ММФП ЛР №3 Задание 1 а) Кирилло Д.Е.

четверг, 24 ноября 2022 г. 11:06

Рассм. группу в преобраз-й T_a:

$G_1 = T_a$ для кот. $T_a: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,a) \\ f_2(x,y,a) \end{pmatrix}$

и инфинитезимальный оператор

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Введём новую коорд. $p = \frac{dy}{dx} = y'$, где $y = y(x)$.

Добавим коорд. p в преобраз-е T_a и получаем

$$T_a: \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ p^* \end{pmatrix}, \text{ где } p^* = f_3(x,y,a)$$

$$p^* = \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{d f_2(x,y,a)}{d f_1(x,y,a)} = \frac{d(y + a\eta + o(a))}{d(x + a\xi + o(a))} =$$

$$= \frac{d(y + a\eta + o(a))}{d(x + a\xi + o(a))} \cdot \frac{\frac{1}{dx}}{\frac{1}{dx}} = \frac{p(\eta_x + \eta_y p)a + o(a)}{1 + (\xi_x + p\xi_y)a + o(a)} =$$

$$= \frac{(b_1 + I_1 a + o(a))\cancel{(1 + (\xi_x + p\xi_y)a + o(a))}}{\cancel{1 + (\xi_x + p\xi_y)a + o(a)}} =$$

$$= b_1 + \mathcal{Y}_1 a + o(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = b_1 = p \\ a_1 = \eta_x + p\eta_y = p(\xi_x + p\xi_y) + \mathcal{Y}_1 \\ p^* = p + a\mathcal{Y}_1 + o(a) \\ \mathcal{Y}_1 = \eta_x + p\eta_y - p\xi_x - p^2\xi_y \end{cases}$$

Введём символ оператора полного диф-ния:

$$D_x := \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots$$

Тогда $\mathcal{Y}_1$ можно записать в след. виде:

$$\mathcal{Y}_1 = \eta_x + p\eta_y - p\xi_x - p^2\xi_y = [y' = p \text{ также допускается}] =$$

$$= D_x(\eta) - y' D_x(\xi).$$

$\exists\, q = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$. Тогда $q^* = \frac{dp^*}{dx^*} = \frac{d f_3(x,y,a)}{d f_1(x,y,a)} =$

$$= \frac{d(p + a\mathcal{Y}_1 + o(a))}{d(x + a\xi + o(a))} = \frac{d(p + a\mathcal{Y}_1 + o(a)) \cdot \frac{1}{dx}}{d(x + a\xi + o(a)) \cdot \frac{1}{dx}} =$$

$$= \frac{\left(q + \frac{d\mathcal{Y}_1 a}{dx} + o(a)\right)\cancel{(1 + (\xi_x + p\xi_y)a + o(a))}}{\cancel{1 + (\xi_x + p\xi_y)a + o(a)}} =$$

$$= q + a\mathcal{Y}_2 + o(a)$$

Тогда $\mathcal{Y}_2$ можно записать как

$$\mathcal{Y}_2 = D_x(\mathcal{Y}_1) - q D_x(\xi) = [q = y''] =$$

$$= D_x(\mathcal{Y}_1) - y'' D_x(\xi)$$

Действуя аналогичным методом, можно найти $\mathcal{Y}_n$.

Конечная формула для $\mathcal{Y}_n$ будет следующая:

$$\mathcal{Y}_n = D_x(\mathcal{Y}_{n-1}) - y^{(n)} D_x(\xi)$$