ЛР№3 ММФС Задание 2.1 Кирилло Ф.Е.
среда, 16 марта 2022 г. 00:06

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha N - cNM, \\ \frac{dM}{dt} = -\beta M + \tilde{d} NM, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta, c, \tilde{d} = const > 0$

Положение равновесия:

$$\begin{cases} N(\alpha - cM) = 0, \\ M(-\beta + dN) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N^* = 0, \\ M^* = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} N^* = \frac{\beta}{\tilde{d}}, \\ M^* = \frac{\alpha}{c} \end{cases}$$

Рассмотрим особую точку $N^* = M^* = 0$ и исследуем её на устойчивость методом линеаризации вблизи особой точки:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} \approx \alpha N, \\ \frac{dM}{dt} \approx -\beta M \end{cases} \Rightarrow$$

Собств. знач. м-цы $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \alpha > 0$, $\lambda_2 = -\beta < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ особая точка – седло – неустойчивая $\Rightarrow$ вымирание обоих видов маловероятно.

Для особой точки $N^* = \frac{\beta}{\tilde{d}}$ и $M^* = \frac{\alpha}{c}$ методом линеаризации получаем:

$\exists\ \tilde{N} = N - \frac{\beta}{\tilde{d}}$, $\tilde{M} = M - \frac{\alpha}{c}$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(\alpha - cM), \\ \frac{dM}{dt} = M(-\beta + \tilde{d}N) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\tilde{N}}{dt} = \left(\tilde{N} + \frac{\beta}{\tilde{d}}\right)\left(-c\tilde{M}\right) \\ \frac{d\tilde{M}}{dt} = \left(\tilde{M} + \frac{\alpha}{c}\right)\tilde{d}\tilde{N} \end{cases}$$

(линеаризация) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\tilde{N}}{dt} \approx -\frac{c\beta}{\tilde{d}}\tilde{M}, \\ \frac{d\tilde{M}}{dt} \approx \frac{\alpha\tilde{d}}{c}\tilde{N} \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c\beta}{\tilde{d}} \\ \frac{\alpha\tilde{d}}{c} & 0 \end{pmatrix};$$

$\lambda^2 + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\beta}$,

т.к. $Re\,\lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow$ метод линеаризации не работает, т.е. по лин. приближ. нельзя исследовать тип особой точки и её устойчивость.