ЛР4 ММДС Задание 2.1 Кирилко Д. Е.

пятница, 8 апреля 2022 г. 11:27

Рассмотрим 3 ур-я из SEIR-модели

$$\begin{cases} S' = -rSI, \\ E' = rSI - bE, \\ I' = bE - \alpha I \end{cases}$$

Положение равновесия: мн-во точек вида $(S_0, 0, 0)$, $0 \le S_0 \le N$

Сделаем замену переменных $\tilde{S} = S - S_0$, чтобы в новых переменных положением равновесия стала точка $(0,0,0)$

$$\begin{cases} \tilde{S}' = -r(\tilde{S} + S_0)I \\ E' = r(\tilde{S} + S_0)I - bE \\ I' = bE - \alpha I \end{cases}$$

Линеаризуем ДС в окр-ти точки $(0,0,0)$

$$\begin{cases} \tilde{S}' = -rS_0 I \\ E' = rS_0 I - bE \\ I' = bE - \alpha I \end{cases}$$

Перепишем вышеприведённую ДС в матрич. виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{S} \\ E \\ I \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -rS_0 \\ 0 & -b & rS_0 \\ 0 & b & -\alpha \end{pmatrix}}_{A:=} \begin{pmatrix} \tilde{S} \\ E \\ I \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -rS_0 \\ 0 & -b-\lambda & rS_0 \\ 0 & b & -\alpha-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda^2 + (\alpha+\beta)\lambda + b\alpha - brS_0) = 0$$

$\Downarrow$ $\lambda_1 = 0$ $\Downarrow$ проблема, т.к. нужны доп. исследования для анализа

$\Downarrow$ $\lambda^2 + (\alpha+\beta)\lambda + b\alpha - brS_0 = 0$

$\Downarrow$ $D = (\alpha - b)^2 + 4brS_0$

$$\lambda_2 = \frac{-\alpha - \beta + \sqrt{(\alpha - b)^2 + 4brS_0}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-\alpha - \beta - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4brS_0}}{2}$$

Для устойчивости положения равновесия (отсутств. эпидемии) необход. и достаточ., чтобы $\mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda_3 < 0$

Соотв., $(\alpha - b)^2 - (\alpha + b)^2 + 4brS_0 > 0$

$\Rightarrow \boxed{S_0 > \frac{b - \alpha}{br}}$ — положение равновесия устойчиво

В остальных случаях положение равновесия неустойчиво