ЛР №3 ММФС Задание 1.3 (Т) Кирилко Д.С.

вторник, 15 марта 2022 г. 10:12

Рассмотрим след. диф. урав-е:

$$\begin{cases} \alpha''_t + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0, \quad (*) \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'_t(0) = \omega_0 \end{cases}$$

Т.к. угловая скорость вращения маятника $\omega = \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$, то урав-е $(*)$ можно переписать в след. виде:

$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$. Искл. из 2-х последних уравнений время, получаем: $\frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{g}{l}\frac{\sin\alpha}{\omega}$

или же

$$\omega\, d\omega = -\frac{g}{l}\sin\alpha\, d\alpha \quad (**)$$

Интегрируя $(**)$, получаем:

$$\int_{\omega}^{0}\omega\, d\omega = \int_{\alpha}^{\alpha_0} -\frac{g}{l}\sin\alpha\, d\alpha,$$ где

α_0 - макс. угол отклонения маятника (угловая амплитуда колебаний), мы приходим к закону сохр. энергии:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l}(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Т.к. угловая скорость вращения $\omega = \alpha'$, то из последнего урав-я мы получаем

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)},$$

отсюда

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}\, d\alpha$$

Учитывая, что период колебаний маятника T есть учетверенное время прохождения интервала углов от $\alpha = 0$ до $\alpha = \alpha_0$, получим для периода колебаний физич. маятника выражение

$$T = T(\alpha_0) = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\alpha_0}\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}$$

Ч.т.д.