ЛР №8 Задание 4.2 Кириллов Д.Е.

четверг, 28 апреля 2022 г. 16:05

$$\begin{cases} D\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} - \sigma\varphi + u\dfrac{d\varphi}{dx} = -Q\,\delta(x-x_0), \quad (*) \quad x\in\mathbb{R} \\ \varphi \to 0, \text{ при } x \to \pm\infty \end{cases}$$

Приведём задачу к эквив. форме без использования δ-ф-ции. Проинтегрируем урав-е $(*)$ на отрезке $[x_0-\frac{\varepsilon}{2};\, x_0+\frac{\varepsilon}{2}]$. Получаем

$$D\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{d^2\varphi}{dx^2}dx - \sigma\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}}\varphi dx + u\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}}\frac{d\varphi}{dx}dx =$$

$$= -Q\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}}\delta(x-x_0)\,dx$$

$$D\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}} - \sigma\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}}\varphi dx + u\,\varphi\Big|_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}} = -Q$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем

$$D\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x_0+0} - D\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x_0-0} = -Q$$

Рассмотрим область $(-\infty, x_0)$ и обозначим решение в этой обл. через φ_- и обл. $(x_0,+\infty)$ с решением в этой обл. через φ_+. Тогда лин. модель имеет вид:

$$\begin{cases} D\dfrac{d^2\varphi_-}{dx^2} - \sigma\varphi_- + u\dfrac{d\varphi_-}{dx} = 0 & x\in(-\infty, x_0) \\ \varphi_- \to 0 \text{ при } x\to-\infty & \\ D\dfrac{d^2\varphi_+}{dx^2} - \sigma\varphi_+ + u\dfrac{d\varphi_+}{dx} = 0 & \\ \varphi_+ \to 0 \text{ при } x\to+\infty & x\in(x_0,+\infty) \\ D\dfrac{d^2\varphi_+}{dx^2} - D\dfrac{d^2\varphi_-}{dx^2} = -Q & x = x_0 \\ \varphi_+ = \varphi_- & \text{(предположение о непрерывн-ти решения)} \end{cases}$$

Составляем характеристич. урав-е:

$$D\lambda^2 + u\lambda - \sigma = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-u \pm \sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_\pm(x) = C_1\exp\left(\frac{-u-\sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D}x\right) + C_2\exp\left(\frac{-u+\sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D}x\right)$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_- = 0$, то $C_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_-(x) = C_2\exp\left(\frac{-u+\sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D}(x-x_0)\right)$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_+ = 0$, то $C_2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_+(x) = C_1\exp\left(\frac{-u-\sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D}(x-x_0)\right)$$

Из условий при $x = x_0$ имеем, что

$$\begin{cases} D\left(C_1\dfrac{u+\sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D}\right) - \\ - D\left(C_2\dfrac{u-\sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D}\right) = -Q \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{Q}{\sqrt{u^2+4D\sigma}}$$

Тогда аналитическое решение представляется в виде:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{Q}{\sqrt{u^2+4D\sigma}}\exp\left(\dfrac{-u+\sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D}(x-x_0)\right), & \text{при } x\le x_0 \\ \dfrac{Q}{\sqrt{u^2+4D\sigma}}\exp\left(\dfrac{-u-\sqrt{u^2+4D\sigma}}{2D}(x-x_0)\right), & \text{при } x\ge x_0 \end{cases}$$