

Сравнение методов построения полярных кодов для каналов с аддитивным белым гауссовским шумом

Глеб Балицкий^{1,2}, Андрей Дзись^{1,2}, Алексей Фролов^{3,1}

¹ Институт Проблем Передачи Информации РАН, Москва, Россия,

² Московский физико-технический институт, Москва, Россия

³ Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
gleb.balitskiy@phystech.edu, andrey.dzis@phystech.edu,
al.frolov@skoltech.ru

Аннотация В работе рассматриваются методы построения полярных кодов для каналов с аддитивным белым гауссовским шумом. Путем моделирования были исследованы два метода: метод эволюции плотности и метод построения кодов на основе верхней оценки параметров Бхаттачариа. В ходе исследования было произведено сравнение работы данных методов, были получены оптимальные параметры построения кода для разных отношений сигнал-шум (SNR).

Ключевые слова: Построение полярных кодов, каналы с аддитивным белым гауссовским шумом, декодирование методом последовательного исключения (successive cancellation).

1 Введение

Конструкция полярных кодов и оценки оптимальных параметров были предложены в [1], исследования были продолжены в [2]. Данные коды являются первыми известными кодами с субквадратичной сложностью кодирования и декодирования, для которых доказан факт достижения пропускной способности дискретных двоичных каналов без памяти, например, бинарного канала со стираниями (BEC). Вследствие особенностей построения кода, его структура непосредственно зависит от SNR в канале. Таким образом, актуальной задачей является нахождение таких параметров кода, при которых код может работать на некотором заранее заданном диапазоне SNR.

Основные результаты работы заключаются в следующем. Основываясь на предыдущих работах, была произведена симуляция работы кодера, декодера последовательного исключения и передачи данных по двум моделям канала: двоично-симметричному с аддитивным белым гауссовским шумом. Для каналов с гауссовским шумом было произведено исследование на заданном диапазоне SNR эффективности кода, дизайн которого соответствует определенному значению SNR.

2 Предварительные сведения

2.1 Полярные коды

Введем понятия двух наиболее важных величин для дискретных двоичных симметричных каналов без памяти (B-DMC): симметричной пропускной способности

$$I(W) \triangleq \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{2} W(y|x) \log \frac{W(y|x)}{\frac{1}{2} W(y|0) + \frac{1}{2} W(y|1)} \quad (1)$$

и параметра Бхаттачария

$$Z(W) \triangleq \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sqrt{W(y|0)W(y|1)} \quad (2)$$

Эти параметры используются как показатели скорости и надежности, соответственно.

Принцип работы полярных кодов построен на явлении поляризации канала. Явление заключается в следующем: мы из набора N -независимых копий данного B-DMC канала можем создать второй набор N двоичных каналов $W_N^{(i)} : 1 \leq i \leq N$ так, что с увеличением N для i , для которых $I(W_N^{(i)})$ стремится к 1, пропускная способность соответствующих каналов достигает $I(W)$. Соответственно, для i , для которых $I(W_N^{(i)})$ стремится к 0, достигает значения $1 - I(W)$. Таким образом, для передачи достаточно выбирать из этих каналов лишь те, пропускная способность которых стремится к 1. Коды, построенные по данному принципу, называются полярными. Двоичный симметричный канал без памяти называется каналом со стиранием (BEC), если для каждого $y \in \mathcal{Y}$ выполнено:

$$W(y|0)W(y|1) = 0 \quad (3)$$

или

$$W(y|0) = W(y|1) \quad (4)$$

В таком случае y называется символом стирания. Соответственно, $W(y|0)$ называется вероятностью стирания.

На примере BEC рассмотрим подробнее поляризацию канала, состоящую из двух этапов: объединение и разделение канала. В объединении основная задача рекурсивно получить вектор $W_N : \mathcal{X}^N \rightarrow \mathcal{Y}^N$. Рекурсия начинается с $n = 0$ (нулевой шаг рекурсии) с единственной копией канала W и $W_1 \triangleq W$. Первый шаг $n = 1$ начинается с двух независимых копий W_1 и составляет $W_2 : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathcal{Y}^2$ (см.рис.1) с вероятностью ошибки:

$$W_2(y_1, y_2|u_1, u_2) = W(y_1|u_1 \oplus u_2)W(y_2|u_2) \quad (5)$$

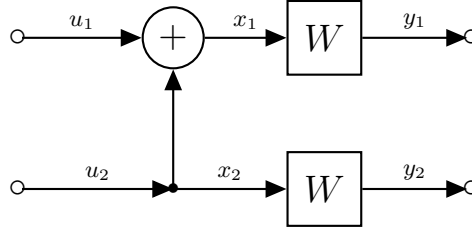


Рис. 1

В результате входной вектор u_1^N преобразуется в вектор s_1^N так, что $s_{2i-1} = u_{2i-1} \oplus u_{2i}$, $s_{2i} = u_{2i}$. Разделение канала заключается в делении W_N в последовательность N би-нарных каналов $W^{(i)} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}^N \times \mathcal{X}^{i-1}$, $1 \leq i \leq N$ с пропускными способностями:

$$W_N^{(i)}(y_1^N, u_1^{i-1} | u_i) \triangleq \sum_{u_{i+1}^N \in \mathcal{X}^{N-i}} \frac{1}{2^{N-1}} W_N(y_1^N | u_1^N) \quad (6)$$

Построение кода будем производить над двоичным полем $GF(2)$. Для двух векторов a_1^N и b_1^N через $a_1^N \oplus b_1^N$ обозначим покомпонентное суммирование по модулю 2.

Степень $A^{\otimes n}$ определяется как $A \otimes A^{\otimes(n-1)}$ для $n \geq 1$. Для $n = 0$ определим $A^{\otimes 0} \triangleq [1]$. Пусть на вход кодера подается последовательность векторов x_1^N длины $N = 2^n$, тогда, обозначая последовательность кодовых слов u_1^N , получаем равенство:

$$x_1^N = u_1^N G_N \quad (7)$$

где G_N порождающая матрица, равная:

$$G_N = B_N F^{\otimes n} \quad (8)$$

где B_N матрица перестановки, а $F^{\otimes n} = F \otimes F^{\otimes(n-1)}$, где $F \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.2 Гауссовский канал

В данной работе рассмотрен канал с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ). Предполагается, что шум имеет нулевое среднее и двустороннюю спектральную плотность σ^2 . В канале аддитивный шум $n(t)$ прибавляется к сигналу $s(t)$. То есть на выходе канала мы имеем сигнал $s_{out}(t)$ равный:

$$s_{out}(t) = s(t) + n(t) \quad (9)$$

3 Методы построения

1. Вначале рассмотрим метод построения полярного кода на основе оценки параметров Бхаттачариа. В работе [1] было доказано, что для каждого виртуального канала параметр Бхаттачариа является верхней границей для вероятности ошибки в этом канале. Для построения кода нужно выбрать каналы с наименьшими значениями параметра. Так как точный расчет этих параметров очень сложен, мы решили воспользоваться оценкой сверху, также представленной в работе [1], а именно:

$$Z(W_{2N}^{(2i-1)}) \leq 2Z(W_N^{(i)}) - Z(W_N^{(i)})^2 \quad (10)$$

$$Z(W_{2N}^{(2i)}) = Z(W_N^{(i)})^2 \quad (11)$$

2. Второй метод предложен в работе [2]. Суть метода заключается в оценке вероятности ошибки в каждом виртуальном канале, используя Гауссовскую аппроксимацию, и выборе каналов с минимальной ошибкой. Следуя работе [2] вероятность ошибки можно оценить с помощью формул, представленных ниже:

$$E[L_n^{(2i-1)}] = \phi^{-1}(1 - (1 - \phi(E[L_n^{(i)}]_{n/2}))^2) \quad (12)$$

где:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh \frac{u}{2} e^{-\frac{(u-x)^2}{4x}} dx & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$E[L_n^{(2i)}] = E[L_{n/2}^{(i)}] \quad (14)$$

$$\pi_i \approx Q\left(\sqrt{E[L_{n/2}^{(i)}]/2}\right), 1 \leq i \leq n \quad (15)$$

где:

$$L_1^{(i)}(y_i) \sim \mathcal{N}\left(\frac{2}{\sigma^2}, \frac{4}{\sigma^2}\right) \quad (16)$$

$$L_i = \ln \frac{\mathbb{P}(y_i|0)}{\mathbb{P}(y_i|1)} \quad (17)$$

- логарифмическое отношение правдоподобия

4 Численные результаты

Для исследования метода на основе оценки параметров Бхаттачариа были рассмотрены кодовые слова с длиной $N = 512$ на трех скоростях: $R = 0.25$ (рис.2), $R = 0.5$ (рис.3), $R = 0.75$ (рис.4).

Исследуя полученные зависимости, можно сделать выводы:

- 1) $R = 0.25$: Самая эффективная оптимизация кода на $SNR_{opt} = -1$

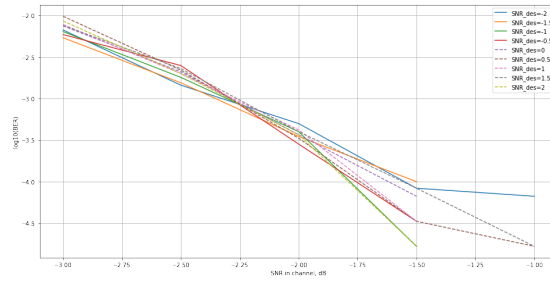


Рис. 2: метод: пар. Бх. Скорость 0.25

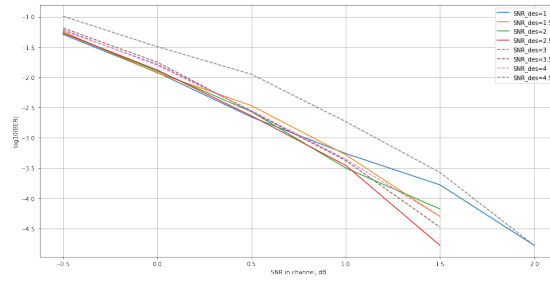


Рис. 3: метод: пар. Бх. Скорость 0.5

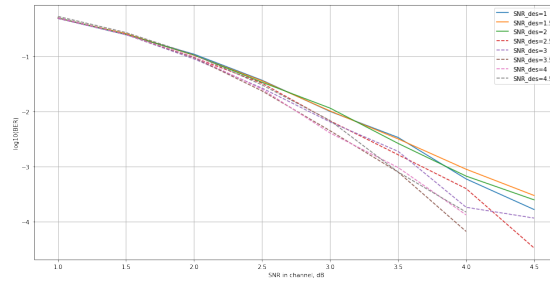


Рис. 4: метод: пар. Бх. Скорость 0.75

- 2) $R = 0.5$: Самая эффективная оптимизация кода на $SNR_{opt} = 2.5$
- 3) $R = 0.75$: Самая эффективная оптимизация кода на $SNR_{opt} = 3.5$

Для метода на основе оценки вероятности ошибки аналогично были рассмотрены кодовые слова с длиной $n = 512$ на трех скоростях: $R = 0.25$ (рис.5), $R = 0.5$ (рис.6), $R = 0.75$ (рис.7).

Здесь также видно, что есть определенные значения параметра SNR_{opt} , при которых код показывает наиболее высокую эффективность:

- 1) $R = 0.25$: Самая эффективная оптимизация кода на $SNR_{opt} = -3$
- 2) $R = 0.5$: Самая эффективная оптимизация кода на $SNR_{opt} = -6$
- 3) $R = 0.75$: Самая эффективная оптимизация кода на $SNR_{opt} = -2$

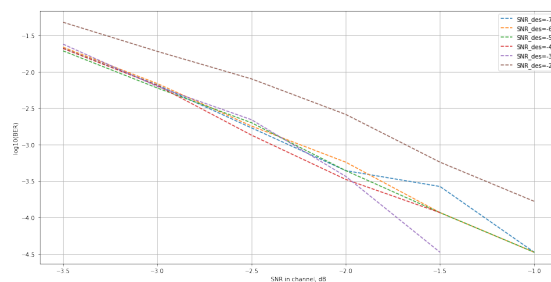


Рис. 5: метод: эв. плот. Скорость 0.25.

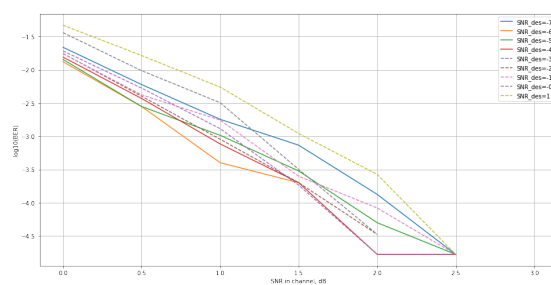


Рис. 6: метод: эв. плот. Скорость 0.5.

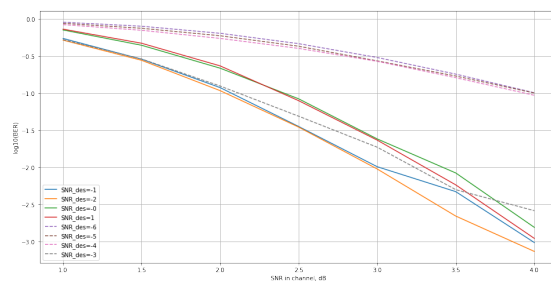


Рис. 7: метод: эв. плот. Скорость 0.75.

Сравним два метода при оптимальных параметрах:

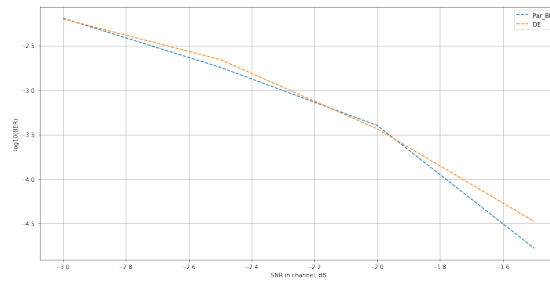


Рис. 8: Сравнение на опт. параметрах. Скорость 0.25.

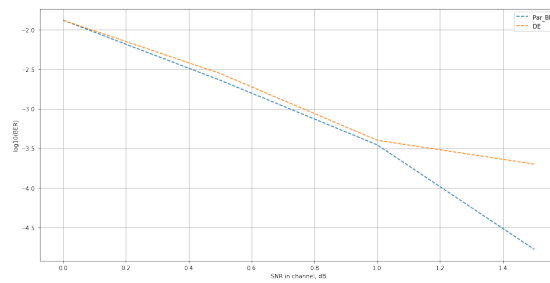


Рис. 9: Сравнение на опт. параметрах. Скорость 0.5.

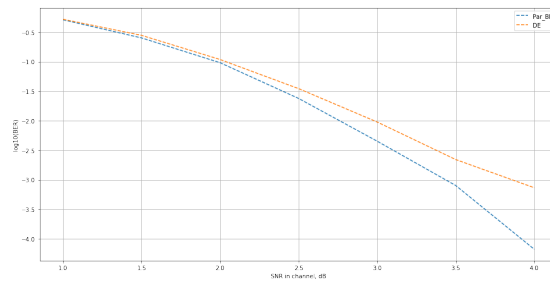


Рис. 10: Сравнение на опт. параметрах. Скорость 0.75.

5 Заключение

В результате моделирования показано, что метод на основе верхней оценки параметров Бхаттачариа, показывает большую эффективность, чем метод с оценкой вероятности ошибки (DE) на рассмотренных скоростях. Кроме того, за счет поиска оптимальных параметров построения кода, удалось добиться значительного увеличения эффективности кода.

Благодарности

Исследование выполнено в ИПФИ РАН при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 14-50-00150.

Список литературы

1. E. Arkan.: Channel Polarization: A Method for Constructing Capacity-Achieving Codes for Symmetric Binary-Input Memoryless Channels. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 55, no. 7, pp. 3051–3073, Jul. 2009.
2. P. Trifonov.: Efficient Design and Decoding of Polar Codes. IEEE Trans. Inf. Theory, vol.60, no. 11, pp.3221-3227, Nov. 2012.
3. H. D. Pfister.: A Brief Introduction to Polar Codes. Supplemental Material for Advanced Channel Coding
4. I.Tal, A. Vardy.: List Decoding of Polar Codes. IEEE Trans. Inf. Theory, vol.1, no. 5, pp. 2213-2226, May. 2015.
5. R.Mori.,T.Tanaka: Performance of Polar Codes with the Construction using Density Evolution. IEEE Communication Letters, vol. 13, no. 7,pp. 519 -521, Jul. 2009.