ISTAG
Genie Logiciel
Niveau 2

TD Analyse numerique
fiche 1: etude de la convergence des integrales

10.1 Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.
2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$
4. $\int_{-\infty}^0 te^{-t^2} dt$
5. $\int_0^{+\infty} 1dt$
6. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$
7. $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$
8. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

10.2 Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

1. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{t-5}{t^2+4t+4} dt$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$
4. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(t)}{t+4} dt$
6. $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t} dt$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} dt$
9. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$
10. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.
11. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt$.
12. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}} dt$

10.3 Déterminer la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt$ selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

10.4

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ sont convergentes et opposées (on pourra effectuer le changement de variable $u = \frac{1}{t}$).
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

10.5 On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$.

1. Montrer que l'intégrale converge.
2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer I.

10.6 Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quel est le sens de variations de f ?
3. On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.
   Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
   En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

10.7

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$ converge. On note ℓ sa valeur.
2. Soit x un réel strictement positif. Montrer que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = -\ln(x) + \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt$$

   (après avoir justifié l'existence des intégrales).
   En déduire $\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt + \ln(x)\right)$.