ЛР N5 Задание 3.2 Кирилло Д.Е
пятница, 22 апреля 2022 г. 11:54

$$N'(t) = N(t)(1 - N(t-T)) \quad (*)$$

Рассм. линеаризацию уравн-я $(*)$ в окр. $N(t) \equiv 0 \Rightarrow N'(t) \approx N(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ малое возмущение решения $N(t) \equiv 0$ приведет к его экспоненц. росту $\Rightarrow N(t) \equiv 0$ явл. неустойчивым положением равновесия.

Рассм. линеаризацию уравн-я в окр. $N(t) \equiv 1$. Сделаем замену переменных $n(t) = N(t) - 1$, тогда
$$n'(t) = (n(t)+1)(-n(t-T))$$
Рассм. линеаризацию в окр. нуля:
$$n'(t) \approx -n(t-T) \quad (**)$$
Решение ищем в виде решения Эйлера: $n(t) = c\,e^{\lambda t}$, $c = const$.

Подставляем последнее в $(**)$ и приходим к характ. уравн-ю для λ:
$$\lambda = -e^{-\lambda T}$$

Для устойчивости важно понять, при каких условиях $Re\,\lambda < 0$, что будет соотв. экспоненц. стремлению к нулю решения $n(t)$

$\exists$ $\lambda = \mu + i\omega$. Подставим последнее в характ. уравн-е:
$$\mu + i\omega = -e^{-(\mu + i\omega)T}$$

Запишем по-отдельности соотнош. для действ. и мнимой части
$$\mu = -e^{-\mu T}\cos(\omega T)$$
$$\omega = e^{-\mu T}\sin(\omega T) \quad (***)$$
Для $(***)$ справедливо след. св-во: если ω^* явл. решением уравн-я, то $-\omega^*$ явл. решением. Т-гда исследуем случаи $\omega = 0$ и $\omega > 0$:

I сл.: $\omega = 0$; $\lambda = \mu + 0 \cdot i \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu = -e^{-\mu T}$. Второе уравн-е удовл. тождественно.

Т.к. $T = const > 0$, то $\mu < 0 \Rightarrow Re\,\lambda < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Неустойчивость не возникает

II сл.: $\omega > 0$; $\lambda = \mu + i \cdot \omega$:
Если $\omega T < \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\omega T) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu < 0 \Rightarrow$ неустойчивость не возникает

Если $\omega T = \frac{\pi}{2}$, то $\mu = 0$, а $\omega = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$ явл. точкой перехода из устойчивого состояния $Re\,\lambda < 0$ в неустойчивое состояние $Re\,\lambda > 0$

Тогда получаем, что положение равновесия $N(t) \equiv 1$ безразмерного уравн-я Хатчинсона явл. устойчивым при $0 < T < \frac{\pi}{2}$ и неустойчивым при $T > \frac{\pi}{2}$.

При этом, в размерных переменных усл. устойчивости уравн-я Хатчинсона явл. $0 < kT < \frac{\pi}{2}$.