ISTAG-Technologie Yaoundé
Département de Mathématiques

Année académique : 2020/2021

Intitulé du cours : **Analyse Mathématiques**

Travaux Dirigés N ° 3 : **Transformations de Laplace et de Fourier**

BTS : Niveau II

Spécialités : BAT, TPU, GLO

Exercice 1.

On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+$. Pour chacune de ces fonctions, déterminer la transformée de Laplace et de préciser le domaine d'existence.

$$f_1(t) = 2e^{-6t}, \qquad f_2(t) = 5e^{2t}, \qquad f_3(t) = 2t^4, \qquad f_4(t) = (t^2+1)^2, \qquad f_5(t) = \alpha cos3t + \beta sin3t,$$

$$f_6(t) = e^{-2t}cos3t, \qquad f_7(t) = 2e^{-5t}(cos2t + sin2t), \qquad f_8(t) = e^{-4t}sh8t, \qquad f_9(t) = e^{-t}sin^2\frac{t}{2}, \qquad f_{10}(t) = e^{-2t}(t^2-1)^2$$

Exercice 2.

On considère les fonctions 2-périodiques sur $\mathbb{R}_+$, f_1, f_2 définies de la façon suivante :

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si t<0} \\ 1 & \text{si 0 <t< 1} \\ -1 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases} \qquad\qquad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si t<0} \\ t & \text{si 0 <t< 1} \\ -t+2 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

Déterminer leur transformée de Laplace.

Exercice 3.

Déterminer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{5}{p^2+9}, \qquad F_2(p) = \frac{5p}{p^2+9}, \qquad F_3(p) = \frac{1}{p^2+16}, \qquad F_4(p) = \frac{5p-8}{p^2+64}$$

Exercice 4.

Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\begin{cases} \text{Chercher } y:\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ qui vérifie} \\ y'(t) + 2y(t) = ch(2t), \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad (E_2)\begin{cases} \text{Chercher } y:\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ qui vérifie} \\ 2y''(t) + 8y'(t) + 8y(t) = 3e^{-t}, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -5. \end{cases}$$

$$(E_3)\begin{cases} \text{Chercher } y:\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ qui vérifie} \\ y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \qquad (E_4)\begin{cases} \text{Chercher } y:\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ qui vérifie} \\ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 1, \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(E_5)\begin{cases} \text{Chercher } y:\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ qui vérifie} \\ y''(t) + 2y'(t) + y'(t) = t+3, \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 3. \end{cases} \qquad (E_6)\begin{cases} \text{Chercher } y:\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ qui vérifie} \\ ty''(t) + 2y'(t) + ty = 0, \\ y(0) = 1 \text{ et } y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Exercice 5.

Trouver les solutions des systèmes d'équations différentielles suivants :

$$(E_1)\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \\ \text{avec } x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (E_2)\begin{cases} x'(t) - y'(t) + x(t) - y(t) = 2 + 3e^{2t} \\ x'(t) + 2y'(t) - 3x(t) = -3 + 2e^{2t} \\ \text{avec } x(0) = 4,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 6.

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\text{x}| \leq \text{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la Transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$
2. Montrer à partir du résultat précédent que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(at)cos(xt)}{t} dt = \begin{cases} \pi & \text{si } |\text{x}| < \text{a} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |\text{x}| = \text{a} \\ 0 & \text{si } |\text{x}| > \text{a} \end{cases}$$

3. En déduire que : $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Exercice 7.

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |\text{x}| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\text{x}| > 1 \end{cases}$$

1. Calculer la Transformée de Fourier de f.
2. En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{xcos(x) - sin(x)}{x^3} cos(\frac{x}{2}) dx$$

Exercice 8.

1. Trouver la Transformée de Fourier en cosinus de $f(x) = e^{-mx}, \;\; m > 0$.
2. Utiliser le résultat de (1) pour montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos(pv)}{\beta^2 + v^2} dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-p\beta}, \;\; p > 0, \; \beta > 0$$

3. Résoudre l'équation intégrale suivante pour $y = f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(u)du}{(x-u)^2 + a^2} = \frac{1}{x^2 + b^2}, \;\; 0 < a < b$$

Exercice 9.

Résoudre l'équation intégrale suivante en utilisant la Sinus-transformée inverse de Fourier :

$$\int_0^{+\infty} f(x) sin(ax) dx = \begin{cases} 1 - a & \text{si } 0 \leq a \leq 1 \\ 0 & \text{si a} > 1 \end{cases}$$

Exercice 10.

Soit le problème à résoudre :

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ |u(x,t)| \leq M \\ u(x,0) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

1. En prenant la transformée de Fourier des membres de l'équation aux dérivées partielles (E), montrer que :

$$\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial x}) = i\alpha \mathcal{F}(u), \;\; \mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = -\alpha^2 \mathcal{F}(u) \;\text{ et }\; \mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(u)}{\partial t^2}$$

2. En appliquant ces transformées et à l'aide des conditions aux limites, résoudre (E).