

Курсовая работа
по дифференциальной геометрии
на тему
«Спирали на плоскости
Лобачевского»

Дмитрий Джус

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Список иллюстраций | 3 |
| I Введение | 4 |
| 1. Предмет работы | 4 |
| 2. Исторический очерк | 4 |
| II Практическая часть | 8 |
| 3. Предварительные данные | 8 |
| 3.1. Линейный элемент | 8 |
| 3.2. Природа пространства | 8 |
| 3.3. Геодезическая кривизна | 12 |
| 3.3.1. Геодезические линии | 13 |
| 3.4. Угол между двумя кривыми | 19 |
| 3.5. Гиперболический тангенс | 19 |
| 4. Спираль Архимеда | 20 |
| 4.1. Длина дуги | 20 |
| 4.2. Геодезическая кривизна | 20 |
| 4.3. Спираль Архимеда в моделях плоскости Лобачевского | 21 |
| 4.3.1. Спираль Архимеда в модели Клейна | 21 |
| 4.3.2. Спираль Архимеда в модели Пуанкаре в единичном круге | 23 |
| 5. Спираль, пересекающая концентрические окружности под постоянным углом | 26 |
| 5.1. Уравнение спирали | 26 |
| 5.2. Длина дуги | 27 |
| 5.3. Геодезическая кривизна | 28 |
| A. Информация о документе | 29 |
| Б. Список литературы | 29 |

Список иллюстраций

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Предположение Лобачевского | 5 |
| 2 | Модель Клейна в круге | 7 |
| 3 | Стереографическая проекция псевдосферы | 10 |
| 4 | Модель Пуанкаре в круге | 11 |
| 5 | Псевдосферические координаты | 11 |
| 6 | Ортогональная проекция кривой на касательную плоскость . | 13 |
| 7 | Гиперболический котангенс | 16 |
| 8 | Геодезические линии с разными значениями параметра C_1 . . | 17 |
| 9 | Геодезические линии с разными значениями параметра C_2 . . | 17 |
| 10 | Геодезические линии на плоскости Лобачевского | 18 |
| 11 | Системы полярных координат в модели Клейна | 21 |
| 12 | Спираль Архимеда в модели Клейна | 22 |
| 13 | Прямые и точки в модели Пуанкаре | 23 |
| 14 | Связь моделей Клейна и Пуанкаре | 23 |
| 15 | Спираль Архимеда в модели Пуанкаре | 25 |

Часть I

Введение

1. Предмет работы

Настоящая работа посвящена геометрии Лобачевского. Дан краткий исторический очерк о теории, рассмотрен ряд связанных понятий. Рассмотрены определённые свойства некоторых спиралей на плоскости Лобачевского.

2. Исторический очерк

В целях общего ознакомления с контекстом теории рассмотрим краткую историю развития неевклидовой геометрии, в том числе геометрии Лобачевского. Очерк подготовлен на основе [1] и [4].

Геометрия Лобачевского (или гиперболическая геометрия) возникла в попытках доказать или опровергнуть пятый постулат евклидовой геометрии:

Через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, и притом только одну.

Возможность опровержения этого начала занимала умы математиков и философов на протяжении многих веков. Иммануил Кант с позиций своей теории познания признавал *априорный* характер геометрии и утверждал, что основания геометрии имеют доопытное, очевидное происхождение и черпаются из «чистого воззрения». С такой точки зрения, лишь пятый постулат не обладал необходимым свойством самоочевидности, и возможность его доказательства представлялась равносильной возможности априорного обоснования всей геометрии.

Таких мыслей изначально придерживался и Карл Гаусс. Уверенность в возможности доказательства пятого постулата долго не покидает его, и лишь в 1817 году он сомневается в этом, указывая на вероятную неаприорность геометрии. В дальнейшие годы Гаусс значительно изменяет своё видение теории параллельных, обнаруживая, что геометрия без аксioms Евклида совершенно последовательна. При жизни Гаусс своих работ по началам неевклидовой геометрии, однако, не публиковал.

В 1826 году Николай Иванович Лобачевский публикует своё сочинение «О началах геометрии», содержащее непротиворечивую геометрическую теорию, построенную не с использованием постулата Евклида о параллельных, а в предположении о том, что «угол параллелизма» наоборот не является прямым и вовсе зависит от длины отрезка a . На рисунке 1 угол $\theta < \pi/2$ прямоугольного треугольника PQR является функцией $F(a)$ отрезка постоянной длины a , увеличиваясь при $R \rightarrow \infty$.

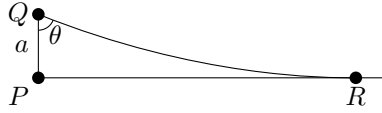


Рис. 1. Предположение Лобачевского: $\theta = F(a)$

Указывая, что на предельной поверхности будет иметь место геометрия Евклида, Лобачевский прямо переходит к доказательству непротиворечивости тригонометрии. Впоследствии он также строит дифференциальную и аналитическую геометрию своего пространства, окончательно доказывая его непротиворечивость с одной стороны и соответствие абсолютной геометрии с другой.

Работу по неевклидовой геометрии также опубликовал Янош Бolyai в конце 1820-ых годов.

Дальнейшее развитие взглядов на геометрию Лобачевского было неотрывно связано с дифференциальной геометрией.

В 1827 году Гаусс публикует свои работы по дифференциальной геометрии, в которых даются определения таких понятий, как криволинейные координаты, квадратичные формы поверхности, геодезическая кривизна. Важным результатом Гаусса явилось выделение *внутренней* геометрии поверхности и доказательство инвариантности гауссовой кривизны поверхности относительно преобразования изгиба. Известно, что Гаусс также знал о псевдосфере — поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Ученик Гаусса Фердинанд Миндинг также рассматривал поверхности постоянной кривизны, их движения по себе, заметив, что формулы тригонометрии геодезических треугольников на поверхностях постоянной отрицательной кривизны могут быть получены из тригонометрии на сфере путём замены действительного коэффициента \sqrt{k} на мнимый.

Опираясь на результаты Миндинга, Эудженио Бельтрами в 1868 публикует своё сочинение об интерпретации неевклидовой геометрии. Согласно ему, геометрия Лобачевского может быть осуществлена в евклидовом пространстве как внутренняя геометрия поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Этот результат был воспринят как доказательство непротиворечивости неевклидовой геометрии, хотя Гильберт впоследствии указал на невозможность полной реализации геометрии Лобачевского на таких поверхностях.

С этими открытиями и переводом работ Лобачевского повысился всеобщий интерес к проблемам основания геометрии. Бернгард Риман рассмотрел пространство n измерений как многообразие элементов, в котором каждый задаётся набором из n независимых переменных, а геометрию этого пространства можно определить квадратичной формой дифференциалов независимых переменных (линейным элементом), которая задаёт квадрат расстояния между элементами многообразия, что позволяет далее вводить понятия длины, кратчайших или геодезических линий, угла, объёма. Риман

указал, что пространство, линейный элемент которого приводится к сумме квадратов дифференциалов, является многомерным аналогом евклидова, а также обобщил это понятие на пространства, допускающих движения по себе с таким же числом степеней свободы, как и евклидово. Характер этих пространств заключён в том, что их кривизна не зависит от направления площадки.

Лобачевский положил в основу своей геометрии формулы тригонометрии, а Риман выполнил замысел Лобачевского ещё более законно, показав возможность построения геометрии на чисто аналитической основе. Впоследствии Бельтрами была обнаружена ещё более глубокая связь между геометрией Лобачевского и системой Римана: трёхмерное пространство Римана постоянной отрицательной кривизны совпадает с пространством Лобачевского. Так непротиворечивость неевклидовой геометрии была доказана строго.

Одновременно развивалась и проективная геометрия. Важной с точки зрения обобщения геометрических понятий явилась мысль Юлиуса Плюккера о том, что в качестве элементов геометрии могут быть рассмотрены не только точки. В то же время, Феликс Клейн, опираясь на работы Артура Кэли по проективной метрике, дал новую интерпретацию геометрии Лобачевского с точки зрения геометрии проективной. Модель Клейна в круге, приведённая на рисунке 2, является полноценной моделью пространства Лобачевского, в которой метрика задана следующим образом (см. [2], [6]):

$$\rho(A, B) = \frac{R}{2} \left| \ln \left(\frac{X - A}{X - B} : \frac{Y - A}{Y - B} \right) \right| \quad (2.1)$$

В модели Клейна точки изображаются точками, прямые — хордами. Бесконечное множество прямых, проходящих через точку P параллельно данной прямой l , заполняют часть круга между хордами XM и YN .

В конце XIX века Софус Ли создаёт теорию непрерывных групп преобразований с многочисленными приложениями её к дифференциальным уравнениям и геометрии.

Понятие группы преобразований стало одним из центральных в «Эрлангенской программе» Клейна, который в ней дал обобщённое понимание геометрии, определив её задачу следующим образом:

Дано многообразие и в нём группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащий многообразию, которые не изменяются от преобразований группы.

Из такого определения напрямую вытекает существование различных геометрий, которые различаются характером элементов и, что наиболее важно, строением своей группы. Например, группа круговых преобразований плоскости изоморфна группе движений пространства Лобачевского, а значит, круговая геометрия плоскости даёт ещё одну интерпретацию геометрии пространства Лобачевского.

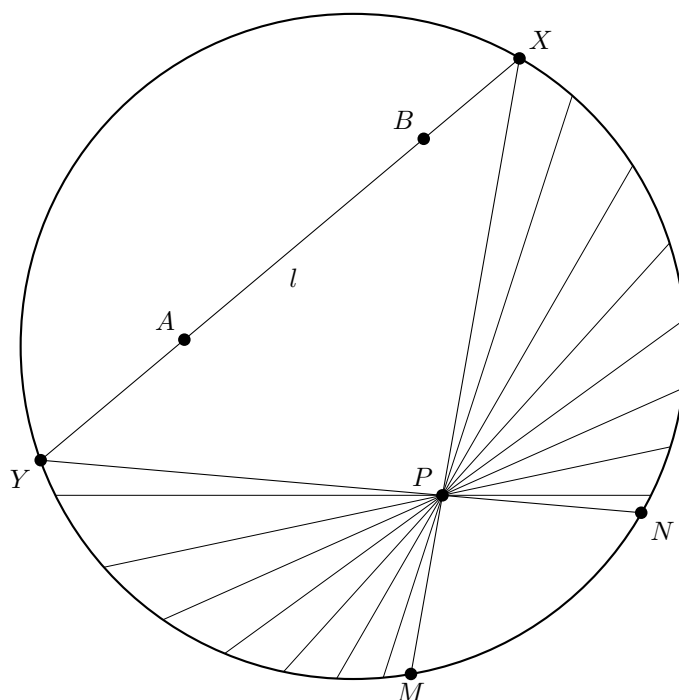


Рис. 2. Модель Клейна в круге

Построение неевклидовой геометрии, впервые выполненное Лобачевским, привело к интенсивному развитию геометрической теории, продолжающееся и до сих пор по пути углубления и расширения сочетания групповой и дифференциально-геометрической или более общей топологической точки зрения.

Часть II

Практическая часть

3. Предварительные данные

Рассматривается плоскость Лобачевского, первая квадратичная форма задана в полярных координатах (ρ, φ) следующим образом:

$$ds^2 = d\rho^2 + \operatorname{sh}^2 \rho d\varphi^2 \quad (3.1)$$

3.1. Линейный элемент

Первая квадратичная форма (называемая линейным элементом) даёт выражение для дифференциала дуги кривой.

В данном случае (форма невырожденная, положительно определённая на всех точках) можно также говорить о том, что задана **риманова метрика** (см. [3]).

Известно, что линейный элемент выражается как $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, где коэффициенты g_{ij} образуют функциональную матрицу $G(x)$, соответствующую рассматриваемой римановой метрике. В данном случае она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2 \rho \end{pmatrix}$$

При заданной первой квадратичной форме скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ двух векторов $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ и $\mathbf{y} = (y^1, y^2)$ может быть вычислено по формуле

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j \quad (3.2)$$

Задание линейного элемента на некоторой системе криволинейных координат (x^1, \dots, x^n) даёт возможность исследовать *внутреннюю* геометрию поверхности, в том числе, вычислять длины дуг произвольных кривых:

$$l(\gamma)_b^a = \int_b^a \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt = \int_b^a ds \quad (3.3)$$

3.2. Природа пространства

Рассмотрим происхождение рассматриваемого пространства. Материал данного раздела подготовлен на основе [7] и [3].

По аналогии с положительно определёнными римановыми метриками могут быть введены **индефинитные метрики**, соответствующая первая квадратичная форма которых не обязательно обладает свойством положительной определённости.

Примером индефинитных метрик служат **псевдоевклидовы метрики**. Для построения псевдоевклидовой метрики достаточно рассмотреть обычное евклидово пространство \mathbb{R}^n и задать в каждой его точке билинейную форму с постоянными коэффициентами вида

$$\langle \xi, \eta \rangle_s = - \sum_{i=1}^s \xi^i \eta^i + \sum_{j=s+1}^n \xi^j \eta^j$$

Соответственно, длина дуги в этом **псевдоевклидовом пространстве** \mathbb{R}_s^n выражается по формуле

$$l(\gamma)_b^a = \int_b^a \sqrt{- \sum_{i=1}^s \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 + \sum_{j=s+1}^n \left(\frac{dx^j}{dt} \right)^2} dt$$

В \mathbb{R}_s^n длина вектора может быть не только действительной, но и нулевой или комплексной.

С введением возможности измерять расстояния в \mathbb{R}_s^n может быть рассмотрена **псевдосфера** S^{n-1} как множество точек, равноудалённых от начала координат, при этом радиус не обязательно является действительным.

Так, псевдосфера нулевого радиуса описывается уравнением второго порядка

$$- \sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{i=s+1}^n (x^i)^2 = 0$$

где x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в \mathbb{R}^n , в котором мы моделируем псевдоевклидово пространство \mathbb{R}_s^n .

Рассмотрим моделируемое в \mathbb{R}^3 пространство \mathbb{R}_1^3 ; при помощи x, y, z будем обозначать обычные декартовы координаты в \mathbb{R}^3 , тогда $\langle \xi, \xi \rangle_1 = -x^2 + y^2 + z^2$, а квадрат дифференциала длины дуги в этом пространстве выражается как

$$ds^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.4)$$

Рассмотрим псевдосферу мнимого радиуса в \mathbb{R}_1^3 . Это — двуполостный гиперboloид, задаваемый уравнением

$$-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.5)$$

здесь $\alpha \in \mathbb{R}$.

Изучим некоторые свойства его внутренней геометрии, сначала спроецировав точки гиперboloида на плоскость следующим образом.

Будем считать центром псевдосферы $S_1^2 = \{-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2\}$ точку $O = (0, 0, 0)$, а северным и южным полюсами — точки $N = (-\alpha, 0, 0)$ и $S = (\alpha, 0, 0)$ соответственно.

Не ограничивая общности, для простоты рассмотрим ту часть псевдосферы, которая определена неравенством $x > 0$.

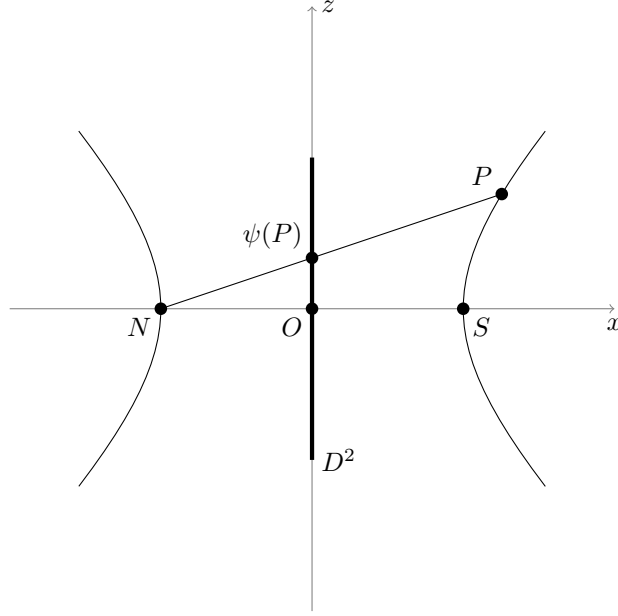


Рис. 3. Стереографическая проекция псевдосферы S_1^2 мнимого радиуса, смоделированной в \mathbb{R}^3 , на плоскость YOZ (сечение XOZ)

Выберем плоскость YOZ , проходящую через центр псевдосферы, в качестве плоскости проецирования. Произвольную точку P гиперboloида соединим с северным полюсом N . Тогда образом точки P при стереографической проекции $\psi: S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ будет точка пересечения отрезка PN с плоскостью YOZ (рисунок 3). Видно, что образом правой полости гиперboloида на плоскости будет внутренность диска D^2 , ограниченная неравенством $y^2 + z^2 < \alpha^2$, тогда как левая полость проецируется во внешность этого диска, при этом граница диска не принадлежит образу проекции.

Если точке гиперboloида $P = (x, y, z)$ при отображении $\psi: +S_1^2 \rightarrow D^2$ соответствует точка $\psi(P) = (u^1, u^2)$ на плоскости проецирования, то их координаты связаны следующим образом (см. [7]):

$$x = \alpha \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}, \quad y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}, \quad z = \frac{2\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2} \quad (3.6)$$

Можно ввести в качестве точек внутренней геометрии рассматриваемой псевдосферы пары диаметрально противоположных точек P и $-P$, а прямыми объявить линии пересечения гиперboloида с всевозможными плоскостями $ax + by + cz = 0$, проходящими через центр псевдосферы O . Заметим, что параллельных прямых в данной геометрии в привычном для нас понимании не существуют: прямые либо пересекаются в точке, либо совпадают. Полученная геометрия называется **эллиптической**.

При отображении ψ прямые введённой геометрии на гиперboloиде перейдут в дуги окружностей, пересекающие под прямым углом окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$, что указывает на то, что геометрия, введённая на псевдосфере в \mathbb{R}_1^3 , после замены координат совпадает с геометрией, возникающей в круге радиуса α , взятого на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , если в качестве точек этой геометрии взять точки круга, а прямыми назвать дуги окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом. Полученная геометрия и является **геометрией Лобачевского**, а данная её модель называется **моделью Пуанкаре в круге**. В ней выполнены все постулаты Евклида, кроме пятого. В смысле возможности проведения параллельных прямых эта геометрия противоположна эллиптической — через каждую точку в модели Пуанкаре проходит бесчисленное число прямых, параллельных данной. На рисунке 4 изображена прямая линия l и пара других параллельных ей.

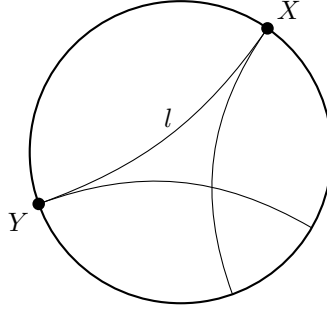


Рис. 4. Модель Пуанкаре в круге

Теперь выполним следующее преобразование координат в \mathbb{R}_1^3 . Введём в плоскости YOZ полярные координаты (ρ, φ) , где ρ — угол с полярной осью y , и по аналогии со сферическими координатами введём параметр χ , равный углу между радиус-вектором точки и осью x (рисунок 5).

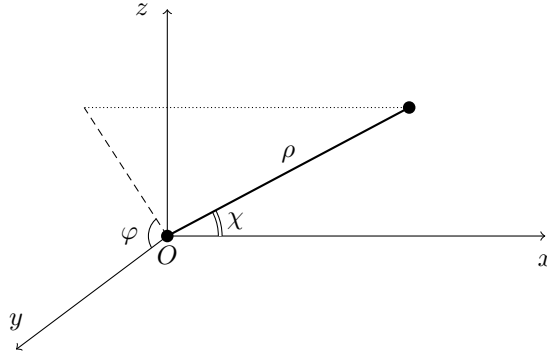


Рис. 5. Псевдосферические координаты (ρ, χ, φ)

После осуществления замены переменных (перехода к псевдосферическим координатам)

$$y = \alpha \operatorname{sh} \chi \cos \varphi, \quad z = \alpha \operatorname{sh} \chi \sin \varphi, \quad x = \alpha \operatorname{ch} \chi$$

уравнение псевдосферы (3.5) запишется в виде $\alpha = \operatorname{const}$. Можно получить вид *римановой метрики на псевдосфере* в координатах (u^1, u^2) модели Пуанкаре, подставляя формулы (3.6) в (3.4):

$$-(dx(u^1, u^2))^2 + (dy(u^1, u^2))^2 + (dz(u^1, u^2))^2 = 4\alpha^4 \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(\alpha^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2}$$

Если в модели Пуанкаре при $\alpha = 1$ теперь ввести полярные координаты (ρ, φ) , линейный элемент представится в виде

$$ds^2 = 4 \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}{(1 - \rho^2)^2} \quad (3.7)$$

Наконец, при записи в псевдосферических координатах (ρ, χ, φ) (что достигается выполнением преобразованием координат $\rho = \operatorname{cth}(\chi/2)$, $\varphi = \varphi$) метрика приобретёт вид

$$ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2 \quad (3.8)$$

Метрика (3.8) называется **метрикой Лобачевского** в записи в псевдосферических координатах.

Таким образом, на псевдосфере S_1^2 мнимого радиуса объемлющим псевдоевклидовым пространством \mathbb{R}_1^3 посредством стереографического отображения ψ **индуцируется** риманова метрика (3.8). Отметим, что объемлющее пространство обладает, наоборот, индефинитной метрикой (3.4).

Заметим, наконец, что выражение (3.8) для линейного элемента *совпадает* с предложенным к рассмотрению (3.1) с точностью до переобозначения координат $\chi = \rho$.

Сопоставляя теперь S_1^2 с координатами (χ, φ) и плоскость с полярными координатами (ρ, φ) , где $\rho = \chi$, получим **плоскость Лобачевского** с полярными координатами (ρ, φ) и метрикой (3.1).

3.3. Геодезическая кривизна

Геодезической кривизной кривой γ на поверхности Φ в некоторой точке P называют кривизна ортогональной проекции γ на касательную плоскость к Φ , проведённую в точке γ (рисунок 6).

Геодезическая кривизна кривой $\gamma = \gamma(x^1(s), x^2(s))$, параметризованной естественно (s — длина дуги) во всякой точке может быть вычислена по формуле (см. [8], [5])

$$k_g = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \left| \dot{x}^1(\ddot{x}^2 + \Gamma_{IJ}^2 \dot{x}^I \dot{x}^J) - \dot{x}^2(\ddot{x}^1 + \Gamma_{IJ}^1 \dot{x}^I \dot{x}^J) \right| \quad (3.9)$$

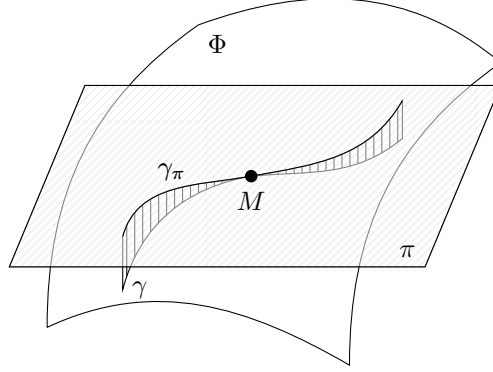


Рис. 6. Кривая γ на поверхности Φ и её проекция γ_π на касательную в точке M плоскость π

где Γ_{IJ}^K — **символы Кристоффеля второго рода**, применяемые при различных вычислениях параметров поверхности:

$$\Gamma_{IJ}^K = \frac{1}{2} g^{LK} \left(\frac{\partial g_{IL}}{\partial x^J} + \frac{\partial g_{JL}}{\partial x^I} - \frac{\partial g_{IJ}}{\partial x^L} \right) \quad (3.10)$$

Вычисляя символы Кристоффеля по формуле (3.10), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0 & \Gamma_{11}^2 &= 0 \\ \Gamma_{12}^1 &= 0 & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\text{ch } \rho}{\text{sh } \rho} \\ \Gamma_{21}^1 &= 0 & \Gamma_{21}^2 &= \frac{\text{ch } \rho}{\text{sh } \rho} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\text{ch } \rho \text{ sh } \rho & \Gamma_{22}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким образом, окончательное выражение для нахождения геодезической кривизны кривой с естественной параметризацией $(\rho(s), \varphi(s))$ в рассматриваемом пространстве имеет вид

$$k_g = \text{sh } \rho \left| \dot{\rho}(\ddot{\varphi} + \Gamma_{12}^2 \dot{\rho} \dot{\varphi} + \Gamma_{21}^2 \dot{\varphi} \dot{\rho}) - \dot{\varphi}(\ddot{\rho} + \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi} \dot{\rho}) \right| \quad (3.12)$$

3.3.1. Геодезические линии

Геодезической линией на поверхности называется кривая, геодезическая кривизна которой в каждой точке равна нулю. Геодезические линии являются прямыми или обладают нормальными, совпадающими с нормальными к рассматриваемой поверхности.

Дифференциальное уравнение геодезических линий в координатной форме имеет вид (см. [3])

$$\frac{d^2 x^K}{ds^2} + \Gamma_{IJ}^K \frac{dx^I}{ds} \frac{dx^J}{ds} = 0 \quad (3.13)$$

Кроме того, известно, что геодезические линии должны удовлетворять соотношению (3.1) определяемому линейным элементом.

В рассматриваемом случае получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \operatorname{ch} \rho \operatorname{sh} \rho \dot{\varphi} = 0 & (3.14a) \\ \ddot{\varphi} + 2 \frac{\operatorname{ch} \rho}{\operatorname{sh} \rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} = 0 & (3.14b) \\ (\dot{\rho})^2 = 1 - (\dot{\varphi})^2 \operatorname{sh}^2 \rho & (3.14c) \end{cases}$$

где точками обозначены производные соответствующих порядков по длине дуги s , а (3.14c) получено из (3.1).

Решим эту систему, получив уравнение геодезических линий.

Рассмотрим два случая.

а) Пусть $\dot{\varphi} = 0 \iff \varphi = \hat{C}_1 = \text{const}$. Получаем систему

$$\begin{cases} \ddot{\rho} = 0 & (3.15a) \\ \ddot{\varphi} = 0 & (3.15b) \\ (\dot{\rho})^2 = 1 & (3.15c) \end{cases}$$

Из (3.15c)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \pm 1 \\ \rho &= \pm s + \hat{C}_2 \end{aligned}$$

Этот случай описывает прямые, проходящие через начало полярной системы координат с постоянным полярным углом φ , при этом знак и постоянная константа \hat{C}_2 в выражении для ρ не оказывают влияния на характер таких геодезических.

б) Пусть теперь $\dot{\varphi} \neq 0$. Из (3.14b) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} &= -2 \frac{\operatorname{ch} \rho}{\operatorname{sh} \rho} \dot{\rho} \\ (\ln \dot{\varphi})' &= -2 (\ln(\operatorname{sh} \rho))' \\ \ln \dot{\varphi} &= -2 \ln(\operatorname{sh} \rho) + C \\ \dot{\varphi} &= \frac{C_1}{\operatorname{sh}^2 \rho} \\ (\dot{\varphi})^2 &= \frac{C_1^2}{\operatorname{sh}^4 \rho} \end{aligned}$$

Разделим (3.14c) на полученное выражение для $(\dot{\varphi})^2$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{\text{sh}^4 \rho}{C_1^2} - \text{sh}^2 \rho \\ \frac{d\rho}{d\varphi} &= \sqrt{\frac{\text{sh}^4 \rho}{C_1^2} - \text{sh}^2 \rho} = \pm \text{sh}^2 \rho \sqrt{\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{\text{sh}^2 \rho}} \\ \frac{d\varphi}{d\rho} &= \frac{1}{\pm \text{sh}^2 \rho \sqrt{\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{\text{sh}^2 \rho}}}\end{aligned}$$

Теперь можно определить характер зависимости $\varphi(\rho)$:

$$\begin{aligned}\varphi(\rho) &= \pm \int \frac{d\rho}{\text{sh}^2 \rho \sqrt{\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{\text{sh}^2 \rho}}} = \mp \int \frac{d(\text{cth} \rho)}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right) - \text{cth}^2 \rho}} = \\ &= \mp \arcsin \left(\frac{\text{cth} \rho}{\pm \sqrt{1 + \frac{1}{C_1^2}}} \right) + C_2 = \mp \arcsin \left(\frac{\text{cth} \rho}{\widetilde{C}_1} \right) + C_2 \quad (3.16)\end{aligned}$$

где $\widetilde{C}_1 = \pm \sqrt{1 + 1/C_1^2}$, так что $|\widetilde{C}_1| > 1$. При выводе (3.16) использовалось соотношение $\text{cth}^2 \rho = \text{ch}^2 \rho / \text{sh}^2 \rho = 1 + 1/\text{sh}^2 \rho$.

Подробнее рассмотрим второе полученное семейство геодезических. Запишем уравнение (3.16) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \rho(t) = t \\ \varphi(t) = \pm \arcsin \left(\frac{\text{cth} t}{C_1} \right) + C_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Арксинус — нечётная функция, а выражение для $\varphi(t)$ в этой системе имеет знак \pm , поэтому константу C_1 без потери общности можно считать строго положительной, поэтому $C_1 > 1$.

Определим значения t , при которых определены значения $\varphi(t)$ в (3.17). Поскольку параметр t равен полярному радиусу, в дальнейшем будем рассматривать $t > 0$, так что $\text{cth} t > 0$. Также отметим, что значение C_2 не оказывает влияния на область определения.

Функция $\arcsin \left(\frac{\text{cth} t}{C_1} \right)$ определена при $\frac{\text{cth} t}{C_1} \leq 1$. Поскольку $\lim_{t \rightarrow 0} \text{cth} t = \infty$, функция $\varphi(t)$ в нуле не определена для всякого конечного C_1 , так что геодезические, описываемые уравнением (3.17), не проходят через начало координат.

Кроме того, из свойств гиперболического котангенса

$$\begin{aligned}\text{cth} t &> 1 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{cth} t &= 1 + 0\end{aligned}$$

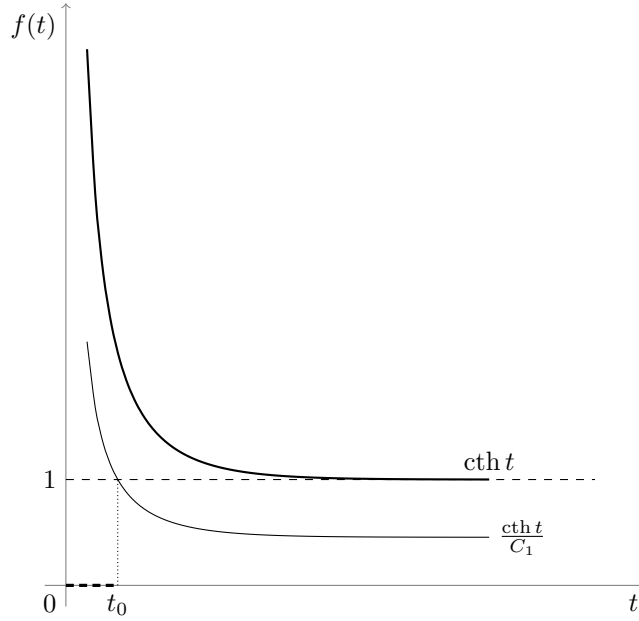


Рис. 7. Функции $f(t) = \text{cth}(t)$ и $f(t) = \frac{\text{cth}(t)}{C_1}$, $C_1 > 1$, $t > 0$

Очевидно,

$$\frac{\text{cth } t}{C_1} > \frac{1}{C_1}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{cth } t}{C_1} = \frac{1}{C_1} + 0$$

Отсюда следует, что в рассматриваемой функции $\varphi(t)$ значение константы C_1 необходимо больше единицы.

Значит, для всякого заданного C_1 функция $\varphi(t)$ определена всюду вне интервала $[0; t_0)$, где $t_0 = \text{arccth } C_1$ (рисунок 7). Действительно, поскольку гиперболический котангенс убывает, при $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\frac{\text{cth } t}{C_1} \leq \frac{C_1}{C_1} = 1$, так что значение $\arcsin \frac{\text{cth } t}{C_1}$ определено.

Зафиксируем $C_2 = 0$ и рассмотрим ветвь (3.17) с $\varphi(t) = \arcsin \frac{\text{cth } t}{C_1}$. При минимально возможном $t = t_0 = \text{arccth } C_1$ получаем $\rho = \text{arccth } C_1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. С ростом t кривая удаляется от начала координат, прижимаясь к асимптоте $\varphi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arcsin \left(\frac{\text{cth } t}{C_1} \right) = \arcsin \frac{1}{C_1}$.

Аналогично, другая ветвь (3.17) с $\varphi(t) = -\arcsin \frac{\text{cth } t}{C_1}$ прижимается к прямой с $\varphi = -\arcsin \frac{1}{C_1}$.

Рассматривая дополнительно геодезические с тем же значением C_1 при $C_2 = \pi$, вновь получим две ветви с асимптотами $\varphi = \pi - \arcsin \frac{1}{C_1} \sim -\arcsin \frac{1}{C_1}$ и $\varphi = \pi + \arcsin \frac{1}{C_1} \sim \arcsin \frac{1}{C_1}$, соответственно.

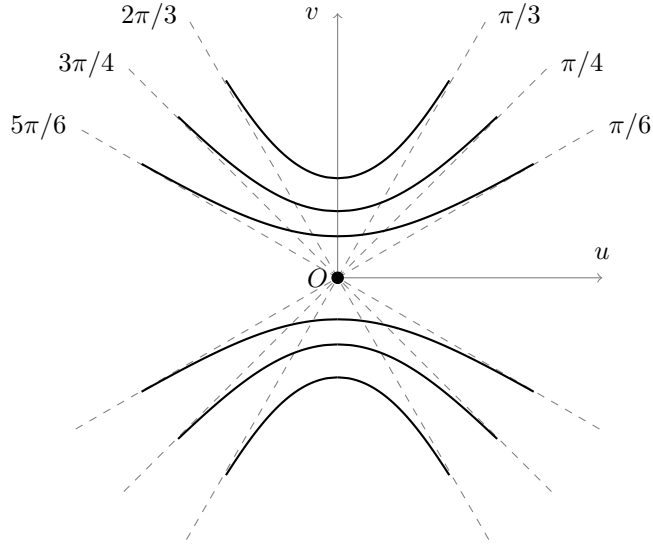


Рис. 8. Геодезические линии с разными значениями параметра C_1

На рисунке 8 приведены три пары геодезических линий для значений $C_1 = 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{2}, 2$. При $C_2 = 0$ соответствующие асимптоты имеют полярные углы, равные $\pi/3, \pi/4, \pi/6$, а при $C_2 = \pi$ — углы $2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$.

Видно, что с увеличением параметра C_1 увеличивается минимальное расстояние до центра координат $\rho(t_0)$ и угол между асимптотами пары геодезических линий для заданного C_1 и значений $C_2 = 0, \pi$.

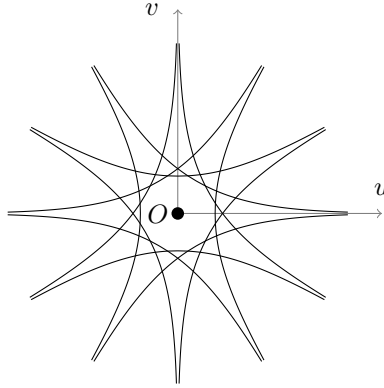


Рис. 9. Геодезические линии с разными значениями параметра C_2 при фиксированном $C_1 = 2$

Изменение параметра C_2 соответствует повороту выбранной геодезической линии вокруг центра координат (рисунок 9).

Отметим, что при $C_1 \rightarrow +\infty$ минимальное допустимое $t \rightarrow 0$, а всё семейство (3.17) вырождается в множество прямых, проходящих через начало координат — то есть семейство геодезических, описываемых уравнением (3.15).

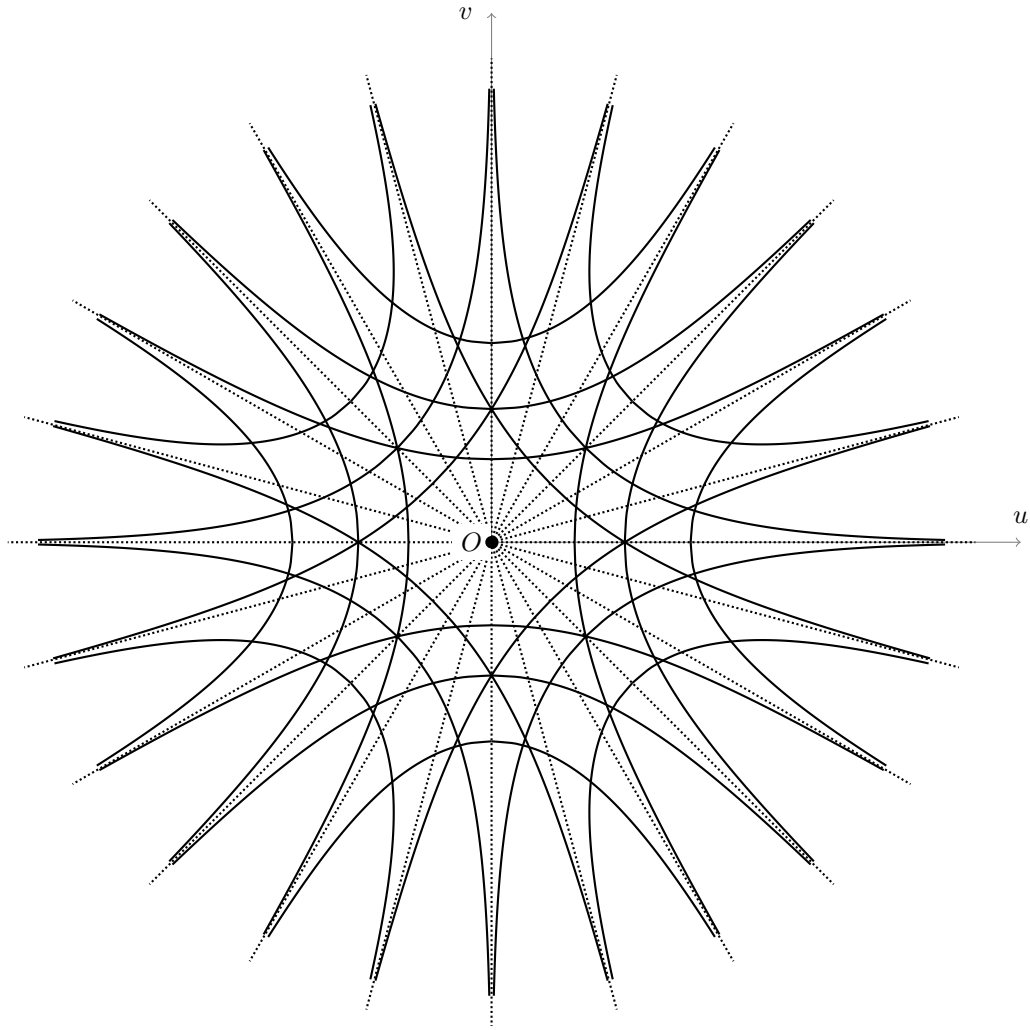


Рис. 10. Геодезические линии на плоскости Лобачевского

Итак, мы определили, что геодезические линии на рассматриваемой плоскости представляют собой прямые, проходящие через начало координат, и всевозможные «гиперболы», симметричные относительно начала координат (рисунок 10).

3.4. Угол между двумя кривыми

Углом α между двумя кривыми γ_1 и γ_2 в точке их пересечения t_0 называется угол между касательными векторами скорости к кривым в данной точке. Пусть кривые заданы параметрически как $l_1 = (\rho_1(t), \varphi_1(t))$ и $l_2 = (\rho_2(t), \varphi_2(t))$. Тогда касательные вектора к ним определяются как $\mathbf{l}_1(t) = (d\rho_1/dt, d\varphi_1/dt)$ и $\mathbf{l}_2(t) = (d\rho_2/dt, d\varphi_2/dt)$, соответственно.

Тогда угол между кривыми может быть определён по формуле (см. [3])

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{l}_1(t_0), \mathbf{l}_2(t_0) \rangle}{|\mathbf{l}_1(t_0)| |\mathbf{l}_2(t_0)|} \quad (3.18)$$

Здесь $|\mathbf{l}| = \sqrt{\langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle}$.

3.5. Гиперболический тангенс

Приведём выражение, которым будем неоднократно пользоваться впоследствии:

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2(e^{x/2} - e^{-x/2})e^{x/2}}{2(e^{x/2} + e^{-x/2})e^{x/2}} = \frac{\text{sh}(x/2)}{\text{ch}(x/2)} = \text{th} \frac{x}{2} \quad (3.19)$$

4. Спираль Архимеда

По определению, в полярных координатах (ρ, φ) спираль Архимеда S_α задаётся уравнением $\rho = \varphi$, которое имеет параметрический вид:

$$\begin{cases} x^1(t) = \rho(t) = t \\ x^2(t) = \varphi(t) = t \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1. Длина дуги

Длина дуги \widehat{AB} этой спирали, определяемой начальным и конечным значениями полярного угла φ_1 и φ_2 вычисляется по следующей формуле (см. [3]):

$$\begin{aligned} l(S_\alpha)_{\varphi_1}^{\varphi_2} &= \int_{\widehat{AB}} ds = \int_{\widehat{AB}} \sqrt{d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho d\varphi^2} = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(1 + \text{sh}^2 \varphi)} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \text{ch} \varphi d\varphi = \text{sh} \varphi_2 - \text{sh} \varphi_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким образом, естественная параметризация спирали Архимеда имеет вид

$$\begin{cases} \rho(s) = \text{arcsch } s \\ \varphi(s) = \text{arcsch } s \end{cases} \quad (4.3)$$

4.2. Геодезическая кривизна

С учётом определения архимедовой спирали (4.1) и результата (4.3),

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} & \ddot{\rho} &= -\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} & \ddot{\varphi} &= -\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Символы Кристоффеля были вычислены в (3.11). Подставим все полученные выражения в (3.12), учитывая, что $x^1 \equiv \rho$, $x^2 \equiv \varphi$:

$$\begin{aligned} k_g &= \text{sh } \rho \left| \dot{\rho}(\ddot{\varphi} + \Gamma_{12}^2 \dot{\rho} \dot{\varphi} + \Gamma_{21}^2 \dot{\varphi} \dot{\rho}) - \dot{\varphi}(\ddot{\rho} + \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi} \dot{\varphi}) \right| = \\ &= \text{sh } \rho \left| \Gamma_{12}^2 \dot{\rho} \dot{\varphi} + \Gamma_{21}^2 \dot{\varphi} \dot{\rho} - \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi} \dot{\varphi} \right| = \\ &= \text{sh } \rho \left| \frac{\text{ch } \rho}{\text{sh } \rho} + \frac{\text{ch } \rho}{\text{sh } \rho} + \text{ch } \rho \text{sh } \rho \right| \frac{1}{s^2 + 1} = \\ &= \frac{2 \text{ch } \rho + \text{ch } \rho \text{sh}^2 \rho}{s^2 + 1} = \frac{(2 + \text{sh}^2 \rho) \text{ch } \rho}{s^2 + 1} = \\ &= \frac{\text{ch } \rho + \text{ch}^3 \rho}{s^2 + 1} = \frac{(\text{ch } \rho + \text{ch}^3 \rho)}{\text{ch}^2 \rho} = \\ &= \frac{1 + \text{ch}^2 \rho}{\text{ch } \rho} \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.3. Спираль Архимеда в моделях плоскости Лобачевского

4.3.1. Спираль Архимеда в модели Клейна

Рассмотрим модель Клейна (см. раздел 2, рисунок 2) в круге единичного радиуса. Обозначим через d_e обычную евклидову метрику, а через d_k — метрику (2.1) в модели Клейна; d_k определяется через d_e :

$$d_k(O, P) = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{d_e(X, O)}{d_e(X, P)} : \frac{d_e(Y, O)}{d_e(Y, P)} \right) \right| \quad (4.5)$$

По аналогии рассмотрим системы полярных координат с полюсами в точке O (рисунок 11): (ρ_e, φ_e) , где $\rho_e(P) \equiv d_e(O, P)$, а также (ρ_k, φ_k) с $\rho_k(P) \equiv d_k(O, P)$. Отметим, что поскольку полюс выбран в центре круга, $\varphi_k \equiv \varphi_e$ (в модели Клейна угол между прямыми, проходящими через O , равен обычному евклидовому углу, см. [6]). В дальнейшем будем обозначать полярный угол как φ .

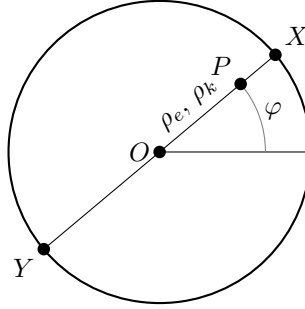


Рис. 11. Системы полярных координат (ρ_e, φ_e) и (ρ_k, φ_k) в модели Клейна в круге единичного радиуса: $\rho_e \neq \rho_k$, $\varphi_k = \varphi_e = \varphi$

С учётом определения ρ_e , ρ_k и (4.5),

$$\begin{aligned} \rho_k(P) &= \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{\rho_e(X)}{\rho_e(X) - \rho_e(P)} : \frac{\rho_e(Y)}{\rho_e(Y) + \rho_e(P)} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{1}{1 - \rho_e(P)} : \frac{1}{1 + \rho_e(P)} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{1 + \rho_e(P)}{1 - \rho_e(P)} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \ln \left(1 + \frac{2\rho_e(P)}{1 - \rho_e(P)} \right) \right| \quad (4.6) \end{aligned}$$

Обозначим $\rho_k(P) = \rho_k$, $\rho_e(P) = \rho_e$. Из (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} e^{2\rho_k} &= 1 + \frac{2\rho_e}{1 - \rho_e} \\ e^{2\rho_k} - 1 &= \frac{2}{1/\rho_e - 1} \\ \frac{2}{e^{2\rho_k} - 1} &= 1/\rho_e - 1 \\ \frac{e^{2\rho_k} + 1}{e^{2\rho_k} - 1} &= \frac{1}{\rho_e} \\ \frac{e^{2\rho_k} - 1}{e^{2\rho_k} + 1} &= \rho_e \end{aligned}$$

и согласно (3.19),

$$\text{th } \rho_k = \rho_e \quad (4.7)$$

Пусть в полярных координатах модели Клейна задана архимедова спираль $\rho_k(\varphi) = \varphi$. Исходя из (4.7), уравнение такой спирали на евклидовой плоскости принимает вид

$$\rho_e(\varphi) = \text{th } \varphi \quad (4.8)$$

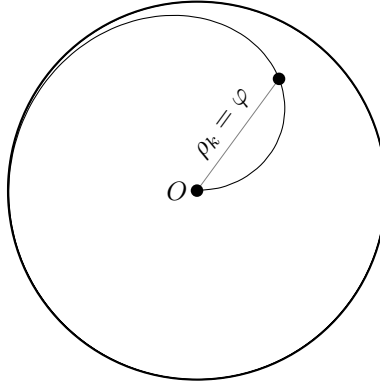


Рис. 12. Спираль Архимеда $\rho_k(\varphi) = \varphi$ в модели Клейна

На рисунке 12 видно, что кривая, заданная уравнением (4.8), с увеличением φ всё ближе прижимается к границе евклидовой единичной окружности $\rho_e = 1$, не достигая её (рисунок 12).

Этот предсказуемый результат вновь поясняет смысл модели Клейна: с приближением к границе круга меньшие в смысле евклидовой метрики расстояния становятся всё большими в смысле метрики (4.6).

Аналогично, конечные в евклидовом пространстве хорды на рисунке 2 (см. страницу 7) являются бесконечными прямыми в модели Клейна с другой метрикой.

4.3.2. Спираль Архимеда в модели Пуанкаре в единичном круге

Рассмотрим модель Пуанкаре в единичном круге (см. раздел 3.2, рисунок 4; рисунок 13) и две системы полярных координат в ней — евклидову (ρ_e, φ) и систему (ρ_p, φ) , где ρ_p — внутренняя метрика модели Пуанкаре. Вновь в рамках рассматриваемой модели $\rho_e < 1$, а угловые координаты обеих систем совпадают. Изучим связь ρ_p с ρ_e с той же целью и тем же подходом, что и в разделе 4.3.1.

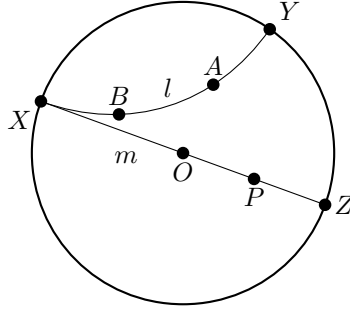


Рис. 13. Прямые и точки в модели Пуанкаре: $l \parallel m$

Для начала стоит рассмотреть связь модели Пуанкаре с моделью Клейна.

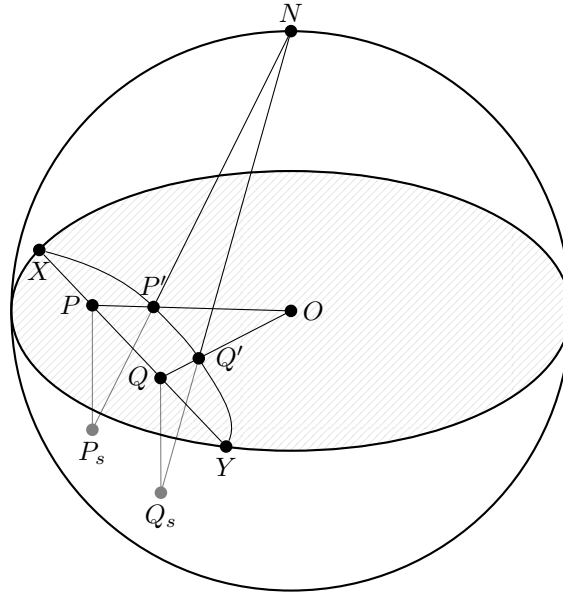


Рис. 14. Связь моделей Клейна и Пуанкаре: $\xi(P) = P'$, $\xi(Q) = Q'$

Известно, что сопоставление ξ точки P модели Клейна и соответствующей ей точки P' модели Пуанкаре может быть осуществлено следующим образом (рисунок 14): на границе модели Клейна как на диаметре строится сфера единичного радиуса, точка P проецируется на нижнюю полусферу в точку P_s , которая в свою очередь соединяется с северным полюсом сферы N . Пересечение NP_s с кругом модели Клейна даёт искомую точку P' модели Пуанкаре в том же круге. Такая стереографическая проекция также переводит прямые модели Клейна (хорды) в прямые модели Пуанкаре (дуги окружностей, пересекающие границу круга под прямым углом). Требуется, чтобы ξ было изометрией, поэтому необходимо

$$d_k(P, Q) = d_p(P', Q') \quad (4.9)$$

Из соображений проективной геометрии (см. [2]) известно, что при отображении ξ метрика преобразуется следующим образом: $2d_k(P, Q) = d_k(P', Q')$, где $P' = \xi(P)$, $Q' = \xi(Q)$. С учётом этого, а также (4.9) и (4.6), немедленно получаем

$$\rho_p(P) = \left| \ln \left(1 + \frac{2\rho_e(P)}{1 - \rho_e(P)} \right) \right| \quad (4.10)$$

Заметим, что метрику (4.10) можно получить и из соображений иного рода.

В модели Пуанкаре прямые, проходящие через центр круга O , изображаются евклидовыми хордами, вдоль которых полярный угол φ очевидно, не меняется.

Применим (3.7) к задаче вычисления полярного радиуса (в метрике ρ_p) точки P , лежащей на прямой OP модели Пуанкаре. Пусть ей соответствует евклидов полярный радиус ρ_{e0} .

С учётом $d\varphi = 0$, получим

$$\begin{aligned} ds^2 &= 4 \frac{d\rho_e^2}{(1 - \rho_e^2)^2} \\ ds &= 2 \frac{d\rho_e}{1 - \rho_e^2} \\ \rho_p &= 2 \int_0^{\rho_{e0}} \frac{d\rho_e}{1 - \rho_e^2} = 2 \frac{1}{2} [\ln(1 + \rho_e) - \ln(1 - \rho_e)] \Big|_0^{\rho_{e0}} = \\ &= \ln \left(\frac{1 + \rho_e}{1 - \rho_e} \right) \Big|_0^{\rho_{e0}} = \left| \ln \left(\frac{1 + \rho_{e0}}{1 - \rho_{e0}} \right) \right| = \left| \ln \left(1 + \frac{2\rho_{e0}}{1 - \rho_{e0}} \right) \right| \end{aligned}$$

Как видно, результат полностью совпадает с (4.10).

Для модели Пуанкаре аналогичное (4.7) соотношение принимает вид

$$\operatorname{th} \frac{\rho_p}{2} = \rho_e \quad (4.12)$$

Таким образом, спираль Архимеда $\rho_p = \varphi$ в модели Пуанкаре на евклидовой плоскости задаётся уравнением

$$\rho_e(\varphi) = \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \quad (4.13)$$

Евклидов образ спирали приведён на рисунке 15.

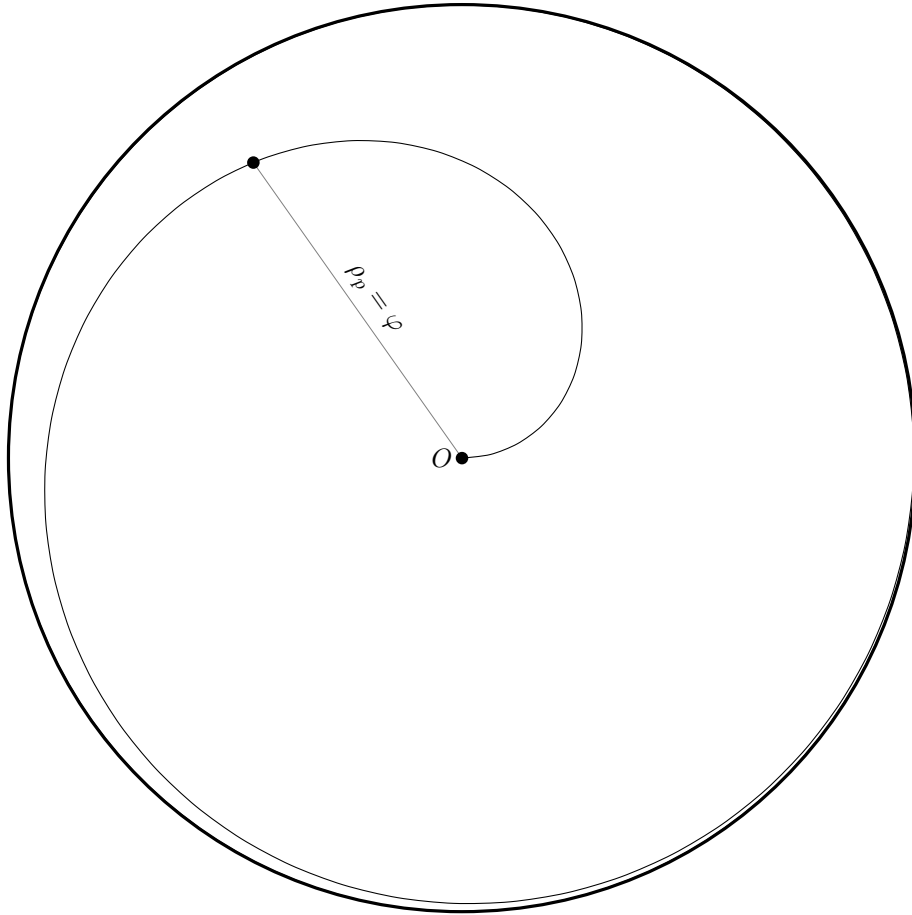


Рис. 15. Спираль Архимеда $\rho_p(\varphi) = \varphi$ в модели Пуанкаре

5. Спираль, пересекающая концентрические окружности под постоянным углом

5.1. Уравнение спирали

Рассматривается спираль, пересекающая концентрические окружности с центром в начале координат под постоянным углом α . Найдём параметризацию искомой спирали $S(t) = (\rho(t), \varphi(t))$. Обозначим окружность радиуса ρ_0 как $O(t) = (\bar{\rho}(t) = \rho_0, \bar{\varphi}(t) = t)$

Из (3.18):

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{O}, \mathbf{S} \rangle}{|\mathbf{O}| |\mathbf{S}|} \quad (5.1)$$

С учётом этого, а также (3.2):

$$\cos \alpha = \frac{d\bar{\rho}d\rho + \text{sh}^2 \rho d\bar{\varphi}d\varphi}{\sqrt{d\bar{\rho}^2 + \text{sh}^2 \rho d\bar{\varphi}^2} \sqrt{d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho d\varphi^2}}$$

Поскольку $d\bar{\rho} = 0$,

$$\cos \alpha = \frac{\text{sh}^2 \rho d\bar{\varphi}d\varphi}{\sqrt{\text{sh}^2 \rho d\bar{\varphi}^2} \sqrt{d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho d\varphi^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sh} \rho d\varphi}{\sqrt{d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho d\varphi^2}}$$

$$\cos^2 \alpha (d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho d\varphi^2) = \text{sh}^2 \rho d\varphi^2$$

$$\cos^2 \alpha d\rho^2 = \sin^2 \alpha \text{sh}^2 \rho d\varphi^2$$

$$\cos \alpha d\rho = \pm \sin \alpha \text{sh} \rho d\varphi$$

$$\text{ctg} \alpha \frac{d\rho}{\text{sh} \rho} = d\varphi$$

$$\text{ctg} \alpha \ln \left(\frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1} \right) = \varphi + C$$

С учётом (3.19), для всякого выбранного значения угла α параметризация спирали S имеет вид

$$\begin{cases} \rho(t) = t \\ \varphi(t) = \text{ctg} \alpha \cdot \ln \left(\text{th} \frac{t}{2} \right) + C \end{cases} \quad (5.2)$$

Не ограничивая общности рассуждений, в дальнейшем константу интегрирования C для определённости будем полагать нулевой.

Известно, что указанным свойством (пересечение радиальных линий под постоянным углом) в евклидовом пространстве обладает логарифмическая спираль ([9]). Действительно, исходя из найденного в разделе 4.3.2 соотношения (4.12) между евклидовой метрикой ρ_e и метрикой ρ_p модели Пуанкаре и того факта, что геометрия модели Пуанкаре совпадает с рассматриваемой (см. 3.2), можно сказать, что если спираль $S(t)$ задана в модели

Пуанкаре и для неё $\rho_p = t$, то $\rho_e = \text{th}(t/2)$. Поскольку $\varphi_e \equiv \varphi_p$, то в евклидовом пространстве параметризация такой спирали имеет вид

$$\begin{cases} \rho(t) = \text{th } \frac{t}{2} \\ \varphi(t) = \text{ctg } \alpha \cdot \ln \left(\text{th } \frac{t}{2} \right) \end{cases}$$

Выражая φ через ρ , получим

$$\begin{aligned} \varphi(\rho(t)) &= \text{ctg } \alpha \cdot \ln \rho(t) \\ \text{tg } \alpha \cdot \varphi &= \ln \rho \\ \rho(\varphi) &= e^{\text{tg } \alpha \cdot \varphi} \end{aligned}$$

что соответствует известному уравнению логарифмической спирали.

5.2. Длина дуги

Вычислим длину $l = l(S)_{t_1}^{t_2}$ дуги \widehat{AB} , которая определяется начальным и конечным значениями параметра t , для рассматриваемой спирали по формуле (3.3):

$$l(S)_{t_1}^{t_2} = \int_{\widehat{AB}} \sqrt{d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho d\varphi^2}$$

Сначала преобразуем подкоренное выражение с учётом (5.2). Поскольку $d\varphi = \frac{2dt}{\text{tg } \alpha \text{th}(t/2) \text{ch}^2(t/2)} = \frac{2dt}{\text{tg } \alpha \text{sh}(t/2) \text{ch}(t/2)} = \frac{dt}{\text{tg } \alpha \text{sh } t}$, то

$$d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho d\varphi^2 = dt^2 + \frac{\text{sh}^2 t dt}{\text{tg}^2 \alpha \text{sh}^2 t} = \left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}\right) dt^2$$

Поэтому формула для вычисления длины дуги принимает вид

$$\begin{aligned} l(S)_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}\right) dt^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{|\sin \alpha|} = \frac{(t_2 - t_1)}{|\sin \alpha|} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{|\sin \alpha|} \quad (5.3) \end{aligned}$$

Таким образом при $0 < \alpha < \pi$, естественная параметризация спирали S представляется в виде

$$\begin{cases} \rho(s) = s \sin \alpha \\ \varphi(s) = \text{ctg } \alpha \cdot \ln \left(\text{th } \frac{s \sin \alpha}{2} \right) \end{cases} \quad (5.4)$$

5.3. Геодезическая кривизна

Производные от координат спирали по длине дуги s таковы:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \sin \alpha & \ddot{\rho} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sh}(s \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sh} \rho} & \ddot{\varphi} &= -\frac{\sin 2\alpha \cdot \operatorname{ch}(s \sin \alpha)}{2 \operatorname{sh}^2(s \sin \alpha)} = -\frac{\sin 2\alpha \cdot \operatorname{ch} \rho}{2 \operatorname{sh}^2 \rho}\end{aligned}$$

Подставим их, а также символы Кристоффеля (3.11) в (3.12):

$$\begin{aligned}k_g &= \operatorname{sh} \rho \left| \dot{\rho}(\ddot{\varphi} + \Gamma_{12}^2 \dot{\rho} \dot{\varphi} + \Gamma_{21}^2 \dot{\varphi} \dot{\rho}) - \dot{\varphi}(\ddot{\rho} + \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi} \dot{\varphi}) \right| = \\ &= \operatorname{sh} \rho \left| \sin \alpha \left(-\frac{\sin 2\alpha \cdot \operatorname{ch} \rho}{2 \operatorname{sh}^2 \rho} + \frac{\operatorname{ch} \rho}{\operatorname{sh} \rho} \left(2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sh} \rho} \right) \right) - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sh} \rho} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sh}^2 \rho} \cdot (-\operatorname{ch} \rho \operatorname{sh} \rho) \right) \right| = \\ &= \operatorname{sh} \rho \left| \sin \alpha \left(\frac{\sin 2\alpha \cdot \operatorname{ch} \rho}{2 \operatorname{sh}^2 \rho} \right) + \left(\frac{\cos^3 \alpha \cdot \operatorname{ch} \rho}{\operatorname{sh}^2 \rho} \right) \right| = \\ &= \operatorname{cth} \rho \left| \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}{2} + \cos^3 \alpha \right| = \operatorname{cth} \rho \left| \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \right| = \\ &= \operatorname{cth} \rho |\cos \alpha|\end{aligned}$$

А. Информация о документе

Данный документ был подготовлен с использованием L^AT_EX. Иллюстрации были созданы с помощью инструментов PGF и TikZ.

Автоматизация процесса сборки обеспечивалась утилитами GNU Make и texdepend.

Представленная работа выполнена в рамках программы четвёртого семестра обучения по специальности «Вычислительная математика и математическая физика» в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Дата компиляции настоящего документа: 27 апреля 2009 г..

Б. Список литературы

- [1] *Milnor John*. Hyperbolic geometry: the first 150 years // *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*. — 1982. — January. — Vol. 6, no. 1.
- [2] *Прасолов В. В.* Геометрия Лобачевского. — 3 изд. — М.: МЦНМО, 2004. — С. 14–16.
- [3] *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: методы и приложения. — 4 изд. — М.: Эдиториал УРСС, 1998. — Т. 1. — С. 23–24, 76–78, 218.
- [4] Об основаниях геометрии / Под ред. А. П. Норден. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. — С. 11–24.
- [5] *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. — 3 изд. — Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — С. 376–381.
- [6] *Заславский А. А.* Геометрические преобразования. — 2 изд. — М.: МЦНМО, 2004. — С. 63.
- [7] *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал Пресс, 2000. — С. 24–52.
- [8] *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. — 6 изд. — М.: Наука, 1974. — С. 161–164.
- [9] *Клейн Ф.* Высшая геометрия. — Государственное объединённое научно-техническое издательство, 1939. — С. 173.