Курсовая работа по теме «Интегральные уравнения»

Дмитрий Джус

Содержание

1. Предмет работы

В настоящей курсовой работе рассматриваются методы решения симметричного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода вида

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1.1}$$

Точное аналитическое решение было получено путём сведения уравнения с неоднородной краевой задаче. Также предложено приближённое решение в виде ряда по собственным функциям оператора $\hat{I}(f) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt$ и численное решение, полученное заменой определённого интеграла приближённой квадратурной формулой трапеций. Использованные методы рассмотрены в [5].

Полученные приближённые решения сопоставлены с точным.

В решении использованы конкретные значения $a = 0$, $b = 1$, $\lambda = 2$ и $f(x) = \operatorname{ch}(x)$, при которых (1.1) принимает вид

$$\varphi(x) - 2 \int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt = \operatorname{ch} x \tag{1.2}$$

Ядро $K(x,t)$ определено следующим образом:

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh}(1)} & 0 \leqslant x \leqslant t \\ \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh}(1)} & t < x \leqslant 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

Рассматриваемое ядро является симметричным, поскольку для него выполнено $K(x,t) = K(t,x)$, и фредгольмовым в силу непрерывности в квадрате $S = 0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Кроме того, раз $K(x,t)$ представимо в виде суммы $g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$ (в данном случае $n = 1$), ядро вырождено. Таким образом, уравнение (1.2) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с симметричным вырожденным ядром.

2. Аналитическое решение

Рассмотрим метод сведения (1.2) к неоднородной краевой задаче с целью получения точного решения.

Выразим $\varphi(x)$ из (1.2):

$$\varphi(x) = \operatorname{ch} x + \underbrace{\frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_0^x \operatorname{ch}(t)\varphi(t)\,dt}_{I_1(x)} + \underbrace{\frac{\lambda \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_x^1 \operatorname{ch}(t-1)\varphi(t)\,dt}_{I_2(x)} \tag{2.1}$$

Продифференцируем $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \operatorname{sh} x + I_1'(x) + I_2'(x)$$

Применим для вычисления $I_1'(x)$ и $I_2'(x)$ формулу для производной интеграла с пределами, зависящими от переменной дифференцирования (см. [3]):

$$\left[\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\,dt\right]' = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} {f_x}'(t,x)\,dt + \\ + \beta'(x)\cdot f(\beta(x),x) - \alpha'(x)\cdot f(\alpha(x),x) \tag{2.2}$$

Найдём $I_1'(x)$:

$$I_1'(x) = \left[\frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_0^x \operatorname{ch}(t)\varphi(t)\,dt\right]' = \\ = \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_0^x \operatorname{ch}(t)\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\left(\int\limits_0^x 0\,dt + 1\cdot\operatorname{ch}(x)\varphi(x) - 0\right) = \\ = \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_0^x \operatorname{ch}(t)\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)\operatorname{ch}(x)\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1}$$

Аналогично, $I_2'(x)$:

$$I_2'(x) = \left[\frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_x^1 \operatorname{ch}(t-1)\varphi(t)\,dt\right]' = \\ = \frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_x^1 \operatorname{ch}(t-1)\varphi(t)\,dt - \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)\operatorname{ch}(x)\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1}$$

Таким образом, выражение для $\varphi'(x)$ принимает вид:

$$\varphi'(x) = \operatorname{sh} x + \underbrace{\frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_0^x \operatorname{ch}(t)\varphi(t)\,dt}_{J_1(x)} + \underbrace{\frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_x^1 \operatorname{ch}(t-1)\varphi(t)\,dt}_{J_2(x)} \tag{2.3}$$

Выполним дифференцирование ещё один раз:

$$\varphi''(x) = \operatorname{ch} x + J_1'(x) + J_2'(x)$$

Вновь применим формулу (2.2):

$$\begin{aligned}
J_1'(x) =& \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_0^x \operatorname{ch}(t)\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)\operatorname{ch}(x)\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1} \\
J_2'(x) =& \frac{\lambda \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_x^1 \operatorname{ch}(t-1)\varphi(t)\,dt - \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)\operatorname{sh}(x)\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1}
\end{aligned}$$

Получаем значение $\varphi''(x)$:

$$\begin{aligned}
\varphi''(x) = &\left[\operatorname{ch} x + \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_0^x \operatorname{ch}(t)\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \int\limits_x^1 \operatorname{ch}(t-1)\varphi(t)\,dt\right] + \\
&+ \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)\operatorname{ch}(x)\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1} - \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)\operatorname{sh}(x)\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1}
\end{aligned}$$

Согласно (2.1), выражение в квадратных скобках представляет собой $\varphi(x)$, так что $\varphi''(x)$ равно:

$$\begin{aligned}
\varphi''(x) &= \varphi(x) + \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)\operatorname{ch}(x)\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1} - \frac{\lambda \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x-1)\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1} \\
&= \varphi(x) + \frac{\lambda\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1}(\operatorname{sh}(x-1)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x-1))
\end{aligned}$$

Преобразуем гиперболический синус разности:

$$\operatorname{sh}(x-1)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x-1) = \operatorname{sh}((x-1)-x) = \operatorname{sh}(-1) = -\operatorname{sh} 1$$

Тогда окончательное выражение для $\varphi''(x)$ с учётом $\lambda = 2$ записывается в виде:

$$\varphi''(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda\varphi(x)}{\operatorname{sh} 1}(-\operatorname{sh} 1)\bigg|_{\lambda=2} = \varphi(x) - \lambda\varphi(x)|_{\lambda=2} = -\varphi(x) \tag{2.4}$$

Итак, получено однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \tag{2.5}$$

Из (2.3) получаем краевые условия второго рода:

$$\varphi'(0) = 0 \tag{2.6a}$$
$$\varphi'(1) = \operatorname{sh} 1 \tag{2.6b}$$

Итак, интегральное уравнение сведено к краевой задаче

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) = \operatorname{sh} 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.5):

$$\varphi(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x \tag{2.8}$$

Применяя краевые условия (2.6), запишем значения констант C_1 и C_2:

$$\varphi'(0) = 0 \implies (\{C_1 \cos x - C_2 \sin x\}|_{x=0} = C_1) = 0 \implies C_1 = 0$$

$$\varphi'(1) = \operatorname{sh} 1 \implies \Big(\{C_1 \cos x - C_2 \sin x\}|_{x=1,\, C_1=0} = -C_2 \sin 1\Big) = \operatorname{sh} 1 \implies$$
$$\implies C_2 = -\frac{\operatorname{sh} 1}{\sin 1}$$

Таким образом, решением полученной краевой задачи и исходного интегрального уравнения (1.2) является функция $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = -\frac{\operatorname{sh} 1 \cdot \cos x}{\sin 1} \tag{2.9}$$

3. Решение в виде ряда по собственным функциям интегрального оператора

3.1. Теорема Гильберта—Шмидта

Функция $\psi_i(x)$ называется *собственной функцией* интегрального оператора $\hat{I}(f) = \int_a^b K(x,t) f(t)\,dt$ (ядра $K(x,t)$), если она является нетривиальным решением однородного интегрального уравнения

$$\psi_i(x) = \lambda_i \int\limits_a^b K(x,t)\psi_i(t)\,dt \tag{3.1}$$

При этом λ_i называется *характеристическим числом*, соответствующим собственной функции $\psi_i(x)$, а обратная величина $\frac{1}{\lambda_i}$ — *собственным числом*. Характеристические числа симметричного ядра действительны. Последовательность собственных функций симметричного ядра *ортогональна* и её можно сделать ортонормированной.

Теорема Гильберта—Шмидта гласит (см. [1]), что если функция $f(x)$ представима в виде

$$g(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{3.2}$$

где симметричное ядро $K(x,t)$ и функция $g(t)$ квадратично интегрируемы, то $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье относительно ортонормированной системы собственных функций ядра $K(x,t)$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x) \tag{3.3}$$

где коэффициенты a_k вычисляются следующим образом:

$$a_k = \int\limits_a^b g(x)\psi_k(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{\lambda_k}\psi_k(x)\,dx \tag{3.4}$$

Если при этом выполнено условие

$$\int\limits_a^b K^2(x,t)\,dt \leqslant A < \infty \tag{3.5}$$

то ряд (3.3) сходится абсолютно и равномерно для всякой функции $g(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы.

Сходимость ряда (3.3) равномерная и в случае непрерывности ядра $K(x,t)$ и функции $g(x)$.

3.2. Использование теоремы

Рассмотрим способ решения интегрального уравнения с применением теоремы Гильберта—Шмидта, изложенный в [5].

Пусть ядро уравнения (1.1) представимо в виде равномерно сходящегося ряда по ортонормированной системе своих собственных функций:

$$K(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\int_a^b K(x,t)\psi_k(t)\,dt\Big]\psi_k(t) \tag{3.6}$$

С учётом (3.1) этот ряд приведём к виду

$$K(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{\lambda_k} \tag{3.7}$$

Преобразуем уравнение (1.1) к виду

$$\varphi(x) - f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{3.8}$$

Применим к функции $\varphi(x) - f(x)$ теорему Гильберта—Шмидта:

$$\varphi(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\psi_k(x) \tag{3.9}$$

Введём обозначения для $a_k = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\psi_k(x)\,dx$:

$$a_k = \int_a^b \varphi(x)\psi_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\psi_k(x)\,dx = \varphi_k - f_k \tag{3.10}$$

Теперь преобразуем правую часть (3.8) с учётом (3.7) и обозначений (3.10):

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt &= \lambda\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{\lambda_k}\varphi(t)\,dt = \\ &= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\int_a^b \varphi(t)\psi_k(t)\,dt\Big]\frac{\psi_k(x)}{\lambda_k} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k\psi_k(x)}{\lambda_k}\end{aligned} \tag{3.11}$$

Приравняв коэффициенты при $\psi_k(x)$ в (3.9) и (3.11) и используя обозначение из (3.10), получим выражение для a_k:

$$a_k = \varphi_k - f_k = \lambda\frac{\varphi_k}{\lambda_k}$$

откуда следует

$$a_k = \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda} \tag{3.12}$$

Значит, согласно (3.8)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k \psi_k(x)}{\lambda_k - \lambda} \tag{3.13}$$

Заметим, что для справедливости (3.13) параметр λ в уравнении не должен быть характеристическим числом. Случай, когда это условие не выполняется, подробно освещён в [2] и [5].

3.3. Применение метода

Известно (см. [5]), что предположение о представимости ядра $K(x,t)$ в виде ряда (3.7) справедливо, если это ядро симметрично, непрерывно в квадрате $S = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ и имеет в S равномерно ограниченные частные производные.

Симметричность и непрерывность рассматриваемого ядра (1.3) очевидны. Кроме того, в квадрате S частные производные ядра равномерно ограничены, поскольку в нём

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}\right| \leqslant \operatorname{ch} 1 \qquad \left|\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}\right| \leqslant \operatorname{ch} 1$$

Кроме того, с учётом обозначенных свойств и квадратичной интегрируемости ядра $K(x,t)$ применима и теорема Гильберта—Шмидта, а в силу непрерывности функции $f(x) = \operatorname{ch} x$ существуют интегралы f_k из (3.10). Так как $\varphi(x)$ и $f(x)$ непрерывны, ряд (3.9) сходится равномерно согласно условиям, обозначенным в разделе 3.1.

Таким образом, для построения решения по формуле (3.13) требуется:

1) Найти собственные функции $\psi_k(x)$ и характеристические значения λ_k ядра $K(x,t)$

2) Проверить, что параметр уравнения $\lambda \notin \lambda_k$

3) Вычислить коэффициенты $f_k = \int\limits_a^b f(x)\psi_k(x)\,dx$

3.3.1. Построение ортонормированной системы собственных функций

Для поиска собственных функций ядра (1.3) сведём интегральное уравнение (3.1) к краевой задаче так, как это было сделано в разделе 2, получив в результате

$$\begin{cases} \psi_k''(x) + (\lambda_k - 1)\psi_k(x) = 0 \\ \psi_k'(0) = 0, \quad \psi_k'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Для решения данной краевой задачи рассмотрим три области значений характеристических чисел λ_k.

1) $\lambda_k = 1$

Присвоим такое значение характеристическому числу λ_0. Уравнение (3.14) приводится к виду

$$\psi_0''(x) = 0$$

Его общее решение имеет вид

$$\psi_0(x) = C_1 x + C_2$$

Из краевых условий получаем $C_1 = 0 \implies \psi_0(x) = C_2$, в целях нормировки выберем значение $C_2 = 1$.

Итак, характеристическому значению $\lambda_0 = 1$ соответствует собственная функция (очевидно нормированная)

$$\psi_0(x) = 1$$

2) $\lambda_k > 1$

Обозначим $\lambda_k - 1 = h^2 > 0$, получив уравнение

$$\psi_k''(x) + h^2 \psi_k(x) = 0$$

здесь $k = 1, 2, \ldots$

Его общим решением является функция вида

$$\psi_k(x) = C_1 \cos hx + C_2 \sin hx$$

Из первого краевого условия получим

$$\psi_k'(0) = 0 \implies (\{-hC_1 \sin hx + hC_2 \cos hx\}|_{x=0} = hC_2) = 0 \implies C_2 = 0$$

откуда $\psi_k(x) = C_1 \cos hx$. Для поиска C_1 воспользуемся вторым краевым условием

$$\psi_k'(1) = 0 \implies (\{-hC_1 \sin hx\}|_{x=1} = -hC_1 \sin h) = 0$$

откуда $h = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, поскольку иначе $C_1 = 0$ и решение получается тривиальным, что противоречит определению собственных функций.

С учётом выполненной замены $h^2 = \lambda_k - 1$,

$$\lambda_k = \pi^2 n^2 + 1,\ n \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что при значения λ_k не меняются от смены знака n и при $n = 0$ не выполняется условие $\lambda_k > 1$. Поэтому можно взять лишь значения $n \in \mathbb{N}$. Тогда не ограничивая общности можно положить $n = k$, получив следующую систему характеристических чисел:

$$\lambda_k = \pi^2 k^2 + 1,\ k \in \mathbb{N}$$

Соответствующая система собственных функций определяется следующим образом:

$$\psi_k = C_1 \cos \pi k x$$

Нормировку ψ_k выполним, выбрав параметр $C_1 = \sqrt{2}$, поскольку в таком случае

$$C_1{}^2 \int\limits_0^1 \cos^2 \pi k x \, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Таким образом, в данной области найдена ортонормированная система собственных функций и характеристических чисел

$$\psi_k = \sqrt{2} \cos \pi k x$$
$$\lambda_k = \pi^2 k^2 + 1$$

где $k = 1, 2, \ldots$

3) $\lambda_k < 1$

Вводя обозначение $1 - \lambda_k = h^2$, получим уравнение

$$\psi_k''(x) - h^2 \psi_k(x) = 0$$

Для него известен общий вид решения:

$$\psi_k(x) = C_1 \operatorname{ch} hx + C_2 \operatorname{sh} hx$$

Из первого краевого условия следует

$$\psi_k'(0) = 0 \implies (\{hC_1 \operatorname{sh} hx + hC_2 \operatorname{ch} hx\}|_{x=0} = hC_2) = 0 \implies C_2 = 0$$

так что $\psi_k(x) = C_1 \operatorname{ch} hx$. Согласно второму краевому условию,

$$\psi_k'(1) = 0 \implies (\{hC_1 \operatorname{sh} hx\}|_{x=1} = hC_1 \operatorname{sh} h) = 0$$

Поскольку $C_1 \neq 0$, получаем $h = 0 \implies \lambda_k = 1$, что противоречит предположению $\lambda_k < 1$. Значит, в данной области у рассматриваемого интегрального оператора характеристических значений нет.

Итак, в результате решения краевой задачи (3.14) найдена ортонормированная система собственных функций $\{\psi_i(x)\}$:

$$\begin{cases} \psi_0(x) = 1 \\ \psi_k(x) = \sqrt{2}\cos \pi k x, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.15}$$

с соответствующими характеристическими значениями

$$\begin{cases} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_k = \pi^2 k^2 + 1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует, что данное по условию значение параметра $\lambda = 2$ не принадлежит $\{\lambda_i\}$, так что формула (3.13) остаётся справедливой.

3.3.2. Вычисление коэффициентов ряда

Для построения ряда (3.13) необходимо определить значения коэффициентов f_k.

Первый коэффициент вычисляется элементарно:

$$f_0 = \int\limits_0^1 \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} 1 \tag{3.17}$$

Для вычисления коэффициентов $f_1, f_2, \ldots$ найдём значение интеграла $J_k = \int_0^1 \operatorname{ch}(x)\cos(\pi k x)\, dx$ (так что $f_k = \sqrt{2} \cdot J_k$), воспользовавшись интегрированием по частям:

$$J_k = \int\limits_0^1 \operatorname{ch}(x)\cos(\pi k x)\, dx = \underbrace{\left.\frac{\operatorname{ch}(x)\sin(\pi k x)}{\pi k}\right|_0^1}_{0} - \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh}(x)\sin(\pi k x)}{\pi k}\, dx =$$

$$= \underbrace{\left.\frac{\operatorname{sh}(x)\cos(\pi k x)}{\pi^2 k^2}\right|_0^1}_{\frac{\operatorname{sh} 1 \cdot (-1)^k}{\pi^2 k^2}} - \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ch}(x)\cos(\pi k x)}{\pi^2 k^2}\, dx}_{\frac{J_k}{\pi^2 k^2}}$$

откуда получаем J_k:

$$J_k = \frac{\operatorname{sh} 1 \cdot (-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1}$$

Таким образом, коэффициенты f_k для $k \in \mathbb{N}$ равны

$$f_k = \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sh} 1 \cdot (-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1} \tag{3.18}$$

Подставляя теперь известные f_k, λ_k, ψ_k и $\lambda = 2$ в (3.13), получим решение уравнения в виде ряда по системе функций $\{\psi_i\}$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(x) + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_k \cdot \frac{\psi_k(x)}{\lambda_k - 2}\right] = \\ = f(x) - 2\,\mathrm{sh}\,1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{2}\cdot \mathrm{sh}\,1\cdot(-1)^k}{\pi^2k^2+1}\cdot\frac{\sqrt{2}\cos\pi kx}{\pi^2k^2-1}\right] = \\ = f(x) + \mathrm{sh}\,1\left(-2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos\pi kx}{\pi^4k^4-1}\right)\end{aligned} \qquad (3.19)$$

Отметим высокую скорость сходимости ряда (3.19) (как у ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^4}$).

3.4. Реализация

Следующая программа написана на языке среды символьных вычислений `Maxima` и реализует построение решения $\varphi(x)$ как частичную сумму ряда (3.19), после чего записывает график полученной функции в файл.

Использование `Maxima` обусловлено возможностью реализовать алгоритм на уровне абстракции, весьма близком к математическому описанию из раздела 3.3.

Программа не содержит большого числа операций:

⟨* 13a⟩≡
  ⟨*установка исходных данных* 13b⟩
  ⟨*построение частичной суммы ряда* 14b⟩
  ⟨*запись графика полученного решения в файл* 14e⟩

На первом этапе устанавливаются данные по условию значения пределов интегрирования и параметра λ, вид функции $f(x)$.

⟨*установка исходных данных* 13b⟩≡ (13a)
  ⟨*отрезок интегрирования* 13c⟩
  ⟨*параметр* λ 13d⟩
  ⟨*неоднородность в правой части* 13e⟩
  ⟨*число членов в частичной сумме ряда* 14a⟩

⟨*отрезок интегрирования* 13c⟩≡ (13b)
```
a: 0;
b: 1;
```

⟨*параметр* λ 13d⟩≡ (13b)
```
lambda: 2;
```

⟨*неоднородность в правой части* 13e⟩≡ (13b)
```
f(x) := cosh(x);
```

Верхний предел n в сумме (3.13) вводится с клавиатуры:

$\langle$*число членов в частичной сумме ряда* 14a$\rangle\equiv$ (13b)
```
n: read("n=?");
```

Для построения ряда необходимо сначала установить в коде программы вид собственных функций и характеристических значений. Затем определяются коэффициенты f_k, после чего построение решения в виде частичной суммы ряда выполняется согласно (3.13) по следующей формуле:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k \psi_k(x)}{\lambda_k - \lambda}$$

в два шага — сначала строится часть с суммой, после чего сумма умножается на λ и складывается с неоднородностью уравнения, что и даёт приближённое решение.

$\langle$*построение частичной суммы ряда* 14b$\rangle\equiv$ (13a)
```
⟨установка систем ψ_k(x) и λ_k 14c⟩
⟨вычисление значений f_k 14d⟩
series: sum(f_k(k) * eigenfun(k) / (eigenval(k) - lambda), k, 0, n-1);
solution(x) := f(x) + lambda * at(series, 'x=x);
```

Функции `eigenfun` и `eigenval` определены согласно (3.15) и (3.16) и возвращают выражение для определяемой параметром `k` собственной функции $\psi_k(x)$ или характеристического числа λ_k, соответственно.

$\langle$*установка систем* $\psi_k(x)$ *и* λ_k 14c$\rangle\equiv$ (14b)
```
eigenfun(k) := if (k=0) then 1 else sqrt(2) * cos(%pi*k*x);
eigenval(k) := if (k=0) then 1 else 1 + (%pi*k)^2;
```

Коэффициент f_k вычисляется функцией `f_k` по формуле $f_k = \int_a^b f(x)\psi_k(x)\,dx$.

$\langle$*вычисление значений* f_k 14d$\rangle\equiv$ (14b)
```
f_k(k) := integrate(f(x) * eigenfun(k), x, a, b);
```

$\langle$*запись графика полученного решения в файл* 14e$\rangle\equiv$ (13a)
```
plot2d([solution(x)], [x, a, b], [nticks, 1], [adapt_depth, 1],
       [gnuplot_preamble, ssubst(string(n),
                                  "x", "set table \"series-x.mac.out\"")]);
```

3.5. Сравнение с аналитическим решением

На рисунке 1 сплошной линией изображён график аналитического решения, точками обозначены значения приближённого решения при соответствующих значениях x. Для построения графика была выбрана частичная сумма ряда из 5 членов.

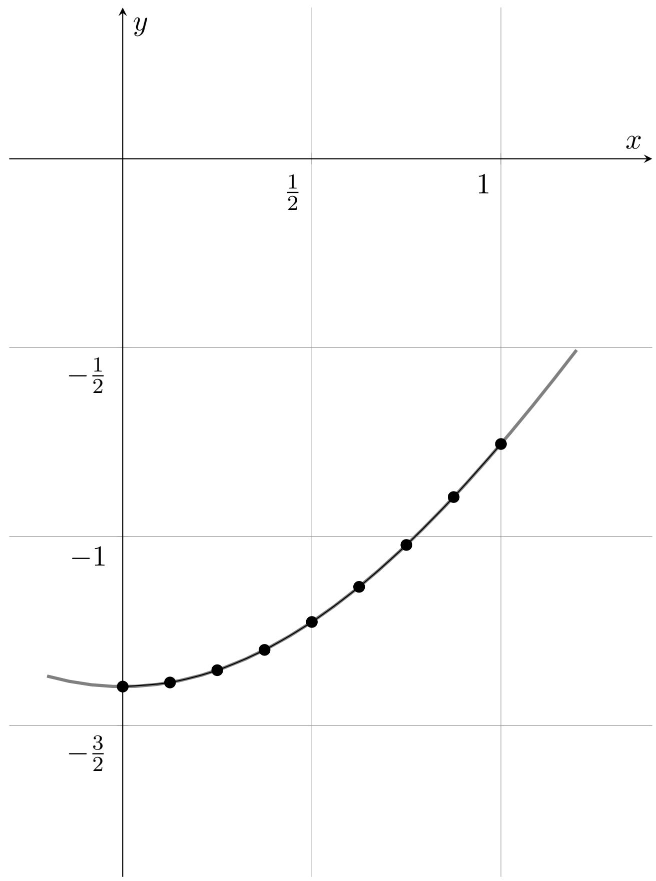

Рис. 1. Точное решение —— (2.9) и решение в виде ряда —•— (3.19) при количестве членов ряда $n = 5$

4. Численное решение

4.1. Описание метода

Воспользуемся квадратурной формулой для вычисления определённого интеграла $\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt$ в (1.1).

Пусть на отрезке интегрирования $[a;b]$ введена равномерная сетка $\Xi_n = \langle a = \tau_1, \dots, \tau_n = b\rangle$ с шагом $h = \frac{b-a}{n-1}$. Тогда квадратурная формула трапеций принимает вид (см. [4]):

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{f(\tau_1)+f(\tau_n)}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} f(\tau_j)\right] \tag{4.1}$$

С учётом (4.1) интегральное уравнение (1.1) в приближённом виде записывается следующим образом:

$$\varphi(x) - \lambda h\left[\frac{K(x,\tau_1)\varphi(\tau_1)+K(x,\tau_n)\varphi(\tau_n)}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} K(x,\tau_j)\varphi(\tau_j)\right] = f(x)$$

Записывая его для каждого $x = \tau_i \in \Xi_n$, получим систему линейных уравнений:

$$\varphi(\tau_i) - \lambda h\left[\frac{K(\tau_i,\tau_1)\varphi(\tau_1)+K(\tau_i,\tau_n)\varphi(\tau_n)}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} K(\tau_i,\tau_j)\varphi(\tau_j)\right] = f(\tau_i)$$

В матричном виде эта система имеет вид:

$$(E_n - \lambda B)^\vee\varphi = {}^\vee f \tag{4.2}$$

В системе (4.2) матрица E_n — единичная размера $n \times n$, а B состоит из элементов b^i_j, определяемых как

$$b^i_j = \begin{cases} \frac{1}{2}hK(\tau_i,\tau_j) & j = 1,\, j = n \\ hK(\tau_i,\tau_j) & j = \overline{2, n-1} \end{cases} \tag{4.3}$$

Решение системы (4.2) представляет собой вектор ${}^\vee\varphi$, состоящий из значений функции $\varphi(x)$ в точках сетки Ξ_n:

$${}^\vee\varphi = \begin{pmatrix} \varphi(\tau_1) \\ \varphi(\tau_2) \\ \vdots \\ \varphi(\tau_n) \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

4.2. Реализация

Представленная программа является реализацией приближённого метода решения интегрального уравнения в среде `GNU Octave`.

Общая структура программы такова:

⟨* 17a⟩≡
  ⟨*установка исходных данных* 17b⟩
  ⟨*вычисление шага и построение сетки* 18a⟩
  ⟨*построение и решение системы* 18b⟩
  ⟨*запись решения в файл* 18f⟩

Для работы программы необходимо установить исходные данные, соответствующие постановке задачи (см. 1).

⟨*установка исходных данных* 17b⟩≡ (17a)
  ⟨*отрезок интегрирования* 17c⟩
  ⟨*параметр* λ 17d⟩
  ⟨*ядро интегрального уравнения* 17e⟩
  ⟨*неоднородность в правой части* 17f⟩
  ⟨*количество точек в сетке* 17g⟩

⟨*отрезок интегрирования* 17c⟩≡ (17b)
```
a = 0
b = 1
```

⟨*параметр* λ 17d⟩≡ (17b)
```
lambda = 2
```

⟨*ядро интегрального уравнения* 17e⟩≡ (17b)
```
function K = K (x, t)
  if ((0 <= x) & (x <= t))
    K = cosh(x)*cosh(t-1)/sinh(1);
  else
    K = cosh(t)*cosh(x-1)/sinh(1);
  endif
endfunction
```

⟨*неоднородность в правой части* 17f⟩≡ (17b)
```
function f = f (x)
  f = cosh(x);
endfunction
```

Требуемое количество точек в сетке Ξ_n вводится с клавиатуры.

⟨*количество точек в сетке* 17g⟩≡ (17b)
```
n = input("n=? ")
```

Конструкция `a : h : b` возвращает сетку с шагом `h` на отрезке от `a` до `b`

⟨*вычисление шага и построение сетки* 18a⟩≡ (17a)

```
h = (b - a) / (n - 1)
tau = a : h : b;
```

⟨*построение и решение системы* 18b⟩≡ (17a)

⟨*построение матрицы B* 18c⟩
⟨*построение вектора* $^{\vee}f$ 18d⟩
⟨*решение системы* 18e⟩

В `Octave` матрицы динамически изменяют свои размеры при присваивании нового значения несуществующему элементу матрицы. Поскольку конечные размеры матрицы B известны ($n \times n$), в целях оптимизации выгоднее сразу проинициализировать её нулями при помощи `zeros`, чтобы сэкономить на операциях выделения дополнительной памяти.

⟨*построение матрицы B* 18c⟩≡ (18b)

```
B = zeros(n);
for i = 1:n
  for j = 1:n
    if ((j == 1) | (j == n))
      factor = 1/2;
    else
      factor = 1;
    endif
    B(i, j) = h * factor * K(tau(i), tau(j));
  endfor
endfor
```

⟨*построение вектора* $^{\vee}f$ 18d⟩≡ (18b)

```
f_vector = zeros(n, 1);
for i = 1:n
  f_vector(i) = f(tau(i));
endfor
```

Вектор $^{\vee}\varphi$ находится из уравнения (4.2) как $^{\vee}\varphi = [E_n - \lambda B]^{-1}\, {}^{\vee}f$. Функция `eye` возвращает единичную матрицу заданного размера:

⟨*решение системы* 18e⟩≡ (18b)

```
phi_values = (eye(n) - lambda*B) \ f_vector;
```

⟨*запись решения в файл* 18f⟩≡ (17a)

```
points = [tau', phi_values]
save (sprintf("numeric-%d.oct.out", n), "points")
```

4.3. Сравнение с аналитическим решением

На иллюстрации 2 сплошной линией обозначен график аналитического решения, точками обозначены компоненты вектора $\overset{\vee}{\varphi}$ при соответствующих значениях аргумента.

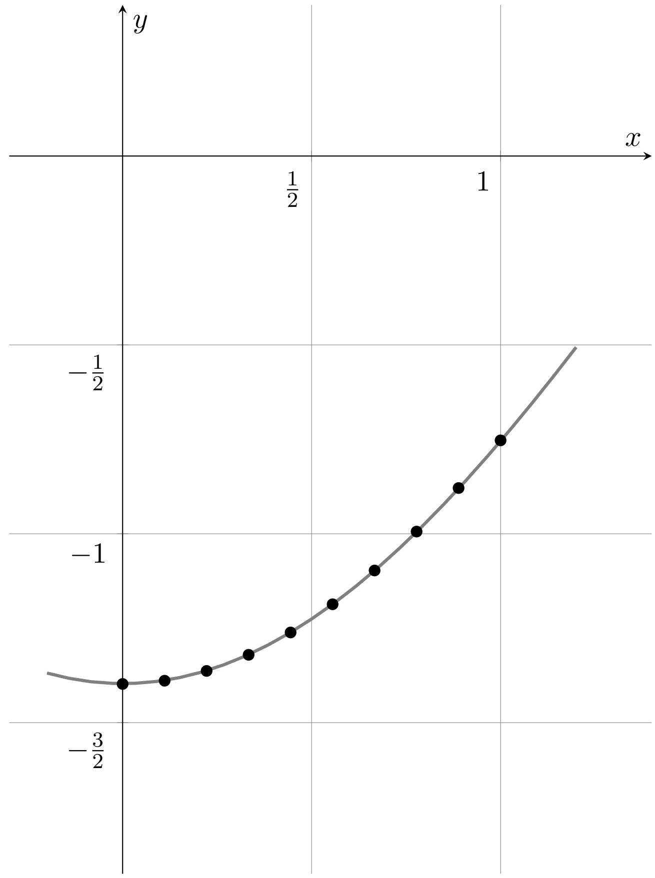

Рис. 2. Точное —— (2.9) и численное решение • (4.4) при количестве точек в сетке $n = 10$

А. Информация о документе

Данный документ был подготовлен с использованием LaTeX. Для построения ряда в разделе 3.1 применялась система `Maxima`. Программа из раздела 4.2 написана в среде `GNU Octave`. Код представлен с использованием `noweb`. Иллюстрации созданы с помощью пакета `pgfplots` и `gnuplot`.

Автоматизация процесса сборки обеспечивалась утилитами `GNU Make` и `texdepend`.

Представленная работа выполнена в рамках программы пятого семестра обучения по специальности «Вычислительная математика и математическая физика» в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Дата компиляции настоящего документа: 11 декабря 2009 г.

Б. Список литературы

[1] *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. — М.: Наука, 1975. — С. 214.

[2] *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения. — 2 изд. — М.: Наука, 1976. — С. 80–81.

[3] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8 изд. — М.: Физматлит, 2003. — Т. 2. — С. 718.

[4] *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Физматлит, 2001.

[5] *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Физматлит, 2003. — С. 477–479.