

推导与数值验证（针对论文 Eq.(3)-(5)）

目的： 比较论文中 $N_{pp}(BV)$ 、 $W_{pp}(BV)$ 与 $W_{pp}(N_{pp})$ 的经验式，并给出推导要点、数值流程与对比结果。

1 断裂积分与 Chynoweth 模型

论文断裂条件（式(1) 原式）采用离子化积分：

$$I_n = \int_0^W \alpha_n(E(x)) \exp \left[- \int_0^x (\alpha_n - \alpha_p) dv \right] dx = 1.$$

其中 Chynoweth 形式：

$$\alpha_n = a_n \exp(-b_n/E), \quad \alpha_p = a_p \exp(-b_p/E).$$

参数采用论文值： $a_n = 7.03 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$, $b_n = 1.231 \times 10^6 \text{ V/cm}$, $a_p = 1.582 \times 10^6 \text{ cm}^{-1}$, $b_p = 2.036 \times 10^6 \text{ V/cm}$ 。

2 NPT 情形的电场关系（用于消去 N）

NPT 中性场：

$$E(x) = \frac{qN(W-x)}{\varepsilon_s} = \frac{2BV(W-x)}{W^2},$$

并由此得：

$$BV = \frac{qNW^2}{2\varepsilon_s}, \quad N = \frac{2\varepsilon_s BV}{qW^2}.$$

于是对给定 BV ，我们只需在 W 上解方程 $I_n(W; BV) = 1$ ，解得 W 后通过上式计算 N ，对一系列 BV 做幂律拟合即得论文的经验式。

3 数值实现要点（在 `analysis/matlab_version` 目录中的实现）

- 代码文件：[matlab_version/compute_fits.m](#)、[matlab_version/complete_test.m](#)。
- 积分方法：累积梯形积分（MATLAB 的 `cumtrapz` 与 `trapz`）。
- 求根方法：`fzero` 法（MATLAB `fzero`），容限采用默认值。
- 空间网格：为保证精度采用 20000 个网格点。
- BV 采样：默认 400–1600 V，均匀采样 41 个点；为测试拟合对区间敏感性也做了 400–800、400–1000、600–1600 等子区间拟合。

运行命令（在 `analysis/matlab_version` 目录下）：

```
1 | matlab -batch "cd('d:\micro_courseDesign\analysis\matlab_version');  
  | run('compute_fits.m'); exit;"
```

Fence 1

4 拟合流程

- 对每个 BV ，在 W 区间（初始用 Fulop 近似给出搜索区间）内求解 $I_n(W; BV) = 1$ 得到 W （单位 cm），转为 μm 。
- 计算 $N = 2\varepsilon_s BV / (qW^2)$ （单位 cm^{-3} ）。
- 对数据点做对数线性拟合： $\log N = \log C + p \log BV$ ，得到 C 与 p （论文的 Eq.(3) 就是此形式）。

5 计算结果与论文对比

- 论文给出：
 - (3) $N_{pp} \approx 1.202 \times 10^{18} BV^{-1.292} \text{ cm}^{-3}$
 - (4) $W_{pp} \approx 0.03319 BV^{1.146} \mu\text{m}$
 - (5) $W_{pp} \approx 4.322 \times 10^{14} N_{pp}^{-0.8927} \mu\text{m}$
- 在 `analysis/matlab_version` 目录中通过严格数值流程得到的拟合结果为：

○ 全区间 400–1600 V (密集点、网格20000) :

$$N \approx 1.4316 \times 10^{18} BV^{-1.32091} (p = -1.320914)$$

○ 区间 600–1600 V 拟合:

$$N \approx 1.3436 \times 10^{18} BV^{-1.31192} (p = -1.311919)$$

○ 对应的 W 与 N-W 的拟合結果為:

$$W \approx 0.030056 BV^{1.16046} \mu\text{m},$$
$$W \approx 2.6794 \times 10^{14} N^{-0.87851} \mu\text{m}.$$

○ 不同区间的 N-BV 拟合对比:

区间 (V)	系数 C	p
-----	-----	-----
400-1600	1.4316e+18	-1.320914
400-1200	1.5130e+18	-1.329445
400-1000	1.5591e+18	-1.334161
500-1600	1.3761e+18	-1.315297
600-1600	1.3436e+18	-1.311919
400-800	1.6273e+18	-1.340971

6 MATLAB 代码核心逻辑

```
1 % 计算电子电离系数
2 function an = alpha_n(E)
3 global a_n b_n;
4 E = max(E, 1e-12); % 避免除以零
5 an = a_n * exp(-b_n ./ E);
6 end
7
8 % 计算空穴电离系数
9 function ap = alpha_p(E)
10 global a_p b_p;
11 E = max(E, 1e-12);
12 ap = a_p * exp(-b_p ./ E);
13 end
14
15 % 计算电离积分
16 function I = ionization_integral_for_W(W_cm, BV, grid_points)
17 x = linspace(0, W_cm, grid_points)';
18 E = 2.0 * BV * (W_cm - x) / (W_cm^2);
19 an = alpha_n(E);
20 an = an(:);
21 diff = an - alpha_p(E);
22 diff = diff(:);
23 S = cumtrapz(x, diff);
24 S = S(:);
25 if length(S) < length(x)
26     S = [0; S];
27 end
28 S = S(1:length(an));
29 integrand = an .* exp(-S);
30 I = trapz(x, integrand);
31 end
32
33 % 求解给定BV下的W
34 function W = solve_W_for_BV(BV, Wmin_cm, Wmax_cm, grid_points)
35 f = @(W) ionization_integral_for_W(W, BV, grid_points) - 1.0;
36 W = fzero(f, [Wmin_cm, Wmax_cm]);
37 end
38
39 % 批量计算
40 function [BV, W_cm, N] = compute_all(BV_list, grid_points)
41 global eps_s q;
42 W_solutions = [];
43 N_solutions = [];
```

```

44     for i = 1:length(BV_list)
45         current_BV = BV_list(i);
46         W_fulop_um = 0.0257 * (current_BV^(7.0/6.0));
47         W_guess_cm = W_fulop_um * 1e-4;
48         Wmin = max(1e-6, W_guess_cm * 0.2);
49         Wmax = max(Wmin*10, W_guess_cm * 4.0);
50         try
51             W = solve_W_for_BV(current_BV, Wmin, Wmax, grid_points);
52         catch
53             W = solve_W_for_BV(current_BV, Wmin*0.05, Wmax*20, grid_points);
54         end
55         N_val = 2.0 * eps_s * current_BV / (q * W^2);
56         W_solutions = [W_solutions, W];
57         N_solutions = [N_solutions, N_val];
58     end
59     BV = BV_list;
60     W_cm = W_solutions;
61     N = N_solutions;
62 end

```

Fence 2

7 复现步骤

1. 打开 MATLAB 软件，切换到目录 `d:\micro_courseDesign\analysis\matlab_version`
2. 运行完整计算和拟合脚本：

```
1 | run('compute_fits.m');
```

Fence 3

3. 查看命令窗口输出的拟合结果
4. 检查生成的数据文件 `BV_W_N_fits.csv`

或使用 MATLAB 批处理模式（无需打开 GUI）：

```

1 | cd d:\micro_courseDesign\analysis\matlab_version
2 | matlab -batch "run('compute_fits.m'); exit;"

```

Fence 4

8 与 Python 版本的差异说明

MATLAB 实现与 Python 版本在数值方法上略有不同：

- 积分方法：MATLAB 使用 `cumtrapz` 和 `trapz`，Python 使用 SciPy 的 `cumulative_trapezoid` 和 `trapezoid`
- 求根方法：MATLAB 使用 `fzero`，Python 使用 `scipy.optimize.brentq`
- 拟合结果：两者计算结果非常接近，差异小于 1%，主要源于数值方法的实现细节不同

MATLAB 版本的优势：

- 无需额外安装第三方库，MATLAB 自带所有需要的函数
- 代码结构清晰，易于理解和修改
- 适合在 MATLAB 环境中进行进一步的数据分析和可视化

9 导通电阻 $R_{on,pp}(BV)$ 的计算

9.1 数学模型

在功率器件设计中，导通电阻是一个关键参数。对于非穿通（NPT）结构，比导通电阻（specific on-resistance）可以表示为：

$$R_{on,pp} = \frac{W_{pp}}{q \mu_n N_{pp}}$$

其中：

- $R_{on,pp}$: 比导通电阻, 单位 $\Omega \cdot \text{cm}^2$
- W_{pp} : 耗尽区宽度, 单位 cm
- q : 电子电荷, $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- μ_n : 电子迁移率, 单位 $\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$
- N_{pp} : 掺杂浓度, 单位 cm^{-3}

电子迁移率模型 (Caughey-Thomas 模型) [14, 15]

电子迁移率与掺杂浓度相关, 采用 Caughey-Thomas 经验模型:

$$\mu_n = \mu_{n0} + \frac{\mu_{nmax}}{1 + \left(\frac{N}{N_{ref}}\right)^\alpha}$$

其中参数值为:

- $\mu_{n0} = 55.24 \text{ cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$: 低掺杂极限迁移率
- $\mu_{nmax} = 1373.99 \text{ cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$: 迁移率修正幅值
- $N_{ref} = 1.072 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$: 参考掺杂浓度
- $\alpha = 0.73$: 幂指数

参考文献:

- [14] Caughey, D. M., & Thomas, R. E. (1967). Carrier mobilities in silicon empirically related to doping and field. Proceedings of the IEEE, 55(12), 2192-2193.
- [15] Arora, N. D., Hauser, J. R., & Roulston, D. J. (1982). Electron and hole mobilities in silicon as a function of concentration and temperature. IEEE Transactions on Electron Devices, 29(2), 292-295.

9.2 实现方法

$R_{on,pp}(BV)$ 的计算流程:

1. **计算 $W(BV)$ 和 $N(BV)$** : 使用已有的电离积分方法, 在 400-1600 V 范围内计算每个 BV 对应的 W 和 N
2. **计算电子迁移率**: 使用 Caughey-Thomas 模型, 根据 N 计算 μ_n
3. **计算导通电阻**: 代入 $R_{on,pp} = W / (q \cdot \mu_n \cdot N)$
4. **幂律拟合**: 对 $R_{on,pp}(BV)$ 进行对数线性拟合, 得到经验公式

9.3 计算结果

- 代码文件: [matlab_version/compute_Ron_pp.m](#)

运行命令:

```
1 | matlab -batch "cd('d:\micro_courseDesign\analysis\matlab_version');  
  | run('compute_Ron_pp.m'); exit;"
```

Fence 5

拟合结果 (全区间 400-1600 V) :

$$R_{on,pp} \approx 9.8848 \times 10^{-9} \times BV^{2.471753} \Omega \cdot \text{cm}^2$$

其中指数 $p = 2.471753$ 。

部分计算数据:

BV (V)	W (μm)	N (cm ⁻³)	μ _n (cm ² /Vs)	R _{on,pp} (Ω · cm ²)
400	31.284	5.286 × 10 ¹⁴	1401.37	0.0264
700	60.292	2.490 × 10 ¹⁴	1413.01	0.1070
1000	91.201	1.555 × 10 ¹⁴	1417.69	0.2583
1300	123.423	1.104 × 10 ¹⁴	1420.23	0.4915
1600	156.651	8.432 × 10 ¹³	1421.82	0.8156

Table 1

不同区间的拟合对比：

区间 (V)	系数 C	指数 p
400–1600	9.8848 × 10 ⁻⁹	2.471753
400–1200	9.1945 × 10 ⁻⁹	2.482925
400–1000	8.8449 × 10 ⁻⁹	2.489010
500–1600	1.0403 × 10 ⁻⁸	2.464488
600–1600	1.0735 × 10 ⁻⁸	2.460057
400–800	8.3763 × 10 ⁻⁹	2.497676

Table 2

9.4 结果分析

1. **指数特性：** R_{on,pp} 与 BV 的幂律关系指数约为 2.47，这意味着击穿电压每增加一倍，导通电阻约增加 2^{^(2.47)} ≈ 5.5 倍。这反映了击穿电压与导通电阻之间的基本权衡关系。
2. **迁移率变化：** 在计算范围内，电子迁移率从约 1401 cm²/(V · s) 变化到 1422 cm²/(V · s)，变化幅度较小（约 1.5%）。这是因为掺杂浓度范围（8.4 × 10¹³ ~ 5.3 × 10¹⁴ cm⁻³）处于 Caughey-Thomas 模型的高迁移率平台区。
3. **区间敏感性：** 不同 BV 区间的拟合指数略有差异，范围在 2.46-2.50 之间。低 BV 区间（400-800 V）的指数略高，高 BV 区间（600-1600 V）的指数略低。
4. **物理意义：** R_{on,pp} ∝ BV^{^(2.47)} 的关系比理想的 2.0-2.5 范围略高，这主要是由于 W ∝ BV^{^1.16} 和 N ∝ BV^{^(-1.32)} 的非理想幂律特性导致的。

9.5 MATLAB 代码实现

```
1  % 计算电子迁移率 (Caughey-Thomas 模型)
2  function mu_n = electron_mobility_ct(N)
3  global mu_n0 mu_nmax N_ref alpha_CT;
4      N = max(N, 1e-10);
5      mu_n = mu_n0 + mu_nmax ./ (1 + (N ./ N_ref).^alpha_CT);
6  end
7
8  % 计算导通电阻 R_on,pp
9  function R_on = calculate_Ron_pp(W_cm, N)
10 global q;
11     mu_n = electron_mobility_ct(N);
12     R_on = W_cm ./ (q .* mu_n .* N);
13 end
```

Fence 6

9.6 验证与讨论

1. **单位一致性验证：**

- W: cm
- q: C

- μ_n : $\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$
- N : cm^{-3}
- $R_{\text{on}} = \text{cm} / (C \cdot \text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s}) \cdot \text{cm}^{-3}) = \text{cm} / (C/(\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{cm})) = \Omega \cdot \text{cm}^2$
单位验证正确。

2. 数值合理性:

- 计算得到的 $R_{\text{on,pp}}$ 值在 $0.026\text{--}0.82 \Omega \cdot \text{cm}^2$ 范围内，与文献报道的硅功率器件典型值一致。
- 迁移率值在 $1400\text{--}1422 \text{ cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ 范围内，符合低掺杂 n 型硅的电子迁移率特性。

3. 模型局限性:

- Caughey-Thomas 模型假设室温 (300 K) 条件，未考虑温度效应。
- 模型适用于磷掺杂 n 型硅，对于其他掺杂类型（如砷、锑）可能需要调整参数。
- 高电场下的速度饱和效应未在模型中考虑。

9.7 应用建议

1. **器件设计优化:** 利用 $R_{\text{on,pp}} \propto BV^{2.47}$ 的关系，可以在击穿电压和导通电阻之间进行权衡优化。
2. **工艺参数选择:** 根据目标击穿电压，可以通过此模型预估所需的掺杂浓度和漂移区厚度。
3. **进一步研究:** 建议结合温度模型和电场依赖模型，建立更完整的导通电阻预测模型。