Курсовая работа по теме

«Интегральные уравнения»

Дмитрий Джус

Содержание

1. Предмет работы **3**
- 1.1. Исходные данные 3

2. Решение **4**
- 2.1. Приближение полиномами Чебышёва 4
- 2.2. Дискретизация исходного уравнения 4
- 2.3. Неустойчивость 6
- 2.4. Регуляризация 7
  - 2.4.1. Использование модельного решения 8
  - 2.4.2. Регуляризация по невязке 10
- 2.5. Выводы 11

3. Информация о документе **12**

4. Список литературы **12**

1. Предмет работы

В настоящей курсовой работе рассматриваются методы решения симметричного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма первого рода вида

$$\int_a^b e^{-s\tau} x(\tau)\, d\tau = z(s),\ s \in [a; b] \tag{1.1}$$

Изучение интегрального уравнения будем проводить по следующему плану:

⟨*⟩≡
  ⟨*исходные данные*⟩
  ⟨*модельное решение*⟩
  ⟨*дискретизация*⟩
  ⟨*неустойчивость*⟩
  ⟨*регуляризация*⟩
  ⟨*запись результатов*⟩

1.1. Исходные данные

Рассматривается отрезок интегрирования $a = 0, b = 2$.

⟨*исходные данные*⟩≡
```
a = 0
b = 2
```

К использованию предлагается модельное решение (рис. 1) вида

$$x_0(\tau) = 100 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\tau\right). \tag{1.2}$$

⟨*модельное решение*⟩≡
```
function M = M(x)
  M = 100 * sin(pi / 2 * x) .^ 2;
endfunction
```

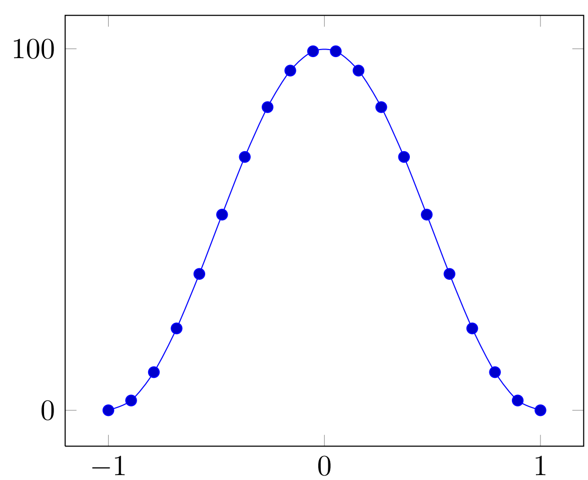

Рис. 1. Модельное решение (1.2)

2. Решение

2.1. Приближение полиномами Чебышёва

Многочлены Чебышёва ($T_k(\tau)$ на отрезке $[a;b]$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_0(\tau) &= 1 \\ T_1(\tau) &= \frac{2x-(b+a)}{b-a} \\ T_{k+1}(\tau) &= 2\cdot T_1(\tau)\cdot T_k(\tau) - T_{k-1}(\tau) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Разложим искомую функцию $x(\tau)$ по многочленам Чебышёва до n-го члена:

$$x_A(\tau) = \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(\tau). \tag{2.2}$$

Коэффициенты c_k вычисляются по формуле:

$$c_k = \frac{\langle T_k, x\rangle}{\langle T_k, T_k\rangle}, \tag{2.3}$$

где

$$\langle f, g\rangle = \sum_{m=1}^{n} f(\tau_m)\cdot g(\tau_m). \tag{2.4}$$

При этом известно (см. [1], [2]), что для интерполяции с наименьшей погрешностью на отрезке $[a;b]$ узлы τ_m необходимо выбирать следующим образом:

$$\tau_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2n}\right), \quad m = 1,\dots,n. \tag{2.5}$$

При выборе узлов интерполяции как в (2.5),

$$\langle T_k, T_k\rangle = r_k = \begin{cases} n, & k = 1, \\ n/2, & k > 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

С учётом (2.3) и (2.6) формула (2.2) примет вид:

$$x_A(\tau) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} x(\tau_j)\cdot T_k(\tau_j)}{r_k}\cdot T_k(\tau)\right] \tag{2.7}$$

2.2. Дискретизация исходного уравнения

$\langle$*дискретизация*$\rangle\equiv$
  $\langle$*генерация сеток*$\rangle$
  $\langle$*построение матриц* Ψ, Θ *и* $B\rangle$
  $\langle$*построение правой части*$\rangle$

Введём на $[a;b]$ равномерную сетку $S_n = \langle a = s_1, \ldots, s_n = b \rangle$ и сетку $\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$ согласно (2.5). Выберем $n = 20$.

$\langle$*генерация сеток*$\rangle \equiv$
```
global n = 20
h = (b - a) / (n - 1)
s = a:h:b;
tau = Cheb_roots(a, b, n);
```

Подставим разложение (2.7) в (1.1) и запишем уравнение для каждого s_i:

$$\int_a^b e^{-s_i \tau} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[x(\tau_j) \cdot T_k(\tau_j) \cdot \frac{1}{r_k} \cdot T_k(\tau) \right] d\tau = z(s_i). \tag{2.8}$$

Переупорядочим знаки суммирования и интегрирования:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_a^b e^{-s_i \tau} \cdot T_k(\tau)\, d\tau}_{\psi_{ik}} \cdot \underbrace{T_k(\tau_j) \cdot \frac{1}{r_k}}_{\theta_{kj}} \cdot x(\tau_j) = z(s_i), \tag{2.9}$$

с учётом введённых обозначений:

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^n \psi_{ik} \cdot \theta_{kj}}_{b_{ij}} \cdot x(\tau_j) = z(s_i). \tag{2.10}$$

Определим матрицы $\Psi = (\psi_{ik})_n^n$ и $\Theta = (\theta_{kj})_n^n$, после чего можно ввести матрицу

$$B = (b_{ij})_n^n = \Psi \cdot \Theta. \tag{2.11}$$

$\langle$*построение матриц* Ψ, Θ *и* $B\rangle \equiv$
```
Psi = zeros(n);
for i = 1:n
  for k = 1:n
    Psi(i, k) = quad(@(x) exp(-s(i) * x) * Cheb(a, b, k, x), a, b);
  endfor
endfor

Theta = zeros(n);
for k = 1:n
  for j = 1:n
    Theta(k, j) = Cheb(a, b, k, tau(j)) / Cheb_norm(k, n);
  endfor
endfor

global B = Psi * Theta
```

Из (2.10) следует:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x(\tau_j) = z(s_i),$$

что с учётом определения (2.11) принимает вид:

$$B \cdot {}^{\vee}x = {}^{\vee}z. \tag{2.12}$$

Решение системы (2.12) позволяет определить значения искомой функции x в точках τ_m.

Найдём правую часть, подставив в уравнение модельное решение.

⟨*построение правой части*⟩≡

```
global x_m = M(tau)';
z = B * x_m;
```

2.3. Неустойчивость

Внесём в правую часть уравнения малое возмущение порядка $\delta = 10^{-2}$, прибавив к ней вектор нормально распределённых случайных величин, и рассмотрим вместо (2.12) полученную систему:

$$B \cdot {}^{\vee}x = {}^{\vee}\tilde{z}. \tag{2.13}$$

Решение данной системы ${}^{\vee}\tilde{x}$ (рис. 2) демонстрирует её неустойчивость к малым возмущениям.

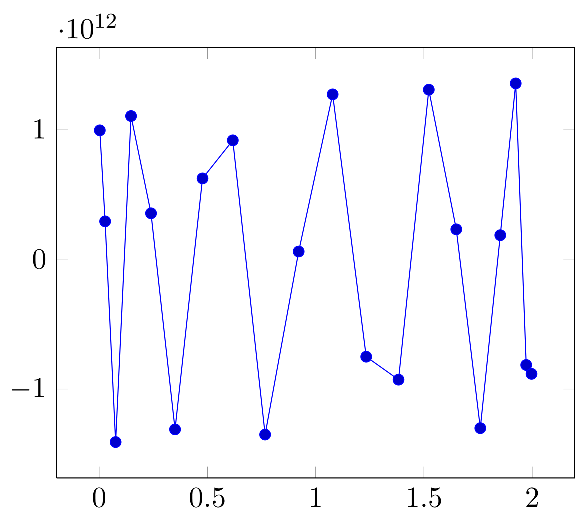

Рис. 2. Решение (2.12) после внесения возмущения

⟨*неустойчивость*⟩≡

```
raw_x = B \ z;
global delta = 0.01;
rand ("seed", 1329)
global z_d = z + normrnd(0, delta, n, 1);
z_d - z
x_d = B \ z_d;
```

2.4. Регуляризация

Метод регуляризации заключается в замене исходной системы (2.13) на следующую:

$$\left(\alpha H + B^T B\right) \cdot {}^{\vee}x = B^T \cdot {}^{\vee}\tilde{z}, \tag{2.14}$$

где H — матрица стабилизирующего функционала, а α — параметр регуляризации. Предлагается определить α таким образом, чтобы новая система была как можно адекватнее исходной и при этом была устойчивой. Конкретный вид матрицы H выбирается согласно требованиям, налагаемым на решение системы. В данной работе будем использовать в качестве H единичную матрицу E.

Далее рассмотрим два подхода к поиску параметра α.

⟨*регуляризация*⟩≡
```
function x = stabilized_solution(B, z, H, alpha)
  x = (H * alpha + B' * B) \ (B' * z);
endfunction
```
⟨*регуляризация по модельному решению*⟩
⟨*регуляризация по невязке*⟩

2.4.1. Использование модельного решения

Обозначая решение новой системы как ${}^{\vee}\bar{x}(\alpha)$, зададимся задачей минимизации функционала

$$w(\alpha) = \left\| {}^{\vee}x_0 - {}^{\vee}\bar{x}(\alpha) \right\|. \tag{2.15}$$

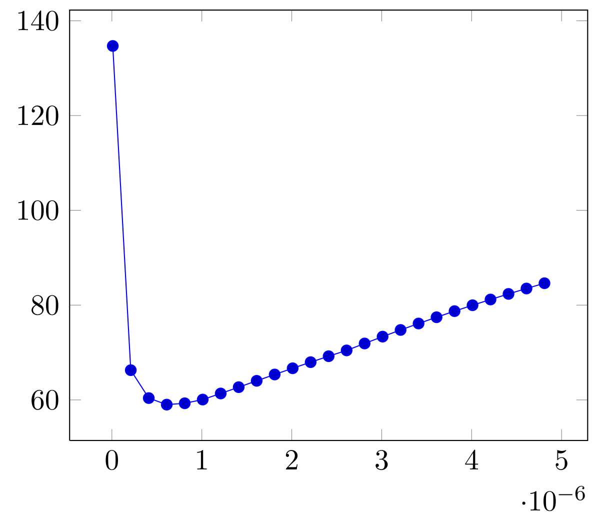

Рис. 3. Значения функционала $w(\alpha)$

⟨*регуляризация по модельному решению*⟩≡
```
function w = w(alpha)
  global B z_d x_m n
  x = stabilized_solution(B, z_d, eye(n), alpha);
  w = sum(abs(x - x_m));
endfunction

alphas = 1e-8:20e-8:5e-6;
w_points = zeros(length(alphas),1);
for i=1:length(alphas)
  w_points(i) = w(alphas(i));
endfor

alpha = sqp(1e-2, @w, [], [], 0, 1)
```
⟨*проверка первого решения на устойчивость*⟩

Находя α: 6.24988544e-07 , вычислим решение регуляризованной системы (2.14). Оно сопоставлено с модельным решением x_0 на рис. 4.

Система (2.14) при найденном значении α обладает устойчивостью: как продемонстрировано на рис. 5, добавление к вектору ${}^{\vee}\tilde{z}$ малого возмущение уже не приводит к картине, виденной ранее (рис. 2).

⟨*проверка первого решения на устойчивость*⟩≡
```
x_r1 = stabilized_solution(B, z_d, eye(n), alpha);
x_r1_dist = stabilized_solution(B, z_d + normrnd(0, delta, n, 1), eye(n), alpha);
```

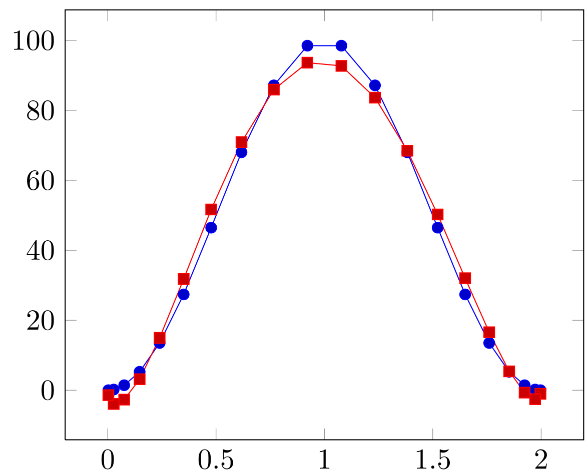

Рис. 4. Модельное и регуляризационное решение

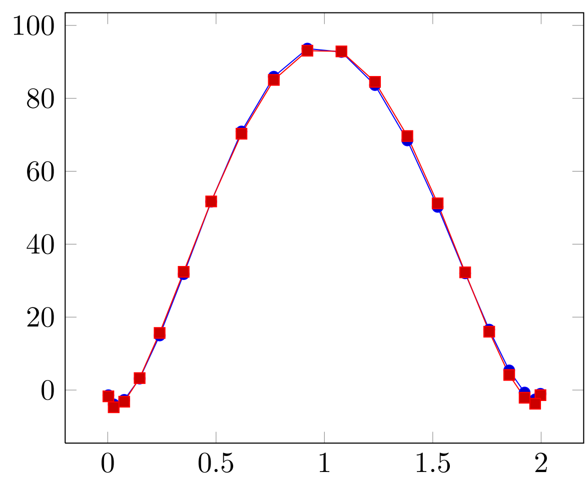

Рис. 5. Стабильность регуляризационного решения ${}^{\vee}\bar{x}(\alpha)$

2.4.2. Регуляризация по невязке

Рассмотрим для той же системы (2.14) невязку в правой части:

$$\Delta = \left\| B \cdot {}^{\vee}\bar{x}(\beta) - {}^{\vee}\tilde{z} \right\|, \tag{2.16}$$

минимизируем функционал $\Phi(\beta)$, определённый следующим образом:

$$u(\beta) = \left| \Delta - \delta \cdot \sqrt{n} \right|. \tag{2.17}$$

В данном случае мы выбираем параметр регуляризации таким образом, чтобы значение невязки (2.16) было как можно ближе к оптимальному значению $\delta\sqrt{n}$, вычисленному с учётом нормальности распределения компонента внесённого в систему вектора случайных величин. Определим β: 6.24988544e-08 .

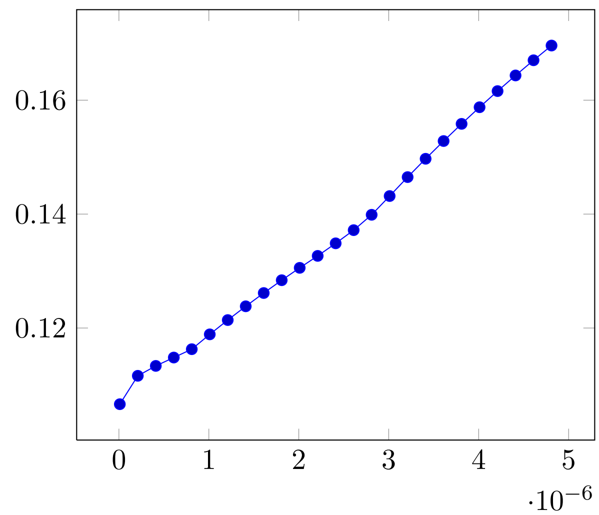

Рис. 6. Значения функционала $u(\beta)$

⟨*регуляризация по невязке*⟩≡
```
function u = u(alpha)
  global B z_d x_m n delta
  x = stabilized_solution(B, z_d, eye(n), alpha);
  u = abs(sum(abs(B*x - z_d)) - delta * sqrt(n));
endfunction

u_points = zeros(length(alphas),1);
for i=1:length(alphas)
  u_points(i) = u(alphas(i));
endfor

beta = sqp(1e-2, @u, [], [], alpha / 10, 1)
⟨проверка второго решения на устойчивость⟩
```

⟨*проверка второго решения на устойчивость*⟩≡
```
x_r2 = stabilized_solution(B, z_d, eye(n), beta);
x_r2_dist = stabilized_solution(B, z_d + normrnd(0, delta, n, 1), eye(n), beta);
```

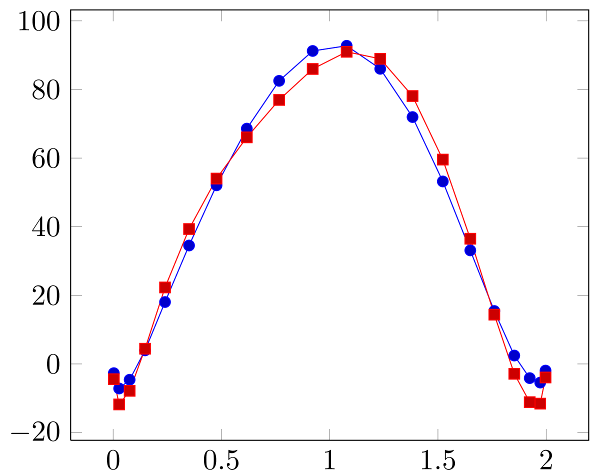

Рис. 7. Стабильность регуляризационного решения $\overset{\vee}{\bar{x}}(\beta)$

2.5. Выводы

Решения $\overset{\vee}{\bar{x}}(\alpha)$ и $\overset{\vee}{\bar{x}}(\beta)$ представлены на рис. 8.

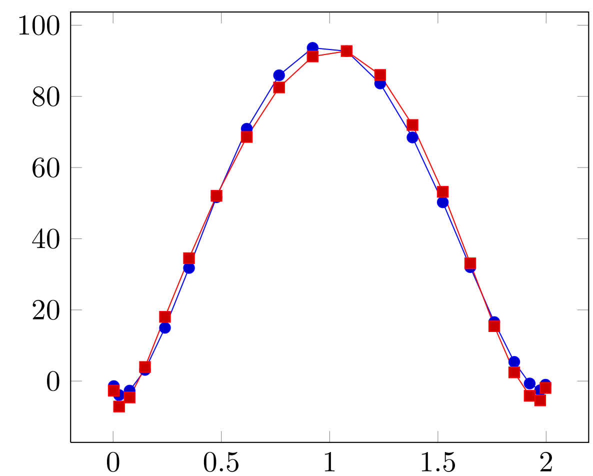

Рис. 8. Сравнение регуляризационных решений

Поскольку в действительности модельное решение обычно недоступно, более универсальным является метод регуляризации по невязке, дающий приемлимые результаты.

⟨*запись результатов*⟩≡

```
model_points = [tau; x_m']';
x_points = [tau; raw_x']';
x_d_points = [tau; x_d']';
x_r1 = [tau; x_r1']';
x_r1_dist = [tau; x_r1_dist']';
x_r2 = [tau; x_r2']';
x_r2_dist = [tau; x_r2_dist']';
```

```
w_points = [alphas; w_points']';
u_points = [alphas; u_points']';
save ("model.out", "model_points");
save ("raw-sol.out", "x_points");
save ("raw-dist-sol.out", "x_d_points");
save ("r1-sol.out", "x_r1");
save ("r1-sol-dist.out", "x_r1_dist");
save ("r2-sol.out", "x_r2");
save ("r2-sol-dist.out", "x_r2_dist");
save ("w.out", "w_points");
save ("u.out", "u_points");
save ("-ascii", "alpha.out", "alpha");
save ("-ascii", "beta.out", "beta");
```

3. Информация о документе

Данный документ был подготовлен с использованием LaTeX. Программа, реализующая представленные численные методы, была написана в среде `GNU Octave`. Код представлен с использованием `noweb`. Иллюстрации созданы с помощью пакета `pgfplots`.

Автоматизация процесса сборки обеспечивалась утилитами `GNU Make` и `texdepend`.

Представленная работа выполнена в рамках программы седьмого семестра обучения по специальности «Вычислительная математика и математическая физика» в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Дата компиляции настоящего документа: 18 декабря 2009 г.

4. Список литературы

[1] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Физматлит, 2001.

[2] Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994.