем, что арифметические операции непрерывны:

$$X \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$$

Здесь отображение $x \mapsto (f(x), g(x))$ непрерывно по последней теореме. ■