



Zaawansowane Modelowanie Symulacyjne

Raport 2

Adam Bogdan [REDACTED]

Dzmitry Fiodorau [REDACTED]

Yaraslau Shemet [REDACTED]

Jan Witecki [REDACTED]

Warszawa 2024

Spis treści

Wstęp	3
Analiza Podstawowa.....	5
Analiza Wrażliwości.....	19
Zmiana inicjalizacji dochodu	19
Skasowanie spowolnienia zmiany dochodów w dzielnicy I	20
Zmiana współczynnika alfa w rozkładzie Pareto	22
Bibliografia.....	29

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest przeprowadzenie symulacji dotyczącej przemieszczenia się mieszkańców między trzema dzielnicami zlokalizowanymi wokół śródmieścia. W pierwszej dzielnicy ceny mieszkań rosną wraz ze zmniejszaniem się dystansu do śródmieścia i znajdują się w przedziale cenowym między 23000 a 35000 jednostek. Dla dzielnic 2 i 3 zależność między ceną, a odległością od centrum jest odwrotna. Mieszkania drożeją wraz ze zwiększeniem się odległości od śródmieścia i znajdują się w przedziałach od 18000 do 25000 dla dzielnicy drugiej, oraz od 8000 do 19000 dla dzielnicy trzeciej. W symulacji wyróżnione zostały trzy rodzaje mieszkańców: I, II, III, w zależności od dzielnicy, w której obecnie mieszkają. Przy użyciu modelu badany został ruch mieszkańców, dla których skończył się okres spłaty długu trwający 15 lat, bądź zmieniły się ich aspiracje mieszkaniowe. Dla każdego z nich z rozkładu Pareto wygenerowana została zmiana dochodu. Parametry rozkłady wyglądają następująco:

- $\alpha_1 = 1$ - Współczynnik kształtu rozkładu dla mieszkańców dzielnicy nr 1,
- $\theta_1 = 0.1$ - Skala rozkładu dla mieszkańców dzielnicy nr 1,
- $\alpha_2 = 2$ - Współczynnik kształtu rozkładu dla mieszkańców dzielnicy nr 2,
- $\theta_2 = 0.1$ - Skala rozkładu dla mieszkańców dzielnicy nr 2,
- $\alpha_3 = 5$ - Współczynnik kształtu rozkładu dla mieszkańców dzielnicy nr 3,
- $\theta_3 = 0.1$ - Skala rozkładu dla mieszkańców dzielnicy nr 3,
- Pareto (α_1, θ_1) – początkowy rozkład dla mieszkańców dzielnicy nr 1,
- Pareto (α_2, θ_2) – początkowy rozkład dla mieszkańców dzielnicy nr 2,
- Pareto (α_3, θ_3) – początkowy rozkład dla mieszkańców dzielnicy nr 3.

Po wylosowaniu zmiany dochodu z odpowiedniego rozkładu mieszkańcy przemnażają ją przez 0.1 i dodają ją do swojego obecnego dochodu. W następnym kroku mieszkańcy losują z rozkładu cenę nowego mieszkania. Mieszkaniec może przenieść się do lepszej dzielnicy tzn. do dzielnicy o niższym numerze, tylko jeżeli cena jego obecnego mieszkania znajduje się powyżej dolnej granicy droższej dzielnicy. Ponadto cena nowego mieszkania musi się zawierać między dolną granicą lepszej dzielnicy oraz górną granicą obecnej dzielnicy. Jeżeli cena nowego mieszkania będzie wyższa od ceny obecnego, mieszkaniec przenosi się i zmienia swój rodzaj. Natomiast jeżeli cena nowego mieszkania będzie niższa od ceny obecnego, mieszkaniec nie przenosi się do nowego lokum. W przypadku agentów którzy nie mają możliwości przeniesić

się do wyższej dzielnicy, szukają nowego mieszkania w obecnej, pod warunkiem, że minął ich okres spłaty kredytu. Jeżeli nowe mieszkanie okaże się droższe od obecnego oraz tańsze od dochodu mieszkańca, agent przenosi się do nowego lokum i rozpoczyna nowy okres spłaty. Ruch mieszkańców w modelu odbywa się jedynie w górę, co oznacza, że nie można przenieść się do tańszej dzielnicy. Ponadto ceny mieszkań nie zmieniają się z biegiem czasu oraz nie występuje handel między mieszkańcami, a przestrzeń miejska jest ciągła. Co więcej, liczba mieszkańców pozostaje niezmieniona przez cały okres trwania symulacji. W dalszej części pracy przedstawiona została analiza modelu, analiza wrażliwości oraz podsumowanie badania.

Analiza Podstawowa

Analiza podstawowa jest przeprowadzana na podstawie 100 symulacji, które opierają się na zmodyfikowanej wersji modelu segregacji Schellinga. Model ten zakłada istnienie trzech dzielnic otaczających centralne „śródmieście, w którym nikt nie zamieszkuje. Ceny mieszkań różnią się w poszczególnych dzielnicach, a ich dokładne przedziały zostały opisane we wstępie do pracy. W pierwszej dzielnicy ceny mieszkań maleją wraz z oddalaniem się od śródmieścia, natomiast w drugiej i trzeciej dzielnicy ceny rosną wraz z odległością od centrum.

W modelu uwzględniono agentów podzielonych na trzy typy, w zależności od dzielnicy, w której aktualnie mieszkają. Przemieszczanie się agentów między dzielnicami zależy od ich dochodów, poziomu ceny mieszkań oraz zakończenia 15-letniego „okresu spłaty długu”. Dochody agentów są losowane na podstawie rozkładów Pareta, których parametry zostały przedstawione we wstępie do pracy. Nowy dochód jest obliczany jako suma dochodu poprzedniego okresu oraz wartości wylosowanej z rozkładu Pareta, przemnożonej przez współczynnik 0,1.

Agenci mogą przemieszczać się do „lepszego” dzielnicy, jeśli ich dochody przewyższają minimalny próg cenowy tej dzielnicy oraz ich obecnie mieszkanie jest warte mniej od potencjalnie nabytego. W przypadku niespełnienia tych warunków, agenci pozostają w obecnej dzielnicy i poszukują mieszkania w granicach swojego bieżącego dochodu. A dokonują jego zakupy jedynie, gdy cena obecnego mieszkania agenta jest niższa potencjalnie nabytego, ale jednocześnie nie przekracza wysokości bieżącego dochodu.

Model został uproszczony poprzez przyjęcie stałej liczby ludności (brak narodzin i zgonów), wyeliminowanie handlu mieszkaniami między agentami oraz zastosowanie ciągłej, nieograniczonej przestrzeni miejskiej. Ceny mieszkań i dochody nie zmieniają się w czasie, co dodatkowo upraszcza symulacje. Opisane założenia i parametry modelu umożliwiają analizę dynamiki segregacji i mobilności społecznej w zdefiniowanych warunkach.

Na tabeli poniżej są przedstawione zagregowane wyniki symulacji dla parametru liczby mieszkańców, gdzie wiersz pierwszy reprezentuje dane dla dzielnicy I, drugi – dla dzielnicy II i trzeci – dla dzielnicy III. Z kolei wymiar kolumnowy oznacza kolejne okresy w czasie, czyli 240 miesięcy.

Zaprezentowano cztery kluczowe metryki: 5. Percentyl, średnią liczbę mieszkańców, medianę oraz 95. Percentyl, dla każdej z trzech dzielnic. Percentyle są wyznaczone w celu określenia odpowiedniego dolnego i górnego przedziału zmienności. Punkt startowy $t=1$ dla wszystkich dzielnic jest zgodny z treścią zadania. Poniżej przedstawiono interpretację dla kolejnych okresów:

agents_5p_min								
3×240 Matrix{Float64}:								
5000.0	5000.0	6293.8	6718.9	...	13549.0	13559.0	13566.0	13574.0
25000.0	25000.0	23791.6	23432.7		17861.9	17867.5	17866.8	17867.8
50000.0	50000.0	49769.0	49694.0		48251.9	48244.9	48235.9	48226.0
avg_agents_per_district_and_time								
3×240 Matrix{Float64}:								
5000.0	5000.0	6343.49	6776.12	...	13668.9	13678.2	13687.0	13696.0
25000.0	25000.0	23865.3	23502.7		18016.2	18014.9	18014.8	18013.6
50000.0	50000.0	49791.2	49721.2		48314.9	48306.9	48298.2	48290.4
median_agents_per_district_and_time								
3×240 Matrix{Float64}:								
5000.0	5000.0	6343.0	6776.0	...	13654.5	13666.0	13672.5	13681.0
25000.0	25000.0	23869.5	23499.0		18021.0	18020.0	18021.5	18023.0
50000.0	50000.0	49791.0	49722.5		48313.5	48306.5	48300.0	48290.5
agents_5p_max								
3×240 Matrix{Float64}:								
5000.0	5000.0	6405.1	6835.45	...	13809.3	13814.5	13820.5	13829.8
25000.0	25000.0	23923.3	23571.0		18162.2	18163.2	18162.2	18162.0
50000.0	50000.0	49812.2	49746.2		48381.2	48377.2	48367.2	48360.3

Tabela 1 Zagregowane wyniki symulacji dla parametru liczby mieszkańców – opracowanie własne

Liczba mieszkańców w dzielnicach w okresie $t=1$ wynosi odpowiednio 5000 dla dzielnicy I, 25 000 dla dzielnicy II oraz 50 000 dla dzielnicy III. W miarę trwania symulacji wartości te ulegały zmianie zgodnie z założeniami modelu.

agents_5p_min								
3×240 Matrix{Float64}:								
5000.0	5000.0	6293.8	6718.9	-	13549.0	13559.0	13566.0	13574.0
25000.0	25000.0	23791.6	23432.7		17861.9	17867.5	17866.8	17867.8
50000.0	50000.0	49769.0	49694.0		48251.9	48244.9	48235.9	48226.0

Tabela 1.1

Pierwsza metryka dotycząca 5. Percentyla reprezentuje dolną granicę zmienności liczby mieszkańców w dzielnicach. Na przykład dla dzielnicy III w okresie 240 wartość 5. Percentyla wynosi 48 226, co oznacza, że w 5 % symulacji liczba mieszkańców była mniejsza lub równa

tej wartości. Wartość ta obrazuje minimalny poziom populacji w scenariuszach o najmniejszych liczbach mieszkańców.

avg_agents_per_district_and_time

```
3x240 Matrix(Float64):
 5000.0  5000.0  6343.49  6776.12  ... 13668.9 13678.2 13687.0 13696.0
25000.0 25000.0 23865.3 23502.7    18016.2 18014.9 18014.8 18013.6
50000.0 50000.0 49791.2 49721.2    48314.9 48306.9 48298.2 48290.4
```

Tabela 1.2

Kolejną metryką jest średnia liczba mieszkańców w każdej dzielnicy. Obrazuje ona przeciętną wartość populacji w symulacjach. Przykładowo dla dzielnicy II w okresie 240 średnia liczba mieszkańców wynosi 18 013,6 co oznacza, że przeciętny poziom populacji w tej dzielnicy zmalał względem wartości początkowej, ale na zaawansowanych etapach symulacji pozostawał stabilny.

median_agents_per_district_and_time

```
3x240 Matrix(Float64):
 5000.0  5000.0  6343.0  6776.0  ... 13654.5 13666.0 13672.5 13681.0
25000.0 25000.0 23869.5 23499.0    18021.0 18020.0 18021.5 18023.0
50000.0 50000.0 49791.0 49722.5    48313.5 48306.5 48300.0 48290.5
```

Tabela 1.3

Mediana liczby mieszkańców odzwierciedla wartość środkową w rozkładzie populacji, gdzie połowa wyników symulacji jest mniejsza, a połowa większa od tej wartości. W przypadku dzielnicy w przypadku dzielnicy III w okresie 240 mediana wynosi 48 290,5 co wskazuje, że liczba mieszkańców oscylowała w okolicach tej wartości.

agents_5p_max

```
3x240 Matrix(Float64):
 5000.0  5000.0  6405.1  6835.45  ... 13809.3 13814.5 13820.5 13829.8
25000.0 25000.0 23923.3 23571.0    18162.2 18163.2 18162.2 18162.0
50000.0 50000.0 49812.2 49746.2    48381.2 48377.2 48367.2 48360.3
```

Tabela 1.4

Ostatnią analizowaną w tym kroku metryką był 95. Percentyl, który przedstawia górną granicę zmienności liczby mieszkańców, pokazując maksymalne wartości populacji w 95% symulacji. Dla III dzielnicy w okresie 240 wartość ta wynosi 48 360,3 co oznacza, że w 95% scenariuszy liczba mieszkańców była mniejsza lub równa tej wartości, a tylko w pozostałych 5% przypadków populacja była wyższa.

Analiza tych danych pozwala na szczegółowe śledzenie zmian liczby mieszkańców w poszczególnych dzielnicach oraz ocenę stabilności i dynamiki populacji w długim okresie.

Porównanie mediany i średniej liczby mieszkańców wskazuje na względnie stabilną strukturę zamieszkania w dzielnicach. W przypadku dzielnicy II, zarówno mediana, jak i średnia liczba mieszkańców w okresie 240 osiągają zbliżone wartości: mediana wynosi 48 290,5 a średnia 48 290, 4. Podobna sytuacja ma miejsce w dzielnicy II, gdzie mediana wynosi 18 023 a średnia 18 013,6, a także w dzielnicy I, gdzie mediana wynosi 13 681, a średnia 13 696 dla 240 okresu. Taka zbieżność wskazuje na symetryczny rozkład liczby mieszkańców w tych dzielnicach, co oznacza brak znacznych odchyłeń lub ekstremalnych wartości populacji w większości symulacji. Wyniki wskazują, że pomimo początkowych różnic w liczbie mieszkańców pomiędzy dzielnicami, wartości te ulegają stopniowej stabilizacji w czasie, co wynika z założeń modelu symulacji.

Struktura zamieszkania dzielnic zmienia się wraz z upływem czasu, co wynika z założeń modelu i mechanizmów migracji. Warto zauważyć, że dzielnica III posiadająca na początku największą populację (50 000 mieszkańców) wykazuje wysoką stabilność w liczbie mieszkańców w trakcie symulacji. Zarówno wartość średniej jak i mediany utrzymują się w wartościach bliskich wartościom początkowym, co wskazuje, że większość populacji pozostaje w tej dzielnicy.

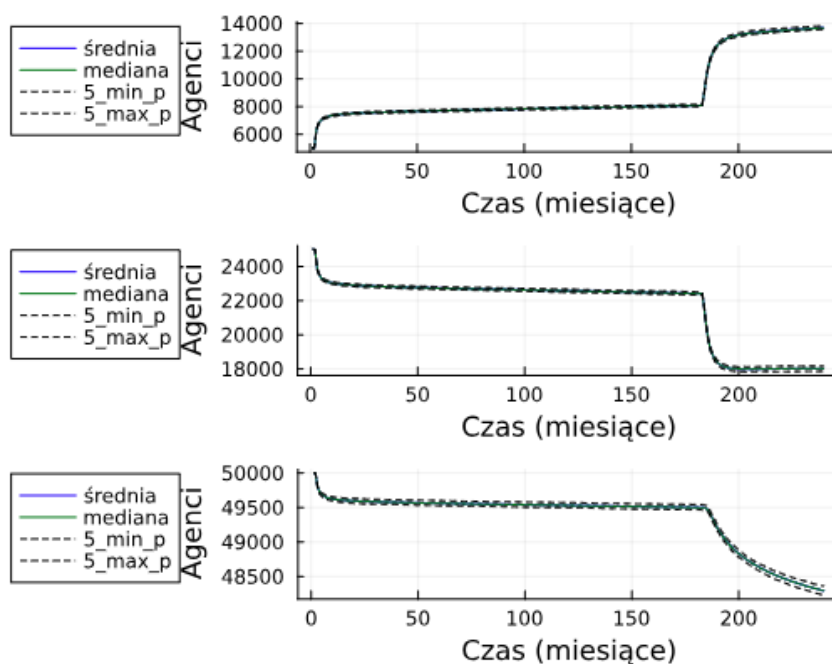
Dzielnica II, z początkową populacją 25 000 mieszkańców, również charakteryzuje się stabilnością, jednak na niższym poziomie w porównaniu z dzielnicą III. Średnia i mediana wskazują na stopniowe wyrównanie się liczby mieszkańców w czasie, co może być efektem równoważenia mechanizmów migracji pomiędzy dzielnicami.

Dzielnica I, która na początku miała najmniejszą liczbę mieszkańców (5000), wykazuje największą zmienność w strukturze zamieszkania. Wartości mediany, średniej oraz granice wyznaczone przez 5. i 95. Percentyl wskazują na wzrost liczby mieszkańców w większości symulacji, choć w porównaniu z innymi dzielnicami dynamika tych zmian jest bardziej chaotyczna.

Porównanie mediany i średniej liczby mieszkańców ujawnia zróżnicowanie w dynamice zmian liczby mieszkańców w poszczególnych dzielnicach. Dzielnica III wyróżnia się stabilnością, podczas gdy dzielnica I wykazuje większą zmienność i stopniowy wzrost liczby mieszkańców. Taka struktura jest zgodna z założeniami modelu, gdzie ruchliwość społeczna oraz dostępność mieszkań wpływają na zmiany w populacji poszczególnych obszarów. Analiza struktury

zamieszkania i wzorców pozwala lepiej zrozumieć procesy zachodzące w symulowanym modelu i ich potencjalne skutki.

Uzyskane statystyki można zwizualizować na wykresach dla poszczególnych dzielnic w czasie. Oś rzędnych przedstawia liczbę agentów, czyli mieszkańców danej dzielnicy, a oś odciętych – czas w miesiącach. Przedziały zmienności są zaznaczone liniami przerywanymi. Na górze jest podany wykres dla dzielnicy I, natomiast na dole – dla dzielnicy III.



Wykres 1 Wizualizacja statystyk dla poszczególnych dzielnic w czasie – opracowanie własne

W przypadku dzielnicy I, początkowa liczba mieszkańców wynosi 5,000, a w miarę postępu symulacji liczba ta sukcesywnie rośnie. Zarówno mediana, jak i średnia liczba mieszkańców wykazują podobne trendy, co sugeruje względnie symetryczny rozkład populacji w tej dzielnicy. Przedziały zmienności (5. i 95. percentyl) ukazują niewielkie wahania populacji, z wyraźnym wzrostem stabilności w późniejszym okresie symulacji. Na wykresie możemy zauważyć znaczną migrację zarówno na początku okresu jak i w późniejszym okresie. Pierwszy skok mógł zostać spowodowany z powodu wylosowania wartości ekstremalnej podwyżki dochodu, także około okresu 185 możemy podejrzewać, że nagła zmiana populacji wynika z mocnej podwyżki dochodu.

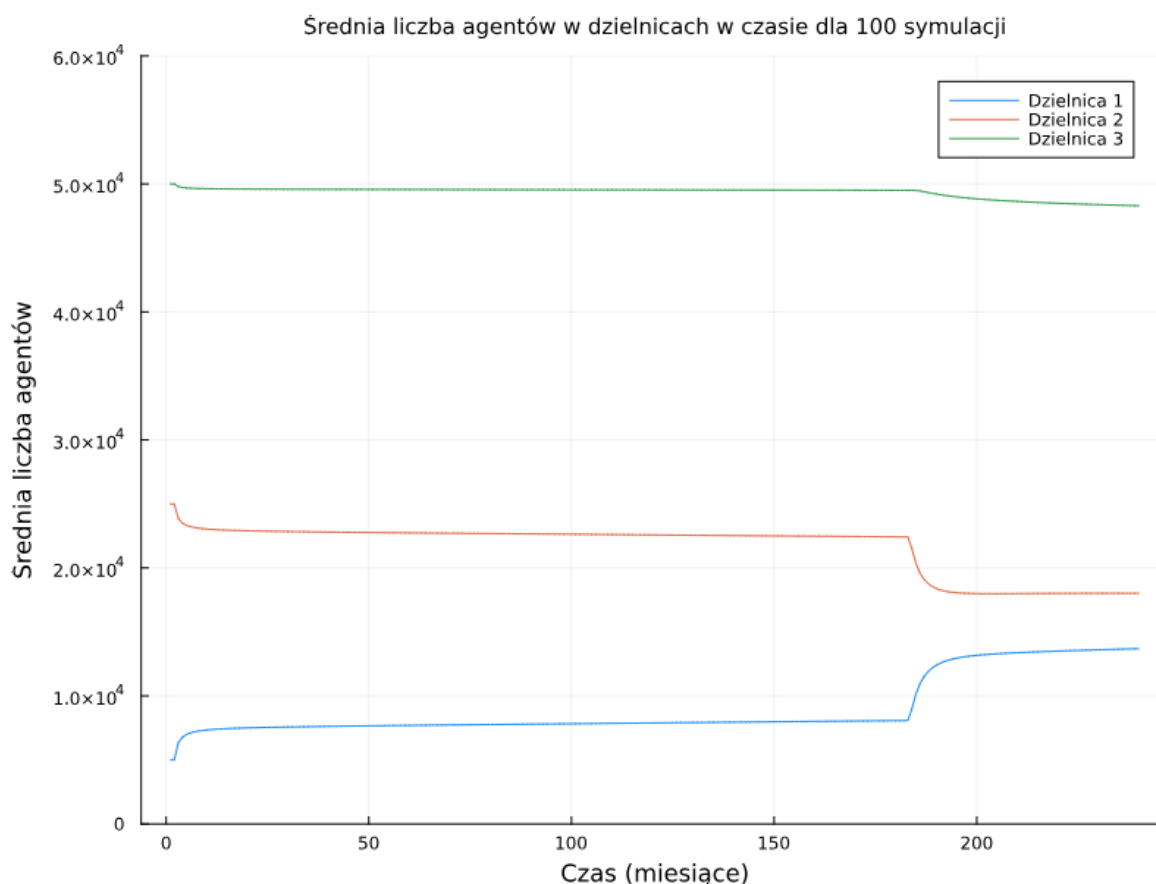
Dla dzielnicy II, której początkowa liczba mieszkańców wynosi 25,000, w trakcie symulacji liczba ta ulega jedynie niewielkim fluktuacjom, co świadczy o wysokiej stabilności tej dzielnicy. Średnia i mediana populacji są niemal identyczne, co wskazuje na brak większych

asymetrii w rozkładzie populacji. Przedziały zmienności są stosunkowo wąskie, co dodatkowo potwierdza stabilność liczby mieszkańców. Nagłe spadki w liczbie populacji, które możemy zaobserwować korelują ze wzrostami, populacji widocznymi w pierwszej dzielnicy.

W dzielnicy III, początkowa liczba mieszkańców wynosi 50,000. Podobnie jak w przypadku dzielnicy II, populacja pozostaje bardzo stabilna przez cały okres symulacji. Średnia i mediana są zbliżone, co wskazuje na symetryczność rozkładu liczby mieszkańców w tej dzielnicy. Przedziały zmienności (5. i 95. percentyl) ukazują minimalne różnice w liczbie mieszkańców, co odzwierciedla niski poziom zmienności. W przeciwieństwie do II dzielnicy spadek widoczny w III dzielnicy jest znacznie mniejszy, chociaż także w tym przypadku, nagłe zmiany widoczne na wykresie wydają się być skorelowane ze zmianami w I dzielnicy.

Analiza wykresów pozwala stwierdzić, że dzielnica I charakteryzuje się największą dynamiką wzrostu liczby mieszkańców, co może wynikać z jej początkowo niskiej populacji i większego potencjału migracji. Z kolei dzielnice II i III wykazują większą stabilność pod względem liczby mieszkańców, co sugeruje równowagę populacyjną oraz mniejszy wpływ migracji na te obszary. Wizualizacja danych w postaci wykresów, generowanych przy użyciu odpowiedniego kodu, pozwala na przejrzyste i szczegółowe przedstawienie wyników symulacji, uwzględniając kluczowe parametry, takie jak średnie, mediany i przedziały zmienności. Taka prezentacja umożliwia dokładniejszą analizę i ocenę zmian populacji w poszczególnych dzielnicach w symulowanym modelu.

Analizie zostały poddane średnie liczby agentów w dzielnicach w czasie. Na wykresie poniżej wyraźnie widać, że podstawowy kierunek migracji to stopniowe przejście do dzielnicy I z dzielnicy II. W przypadku pojawienia się ekstremalnych zmian dochodów (np. odkrycie nowych surowców w pobliżu dzielnicy) albo zmniejszenia kosztów (np. wprowadzenie programów wspierających wypłatę kredytu), w modelu obserwowane jest znaczące przyspieszenie tempa migracji.



Wykres 2 Średnia liczba agentów w dzielnicach w czasie – opracowanie własne

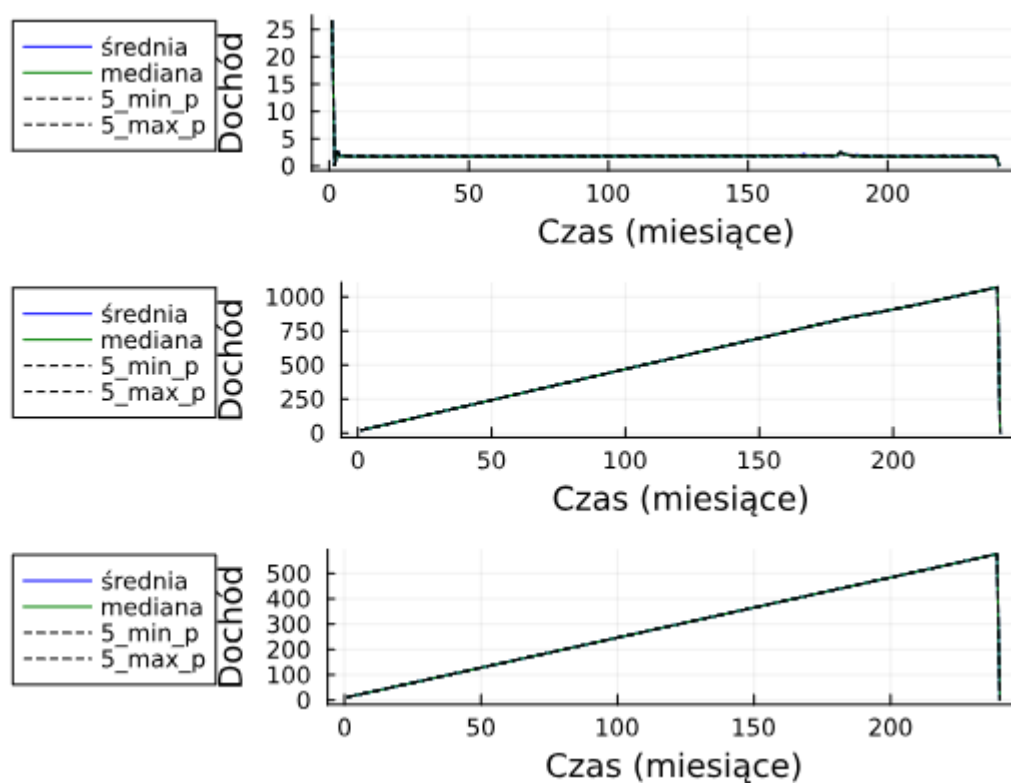
W przeprowadzonej analizie zaobserwowano, że główny kierunek migracji agentów to stopniowe przechodzenie z dzielnicy II do dzielnicy I o najwyższej cenie mieszkań. Zjawisko to można wytłumaczyć aspiracjami agentów do zamieszkania w droższych dzielnicach, co staje się możliwe dzięki wzrostowi ich dochodów. Proces ten odzwierciedla zasady modelu, zgodnie z którymi agenci migrują do „lepszyc” dzielnic, jeśli spełniają warunki dochodowe oraz cenowe.

Z kolei dzielnica III charakteryzuje się znaczną stabilnością liczby mieszkańców. Migracja z tej dzielnicy jest ograniczona, co wynika z właściwości rozkładu Pareta zastosowanego do modelowania zmian dochodów. Wyższy współczynnik α w tej dzielnicy oznacza „chudszy” ogon rozkładu, co przekłada się na niższe prawdopodobieństwo wystąpienia ekstremalnych wzrostów dochodów. W rezultacie mieszkańcy dzielnicy III rzadziej osiągają poziomy dochodów pozwalające na migrację do dzielnicy II.

Stabilność liczby agentów w dzielnicy III wynika również z wysokich progów cenowych mieszkań w tej dzielnicy, które ograniczają dostępność tańszych alternatyw.

Podsumowując, zaobserwowane trendy migracyjne są zgodne z zasadami modelu. Migracja agentów do „lepszyc” dzielnic jest możliwa, gdy ich dochody spełniają określone warunki, natomiast stabilność w dzielnicy 3 wynika z ograniczeń dochodowych i struktury rozkładu Pareta. Dynamika migracji może ulec zmianie w przypadku uwzględnienia dodatkowych czynników, takich jak wsparcie polityczne lub nagłe zmiany gospodarcze.

W kolejnym kroku została przeprowadzona analiza zmiany dochodów agentów w trzech dzielnicach w czasie. W wyniku przeprowadzonej analizy został wygenerowany poniższy wykres. Na górze jest podany wykres dla dzielnicy I, natomiast na dole – dla dzielnicy III.



Wykres 3 Wizualizacja statystyk dla zmiany dochodu w czasie dla dzielnic – opracowanie własne

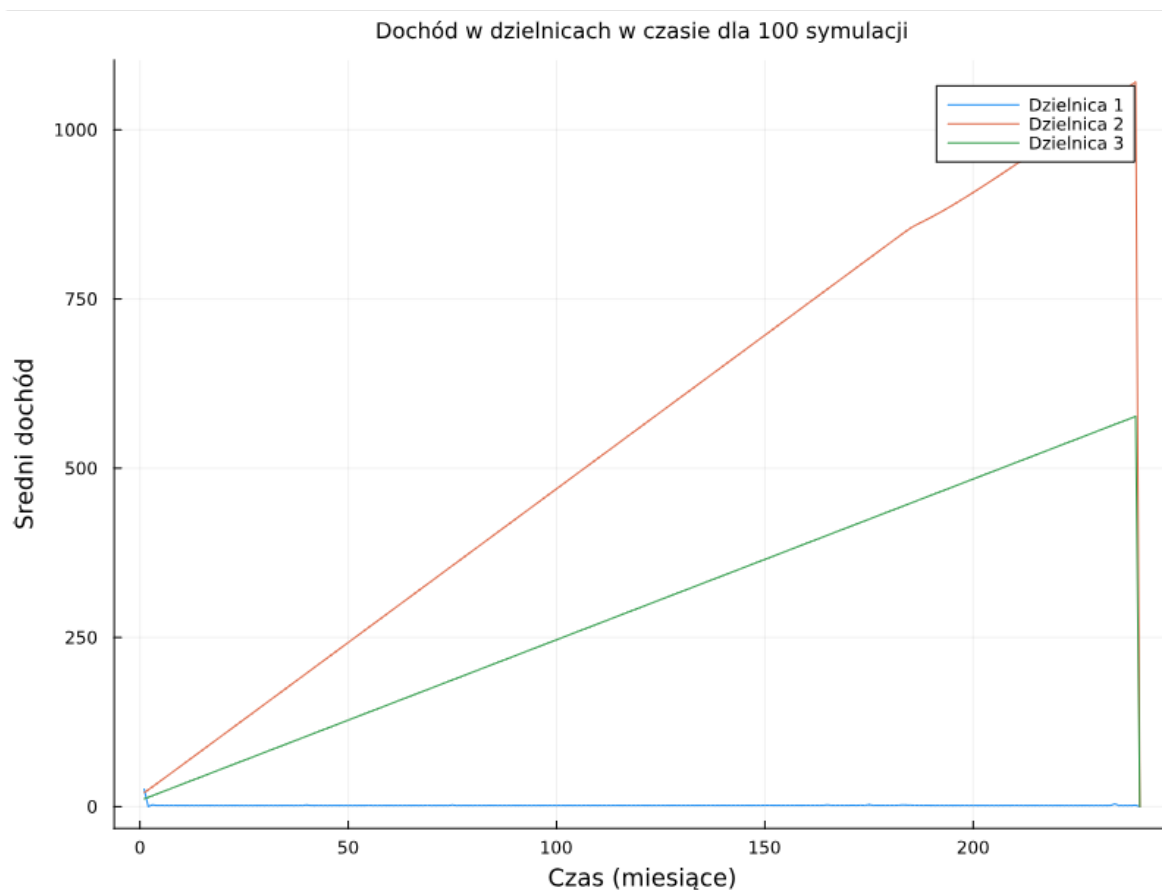
W przypadku dzielnicy I dochody pozostają bardzo niskie i niemal stałe, co wskazuje na ograniczone możliwości wzrostu finansowego mieszkańców tej dzielnicy. Średnia i mediana dochodów są zbliżone, a przedział od 5% do 95% jest wąski, co świadczy o niewielkim zróżnicowaniu dochodów.

W dzielnicy II dochody wykazują systematyczny wzrost w czasie, Zarówno średnia, jak i mediana rosną niemal równolegle, co oznacza stabilny rozwój finansowy mieszkańców.

Przedział od 5% do 95% jest jednak stosunkowo szeroki, co sugeruje większe zróżnicowanie dochodów w porównaniu do dzielnicy I.

Na ostatnim wykresie, który przedstawia dochody dzielnicy III możemy zaobserwować, że rosną one w czasie jednak osiągane wartości są niższe w porównaniu z dzielnicą II. Średnia i mediana dochodów są blisko siebie, co świadczy o równomiernym wzroście dochodów mieszkańców. Zakres od 5% do 95% jest wskazuje na umiarkowane zróżnicowanie dochodów.

Następnie w modelu przeanalizowany został parametr dochodu. Na wykresie poniżej przedstawione została średnia zmiana dochodu w czasie dla poszczególnych dzielnic. Na koniec okresu badania zmiana nie została policzona, dlatego spada do 0.



Wykres 4 Średnia dochód w czasie dla dzielnic – opracowanie własne

Średni dochód w trzech analizowanych dzielnicach wykazuje zróżnicowane tendencje, co zostało przedstawione na powyższym wykresie. W przypadku dzielnicy I, średni dochód pozostaje na stałym, bardzo niskim poziomie przez cały okres symulacji, co jest założeniem modelu. Wskazuje to na ograniczony rozwój gospodarczy oraz brak znaczących zmian w strukturze ekonomii.

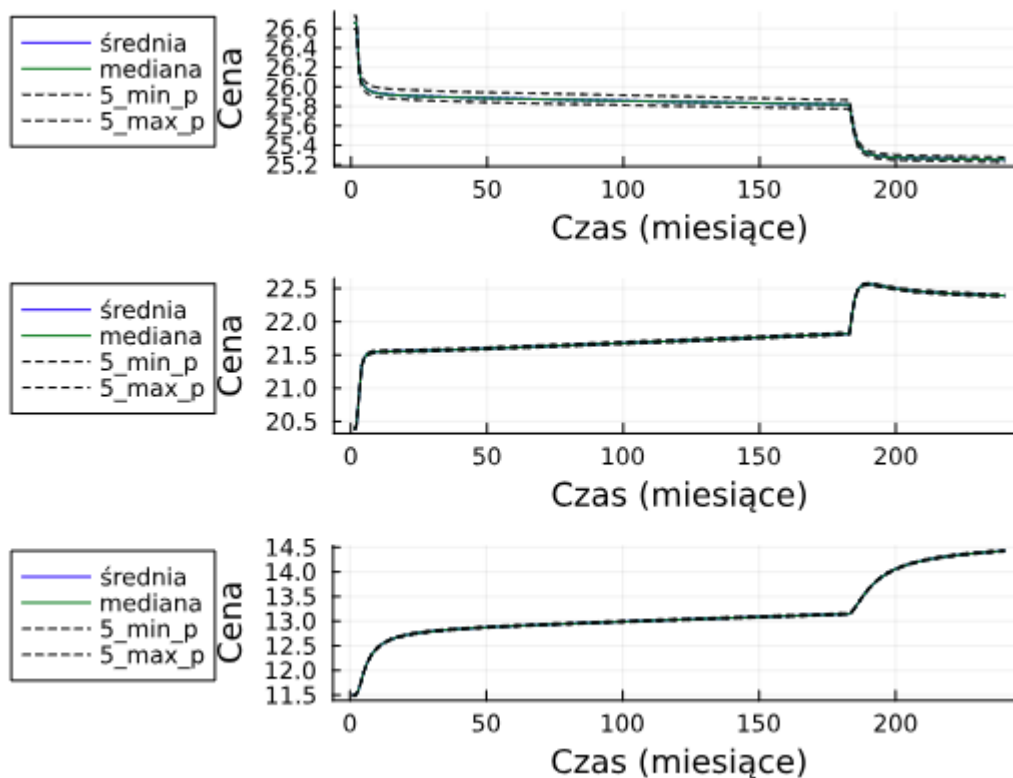
Z kolei dzielnica II charakteryzuje się dynamicznym wzrostem dochodów. Średni dochód w tej dzielnicy wzrasta systematycznie, osiągając pod koniec okresu symulacji poziom przekraczający 1000 jednostek. Jest on zgodny z założeniami modelu, który przewidywał korzystne warunki rozwojowe oraz wysoki potencjał gospodarczy.

Dzielnica III również wykazuje wzrost dochodów, choć jest on bardziej umiarkowany w porównaniu do dzielnicy II. Pod koniec symulacji średni dochód w tej dzielnicy osiąga około 500-600 jednostek. Odzwierciedla to inny aspekt modelu, czyli współczynnik kształtu w rozkładzie Pareta (alpha). Wyższa wartość współczynnika alpha dla dzielnicy III oznacza bardziej „spłaszczony” rozkład dochodów, co sugeruje większą równomierność w podziale dochodów i mniejszą dysproporcję między niskimi a wysokimi dochodami.

Podsumowując, wykres potwierdza zgodność wyników symulacji z założeniami modelu. Przedstawiona dynamika wzrostu dochodów w poszczególnych dzielnicach wskazuje na poprawność doboru parametrów modelu, takich jak współczynnik kształtu w rozkładzie Pareto oraz mechanizmy różnicujące tempo wzrostu dochodów między dzielnicami. Ważnym założeniem modelu jest istotne spowolnienie tempa wzrostu dochodu dla dzielnicy I¹.

W przedostatnim kroku analizy przedstawiono zmiany cen mieszkań w trzech dzielnicach w czasie. Wykres został podzielony na trzy części: górny reprezentuje dzielnicę I, środkowy – dzielnicę II, a dolny – dzielnicę III. W analizie uwzględniono średnią cenę mieszkań, medianę oraz 5. i 95. percentyl.

¹ $AGENCI[n,2,t] = AGENCI[n,2,t] + 0.1 * rand(Pocz_rozk_I)$



Wykres 5 Wizualizacja statystyk dla zmiany ceny w czasie dla dzielnic – opracowanie własne

W dzielnicy I początkowe ceny mieszkań ulegają gwałtownemu spadkowi, po czym stabilizują się na stałym poziomie przez większość analizowanego okresu. Następnie ulegają kolejnemu gwałtownemu spadkowi w okolicy 180 okresu. Ponadto średnia cena mieszkań była najwyższa dla tej dzielnicy. Średnia oraz mediana są bardzo zbliżone do siebie, co wskazuje na względną równomierność w rozkładzie cen. Różnica między 5. i 95. percentylem również pozostaje stabilna, co sugeruje niską zmienność cen mieszkań.

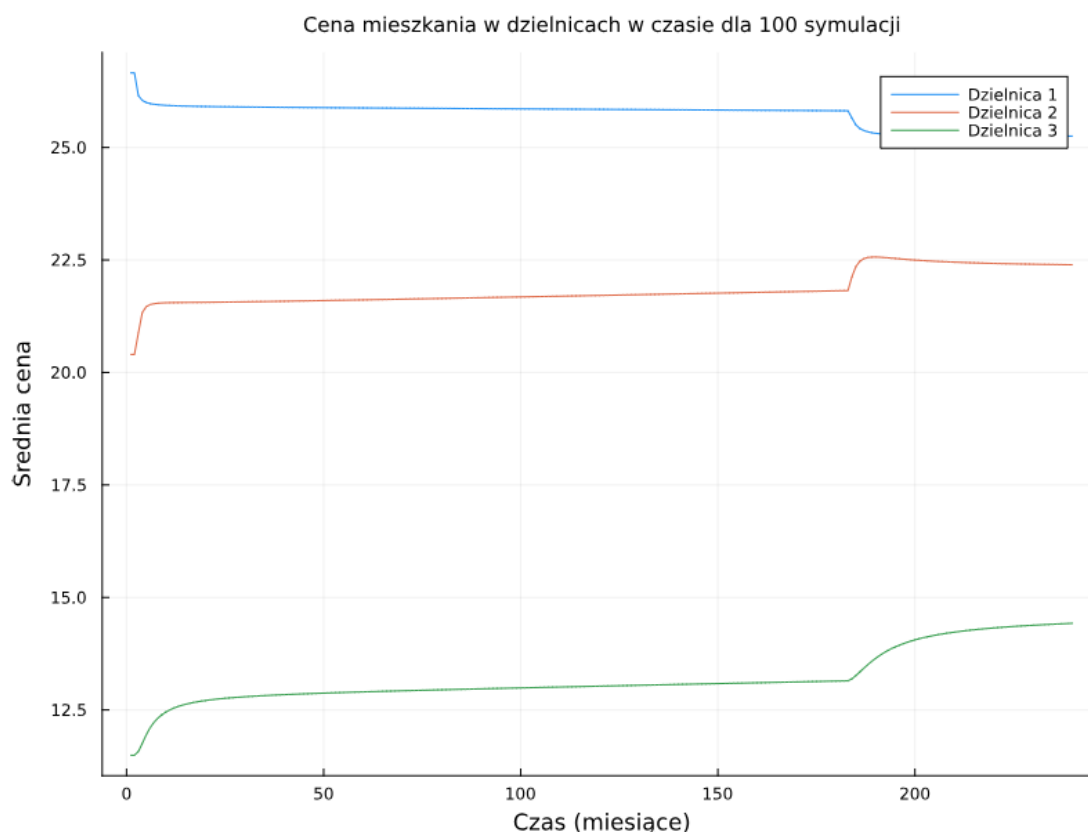
W kolejnej analizowanej dzielnicy możemy zaobserwować gwałtowny wzrost cen na początku okresu, po czym ceny stabilizują się z lekkim trendem wzrostowym. W okolicy 180 okresu możemy zaobserwować gwałtowny wzrost cen do około 25 jednostek następnie lekki spadek, a cena ulega stabilizacji około 22.4 jednostki. Średnia i mediana pozostają do siebie zbliżone, ale różnica między 5. i 95. percentylem w końcowych miesiącach analizy nieznacznie się rozszerza co wskazuje na większą różnorodność cen mieszkań.

Dzielnica III charakteryzuje się stopniowym, ale stabilnym wzrostem cen mieszkań przez prawie cały okres symulacji. Gwałtowne wzrosty możemy zaobserwować na początku okresu gdzie cena wzrasta od około 11,5 jednostki do 12,7 jednostki w krótkim okresie. Kolejny gwałtowny wzrost możemy zaobserwować w okolicach 180 okresu gdzie cena także w krótkim

okresie około 20 miesięcy wzrasta z około 13 jednostek do 14 jednostek, następnie się stabilizując i kontynuuje stabilny wzrost. Średnia i mediana w tej dzielnicy są prawie identyczne, co wskazuje na zrównoważony rozwój rynku nieruchomości w dzielnicy. Różnica między 5. a 95. percentylem jest wąska i pozostaje stabilna, co sugeruje, że rynek mieszkań w tej dzielnicy jest mniej podatny na gwałtowne zmiany cen.

Podsumowując wykresy potwierdzają różnorodność dynamiki cen mieszkań w zależności od dzielnicy. Dzielnica I charakteryzuje się stagnacją cenową z gwałtownymi spadkami na początku i pod koniec okresu, dzielnica II odnotowuje dwa gwałtowne wzrosty na początku i pod koniec okresu, a dzielnica III wykazuje dużo stabilniejszy i bardziej przewidywalny wzrost cen mieszkań. Te obserwacje są zgodne z założeniami modelu i odzwierciedlają różne tempo wzrostu gospodarczego i atrakcyjności inwestycyjnej każdej z dzielnic.

Ostatnią częścią analizy podstawowej będzie przeanalizowanie średniej ceny mieszkań każdej z dzielnic na poniższym wykresie. Na podstawie analizy wykresu możemy zauważyć wyraźne trendy, które wynikają z mechaniki migracji agentów, oraz relacji między cenami w poszczególnych dzielnicach.



Wykres 6 Średnia cena mieszkania w dzielnicach w czasie – opracowanie własne

W dzielnicy I ceny początkowo spadają w wyraźny sposób, co sugeruje zmniejszenie atrakcyjności tej lokalizacji dla mieszkańców. Spadek ten jest najprawdopodobniej efektem masowej migracji agentów do innych dzielnic oraz braku popytu na mieszkania w tym rejonie, kolejny gwałtowny spadek możemy zaobserwować w okolicy 180 okresu. A ceny stabilizują się na niższym poziomie.

Dzielnica II charakteryzuje się umiarkowanym wzrostem cen w czasie symulacji. Początkowe wahania cen szybko przechodzą w trend wzrostowy, co świadczy o rosnącym popycie na mieszkania w tej dzielnicy. Można przypuszczać, że dzielnica ta przyciąga agentów aspirujących do poprawy warunków mieszkalnych, ale niezdolnych jeszcze do zakupu mieszkań w najdroższych lokalizacjach.

W przypadku dzielnicy III obserwuje się najbardziej dynamiczny wzrost cen mieszkań. Początkowo ceny są niskie, ale z czasem rosną, co wskazuje na wzrastające zainteresowanie dzielnicą. Jest to zgodne z modelem, w którym agenci o niższych dochodach niezdolni do nabycia mieszkań w dzielnicy II, skupiają się na tej lokalizacji. Trend wzrostowy stabilizuje się

w dalszych miesiącach symulacji, co może wynikać z ograniczonej przestrzeni dzielnicy oraz osiągnięcia równowagi między popytem a podażą.

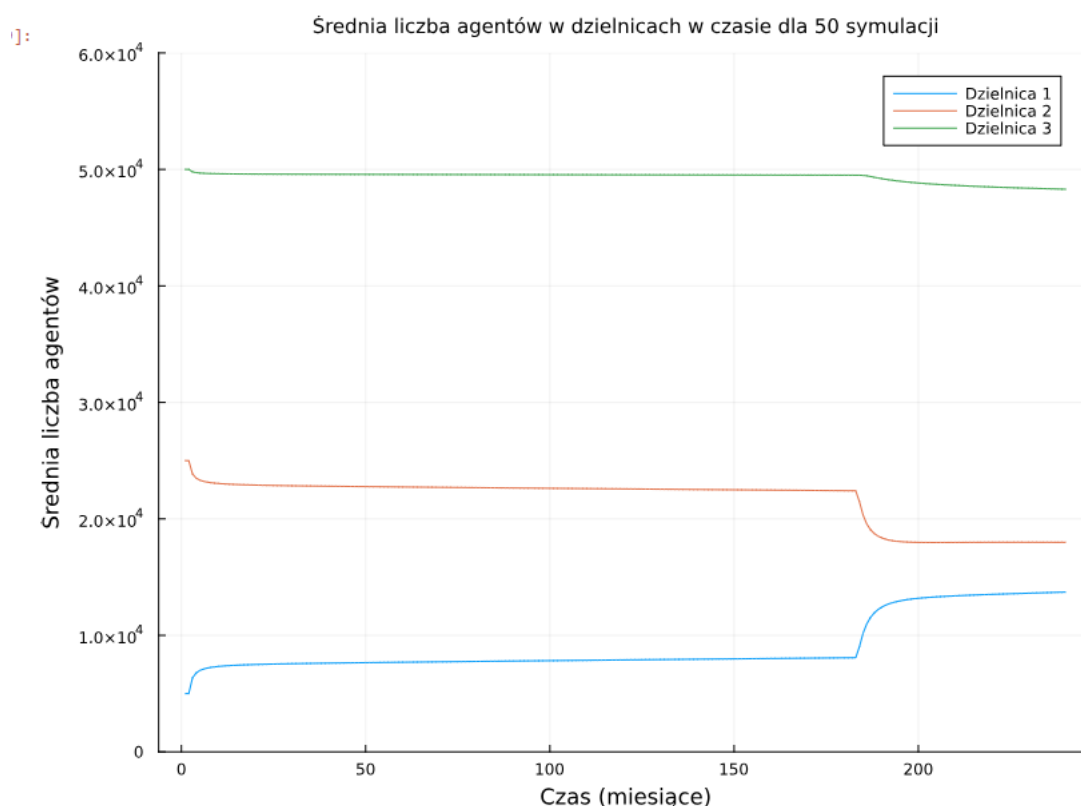
Podsumowując, wykres ilustruje jak zmiany cen mieszkań odzwierciedlają decyzje agentów dotyczące migracji i wyboru dzielnicy. Wyniki są zgodne z założeniami modelu, w którym ceny, migracje i dochody są ze sobą ściśle powiązane, co prowadzi do wyraźnych, aczkolwiek zróżnicowanych trendów w każdej z dzielnic.

Analiza Wrażliwości

W ramach analizy wrażliwości modelu przeprowadzone zostały następujące modyfikacje: zmiana inicjalizacji dochodów, usunięcie spowolnienia zmiany dochodów w dzielnicy I oraz zmiana wartości parametrów α w rozkładzie Pareta. Poniżej znajdują się opisy poszczególnych wpływów.

Zmiana inicjalizacji dochodu

Zauważono, że w modelu dochody dla każdej dzielnicy są inicjalizowane za pomocą losowych wyciągnięć ze wspólnego rozkładu Pareta, czyli mającego identyczne parametry. W ramach analizy wrażliwości postanowiono zbadać, czy różnicowanie rozkładu inicjalizującego dochody dla dzielnic jest istotne. Zamiast wspólnego rozkładu Pareta dla każdej dzielnicy losowe wyciągnięcie robione jest z "własnego" rozkładu – czyli dla dzielnicy I – z rozkładu Pareta I itd. Zgodnie z oczekiwaniem, taka odmiana powinna być nieistotna ze względu na przemnożenie losowanej wartości przez granicę cenową oraz stałą. Z powodu ograniczenia mocy obliczeniowej, liczba symulacji została zmniejszona do 50.



Wykres 7 Średnia liczba agentów w dzielnicach

Różnice w tempie zmian średniej liczby agentów nie zostały zauważone. Średni dochód w $t=1$ różni się w sposób marginalny, co jest zgodne z oczekiwaniami.

Tabela 2 Dochód przed zmianą

```
[29]: avg_income_per_district_and_time

[29]: 3x240 Matrix{Float64}:
 26.6564  0.0960474  2.88447  1.86692 ... 1.732 1.73332 0.0
 20.4004  24.9459  29.274  33.7283 1066.52 1070.82 0.0
 11.4928  13.8677  16.2136  18.5787 574.183 576.557 0.0
```

Tabela 3 Dochód po zmianie

```
[45]: avg_income_per_district_and_time

[45]: 3x240 Matrix{Float64}:
 27.4052  0.0974496  2.56293  1.81262 ... 1.77437 1.76885 0.0
 20.6642  25.2087  29.5044  33.9449 1064.72 1069.02 0.0
 11.4927  13.8673  16.2133  18.5782 574.182 576.556 0.0
```

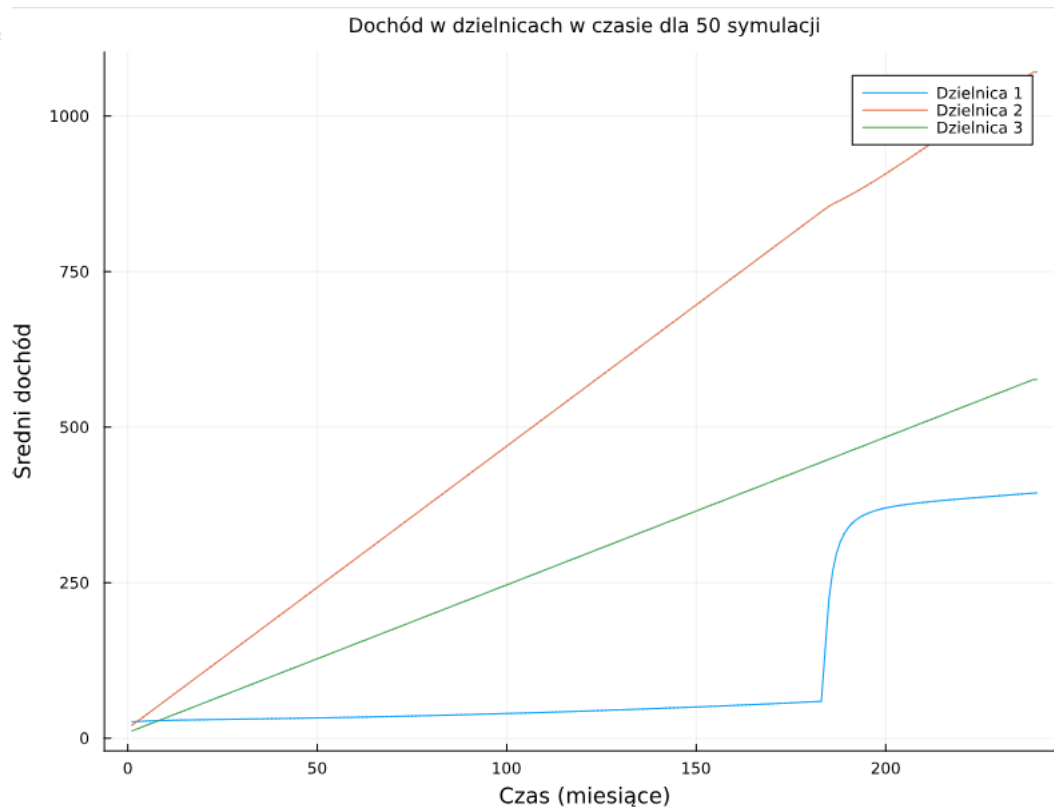
Skasowanie spowolnienia zmiany dochodów w dzielnicy I

W modelu zmiana dochodów w dzielnicy I jest sztucznie spowolniana². W ramach analizy wrażliwości postanowiono sprawdzić, czy skasowanie spowolnienia zmiany dochodów istotnie wpłynie na wyniki. W tym celu stosuje się podejście identyczne do pozostałych dzielnic – przyrost dochodu jest losowany z rozkładu Pareta i skalowany przez granicę górną – bez sztucznego spowolnienia. Ponadto, kod z zajęć został zmodyfikowany w sposób zapewniający obliczenie zmiany dochodu w ostatnim okresie, dlatego nie zostaje wyzerowana. Z powodu ograniczenia mocy obliczeniowej, liczba symulacji została zmniejszona do 50.

Dynamika czasowa dochodu jest zgodna z oczekiwaniem, ponieważ pojawiają się ekstremalne przyrosty dochodu.

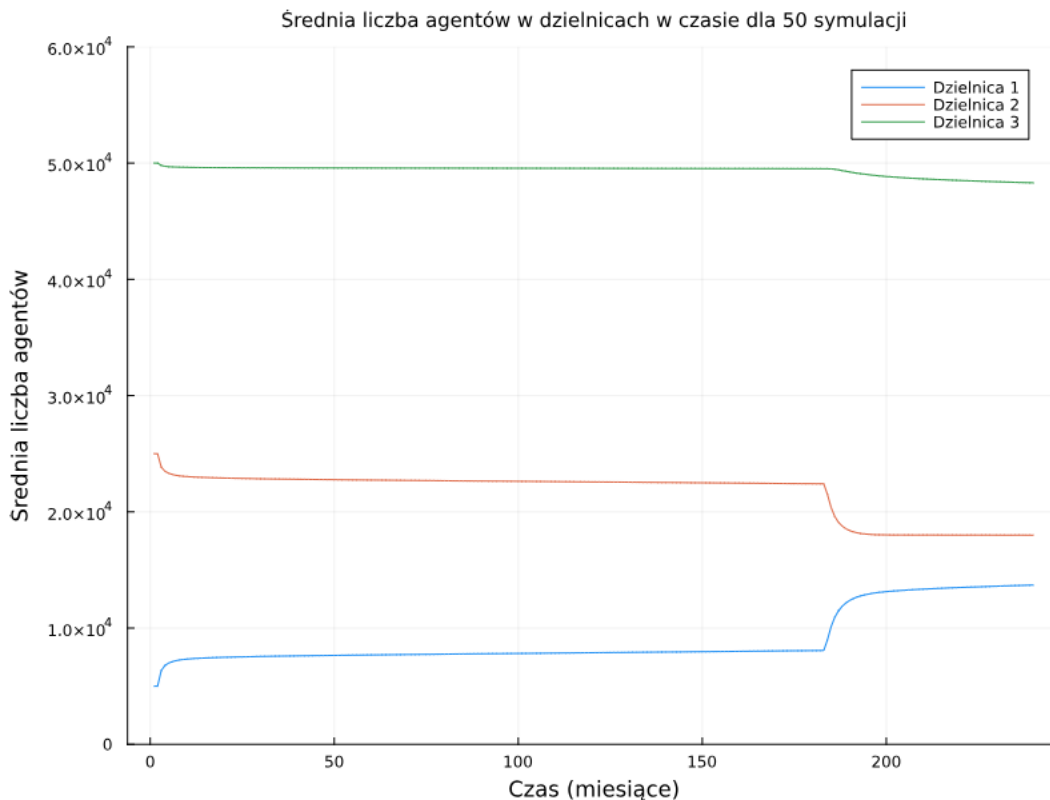
² $AGENCI[n,2,t] = AGENCI[n,2,t] + 0.1 * \text{rand}(\text{Pocz_rozk_I})$

[40]:



Wykres 8 Dochód w dzielnicach w czasie

Na poniższym wykresie zaprezentowana została zmiana średniej liczby agentów. Usunięcie sztucznego spowolnienia miało marginalny wpływ na poziom liczebności mieszkańców zarówno dla dzielnicy I jak i pozostałych.

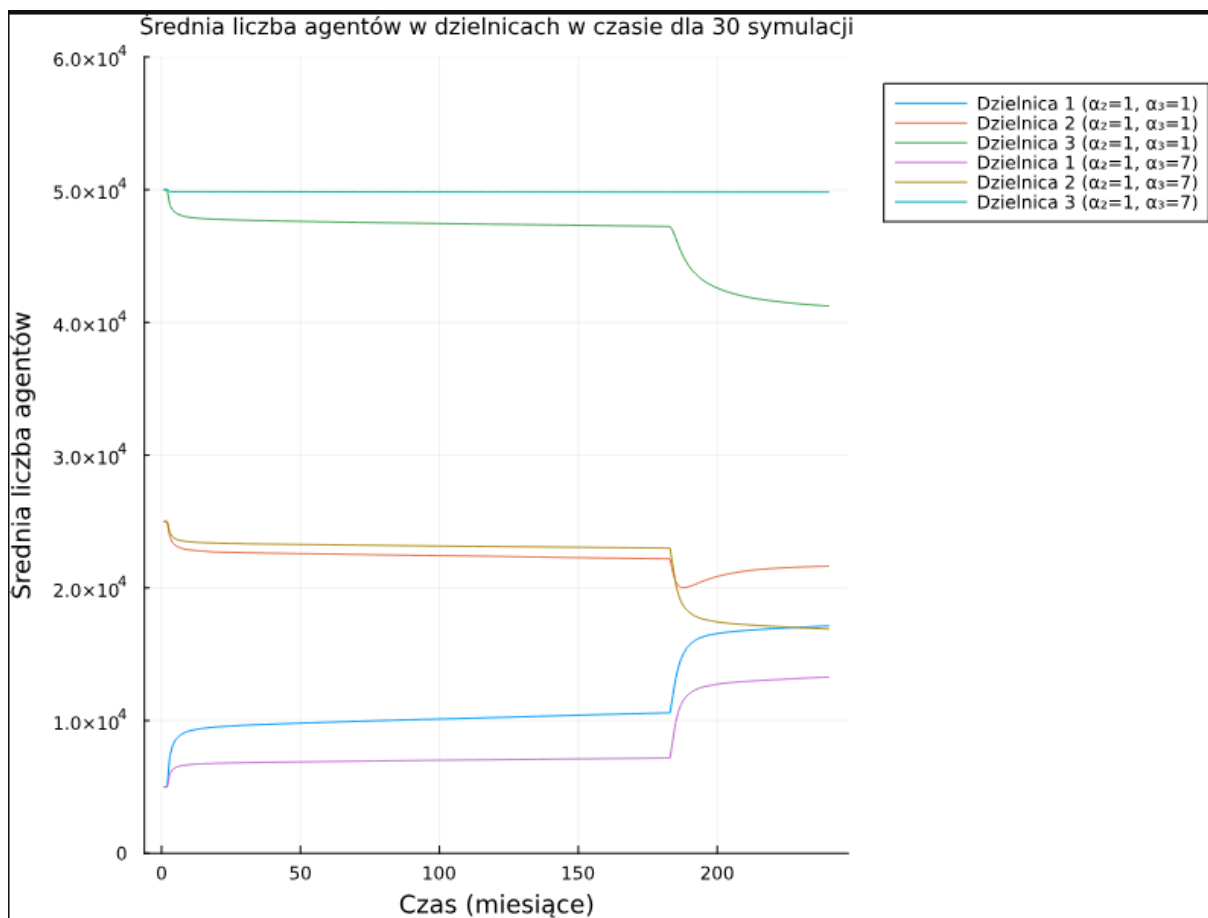


Wykres 9 Średnia liczba agentów w dzielnicach w czasie

Zmiana współczynnika alfa w rozkładzie Pareto

W celu prześledzenia zmian w procesie migracji między dzielnicami w zależności od parametru kształtu rozkładu Pareto została stworzona siatka współczynników od 1 do 7. Analizie poddane są wyłącznie współczynniki α_2 oraz α_3 . Współczynnik kształtu dla dzielnicy I nie został zbadany na wrażliwość z dwóch powodów. Pierwszy dotyczy założeń modelu. Jako że mieszkańcy dzielnicy I nie migrują „w dół”, czyli do gorszych lokalizacji czy innych dzielnic, postanowiono skupić się na wrażliwości procesu przenoszenia się mieszkańców dzielnic II i III. Drugi, techniczny, polega na optymalizacji czasu wykonania analizy poprzez zmniejszenie liczby zmieniających się komponentów.

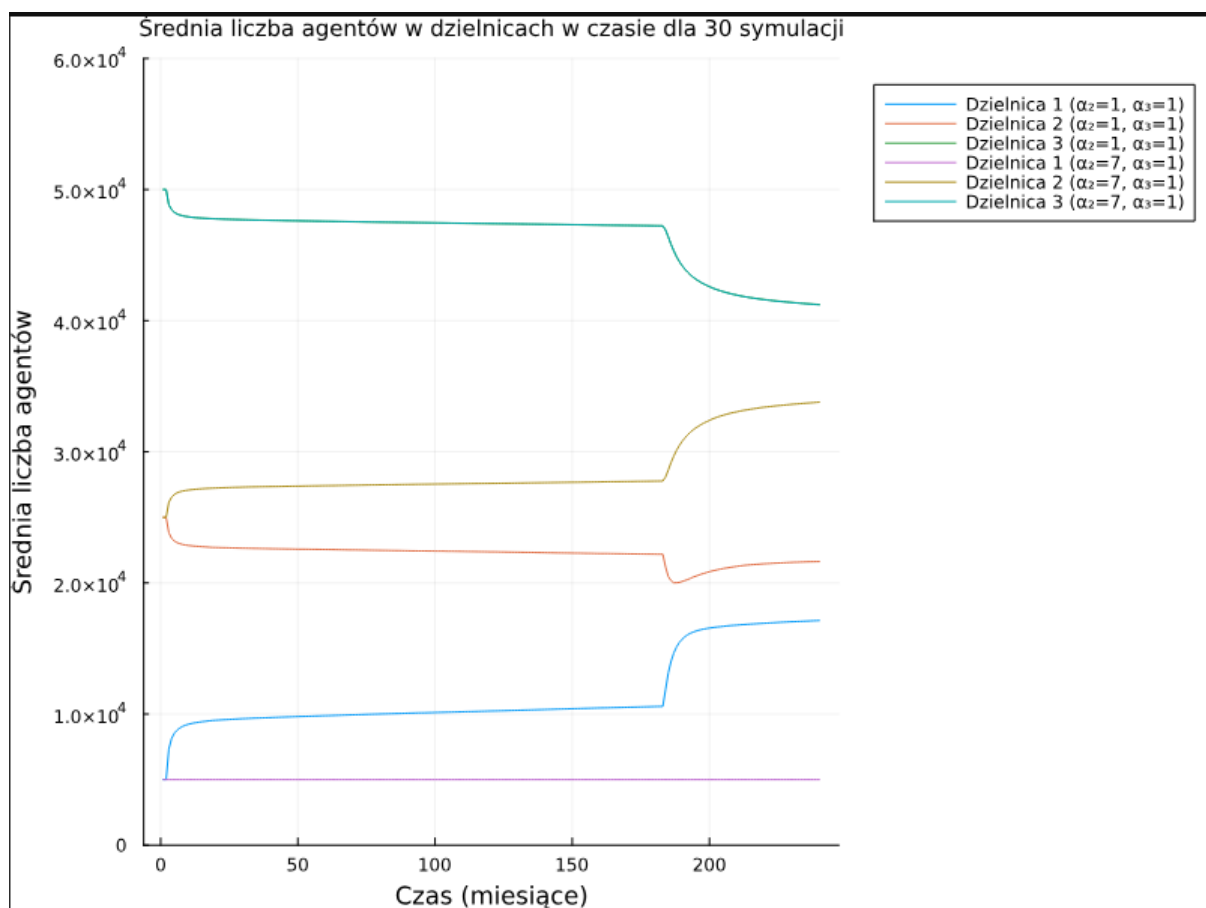
Ideą analizy wrażliwości jest uzyskanie uśrednionych wyników symulacji parametrów modelu dla różnych kombinacji zestawu parametrów α_2 oraz α_3 . Z powodu ograniczenia mocy obliczeniowej, liczba symulacji została zmniejszona do 30. Po 49 iteracjach (7 możliwych wartości α_2 oraz 7 możliwych wartości α_3) powstaje tabela przechowująca statystyki opisowe dla każdego z parametrów – liczba mieszkańców, dochód, cena mieszkania – dla poszczególnych dzielnic.



Wykres 10 Średnia liczba agentów w dzielnicach

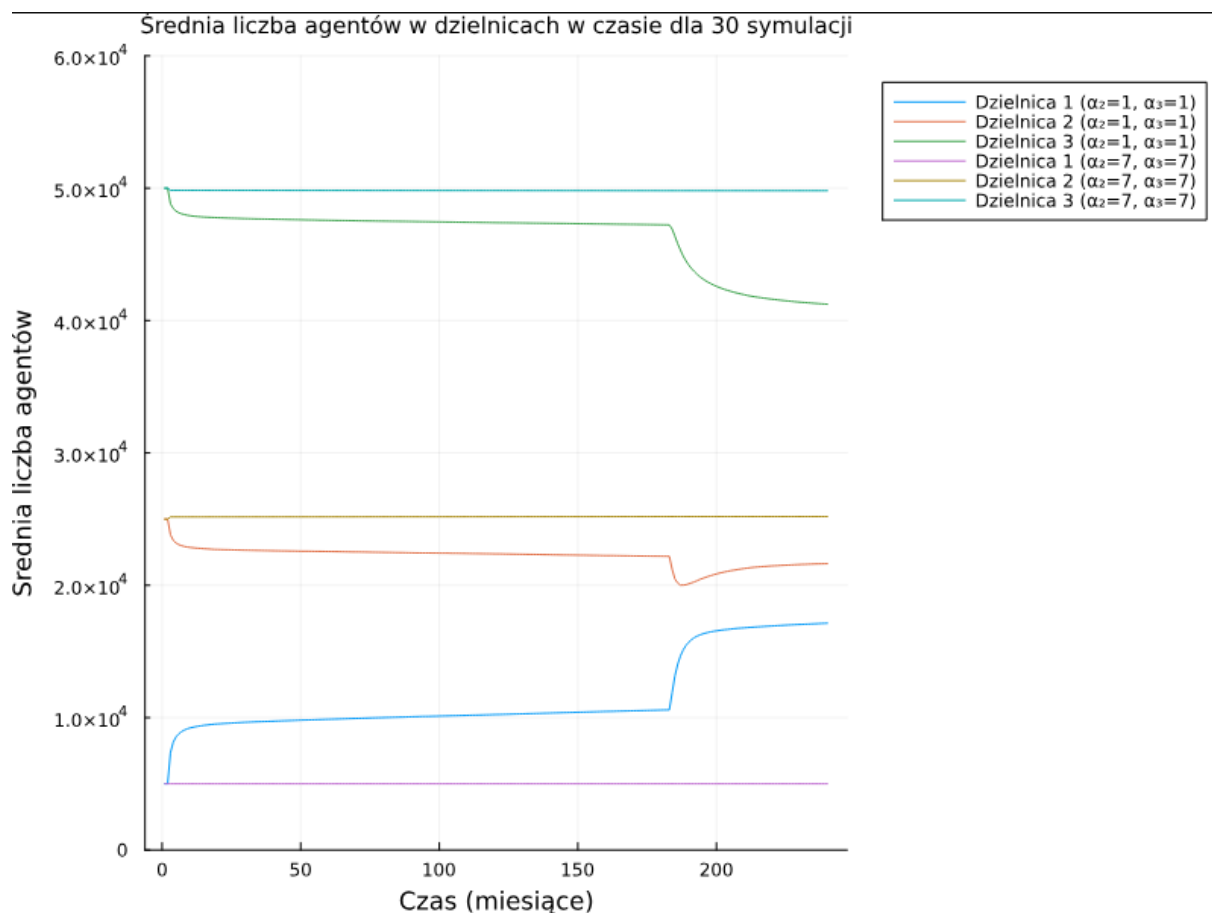
W przypadku ustalenia wartości parametru α_2 na poziomie 1 oraz α_3 na poziomie 1 oraz 7, występuje zauważalna różnica w średniej liczbie mieszkańców w każdej z dzielnic.

W przypadku dzielnicy I liczba mieszkańców jest wyższa przy $\alpha_3 = 1$ i różnica ta utrzymuje na całym przedziale czasowym. Inaczej sytuacja wygląda w przypadku dzielnicy III. Tam przy $\alpha_3 = 1$ liczba mieszkańców jest niższa niż przy $\alpha_3 = 7$. Co więcej różnica ta zwiększa się wraz z biegiem czasu, a największa zmiana jest zauważalna przy 180 miesiące. Wynika to z zakończenia okresu spłacania kredytów. Natomiast dla dzielnicy II możemy zauważyć, że początkowo liczba mieszkańców przy $\alpha_3 = 1$ jest niższa niż dla $\alpha_3 = 7$. Jednak przy 180 miesiącu, następuje gwałtowny spadek liczby mieszkańców w przypadku $\alpha_3 = 7$, natomiast dla $\alpha_3 = 1$ możemy wtedy zaobserwować wzrost liczby mieszkańców.



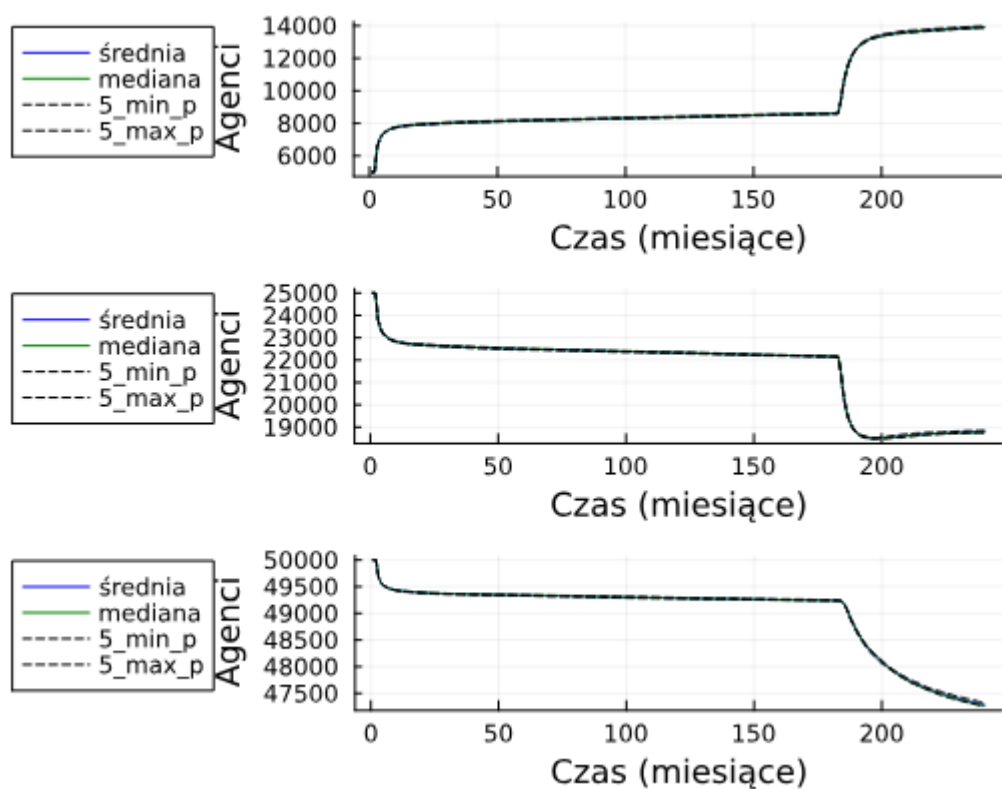
Wykres 11 Średnia liczba agentów w dzielnicach

Kolejną kombinacją zastosowaną w analizie wrażliwości jest ustalenie parametru α_3 na poziomie 1 oraz ustalenia parametru α_2 na poziomie 1 oraz 7. W przypadku dzielnicy III różnice są niezauważalne. Dla dzielnicy II wyższe średnia liczba mieszkańców jest zauważalna dla wyższej wartości parametru α_2 . Natomiast w dzielnicy I dla wartości parametru $\alpha_2 = 7$ liczba mieszkańców pozostaje stała na całym przedziale czasowym. W drugim przypadku, liczba mieszkańców stale wzrasta, a największy przyrost jest zauważalny w 180 miesiącu.



Wykres 12 Średnia liczba agentów w dzielnicach

Następnym etapem analizy wrażliwości jest kombinacja parametrów $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$, oraz $\alpha_2 = 7, \alpha_3 = 7$. Dla dzielnicy I dla kombinacji parametrów na poziomie 7 liczba mieszkańców pozostaje stała, natomiast w drugim przypadku rośnie, a największy przyrost przypada na 180 miesiąc. W dzielnicy II liczebność pozostaje stała dla parametrów na poziomie 7, natomiast spada dla poziomu 1, choć następuje niewielki przyrost po 180 miesiącu. Podobnie jak w przypadku pozostałych, na poziomie parametrów równym 7 liczba mieszkańców dzielnicy III pozostaje stała. Natomiast dla drugiej kombinacji stale ona spada, a największy zmiana następuje po 180 miesiącu.



Wykres 13 Liczebność mieszkańców dzielnic w czasie

Na kolejnym wykresie przedstawione zostały liczebności mieszkańców w poszczególnych dzielnicach dla kombinacji parametrów $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$. W przypadku dzielnicy I liczba mieszkańców stale rośnie, a największy przyrost następuje po 180 miesiącu. Natomiast w przypadku dzielnic II oraz III liczebność stale spada, a największe zmiany następują po 180 miesiącu.

Tabela 4 Średnia liczba mieszkańców, dochód i ceny mieszkań w dzielnicach

Row	α_2	α_3	avg_n_I	avg_n_II	avg_n_III	avg_inc_I	avg_inc_II	avg_inc_III	avg_hp_I	avg_hp_II	avg_hp_III
	Int64	Int64	Float32	Float32	Float32	Float32	Float32	Float32	Float32	Float32	Float32
1	1	4	9687.57	21369.9	48942.6	1.83636	768.87	314.178	25.83	21.9761	13.6607
2	2	4	9499.07	21569.1	48931.9	1.84969	555.266	314.192	25.8487	21.84	13.6681
3	3	4	9426.97	21590.5	48982.5	1.86607	459.494	314.167	25.8888	21.7416	13.6599
4	4	4	9321.21	21726.1	48952.7	1.87964	414.812	314.181	25.8745	21.6596	13.6606
5	5	4	9246.91	21782.7	48970.3	1.89288	391.171	314.163	25.878	21.5719	13.6548
6	6	4	9143.02	21907.9	48949.1	1.90467	376.67	314.163	25.8918	21.5052	13.6542
7	7	4	5000.0	26030.9	48969.1	2.90306	367.971	314.18	27.0224	20.624	13.6534

Ostatnim elementem analizy wrażliwości jest przedstawienie wyników dla kombinacji $\alpha_2 = \langle 1, 7 \rangle$, $\alpha_3 = 4$. Tabela przedstawia uśrednione wartości dotyczące liczby mieszkańców, średniej zmiany dochodów i średniej ceny mieszkań. W przypadku liczebności wartości te pozostają na zbliżonym poziomie dla każdej kombinacji. Natomiast gwałtowne zmiany są zauważalne dla dzielnic I oraz II, przy parametrze $\alpha_2 = 7$. W przypadku zmian dochodów dla dzielnicy I rosną one wraz ze wzrostem parametru α_2 . Odwrotna zależność występuje w dzielnicy II gdzie wartości spadają wraz ze wzrostem parametru α_2 . Dla dzielnicy III wartości występują na podobnym poziomie. Taką samą zależność jak dla dochodów można zaobserwować dla cen mieszkań, gdzie w dzielnicy I rosną, w dzielnicy II spadają, a w dzielnicy III pozostają na tym samym poziomie.

Zakończenie

W raporcie przedstawione zostały wyniki symulacji, których celem było zbadanie ruchu mieszkańców między trzema dzielnicami rozlokowanymi wokół śródmieścia pewnego miasta oraz analiza wrażliwości tej migracji na zmiany poszczególnych parametrów modelu. Agenci zostali na początku losowo przypisani do wybranych dzielnic. Następnie dla każdego z nich z rozkładu Pareta został wylosowany dochód. Na przemieszczanie się mieszkańców nałożono ograniczenie warunków dochodowych wymaganych do przeniesienia się do droższej dzielnicy.

W przypadku analizy podstawowej można zauważyć, że wraz z biegiem czasu liczba mieszkańców dzielnic II oraz III spada, a największe zmiany są obserwowalne po 180 miesiącu, kiedy to dla większości mieszkańców kończył się okres spłaty kredytu hipotecznego na obecne mieszkania. Ludność ta przenosiła się do dzielnicy I, gdzie populacja stale rosła. Wynika to z faktu, że dzielnica I nie ma konkurencji o wyższym standardzie życia, więc nie występuje tam emigracja. Sytuacja dotycząca zmian dochodów w dzielnicach wyglądała inaczej. Dla dzielnic II i III dochody stale rosły, natomiast w dzielnicy I utrzymywały się na stałym poziomie. Podobną sytuację można było zauważyć w przypadku cen mieszkań. Dla dzielnic II i III stale one rosły. Natomiast w dzielnicy I wystąpił znaczący spadek cen po 180 miesiącu symulacji.

Kolejnym elementem raportu była analiza wrażliwości, gdzie zbadane zostały zmiany w wartościach poszczególnych zmiennych pod wpływem modyfikacji modelu. oraz zmiana

wartości parametrów α w rozkładzie Pareta. Pierwszą z nich była zmiana inicjalizacji dochodów, gdzie dochody mieszkańców każdej dzielnicy były losowane z osobnych rozkładów. Kolejnym elementem było usunięcie spowolnienia zmiany dochodów w dzielnicy I. W wyniku tej modyfikacji, dla mieszkańców dzielnicy I nastąpił gwałtowny wzrost dochodów. Ostatnim elementem analizy wrażliwości było modyfikacja wartości parametrów α . Analizie została przeprowadzona na kilkunastu kombinacjach parametrów α_2 i α_3 .

Bibliografia

1. T. C. Schelling, „*Dynamic Models of Segregation*”, Harvard University, Journal of Mathematical Sociology, 1971, Vol. 1, pp 143-186
2. Kod z zajęć. ZMS2024Z_CW_3_4_Julia_Schelling_model_2-POPRAWIONE.ipynb