



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
**Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií**



Elektrické obvody: teorie a příklady

Učební text

Ing. Martin Černík, Ph.D.

Liberec

2014 - 2020



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TENTO MATERIÁL VZNIKL ZA PODPORY EVROPSKÉHO SOCIÁLNÍHO FONDU A STÁTNÍHO
ROZPOČTU ČESKÉ REPUBLIKY.

Text a ilustrace: Ing. Martin Černík, Ph.D.
Revize textu: doc. Ing. Milan Kolář, CSc.
Recenze: Ing. Jan Václavík

©Martin Černík, Liberec 2014
Technická univerzita v Liberci

1. vydání

ISBN 978-80-7494-161-0

Obsah

Obsah	3
1 Veličiny a prvky elektrických obvodů	5
1.1 Přehled základních veličin a parametrů	5
1.1.1 Elektrický náboj	6
1.1.2 Elektrický proud	6
1.1.3 Elektrické napětí	7
1.1.4 Časový průběh napětí a proudu	8
1.1.5 Periodický průběh napětí	8
1.1.6 Výkon elektrického proudu	13
1.2 Prvky elektrického obvodu	15
1.2.1 Definice elektrického obvodu	15
1.2.2 Grafické znázornění elektrického obvodu	15
1.2.3 Označení orientace veličin v elektrickém obvodu	16
1.2.4 Tok elektrické energie v elektrickém obvodu	16
1.2.5 Rozdělení prvků elektrických obvodů	16
1.2.6 Ideální zdroj napětí	19
1.2.7 Ideální zdroj proudu	20
1.2.8 Řízené (závislé) zdroje napětí a proudu	21
1.2.9 Rezistor	22
1.2.10 Kapacitor	26
1.2.11 Induktor	29
1.2.12 Vázané induktory	31
1.2.13 Metoda postupného zjednodušování	36
1.3 Řešené příklady	40
1.4 Neřešené příklady	43
2 Kirchhoffovy zákony a základní obvody	52
2.1 Základní funkce elektrického obvodu	52
2.1.1 Uzavřený jednoduchý elektrický obvod	52
2.1.2 Otevřený jednoduchý elektrický obvod	52
2.1.3 Základní topologické pojmy v elektrických obvodech	53
2.1.4 Celková bilance energie v obvodu	53
2.2 Kirchhoffovy zákony	54
2.2.1 První Kirchhoffův zákon	54
2.2.2 Druhý Kirchhoffův zákon	54
2.3 Děliče napětí a proudu	55

2.3.1	Dělič napětí	55
2.3.2	Dělič proudu	57
2.4	Řešené příklady	58
2.5	Neřešené příklady	64
3	Náhrada a zjednodušování v elektrických obvodech	70
3.1	Lineární aktivní prvky	70
3.1.1	Lineární zdroj napětí	70
3.1.2	Lineární zdroj proudu	71
3.1.3	Ekvivalence lineárního zdroje proudu a napětí	72
3.2	Obvodové teorémy	74
3.2.1	Theveninův teorém	74
3.2.2	Nortonův teorém	74
3.2.3	Určení pracovního bodu pomocí zatěžovací přímky	74
3.3	Obvodové náhrady	81
3.3.1	Transfigurace	81
3.3.2	Základní náhrady vázaných induktorů	84
3.4	Metoda superpozice	86
3.5	Neřešené příklady	87
4	Řešení obvodů se stejnosměrným napájením	91
4.1	Základní pojmy popisu obvodů	91
4.2	Základní metody řešení obvodů	93
4.2.1	Přehled základních metod řešení obvodů	93
4.2.2	Metoda přímého užití Kirchhoffových zákonů	94
4.2.3	Metoda smyčkových proudů	95
4.2.4	Metoda uzlových napětí	96
4.2.5	Přímé sestavení matice rovnice z obvodu	97
4.2.6	Řešené příklady z obvodových rovnic	101
4.3	Neřešené příklady	108
5	Přechodný jev prvního řádu v obvodu	112
5.1	Popis přechodného jevu I. řádu	112
5.1.1	Sestavení obvodové rovnice s akumulativními prvky	113
5.2	Řešení diferenciální rovnice pro přechodné jevy prvního řádu	115
5.3	Řešené příklady	116
5.4	Neřešené příklady	131
6	Veličiny v harmonickém ustáleném stavu	132
6.1	Harmonický průběh napětí - popis	132
6.1.1	Časový popis harmonického průběhu	132
6.1.2	Fázor napětí a proudu	133
6.2	Impedance a admittance	136
6.2.1	Definice imitancí	136
6.3	Náhrady části obvodů při harmonickém napájení	137
6.3.1	Řazení imitancí v harmonicky napájených obvodech	137

6.4	Výkon v harmonickém ustáleném stavu	138
6.4.1	Činný, zdánlivý a jakový výkon	138
6.4.2	Účiník	139
6.4.3	Komplexní výkon	139
6.5	Neřešené příklady	141
6.6	Určení imittance prvků osciloskopem	146
7	Harmonické napájení v RLC obvodech	149
7.1	Základní prvky při harmonickém napájení	149
7.1.1	Úvod	149
7.1.2	Rezistor	150
7.1.3	Kapacitor	151
7.1.4	Induktor	152
7.1.5	Vázaný induktor	153
7.2	Imittance a komplexní výkon základních dvojpólů RL, RC a RLC	154
7.2.1	Sériový dvojpól RL	154
7.2.2	Paralelní dvojpól RL	155
7.2.3	Paralelní dvojpól RC	156
7.2.4	Sériový dvojpól RC	157
7.2.5	Sériový dvojpól RLC	158
7.2.6	Paralelní dvojpól RLC	159
7.2.7	Paralelní dvojpól RLC s RL v sérii	160
7.3	Rezonance	161
7.3.1	Sériový rezonanční dvojpól	161
7.3.2	Paralelní rezonanční dvojpóly	163
7.4	Lineární harmonický zdroj a jeho přizpůsobení	165
7.5	Jakost a ztrátový činitel	166
7.6	Kompenzace účiníku	168
7.7	Řešené příklady	169
7.7.1	Řešené příklady - impedance	169
7.7.2	Náhradní obvody	173
7.8	Neřešené příklady	176
7.8.1	Harmonický proud a napětí na L a C	176
7.8.2	Impedance a admittance na dvojpólech RLC	176
7.8.3	Výkon, jakost a ztrátový činitel na dvojpólech RLC	186
8	Třífázová soustava	188
8.1	Úvod	188
8.2	Třífázová soustava a její vlastnosti	188
8.2.1	Průběhy napětí v symetrické trojfázové soustavě	188
8.2.2	Fázory napětí v symetrické trojfázové soustavě	192
8.2.3	Zátěž v symetrické trojfázové soustavě	194
8.3	Základní trojfázové soustavy	195
8.3.1	Soustava Y-Y	195
8.3.2	Soustava D-D	197
8.4	Výkon v trojfázové soustavě	199

8.4.1	Soustava Y-Y	199
8.4.2	Soustava D-D	200
8.5	Řešené příklady	201
8.6	Neřešené příklady	206
9	Vybraná rozšiřující téma elektrických obvodů	215
9.1	Obvodové rovnice s akumulativními prvky	215
9.1.1	Obvodové rovnice v harmonickém ustáleném stavu - řešené příklady .	215
9.1.2	Obvodové rovnice v harmonickém ustáleném stavu - neřešené příklady	220
9.2	Magnetické obvody a transformátory	223
9.2.1	Magnetické obvody - náhradní obvod	223
9.2.2	Energie magnetických obvodů	225
9.2.3	Silové působení v magnetických obvodech	226
9.2.4	Magnetické obvody - příklady	227
10	Přehled matematiky pro elektrické obvody	232
10.1	Úvod	232
10.2	Poznámky k praktickému počítání s čísly	232
10.2.1	Přesnost čísel při výpočtech	234
10.2.2	Násobné předpony	235
10.3	Komplexní čísla	236
10.3.1	Přehled základů číselných množin	236
10.3.2	Definice a zápis komplexního čísla	237
10.3.3	Komplexní čísla v Matlabu nebo Octave	243
10.4	Výrazy	244
10.4.1	Úpravy výrazů s reálnými čísly	244
10.4.2	Počítání s exponenty	245
10.5	Soustavy lineárních rovnic	246
10.5.1	Vektory	246
10.5.2	Matice	246
10.5.3	Výpočet soustavy lineárních rovnic	248
10.5.4	Operace s maticemi v Matlabu a Octave	250
10.6	Funkce jedné proměnné	251
10.6.1	Rovnice přímky	252
10.6.2	Algebraické rovnice a lomené racionální funkce	253
10.6.3	Přirozená exponenciální funkce	255
10.6.4	Goniometrické funkce	255
10.6.5	Lineární diferenciální rovnice pro přechodné jevy v obvodech	261
10.7	Řešené a neřešené příklady z matematiky	263
10.7.1	Převody jednotek	263
10.7.2	Násobné jednotky	264
10.7.3	Komplexní čísla	264
Literatura		267

Úvod

Tato skripta jsou určena všem studentům bakalářského studia oboru Elektronické, informační a řídicí systémy, kteří si potřebují proviřit základní vztahy v teorii elektrických lineárních obvodů. Obsahuje více než třista příkladů, kde je u jedné třetiny uveden kompletní postup řešení.

Při výběru příkladů byl zvolen takový přístup, aby sbírka obsahovala nejen jednoduché úlohy procvičující základní jevy v elektrických obvodech, ale také úlohy pokročilejší. Tento nízkoprahový přístup umožní nejen snadné pochopení základů látky, ale přes složitější příklady nakonec vede k pochopení širších základů elektrických obvodů na patřičné úrovni.

Rozsah pokrývá především procvičovaná téma na seminářích předmětu elektrické obvody na fakultě MIMs na Technické univerzitě v Liberci. Vedle úvodních témat, která se zabývají veličinami a parametry lineárních elektrických obvodů a základními obvodovými teorémů, se procvičují obvodové rovnice pro stacionární i harmonický ustálený stav, symbolicko komplexní metoda pro lineární dvojpóly i pro trojfázovou soustavu, základy řešení přechodného jevu prvního řádu a magnetické obvody. Na konci sbírky je přiložena kapitola, která shrnuje vybraná téma matematického aparátu, který je nezbytný pro úspěšné vyřešení příkladů uvedených ve skriptech.

Jednotlivé kapitoly jsou doplněny teoretickým úvodem, kde jsou předloženy související matematické a fyzikální vztahy vztahující se k tématu. Část těchto vztahů, pokud to má význam pro pochopení souvislostí, je také odvozena.

Sbírka příkladů vznikala více let, tématicky a obsahově vycházela ze zkušenosti s výukou elektrických obvodů na TUL. Velká část příkladů byla přitom zadána studentům jako procvičující příklady během cvičení nebo pro domácí přípravu jak u prezenční formy, tak u kombinované formy studia. Diskuse se studenty nad řešeními pomohla doplnit řešení ve skriptech tak, aby byla v maximální míře zbavena nejasnosti, kterým se nelze vyhnout ve stručněji kocipovaných sbírkách příkladů elektrotechniky a elektrických obvodů.

Na ověřování postupu řešení se podílela také řada aktivnějších studentů, jsou zde proto uvedeny i některé jejich postupy, přestože obsahují prvky těžkopádnosti. U úloh, kde je to vhodné, se uvádí více postupů řešení, aby se ukázalo, jak jeden postup může být ověřen jiným postupem, a potvrdit tak správnost řešení.

Na závěr musím poděkovat především těm studentům, kteří aktivním přístupem umožnili postupně vylepšovat sbírku příkladů, během práce na cvičení s příklady ukázali na případné nejasnosti. Dále panu doc. Milanu Kolářovi za pečlivé pročtení textu a důležité připomínky, stejně tak panu Ing. Leoši Kukačkovi za pečlivé pročtení textu a vyhledání překlepů a nejasností, své rodině za podporu.

Poděkování: Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050 **Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů**

Kapitola 1

Veličiny a prvky elektrických obvodů

1.1 Přehled základních veličin a parametrů

V teorii o elektrických obvodech se používají tyto **fyzikální veličiny**:

- **Elektrický náboj** (označení Q , jednotka 1 C, [coulomb])
- **Elektrický proud** (označení I , jednotka 1 A, [ampér])
- **Elektrické napětí** (označení U , jednotka 1 V, [volt])
- **Výkon (příkon)** elektrického proudu (označení P , jednotka 1 W, [watt])
- **Magnetický tok** (označení Φ , jednotka 1 Wb, [weber])

Pokud je nezbytné odlišit veličiny jako závislé proměnné nejčastěji na čase (okamžitá hodnota veličiny) nebo jako neznámou veličinu při výpočtu obvodových rovnic, označuje se malým písmenem: náboj q , proud i , napětí u , výkon (příkon) p nebo magnetický tok ϕ .

Elektrický obvod a jeho součásti jsou potom charakterizovány parametry:

- **Elektrický odpór** (označení R , jednotka 1 Ω , [ohm])
- **Indukčnost** (označení L , jednotka 1 H, [henry])
- **Kapacita** (označení C , jednotka 1 F, [farad])

1.1.1 Elektrický náboj

Elektrické náboje na navzájem sebe silově působí. Elektrický náboj má kladnou nebo zápornou polaritu, která vychází z elektrických vlastností elementárních částic, které jsou základními skladebnými částmi hmoty a které v daném náboji převažují. Elektrony vykazují záporný náboj. V atomu se nacházejí umístěny v elektronovém obalu, nejsou na atom pevně vázány, proto se mohou při konkrétních fyzikálních podmínkách v látce pohybovat. Protony naopak vykazují kladný elektrický náboj, v pevné látce jsou pevně vázány do jader krystalové mříže. Souhlasné náboje se odpuzují, nesouhlasné se přitahují.

Vzájemné silové působení elektrických nábojů popisuje **Coulombův zákon**.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

kde: ε je permitivita prostředí $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

ε_0 je permitivita vakua: $\varepsilon_0 = 8,854187818 \cdot 10^{-19}$ F/m

ε_r je relativní permitivita prostředí, pro vakuum platí $\varepsilon_r = 1$

Q_1 a Q_2 [C] jsou velikosti elektrických nábojů, které na sebe silově působí

r [m] je vzdálenost těchto nábojů

F [N] je mechanická síla.

Elementární náboj jednoho elektronu je $q = -1,6021 \cdot 10^{-19}$ C. Proton má elektrický náboj přesně opačný.

Příklad 1.1: Jak velký náboj představuje $2 \cdot 10^6$ elektronů?

Řešení: Každý elektron má elementární náboj $-1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Proto je celkový náboj je dán součinem: $Q = -1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^6 = \underline{\underline{3,2 \cdot 10^{-13} \text{ C}}}$.

1.1.2 Elektrický proud

Elektrický proud je tok kladného elektrického náboje vodičem, má tedy opačný směr, než je tok elektronů. Značí se I (stacionární veličina) a i (nestacionární veličina) a jednotka je 1 A. Velikost náboje, který proteče za určitý čas T je:

$$Q = \int_0^T i(t) dt \quad (1.2)$$

Pro konstantní proud tedy platí:

$$Q = I \cdot t \quad (1.3)$$

Pokud se tokem proudu mění velikost elektrického náboje, platí vztah:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.4)$$

Pokud se hodnota elektrického náboje počítá z úhrnu proudu proteklého za určitý čas, používá se jednotka 1 As (ampérsekunda), případně 1 Ah (ampérhodina) nebo 1 mAh (milampérhodina). S těmito jednotkami se můžeme setkat např. u akumulátorů.

Příklad 1.2: Vodičem teče stejnosměrný proud o velikosti 5 A. Určete přibližný počet elektronů, který proteče vybraným místem vodiče za jednu minutu.

Řešení: Náboj 1 C = $1,6021 \cdot 10^{19}$ elektronů, celkový náboj $Q = I \cdot T = 5 \cdot 60 = 300$ C.

Každým místem vodiče tedy proteče $n_e = 300 \cdot 1,6021 \cdot 10^{19} = 1,87 \cdot 10^{21}$ elektronů.

1.1.3 Elektrické napětí

Elektrické napětí se definuje mezi každými dvěma uzly v obvodu. Velikost napětí odpovídá práci, která se vykoná přenesením náboje velikosti 1 C mezi těmito uzly. Tato definice vychází z definice vykonané práce o pohybu hmotného bodu v silovém poli.

$$A_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{l} \quad (1.5)$$

Při pohybu jednotkového náboje v elektrickém poli¹ je tedy vykonaná práce rovna elektrickému napětí mezi uzly A a B

$$U_{AB} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{Q} d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} \quad (1.6)$$

Pokud je mezi dvěma body konstantní napětí $U = 1$ V, a přejde-li mezi těmito body elektrický náboj $Q = 1$ C (po dobu 1 s teče proud 1 A), vykoná se práce $A = 1$ J.

Příklad 1.3: V elektrickém obvodu z uzlu **A** do uzlu **B** tekl po dobu jedné minuty konstantní stejnosměrný proud o velikosti 1 A. Rozdíl elektrického napětí mezi uzly **A** a **B** je 10 V. Určete výši vykonané práce.

Řešení: Celková práce elektrického náboje se vypočítá podle vzorce:

$$A_{AB} = Q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = Q \cdot U_{AB} \quad (1.7)$$

kde napětí mezi body A a B se dá vyjádřit vztahem

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

a náboj pro konstantní proud:

$$Q = \int_0^T I dt = I \cdot T$$

Celková práce A_{AB} se proto počítá podle vzorce:

$$A_{AB} = I \cdot T \cdot U_{AB} = 1 \cdot 60 \cdot 10 = \underline{600 \text{ J}}$$

¹Elektrické pole je oblast v prostoru, kde na elektrický náboj působí síla. Je tedy v silovém poli, jeho směr a velikost je popsán vektorem \vec{E}

1.1.4 Časový průběh napětí a proudu

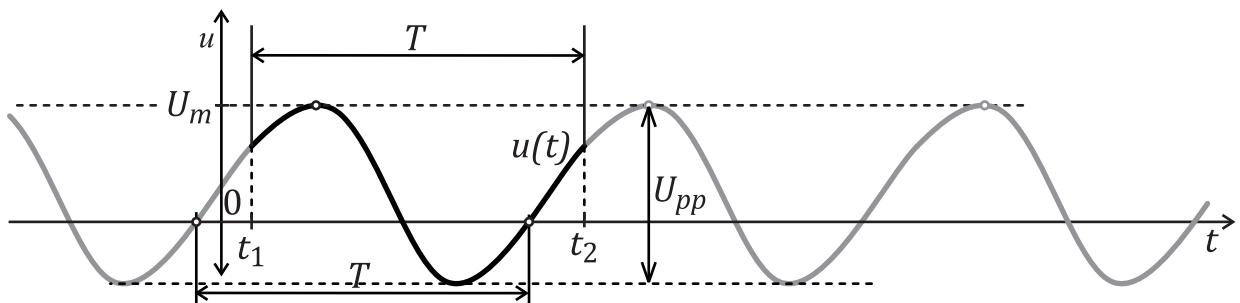
Pokud se velikost a orientace napětí a proudu v čase nemění, jde o **stacionární průběh napětí** nebo **stacionární průběh proudu**. Velikost napětí se označuje velkým písmenem U a velikost proudu velkým písmenem I . Pokud se veličiny časově mění, jde o **nestacionární průběh napětí** nebo **nestacionární průběh proudu**. Veličiny se pak opisují časovou funkcí, průběh napětí značí malým písmenem u nebo průběh proudu malým písmenem i .

Časově proměnné průběhy napětí a proudu mohou být průběhy **periodické** (opakující se tvar průběhu stejné délky, **periody** T), jednorázové průběhy při změnách mezi dvěma stacionárními nebo periodickými průběhy - (**přechodné jevy**) a **stochastický průběh** s nepředpokládatelnou okamžitou hodnotou napětí nebo proudu.

1.1.5 Periodický průběh napětí

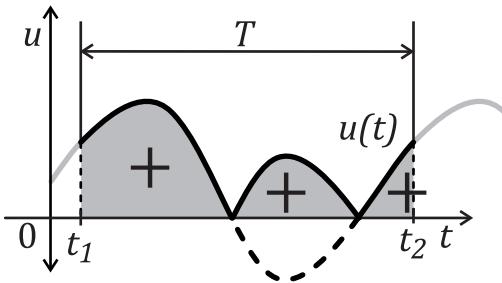
Periodický průběh napětí je takový průběh napětí, kdy se dochází k pravidelnému opakování části časového průběhu napětí. Doba opakující se stejné části se nazývá **periodou**, označuje se značkou T s jednotkou 1 s. Z praktických důvodů se dále zavádí převrácená hodnota periody pro pojmem frekvence s označením $f = 1/T$ a jednotkou 1 Hz. Často se také převádí periodický průběh na kruhový pohyb s počtem otáček rovným frekvenci, kde nezávislou veličinou je okamžitý úhel. Z této představy vychází pojmenování **úhlová frekvence** ω se vztahem k frekvenci $\omega = 2\pi f$ a jednotkou 1 rad/s. Počátek jednotlivé periody může být vyznačen kdekoli na průběhu (čas t_1 a konec periody potom $t_2 = t_1 + T$), obvykle se používají vzestupné nebo sestupné průchody nulou. (Obrázek 1.1)

K periodickému průběhu veličiny se zavádějí náhradní veličiny. Jde o **maximální hodnotu** napětí, **střední hodnotu** napětí, **efektivní hodnotu** napětí a **stejnosměrnou složku** napětí. Tyto hodnoty se určují z celé periody, v průběhu všech period průběhu jsou neproměnné, proto se používá pro označení velké písmeno. Periodický průběh veličiny se proto nazývá jako **kvazistacionární**.



Obrázek 1.1: Periodický průběh napětí s vyznačenou periodou a maximální hodnotou

Maximální hodnota (Peak value) U_m je nejvyšší absolutní hodnota napětí nebo proudu během periody. Používá se například při určování maximálního zatížení prvků v obvodu, kde při překročení maximálního napětí může dojít k elektrickému průrazu kondenzátoru nebo při překročení proudu k přesycení magnetického obvodu induktoru, kterým proud protéká. U sinusového (harmonického) průběhu se maximální hodnota nazývá také **amplituda**.

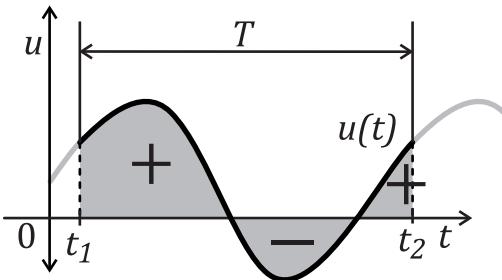


Obrázek 1.2: Periodický průběh napětí s vyznačenou plochou, z které se určuje střední hodnota

Střední hodnota proudu I_{av} (střední absolutní hodnota, average absolute value nebo rectifier value), je u proudu rovna celkovému přenesenému náboji na stanoveném místě. Určuje se výpočtem pomocí vzorce vzorce 1.8. Střední hodnota průběhu může být také odvozena z plochy vyznačené na grafu č. 1.2. Perioda průběhu na grafech se určí jako $T = t_2 - t_1$.

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt \quad (1.8)$$

Stejnosměrná složka periodického proudu I_0 odpovídá matematické střední hodnotě (mean value) a určuje celkový náboj, který v daném místě vodiče během celé periody protekł jedním směrem. Výpočet stejnosměrné složky je možné provést podle vzorce 1.9. Stejnosměrná složka proudu tak odpovídá ploše při respektování znamének (plocha pod osou se odečítá), vyznačené na grafu č. 1.3 dělenému rozdílem časů t_2 a t_1 , nebo délku periody T .



Obrázek 1.3: Časový průběh s vyznačenou plochou pod křivkou, která po vydělení časovou délkou dává stejnosměrnou složku proudu

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (1.9)$$

Efektivní hodnota periodického proudu I je rovna takové hodnotě stejnosměrného proudu I_d , který vytváří v lineárním rezistoru o odporu R stejný střední výkon P_{av} . Jelikož je střední výkon proudu i na lineárním odporu R :

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (1.10)$$

Musí tedy platit:

$$I \cdot U = I^2 \cdot R = P_{av} = I_d \cdot U_d = R \cdot I_d^2 \quad (1.11)$$

$$I^2 \cdot R = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (1.12)$$

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (1.13)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (1.14)$$

Poměrné činitele

Činitel výkyvu je poměr maximální a efektivní hodnoty napětí:

$$k_v = \frac{U_m}{U} \quad (1.15)$$

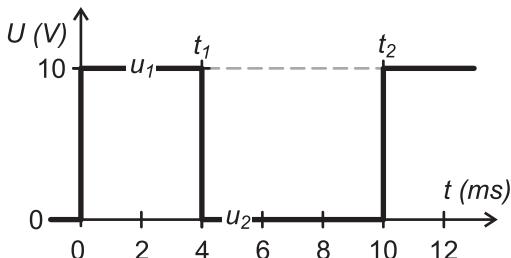
Činitel tvaru udává poměr mezi efektivní a střední hodnotou, a má význam při výpočtech na usměrňovačích střídavého napětí.

$$k_t = \frac{U}{U_{av}} \quad (1.16)$$

Činitel plnění je poměr mezi střední a maximální hodnotou

$$k_p = \frac{U_{av}}{U_m} \quad (1.17)$$

Příklad 1.4: Zdroj napětí má obdélníkový pulsní periodický průběh zaznamenaný na obrázku. Určete maximální, střední hodnotu, stejnosměrnou složku, efektivní hodnotu.



Řešení: Maximální hodnota je největší vzdálenost mezi časovou osou a maximální výchylkou, proto $U_m = 10 \text{ V}$

Efektivní hodnota používá vzorec č. 1.14. Do něho se dosadí uvedený průběh. Vzhledem



k nespojitostem se průběh rozdělí na souvislé části, které se integrují každá zvlášť.

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{t_1} u_1^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} u_2^2(t) dt \right)} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{0,004} 10^2 dt + \int_{0,004}^{0,01} 0^2 dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{0,01} [100t]_0^{0,004}} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{0,01} \cdot (0,4 - 0)} = \sqrt{\frac{0,4}{0,01}} = \sqrt{40} \doteq \underline{6,325 \text{ V}}
 \end{aligned}$$

Střední hodnota podle vzorce č. 1.8. Vzhledem k tomu, že napětí během periody nezmění polaritu, není třeba absolutní hodnotu uvažovat.

$$\begin{aligned}
 U_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{t_1} |u_1| dt + \int_{t_1}^{t_2} |u_2| dt \right) = \\
 &= \frac{1}{0,01} \left(\int_0^{0,004} 10 dt + \int_{0,004}^{0,01} 0 dt \right) = \frac{1}{0,01} ([10t]_0^{0,004} + [0t]_0^{0,004}) = \underline{4 \text{ V}}
 \end{aligned}$$

Stejnosměrná složka se dostane stejným způsobem. V tomto případě jde o stejnou hodnotu, jako je střední hodnota, protože průběh během periody nedosáhl záporných hodnot, proto:

$$\underline{U_0 = 4 \text{ V}}$$

Příklad 1.5: Harmonický proud má časový průběh $i(t) = I_m \sin \omega t = 100 \sin (2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$ mA. Určete jeho střední a efektivní hodnotu, činitel tvaru a činitel výkyvu.

Řešení: Stejnosměrná složka harmonického proudu je rovna nule, protože je harmonický proud proudem *střídavým*. U střídavého proudu je plocha horní a spodní půlvlny stejná.

Střední hodnota se počítá podle 1.8. Vzhledem k symetrii průběhu stačí počítat střední hodnotu pro první půlperiodu

$$I_{av} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2}{\pi} I_m$$

$$\text{Proto } I_{av} = \frac{2}{\pi} 100 = 63,66 \text{ mA}$$

Efektivní hodnota se určí pomocí 1.14.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_m \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \right]^2 dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{T} t \right) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2 \cdot T}} \sqrt{T - 0} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Proto } I = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ mA}$$

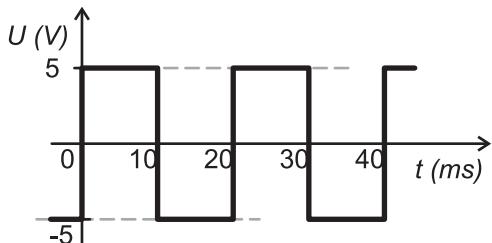
Činitel tvaru k_t je definován jako poměr mezi efektivní a střední hodnotou. U harmonického průběhu platí:

$$k_t = \frac{I}{I_{av}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2 \cdot I_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = \underline{1,1107} \quad (1.18)$$

Činitel výkyvu k_v je definován jako poměr mezi maximální a efektivní hodnotou. U harmonického průběhu tedy platí:

$$k_t = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad (1.19)$$

Příklad 1.6: U průběhu 1.1.5 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.



Řešení:

Perioda se určí jako vzdálenost dvou vzestupných hran. Odečtení na grafu časového průběhu: $T = 20$ ms.

$$\text{Frekvence: } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \text{ ms}} = 50 \text{ Hz.}$$

Maximální hodnota je vzdálenost největší hodnoty od časové (vodorovné) osy $U_m = 5$ V.

Střední hodnota:

$$\begin{aligned} U_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{1}{0,02} \left(\int_0^{0,01} |5| dt + \int_{0,01}^{0,02} |-5| dt \right) = \\ &= \frac{1}{0,02} (5 [t]_0^{0,01} + 5 [t]_{0,01}^{0,02}) = \frac{1}{0,02} (0,05 + 0,05) = \frac{0,1}{0,02} = 5 \text{ V.} \end{aligned}$$

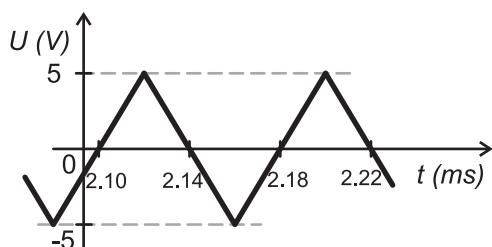
Efektivní hodnota:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{0,02} \left(\int_0^{0,01} (5)^2 dt + \int_{0,01}^{0,02} (-5)^2 dt \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{0,02} (25 [t]_0^{0,01} + 25 [t]_{0,01}^{0,02})} = \sqrt{\frac{1}{0,02} (0,25 + 0,25)} = \sqrt{\frac{0,5}{0,02}} = \sqrt{25} = 5 \text{ V.} \end{aligned}$$

Stejnosměrná složka:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{0,02} \left(\int_0^{0,01} 5 dt + \int_{0,01}^{0,02} -5 dt \right) = \frac{1}{0,02} (0,05 - 0,05) = 0 \text{ V.}$$

Příklad 1.7: U průběhu 1.1.5 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.



Řešení:



Perioda: $T = 2,18 \cdot 10^{-3} - 2,10 \cdot 10^{-3} = 80 \mu\text{s}$; frekvence: $f = 12\,500 \text{ Hz}$; maximální hodnota: $U_m = 5 \text{ V}$;

Střední hodnota: Posunutí průběhu tak, aby procházel počátkem, použití absolutní hodnoty. Vzhledem k symetrii stačí integrovat jen jednu vzestupnou část od 0 do maxima pro $t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Směrnice přímky: $k = \frac{5}{0,00002} = 2,5 \cdot 10^5$.

$$U_{av} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} \int_0^{2 \cdot 10^{-5}} 2,5 \cdot 10^5 t dt = \frac{2,5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-5}} \frac{[t^2]_0^{2 \cdot 10^{-5}}}{2} = 2,5 \text{ V}$$

Efektivní hodnota: podobně jako předchozí, integrace v intervalu $t = -2 \cdot 10^{-5} \dots 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$:

$$U = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} \int_{-2 \cdot 10^{-5}}^{2 \cdot 10^{-5}} (2,5 \cdot 10^5 t)^2 dt} = \sqrt{\frac{(2,5 \cdot 10^5)^2}{2 \cdot 10^{-5}} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2 \cdot 10^{-5}}^{2 \cdot 10^{-5}}} = 2,887 \text{ V}$$

Při prostém usměrnění střídavého harmonického napětí při použití ideálního usměrňovače vzniká periodický průběh s výraznou stejnosměrnou složkou a periodou T_{rect} , která rovná periodě T vstupního střídavého napětí dělené pulzností p usměrňovače. Běžně se používají usměrňovače jednopulzní (pulznost $p = 1$) a dvoupulzní (pulznost $p = 2$), poměrně běžné jsou usměrňovače napájené ze symetrické třízové soustavy, které mají pulznost $p = 3$ nebo $p = 6$.

1.1.6 Výkon elektrického proudu

Výkon elektrického proudu se označuje symbolem P (pro stacionární veličinu) a p (pro okamžitý výkon) a jeho jednotka je 1 W (Watt). Výkon p vykoná za určitý čas T práci (uvolní se energie W):

$$A = W = \int_0^T p dt \quad (1.20)$$

Pro konstantní výkon potom platí (s použitím rovnice (1.7)):

$$W = P \cdot T = Q \cdot U = U \cdot I \cdot T \quad (1.21)$$

Pro výkon při konstantních veličinách U a I se pak může psát:

$$P = U \cdot I \quad (1.22)$$

Okamžitý výkon p se zavádí při nestacionárním průběhu napětí a proudu. :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{dA}{dt} \quad (1.23)$$

Pokud je elektrický výkon dodáván do obvodového prvku z obvodu, nazývá se **příkonem**.

Pro elektrický obvod, stejně jako pro každý jiný technický systém platí zákon o zachování energie.

Důsledkem je, že okamžitá výkonová bilance uzavřeného elektrického obvodu je rovna nule. Součet okamžitých výkonů zdrojů napětí a proudu a výkonů uvolňovaných z akumulativních prvků je roven okamžitému příkonu všech prvků, které v tom okamžiku elektrický výkon přijímají.

Příklad 1.8: Kapacita akumulátorové baterie se udává v ampérhodinách Ah nebo v miliampérhodinách. Vypočítejte, jakému elektrickému náboji v coulomebech odpovídá kapacita:

- 55 Ah (běžný olověný akumulátor)
- 2500 mAh (NiMH akumulátor velikosti AA)

Řešení: Vzhledem k tomu, že 1 hodina = 3600 sekund, platí:

- $Q = 55 \cdot 3600 = \underline{198 \text{ kC}}$
- $Q = 2500 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = \underline{9 \text{ kC}}$

Příklad 1.9: Maximální výkon dopadajícího slunečního záření se udává $P_{sol/S} = 1 \text{ kW/m}^2$. Účinnost dostupných fotovoltaických panelů je přibližně 12 %. Kolik metrů čtverečních fotovoltaických panelů dává špičkový výkon $P_N = 2400 \text{ W}$?

Řešení: Výkon, který dodá jeden metr čtvereční fotovoltaických panelů při běžném slunečním svitu, je $P_{vyst/S} = \eta \cdot P_{sol/S} = 0,12 \cdot 1000 = \underline{120 \text{ W/m}^2}$

Celková plocha S solárních panelů tak bude: $S = \frac{P_N}{P_{vyst/S}} = 2400/120 = \underline{20 \text{ m}^2}$

Příklad 1.10: Napětí baterie připojené k žárovce je 3 V. Žárovkou protéká proud 200 mA. Jaká je velikost výkonu dodávaného baterií do žárovky? Udejte velikost energie spotřebované žárovkou během jedné minuty.

Řešení: $P = U \cdot I = 3 \cdot 0,2 = \underline{0,6 \text{ W}}$, $W = P \cdot t = 0,6 \cdot 60 = \underline{36 \text{ J}}$

Příklad 1.11: Napětí akumulátorové baterie je 3,6 V. Na článek se připojí žárovka, kterou protéká proud 200 mA. Jmenovitá kapacita akumulátorového článku je 1150 mAh.

- Jaký je elektrický příkon žárovky?
- Kolik se spotřebuje energie při svícení po dobu 1 minuty?
- Jak dlouho může žárovka svítit, pokud je baterie nabité na jmenovitou kapacitu při předpokladu konstantního napětí při celé délce svícení?

Řešení: a) $P = 3,6 \cdot 0,2 = 0,72 \text{ W}$; b) $A = 0,72 \cdot 60 = 43,2 \text{ J}$; c) $t = 1,150 \cdot 3600 / 0,2 = 20\ 700 \text{ s} = \underline{5\frac{3}{4} \text{ h}}$

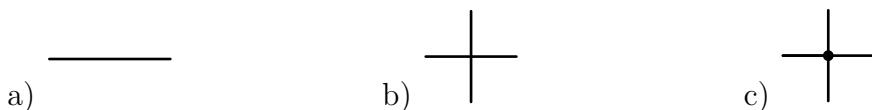
1.2 Prvky elektrického obvodu

1.2.1 Definice elektrického obvodu

Elektrický obvod je soustava prvků, spojených vodiči, která je určena přenos a přeměnu toku výkonu ve formě elektrické energie. Vodiče slouží pro tok elektrického proudu, jednotlivé prvky se do obvodu připojují minimálně dvěma póly. Prvek vykonává práci, pokud připojenými vodiči teče do prveku elektrický proud a zároveň je mezi póly prveku elektrické napětí. Obor teorie obvodů vychází z teoretického modelu reálného elektrického obvodu, kdy obvodové prvky, které se používají mají ideální vlastnosti charakterizované jedním parametrem a vodiče nevykazují průchodem elektrického proudu žádné výkonové ztráty. Takový model elektrického obvodu je pak možné jednoduše matematicky popsat a výpočtem určit neznámé hodnoty veličin. Příslušný reálný obvod, z něhož uvedený teoretický model vychází, má mít skutečné hodnoty veličin (časové průběhy napětí a proudu) pokud možno minimálně odlišné od teoretických.

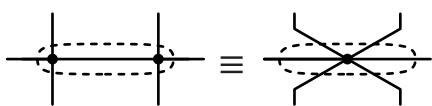
1.2.2 Grafické znázornění elektrického obvodu

Elektrický obvod se graficky popisuje pomocí schématického grafu, každému prvku obvodu se přiřazuje jedna schématická značka. Toto znázornění obvodu se také nazývá **obvodové schéma**. Vodivé propojení prvků se vyznačuje pomocí spojitych čar. Místo, kde se setkává dva a více prvků, se nazývá **uzel**. Pokud se pojí tři a více čar do jednoho uzlu, vyznačuje se spojení malým vyplněným kroužkem. Pokud se čáry kříží bez zakresleného kroužku, není v místě vodivé propojení.

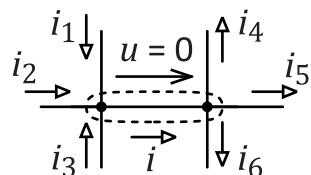


Obrázek 1.4: a)grafické vyjádření samostatného vodiče, b) křížení vodičů bez vodivého spojení, c) křížení vodičů s vodivým spojením, uzel 4 vodičů.

Často se graficky spojují dva uzly spojením bez prveku. Při obvodové analýze se toto spojení považuje za jeden uzel (obrázek 1.5), přesto má smysl určovat proud, který zakresleným spojením teče (obrázek 1.6). Proto se mohou tyto uzly kreslit odděleně, mezi uzly je vždy napětí $u = 0$.



Obrázek 1.5: Spojení dvou uzlů

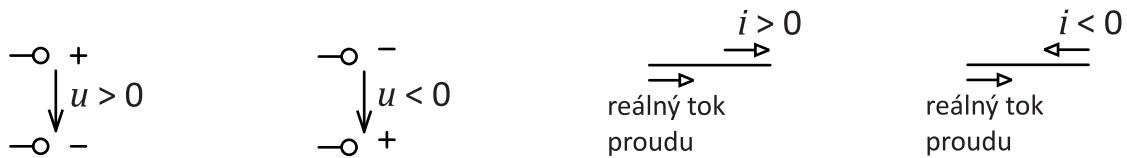


Obrázek 1.6: Spojení dvou uzlů

1.2.3 Označení orientace veličin v elektrickém obvodu

Mezi každými dvěma uzly obvodu se definuje elektrické napětí. Napětí se označuje šipkou, která směřuje od místa s vyšším potenciálem do místa s nižším potenciálem. Tok elektrického proudu se označuje šipkou s trojúhelníkem, která označuje tok kladného elektrického náboje. Elektrony proudí ve skutečnosti opačným směrem.

Při matematické analýze obvodu, kdy se určují velikosti napětí a proudu v požadovaných částech obvodu, je často nezbytné vyznačit orientaci šipek při zahájení výpočtu. Přitom orientace znázorněných šipek často nesouhlasí s orientací vypočítaného proudu a napětí. Tehdy mají výsledné hodnoty napětí a proudu v označených místech znaménko mínus.



1.2.4 Tok elektrické energie v elektrickém obvodu

Pro elektrický obvod, stejně jako pro každý jiný technický systém platí zákon o zachování energie.

Důsledkem je, že okamžitá výkonová bilance uzavřeného elektrického obvodu je rovna nule. Součet okamžitých výkonů zdrojů napětí a proudu a výkonů uvolňovaných z akumulativních prvků je roven okamžitému příkonu všech prvků, které v tom okamžiku elektrický výkon přijímají.

1.2.5 Rozdelení prvků elektrických obvodů

Základní prvky elektrického obvodu se připojují do obvodu dvěma svorkami (**póly**), proto se také nazývají **dvojpóly**. Prvky elektrických obvodů se dělí na aktivní a pasivní.

Aktivní prvky jsou schopny poskytovat elektrickou energii. Jde od **zdroj napětí** a **zdroj proudu**.

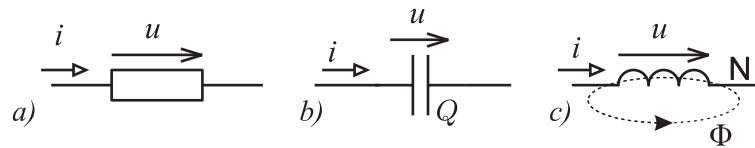
Pasivní prvky uchovávají elektrickou energii v jiné formě nebo spotřebovávají. Pasivní prvky se dále dělají na prvky

disipativní - rezistor, který nevratně mění elektrickou energii na jinou formu, nejčastěji teplo.

akumulativní - Mezi akumulativní patří dva prvky:

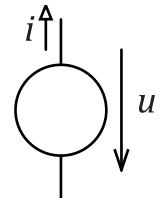
induktor mění elektrickou energii na energii magnetického toku ve svém okolí (případně v magnetickém obvodu) a je ji schopen vrátit zpátky do obvodu.

kapacitor mění elektrickou energii na energii elektrického pole v dielektriku mezi elektrodami a je ji schopen dále vrátit do obvodu.



Obrázek 1.7: Základní pasivní prvky elektrických obvodů: a) rezistor; b) kapacitor s vyznačeným elektrickým nábojem Q ; c) induktor s N závity a vyznačeným magnetickým tokem Φ

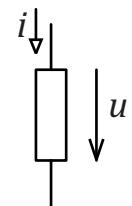
Aktivní prvky obvykle předávají energii do obvodu, proto mají šipku proudu v opačné orientaci než je orientace šipky napětí. Značka zdroje energie má obecně kruhovitý tvar.



Základní prvky, pokud jde od dvojpóly, se do obvodu připojují dvěma svorkami nebo póly. Pro každý prvek v elektrickém obvodu platí, že mezi přípojnými póly je napětí a prvkem teče proud, který jednou svorkou do prveku vtéká a druhou vytéká. Orientace napětí a proudu se označuje šipkou, přičemž:

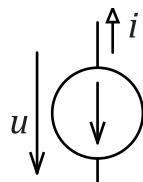
Vztah mezi napětím a proudem na svorkách prveku je možné znázornit pomocí statické voltampérové charakteristiky. Jde o běžné kartézské zobrazení závislosti, k vodorovné ose se přiřazuje napětí a ke svislé proud.

Pasivní prvky nebo spotřebiče energii z obvodu přijímají, mají tedy šipku proudu ve stejné orientaci, jako je šipka napětí. Spotřebič se obecně kreslí v obdélníkovém tvaru.

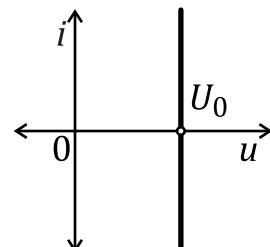


1.2.6 Ideální zdroj napětí

Ideální zdroj napětí má kruhovou značku s šipkou běžného tvaru uvnitř, případně se místo šipky kreslí symboly polarity + a -. Voltampérová charakteristika je svislá přímka, která prochází napěťovou osou v bodě hodnoty napětí U_0 . Přímka je ve dvou kvadrantech grafu charakteristiky, v prvním kvadrantu (pokud je zachována zdrojová orientace šipek napětí a proudu - nesouhlasný směr) se chová jako zdroj, ve čtvrtém kvadrantu jako spotřebič. Pokud má zdroj napětí napětí rovné nule, chová se jako vodič s nulovým odporem — *zkrat*. To se dá chápat tak, že na zdroji není žádné napětí, ale proud může protékat libovolným oběma směry.

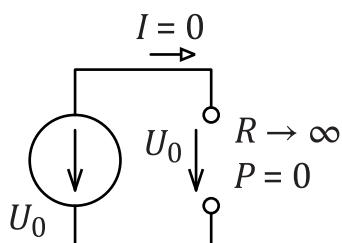


Obrázek 1.8: Schématická značka zdroje napětí

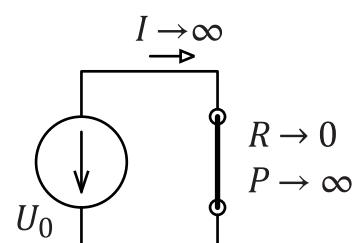


Obrázek 1.9: Voltampérová charakteristika zdroje napětí

Zdroj napětí při mezních zátěžích: Pokud není na zdroj napětí připojena žádná zátěž (je zapojen naprázdno), na vnějších svorkách je napětí zdroje, ze zdroje neteče žádný proud, zdroj neposkytuje žádný elektrický výkon. Pokud je zdroj napětí zapojen do zkratu (nakrátko), blíží se výstupní proud i poskytovaný výkon nekonečnu, proto je tento stav v teorii obvodů zakázaný, nepoužívá se.



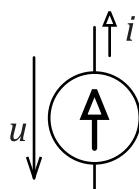
Obrázek 1.10: Zdroj napětí naprázdno



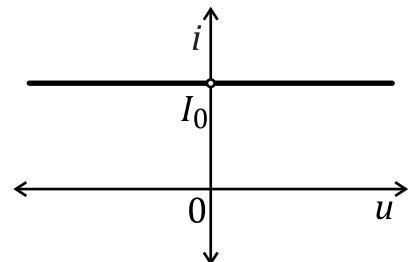
Obrázek 1.11: Zdroj napětí nakrátko

1.2.7 Ideální zdroj proudu

Ideální zdroj proudu má kruhovou značku s šipkou s trojúhelníkovým hrotom. Voltampérová charakteristika je tvořena vodorovnou přímkou, která prochází proudovou osou v bodě hodnoty proudu I_0 . Přímka je v prvním a druhém kvadrantu charakteristiky, v prvním kvadrantu, pokud je zachována šipková konvence - nesouhlasné šipky u zdrojů, se chová jako zdroj, ve druhém kvadrantu jako spotřebič. Pokud je proud zdroje roven nule, chová se jako dvě svorky, mezi kterými je odporník blížící se k nekonečnu. To se dá chápat také tak, že pokud zdroj má proud rovný nule, může být na něj z vnějšku přivedeno jakékoli napětí, přesto proud neteče.

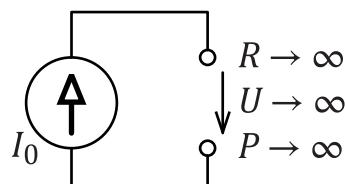


Obrázek 1.12: Schématická značka zdroje proudu

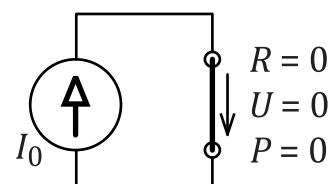


Obrázek 1.13: Voltampérová charakteristika zdroje proudu

Zdroj proudu při mezních zátěžích: Pokud není na zdroj proudu připojena žádná zátěž (je zapojen naprázdno), na vnějších svorkách se napětí blíží k nekonečnu, aby mohl ze zdroje proudu téct požadovaný proud. Poskytovaný výkon se blíží k nekonečnu. Proto je tento stav v teorii obvodů zakázaný, nepoužívá se. Pokud je zdroj proudu zapojen do zkratu (nakrátko), je napětí na svorkách rovno nule, zdroj neposkytuje žádný výkon.



Obrázek 1.14: Zdroj proudu naprázdno



Obrázek 1.15: Zdroj proudu nakrátko

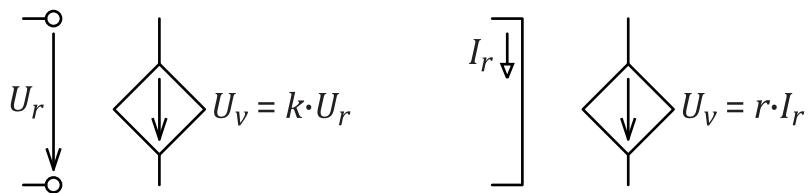


1.2.8 Řízené (závislé) zdroje napětí a proudu

Řízené zdroje napětí jsou aktivní prvky, jejichž velikost hlavního parametru (napětí nebo proudu) je určena jinou veličinou v elektrickém obvodu. Řízené zdroje se dělí na zdroje napětí řízené napětím nebo proudem a zdroje proudu řízené napětím nebo proudem. Vlastní voltampérová charakteristika řízených zdrojů je stejná, je charakteristika něřízeného zdroje stejného typu. Řídicí veličina může být libovolné napětí mezi uzly ve stejném nebo jiném obvodu nebo proud v libovolné větvi ve stejném nebo jiném obvodu.

Řízený ideální zdroj napětí

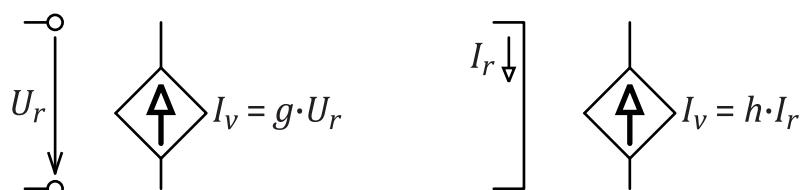
Řízené zdroje napětí mají výstupní napětí U_v , odvozené od řídicího napětí U_r nebo řídicího proudu I_r v jiné části obvodu. Při lineární vazbě je výstupní napětí rovno násobku řídicí veličiny, násobek je **parametr vazby**. Podle vztahu s mezi výstupní a řídicí veličiny se parametry vazby nazývají **transresistance** r a **napěťové zesílení** k .



Obrázek 1.16: Závislé zdroje napětí řízené napětím nebo proudem

Řízený ideální zdroj proudu

Řízené zdroje proudu mají výstupní proud I_v , odvozený od řídicího napětí U_r nebo řídicího proudu I_r v jiné části obvodu. Podle vztahu mezi výstupními a řídicími veličinami se parametry vazby nazývají **transkonduktance** g a **proudové zesílení** h .



Obrázek 1.17: Závislé zdroje proudu řízené napětím nebo proudem



1.2.9 Rezistor

Rezistor je dvojpól, jeho základním parametrem je **elektrický odpor**, který se značí R , jednotka je 1Ω (ohm). Odvozený základní parametr rezistoru je **elektrická vodivost**, která je převrácenou hodnotou elektrického odporu, značí se $G = R^{-1}$ a jednotkou je 1 S (Siemens). Vztah napětí a proudu na rezistoru odporu R nebo vodivosti G popisuje **Ohmův zákon**. Pro neproměnný průběh proudu a napětí s použitím odporu R platí:

$$U = R \cdot I \quad (1.24)$$

a s použitím vodivosti G

$$I = G \cdot U \quad (1.25)$$

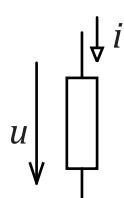
Pokud je rezistor definován jenom vodivostí, bývá označován názvem **konduktor**. Ohmův zákon pro stacionární průběh se také nazývá **Statická definice elektrického odporu**. V případně proměnného průběhu proudu je průběh napětí na lineárním rezistoru přímo úměrný a je popsán Ohmovým zákonem, pro odpor R ,

$$u = R \cdot i \quad (1.26)$$

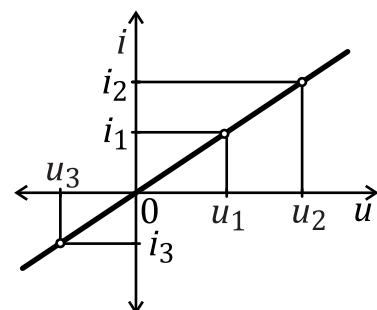
a závislost proudu na napětí je opět konstanta úměrnosti elektrická vodivost G .

$$i = G \cdot u \quad (1.27)$$

U lineárního rezistoru je poměr napětí stále úměrný poměru proudu (viz graf voltampérové charakteristiky lineárního rezistoru 1.19).



Obrázek 1.18: Rezistor, schématická značka, zavedené směry napětí a proudu



Obrázek 1.19: Voltampérová charakteristika lineárního rezistoru, platí $u_1/i_1 = u_2/i_2 = u_3/i_3$

Elektrický příkon rezistoru vychází z definice okamžitého elektrického příkonu ((1.23) a z Ohmova zákona (1.24)):

$$p = u \cdot i = \frac{u^2}{R} = R \cdot i^2 = \frac{i^2}{G} \quad (1.28)$$

Celková energie uvolněná na rezistoru za stanovený čas T je odvozená z rovnic (1.20) a (1.28) pro stacionární proud I a napětí U :

$$W = U \cdot I \cdot T = \frac{U^2}{R} \cdot T = R \cdot I^2 \cdot T \quad (1.29)$$

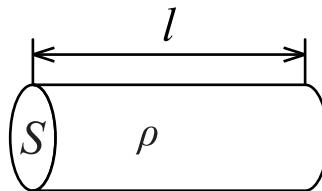
a pro časově proměnný proud i (nebo časově proměnné napětí u) na rezistoru o odporu R

$$W = \int_0^T p dt = \int_0^T \frac{u^2}{R} dt = \int_0^T R \cdot i^2 dt \quad (1.30)$$

V reálných elektrických obvodech je elektrický proud veden kovovými vodiči, které vykazují nenulový odpor a velikost tohoto odporu je navíc závislá na teplotě. Tento odpor je hlavní parazitní vlastností reálných vodičů, kterou je nutné při konstrukci elektrických zařízení zohlednit. Na celkový odpor vodiče má pochopitelně vliv geometrické uspořádání a **měrný elektrický odpor** ρ uváděný při teplotě 20 °C. Vliv teploty na měrný odpor zase udává **teplotní odporový součinitel** α .

Kovový vodič o délce l [m], konstantním pružezu S [m^2] a měrném odporu ρ [Ωm] má elektrický odpor (nákres na obrázku 1.20):

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (1.31)$$



Obrázek 1.20: Odpor válcového vodiče

Velikost odporu při teplotě T_2 [°C]:

$$R_{T2} = R_{20^\circ\text{C}} \cdot [1 + \alpha (T_2 - 20^\circ\text{C})] \quad (1.32)$$

Měrný odpor a závislost odporu na teplotě se udává v tabulkách. Příklady těchto parametrů pro běžné kovy používané v elektrotechnice naleznete v tabulce ??

V reálném prostředí se dále používají pojmy **úbytek napětí** a **svodový proud**.

Mezi krajními svorkami prvku nebo vodiče s nenulovým odporem R , kterým protéká elektrický proud i je **úbytek napětí** $u = R \cdot i$ (podle Ohmova zákona (1.24)).

Pokud je mezi elektrodami 1 a 2 s napětím u reálný izolant s celkovou nenulovou vodivostí $G = 1/R$, protéká mezi elektrodami **svodový proud** $i = G \cdot u$ (podle (1.25)).

Řazení rezistorů : Soustavu n sériově řazených rezistorů lze nahradit jedním rezistorem s výsledným odporem R podle vzorce:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (1.33)$$

Soustavu n paralelně řazených rezistorů (vedle sebe) lze nahradit jedním rezistorem s vodivostí G , která je výsledkem součtu jednotlivých vodivostí rezistorů.

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^n G_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R} \quad (1.34)$$

kov nebo slitina	měrný odpor při 20 °C $\rho [\Omega\text{m}]$	teplotní součinitel odporu $\alpha [\text{K}^{-1}]$
stříbro	$15,8 \cdot 10^{-9}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$
měď	$17,2 \cdot 10^{-9}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$
zlato	$24,4 \cdot 10^{-9}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$
hliník	$28,2 \cdot 10^{-9}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
platina	$110 \cdot 10^{-9}$	$3,92 \cdot 10^{-3}$
železo	$100 \cdot 10^{-9}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$
bronz	$90 - 160 \cdot 10^{-9}$	—
wolfram	$56,0 \cdot 10^{-9}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
molybden	$55,0 \cdot 10^{-9}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
konstantan	$500 \cdot 10^{-9}$	$30 \cdot 10^{-6}$
kanthal	$1350 \cdot 10^{-9}$	$20,0 \cdot 10^{-4}$
manganin	$430 \cdot 10^{-9}$	$10,0 \cdot 10^{-6}$

Tabulka 1.1: Elektrické parametry běžných kovů citeROUS

Příklad 1.12: Rezistorem s odporem $R = 22 \text{ k}\Omega$ protéká časově neproměnný proud o velikosti $I = 440 \mu\text{A}$.

Vypočítejte: a) napětí na rezistoru, b) příkon rezistoru a c) vodivost rezistoru

Řešení:

a) Výpočet je proveden aplikací Ohmova zákona (1.24):

$$U = R \cdot I = 22 \cdot 10^3 \cdot 440 \cdot 10^{-6} = \underline{9,68 \text{ V}}$$

b) Aplikace vzorce (1.28):

$$P = R \cdot I^2 = 22 \cdot 10^3 \cdot (440 \cdot 10^{-6})^2 = 4,26 \cdot 10^{-3} \text{ W} = \underline{4,26 \text{ mW}}$$

c) Vodivost jako převrácená hodnota odporu: $G = R^{-1} = \frac{1}{22 \cdot 10^3} = 4,55 \cdot 10^{-5} = \underline{45,5 \mu\text{S}}$

Příklad 1.13:

Na rezistoru je napětí $U_1 = 12 \text{ V}$ a protéká jím proud o velikosti $I_1 = 300 \text{ mA}$.

a) Vypočtěte odpor rezistoru.

b) Jaký je úbytek napětí na rezistoru, pokud rezistorem teče proud $I_2 = 1 \text{ A}$?

c) Pro oba případy určete příkon rezistoru.

Řešení:

a) Odpor rezistoru: $R = U/I = 12/0,3 = 40 \Omega$.

b) Úbytek napětí při vyšším proudu: $U_2 = I_2 \cdot R = 1 \cdot 40 = 40 \text{ V}$

c) Příkon při nižším proudu: $P_1 = U_1 \cdot I_1 = 12 \cdot 0,3 = 3,6 \text{ W}$,

Příkon při vyšším proudu: $P_2 = U_2 \cdot I_2 = 40 \cdot 1 = 40 \text{ W}$

Příklad 1.14: Spotřebič, který odebírá proud $I = 10 \text{ A}$ je připojen prodlužovacím kabelem o délce $l = 50 \text{ m}$ s měděným vodičem o průřezu $S = 1 \text{ mm}^2$. Měrný odpor a teplotní součinitel odporu je uveden v tabulce 1.1.

a) Určete úbytek napětí U_1 na prodlužovacím kabelu.

b) Určete elektrický výkon způsobený protékačím proudem v prodlužovacím kabelu.

c) Vlivem elektrického výkonu zatíženého kabelu, který zůstal téměř celý navinut na zásobníku, se jeho jádro ohřálo o $\Delta\vartheta = 60^\circ\text{C}$. Vypočtěte odpor kabelu zvýšený vlivem tepelné závislosti mědi, dále úbytek napětí na kabelu U_2 a ztrátový výkon vzniklý protékačím proudem v kabelu P_2 .

Řešení: a) Odpor kabelu: Při napájení spotřebiče je nutno uvažovat jednak vodič ke spotřebiči a dále vodič zpět. Celková délka vodiče je potom $l = 100 \text{ m}$

Odpor $R_1 = \rho \cdot l / S = 17,2 \cdot 10^{-9} \cdot 100 / 1 \cdot 10^{-6} = 1,72 \Omega$ Úbytek napětí je $U_1 = R_1 \cdot I = 17,2 \text{ V}$

b) Ztrátový výkon na kabelu: $P_1 = U_1 \cdot I = 17,2 \cdot 10 = 172 \text{ W}$

c) Zvýšený odpor: $R_2 = 2,12 \Omega$, zvýšený úbytek napětí $U_2 = 21,2 \text{ V}$, zvýšená tepelná ztráta $P_2 = 212 \text{ W}$



1.2.10 Kapacitor

Kapacitor je prvek, který akumuluje energii ve formě elektrického náboje. Hlavní parametr je *kapacita* C , jednotka 1 F (Farad) a udává poměr mezi akumulovaným nábojem Q a napětím mezi svorkami kapacitoru U . Příslušná charakteristika se nazývá **voltcoulombová**, obr.: 1.22. Pro akumulovaný náboj platí statická definice kapacity.:

$$Q = C \cdot U \quad (1.35)$$

Rovnici je možné derivovat. Přitom časová změna náboje dq/dt odpovídá proudu I , proto je vztah napětí a proudu na lineárním kapacitoru (dynamická definice kapacity):

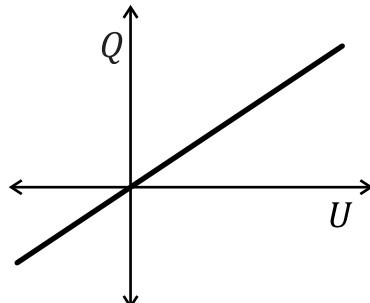
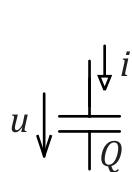
$$\frac{dq}{dt} = i = C \frac{du}{dt} \quad (1.36)$$

Integrací uvedeného vzorce:

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u_C(0) \quad (1.37)$$

Akumulovaná energie na nabitém kondenzátoru s kapacitou C na napětí U je:

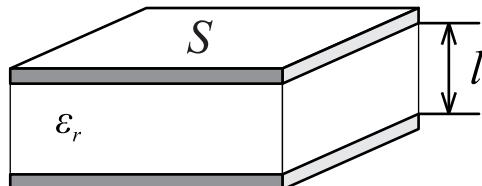
$$W_C = \frac{1}{2} C U^2 \quad (1.38)$$



Obrázek 1.21: Kapacitor, schématická značka, zavedené směry napětí a proudu

Obrázek 1.22: Voltcoulombová charakteristika lineárního kapacitoru

Deskový kondenzátor: Realizace kapacitoru je kondenzátor, nejjednodušším kondenzátorem je kondenzátor deskový. Tvoří ho dvě vodivé planparalelní desky (*elektrody*) oddělené elektricky nevodivým materiálem (*dielektrikem*). Aby kondenzátor nezabíral velký objem, snižuje se tloušťka dielektrika i vodivých desek na minimum a používá se dielektrikum s vysokou permitivitou. Pokud je jako dielektrikum ohebné (polystyren, dielektrický papír, polypropylen), svíne se spolu s kovovými elektrodami do válcového tvaru. U neohebného (keramika) se složí několik jednotlivých deskových kondenzátorů na sebe.



Obrázek 1.23: Kapacita deskového kondenzátoru

název izolantu	relativní permitivita ϵ_r [-]	kritická intenzita pole E_{krit} [MV/m]
vakuum	1	—
vzduch	1,000059	1 – 2,5
polypropylen PP	2,4	80
polystyren PS	2,6	25–50
PVC	3,4	20
Polyamid	4,6	15
teflon	2,1	50
dielektrický papír	2,5	16
sklo	3,8–5	20
křemenné sklo	3,8	20
oxid hlinitý (korund)	9	80
slída	6,9	250
křemík	11,7	20
karbid křemíku	10,0	200
diamant	5,0	400

Tabulka 1.2: Elektrické parametry běžných izolantů

Kapacita deskového kondenzátoru závisí na ploše elektrod S , na tloušťce dielektrika l a na permitivitě materiálu ϵ_r . Hodnoty ϵ_r běžných materiálů jsou uvedeny v tabulce 1.2 na konci textu.

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{l} \quad (1.39)$$

Kapacitory řazené do série nebo paralelně mají ve srovnání s rezistorem odlišné vztahy. Při sériovém řazení N kapacitorů) je výsledná hodnota kapacity dána vzorcem:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (1.40)$$

Při paralelním řazení n kapacitorů je výsledná hodnota kapacity dána vzorcem:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i \quad (1.41)$$

Příklad 1.15: Do kondenzátoru o kapacitě 20 mF tekly po dobu 10 s konstantní proud 10 mA.

- a) O kolik se zvýšilo napětí na kondenzátoru?
- b) Kolik je výsledná hodnota energie na kondenzátoru, pokud před připojením proudu bylo na kondenzátoru napětí 10 V?

Řešení: a) $\Delta U_C = 5$ V, b) $w_C = \frac{1}{2} \cdot 0,02 \cdot 15^2 = 2,25$ J

Příklad 1.16: Kapacitorem o kapacitě 470 nF teče střídavý harmonický proud o časovém průběhu $i(t) = 0,05 \cdot \sin(24200t)$ A Určete časový průběh napětí na kapacitoru. Stejnosměrná složka napětí $U_0 = 0$ V.

Řešení: $u = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + U_0 = \frac{0,05}{470 \cdot 10^{-9}} \frac{1}{24200} [-\cos 24200\tau]_0^t = = -7,913 \cos 24200t = 7,913 \sin(24200t - \frac{\pi}{2})$ V



1.2.11 Induktor

Induktor je prvek, který akumuluje energii ve formě magnetického toku. Hlavní parametr je **indukčnost** L , jednotka 1 H (Henry). Magnetický tok Φ na induktoru s jedním závitem s indučností L , kterým teče elektrický proud I je popsán rovnicí (statická definice indučnosti pro induktor s jedním závitem).

$$\Phi = L \cdot I \quad (1.42)$$

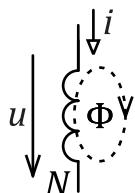
Pro induktor s N závity (statická definice indučnosti pro induktor s N závity):

$$N \cdot \Phi = L \cdot I \quad (1.43)$$

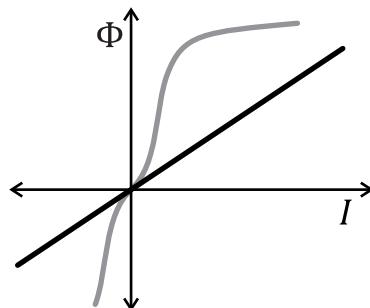
Napětí a proud se na lineárním induktoru popisuje vzorcem (dynamická definice indučnosti):

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (1.44)$$

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + i_L(0) \quad (1.45)$$



Obrázek 1.24: Induktor, schematická značka, zavedené směry napětí a proudu, vyznačený magnetický tok Φ a počet závitů N



Obrázek 1.25: Ampérweberová charakteristika lineárního induktoru (černá závislost) a nelineárního induktoru (šedá závislost, typické pro feromagnetická jádra)

Z praktických důvodů se dále zavádí veličina nazvaná **inverzní indučnost**. Označuje se $\Gamma = 1/L$, jednotka je H^{-1} . Inverzní indučnost se používá při některých početních postupech při analýze a syntéze elektrických obvodů.

Reálný prvek, který se v obvodu chová jako induktor, může být **cívka** (magnetický tok je v prázdném prostoru v okolí cívky, proto se také někdy nazývá vzduchová cívka) nebo **tlumivka** (magnetický tok se nachází převážně v magnetickém obvodu, na který je navinuto vinutí, které je spojeno s obvodem).

Magnetický tok je u vzduchové cívky rozprostřen nerovnoměrně po okolí, odpovídající matematický vztah je proto velmi komplikovaný. Naproti tomu tlumivka má magnetický tok soustředěn především v magnetickém obvodu. Magnetický obvod je vyroben z feromagnetického materiálu, který sám o sobě je nelineární (není lineární odezva magnetického toku na proud ve vinutí), vestavěná vzduchová mezera celý systém vinutí-magnetický obvod linearizuje. Metody výpočtů vlastností magnetických obvodů jsou v kapitole Vybranná rozšiřující téma 9.

Akumulovaná energie na induktoru s indukčností L a proudem I je:

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 \quad (1.46)$$

Při sériovém řazení n induktorů, které nemají žádnou vzájemnou vazbu, je výsledná hodnota indukčnosti dána vzorcem:

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \sum_{i=1}^n L_i \quad (1.47)$$

Při paralelním řazení n induktorů bez vzájemné vazby je jejich celková indukčnost:

$$\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_n = \Gamma \quad (1.48)$$

Příklad 1.17: Na svorky lineární tlumivky o indukčnosti 1 H se připojí v čase $t_0 = 0$ s zdroj napětí o velikosti 2 V. a) Jak velký proud teče tlumivkou v čase $t_1 = 1$ s? b) Určete energii magnetického toku.

Řešení: a) $I(t = 1 \text{ s}) = 2 \text{ A}$, b) $w_C = 2 \text{ J}$

Příklad 1.18: Induktorem o indukčnosti 100 mH teče střídavý harmonický proud o časovém průběhu $i(t) = 0,53 \cdot \sin(242t) \text{ A}$. Určete časový průběh napětí na induktoru.

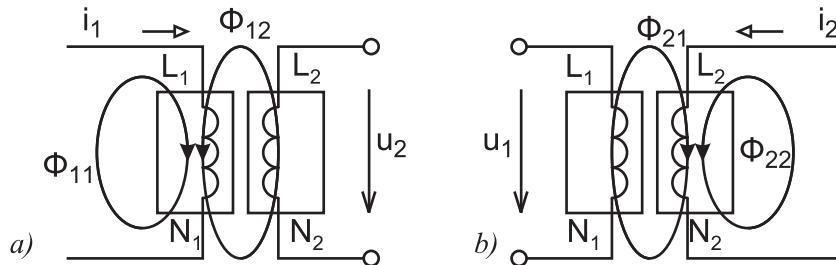
Řešení:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 0,1 \cdot d(0,53 \sin(242t)) / dt = 12,826 \cos(242t) = 12,826 \sin\left(242t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Příklad 1.19: Na induktor o indukčnosti 32 mH je přiloženo střídavé napětí časovém průběhu $u(t) = 10,0 \cdot \sin(10\,000t) \text{ V}$. Určete časový průběh proudu induktorem. Stejnosměrná složka proudu $I_0 = 0 \text{ A}$.

Řešení: $i = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + I_0 = \frac{10}{0,032} \frac{1}{10\,000} [-\cos 10\,000\tau]_0^t = -31,25 \cos 10\,000t \text{ mA} = -31,25 \sin(10\,000t - \frac{\pi}{2}) \text{ mA}$

1.2.12 Vázané induktory



Obrázek 1.26: Vázané induktory

Pokud prochází magnetický tok jednoho induktoru sousedním induktorem, jde o vázané induktory. Vlastní tok induktoru:

$$\Phi_1 = \frac{L_1 i_1}{N_1} = \Phi_{11} + \Phi_{12} \quad (1.49)$$

kde Φ_{12} je magnetický tok procházející druhým induktorem a Φ_{11} je tok, který druhý induktor míjí. (viz obr.:1.26 a) V případě proměnného proudu i_1 dále dochází na druhém induktoru k indukci napětí u_2 :

$$u_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad (1.50)$$

Při proměnném proudu se zárověň indukuje napětí na prvním induktoru. (viz obr.:1.26 b). Pro napětí u_1 potom platí:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (1.51)$$

Protože je nutné zavést vztah mezi proudem jednoho a napětím k němu vázanému induktoru, zavádí se **vzájemná indukčnost** M , [H].

$$u_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{21} \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (1.52)$$

Pokud teče proud i_2 i druhým induktorem, dochází ke vzniku magnetického toku i na druhém induktoru, který může procházet i prvním induktorem:

$$\Phi_2 = \frac{L_2 i_2}{N_2} = \Phi_{22} + \Phi_{21} \quad (1.53)$$

Tok procházející prvním induktorem Φ_{21} a tok Φ_{22} , který první induktor míjí. V případě proměnného proudu i_2 dochází na prvním induktoru k indukci napětí:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_{21}}{dt} \quad (1.54)$$

Při proměnném proudu se zárověň indukuje napětí na prvním induktoru. Pro napětí na vlastním induktoru platí:

$$u_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (1.55)$$

a pro napětí na vázaném induktoru (L_1) platí:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M_{12} \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (1.56)$$

Protože společný magnetický tok $\Phi_{12} = \Phi_{21}$, musí platit pro vzájemné indukčnosti M_{12} a M_{21}

$$M_{21} = M_{12} = M \quad (1.57)$$

Napětí na obou vázaných induktorech je tak dán:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1.58)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (1.59)$$

Pro řadu výpočtů je vhodné soustavu upravit tak, aby byl závislou veličinou proud. Po úpravě tak vznikne soustava rovnic:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} u_1 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} u_2 \quad (1.60)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} u_2 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} u_1 \quad (1.61)$$

V soustavě dvou vázaných induktorů jsou proto zavedeny inverzní indukčnosti:

$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \quad (1.62)$$

$$\Gamma_2 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \quad (1.63)$$

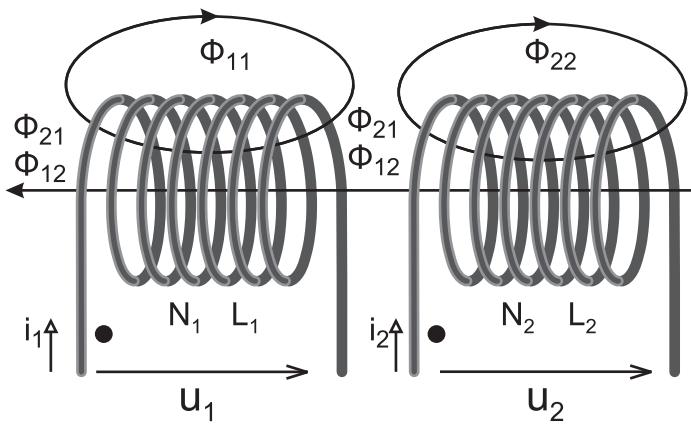
a dále **inverzní vázaná indukčnost** Γ_M :

$$\Gamma_M = -\frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \quad (1.64)$$

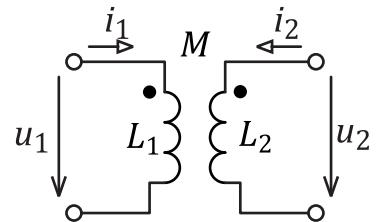
S použitím inverzní indukčnosti je pak možné zapsat integrální tvar dynamické definice indukčnosti L s vazbou na další indukčnost M (integrací některé rovnice v soustavě (1.60)). Je nutné přitom zavést inverzní indukčnost Γ_1 a inverzní vzájemnou indukčnost Γ_M

$$i = \Gamma_1 \int_0^t u_1 d\tau + \Gamma_M \int_0^t u_2 d\tau + i_0 \quad (1.65)$$

Tečková konvence (viz. obr. 1.27) je vyznačení vzájemné polohy počátku vinutí dvou vázaných induktorů vzhledem k magnetickému toku. Tečky označují místo, kudy vstupuje proud do vzájemně vázaných induktorů tak, aby došlo k zesílení jejich magnetického toku. Význam pro vzájemnou indukčnost je popsán níže.



Obrázek 1.27: Nákres zavedení tečkové konvence



Obrázek 1.28: Tečková konvence na schématické značce

Sériové řazení vázaných induktorů Při sériovém spojení dvou vázaných induktorů dochází k součtu jejich vlastních indukčností a dále vzájemných indukčností. Přitom může dojít k souhlasné vazbě a výsledná indukčnost je větší, než součet jejich vlastních indukčností, nebo nesouhlasné vazbě, potom je výsledná indukčnost menší, než jejich vzájemný součet. Pro součet napětí platí:

$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} (L_1 + 2M + L_2) \quad (1.66)$$

Celková indukčnost L_S při souhlasné vazbě je:

$$L_S = L_1 + L_2 + 2M \quad (1.67)$$

Pro nesouhlasnou vazbu je součet napětí na sériově vázaných induktorech:

$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} (L_1 - 2M + L_2) \quad (1.68)$$

Celková indukčnost L_O při nesouhlasné vazbě je

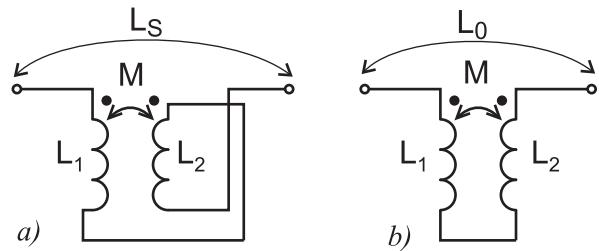
$$L_O = L_1 + L_2 - 2M \quad (1.69)$$

Tímto způsobem je možné určit vzájemnou indukčnost:

$$L_S - L_O = L_1 + L_2 - L_1 - L_2 + 2M + 2M = 4M \quad (1.70)$$

Vzájemná indukčnost je potom:

$$M = \frac{L_S - L_O}{4} \quad (1.71)$$



Obrázek 1.29: Určení vzájemné indukčnosti

Paralelní řazení vázaných induktorů využívá převod indukčnosti na inverzní indukčnost. Na induktorech je jedno společné napětí u a přiváděný proud i , který se dělí na i_1 a i_2 . Podle orientace vzájemné vazby (schémata 1.30 a 1.31 je M kladné (souhlasná vazba) nebo záporné (nesouhlasná vazba)). Inverzní indukčnost souhlasně paralelně řazených vázaných induktorů tedy je:

$$\Gamma = \Gamma_1 + 2\Gamma_M + \Gamma_2 \quad (1.72)$$

Pro nesouhlasně paralelně řazených vázaných induktorů je inverzní indukčnost

$$\Gamma = \Gamma_1 - 2\Gamma_M + \Gamma_2 \quad (1.73)$$

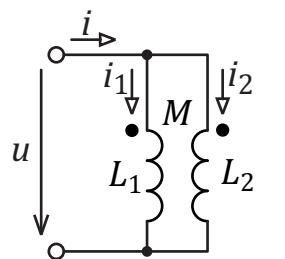
Reálná indukčnost je potom převrácená hodnota indukčnosti inverzní: $L = 1/\Gamma$

Podle vzorce (1.60) je možné počítat s derivacemi proudů:

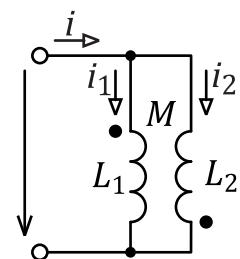
$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = u (\Gamma_1 \pm \Gamma_M + \Gamma_2 \pm \Gamma_M) \quad (1.74)$$

Dále je možné rovnici integrovat podle času:

$$i = (\Gamma_1 + \Gamma_2 \pm 2 \cdot \Gamma_M) \int_0^t u(\tau) d\tau + i_L(0) \quad (1.75)$$



Obrázek 1.30: Souhlasně paralelně řazené vázané induktory



Obrázek 1.31: Nesouhlasně paralelně řazené vázané induktory

Energie induktorů ve vzájemné indukčnosti

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M I_1 I_2 \quad (1.76)$$

Činitel vazby pro vázané induktory κ popisuje míru vazby dvou induktorů, přičemž pro induktory, které se vůbec neovlivňují, je činitel vazby $\kappa = 0$ a jde o tzv. žádnou vazbu, a pro případ $\kappa = 1$ (magnetické toky se navzájem plně sdílejí) jde od tzv. úplnou vzájemnou vazbu. Definice koeficientu κ :

$$\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1} \cdot \sqrt{L_2}} \quad (1.77)$$

Příklad 1.20: Transformátor se dvěma vinutími má indukčnost primárního vinutí $L_1 = 2,3$ H, sekundárního vinutí $L_2 = 130$ mH, sériové spojení při souhlaasné vazbě $L_S = 3,5$ H a sériové spojení při nesouhlaasné vazbě $L_O = 1,4$ H. Určete vzájemnou indukčnost a činitel vazby.

Řešení: Vzájemná indukčnost: $M = (L_S - L_O)/4 = (3,5 - 1,4)/4 = 0,525$ H

Činitel vazby: $\kappa = M/(\sqrt{L_S} \sqrt{L_O}) = 0,525/0,567 = 0,925$



1.2.13 Metoda postupného zjednodušování

Metoda postupného zjednodušování spočívá v náhradě složitější soustavy dvojpólů soustavou jednodušší. Používá se, aby bylo snadnější určit veličiny, které charakterizují celou soustavu (celkový proud obvodu, odpor celého obvodu, příkon apod.). Jde o sled operací, které sníží složitost obvodu. Přitom jsou běžné tyto operace:

- Stejné prvky v sérii nahradit jedním prvkem.
- Stejné prvky řazené paralelně nahradit jedním
- Změna pořadí prvků ve větvi
- Náhrada lineárního zdroje proudu lineárním zdrojem napětí a opačně
- Transfigurace

Výsledná veličina soustavy řazených zdrojů napětí a proudu

Základním principem realizovatelnosti řazení v teorii obvodu je, že ideální zdroje napětí je možná řadit pouze sériově, ideální zdroje proudu pouze paralelně. Co se týká orientace, důležitý je vyznačená orientace celkového napětí a proudu. Napětí souhlasně orientovaných zdrojů napětí se přičítá, opačně orientovaných zdrojů napětí se odečítá. U zdrojů proudu je to obdobné: proud ve stejném směru se přičítá, v opačném směru se odečítá.

Výsledné napětí a proud řazených zdrojů

a) Dva souhlasně řazené zdroje

napětí v sérii:

Celkové napětí $U_0 = U_1 + U_2$

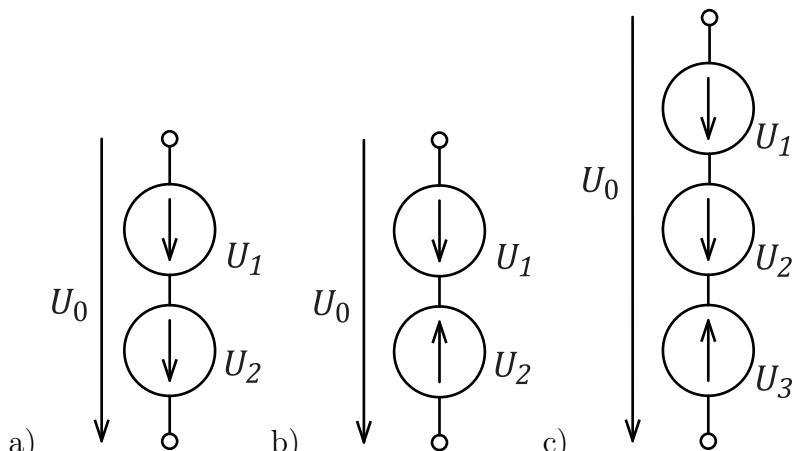
b) Dva nesouhlasně řazené zdroje napětí v sérii:

Celkové napětí $U_0 = U_1 - U_2$

c) Tři nesouhlasně řazené zdroje napětí v sérii:

Celkové napětí

$$U_0 = U_1 + U_2 - U_3$$



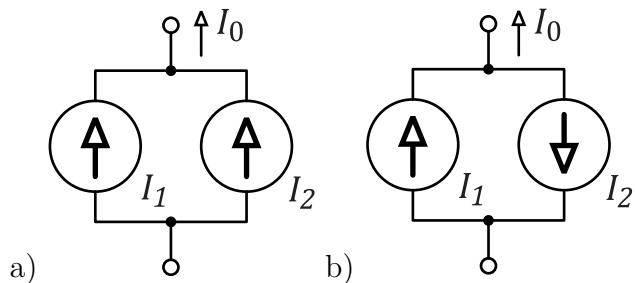
a) Dva souhlasně řazené zdroje proudu:

Celkový proud je jejich součtem:

$$I_0 = I_1 + I_2$$

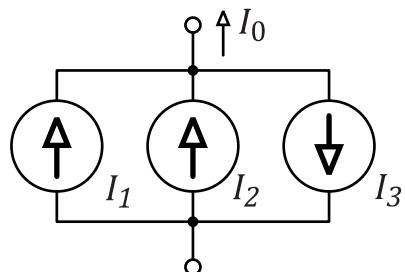
b) Dva nesouhlasně řazené zdroje proudu:

$$\text{Celkový proud je: } I_0 = I_1 - I_2$$



Tři nesouhlasně řazené zdroje proudu:

$$\text{Celkový proud je: } I_0 = I_1 + I_2 - I_3$$



Odpor soustavy řazených rezistorů

a) Dva rezistory řazené v sérii:

Celkový odpor je součtem jejich odporek:

$$R = R_1 + R_2,$$

pro vodivost platí:

$$1/G = 1/G_1 + 1/G_2.$$

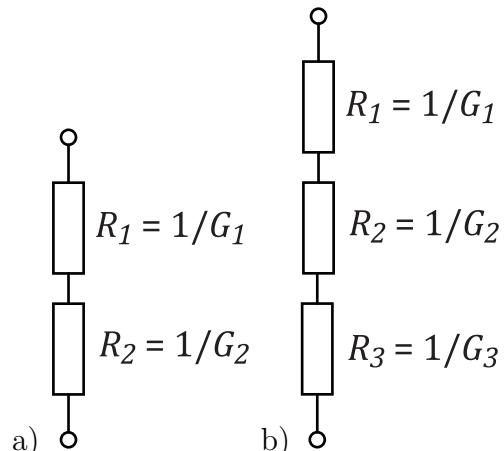
b) Tři rezistory řazené v sérii:

Celkový odpor je součtem jejich odporek:

$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$

pro vodivost platí:

$$1/G = 1/G_1 + 1/G_2 + 1/G_3.$$



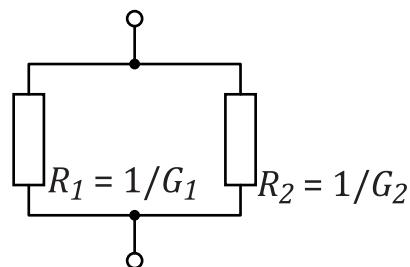
Dva rezistory řazené paralelně:

Celková vodivost je součtem jejich vodivostí:

$G = G_1 + G_2$, pro odpor proto platí:

$1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, po úpravě:

$$R = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$$



Tři rezistory řazené v paralelně:

Celková vodivost je součtem jejich vodivostí:

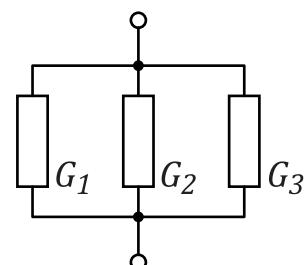
$G = G_1 + G_2 + G_3$,

pro odpor tedy platí: $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 +$

$1/R_3$,

po úpravě:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$



Kombinovaná soustava rezistorů:

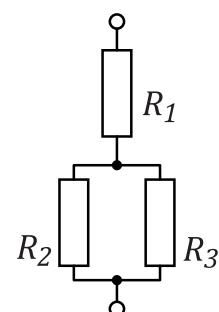
Celkový odpor se určuje postupným zjednodušováním.

U prvního schématu se nejprve určí hodnota odporu paralelního zapojení R_2 a R_3 :

$$R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3);$$

Tento náhradní rezistor je v sérii se rezistorem R_1 , proto celkový odpor je určen součtem:

$$R = R_1 + R_{23} = R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)$$

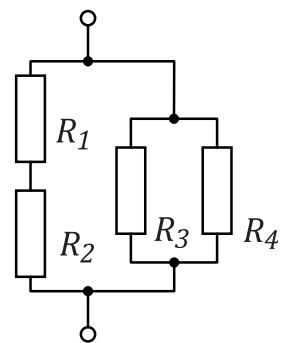


Jiná kombinovaná soustava rezistorů:

Celkový odpor se určí z pomocných odporů

$$R_{12} = R_1 + R_2 \text{ a } R_{34} = R_3 \cdot R_4 / (R_3 + R_4)$$

a provede se určení odporu jejich paralelního řazení: $R = R_{12} \cdot R_{34} / (R_{12} + R_{34})$



1.3 Řešené příklady

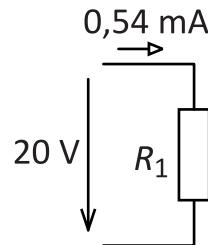
Příklad 1.21: Určete odpor R , vodivost G a příkon P rezistoru na schématu při použití hodnot vyznačených veličin

Řešení: Pro výpočet odporu se použije Ohmův zákon:

$$\text{odpor: } R = U/I = 20/5,4 \cdot 10^{-4} = 37,04 \text{ k}\Omega$$

$$\text{vodivost: } G = I/U = 5,4 \cdot 10^{-4}/20 = 27 \mu\text{S}$$

$$\text{příkon } P = U \cdot I = 20 \cdot 5,4 \cdot 10^{-5} = 10,8 \text{ mW}$$



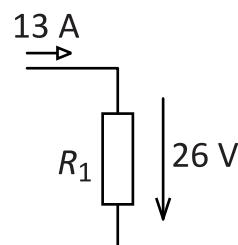
Příklad 1.22: Určete odpor R , vodivost G a příkon P rezistoru na schématu při použití hodnot vyznačených veličin

Řešení: Pro výpočet odporu se použije Ohmův zákon:

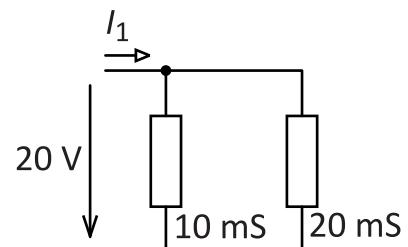
$$\text{Odpor: } R = U/I = 26/13 = 2 \Omega$$

$$\text{Vodivost: } G = I/U = 13/26 = 0,5 \text{ S}$$

$$\text{Příkon } P = U \cdot I = 26 \cdot 13 = 338 \text{ W}$$



Příklad 1.23: Určete celkový proud I vytékající ze zdroje, dále výkon zdroje P v obvodu na schématu, při použití hodnot vyznačených veličin



Řešení: Nejprve se vypočte celková vodivost zátěže

$$G = G_1 + G_2 = 0,1 + 0,2 = 0,3 \text{ S},$$

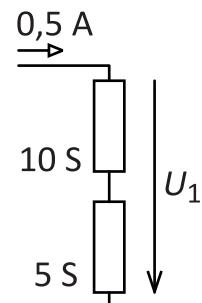
$$\text{celkový proud se pak určí z Ohmova zákona: } I = G \cdot U = 20 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ A}$$

Výkon zdroje napětí je dán součinem napětí zdroje a odebíraného proudu, případně odvozený vzorcem: $P = U \cdot I = G \cdot U^2 = 12 \text{ W}$

Příklad 1.24: Určete napětí U na zdroji proudu a dále jeho výkon v obvodu na schématu při použití hodnot vyznačených veličin

Řešení: Nejprve se vypočte celkový odpor zátěže $R = R_1 + R_2 = 1/G_1 + 1/G_2 = 1/10 + 2/10 = 3/10 \Omega$, napětí se určí z Ohmova zákona: $U = I \cdot R = 0,5 \cdot 3/10 = 0,15 \text{ V}$

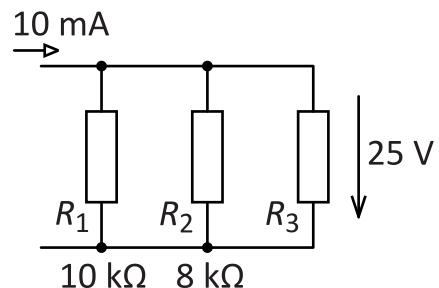
Výkon zdroje: $P = U \cdot I = R \cdot I^2 = 0,15 \cdot 0,5 = 0,075 \text{ W}$



Příklad 1.25: Určete velikost rezistoru R_3 na schématu tak, aby platily hodnoty vyznačených veličin.

Řešení: Rezistory jsou paralelně, proto nejprve určit z pomocí Ohmova zákona z napětí a proudu celkovou vodivost: $G = I/U = 10 \cdot 10^{-3}/25 = 400 \mu\text{S}$.

Odpory rezistorů se převedou do vodivostí: $G_1 = 100 \mu\text{S}$ a $G_2 = 125 \mu\text{S}$, aby se určila vodivost posledního rezistoru: $G_3 = G - G_1 - G_2 = 400 \cdot 10^{-6} - 100 \cdot 10^{-6} - 125 \cdot 10^{-6} = 175 \cdot 10^{-6} \text{ S}$. Odpor $R_3 = 1/175 \cdot 10^{-6} = 5,71 \text{ k}\Omega$

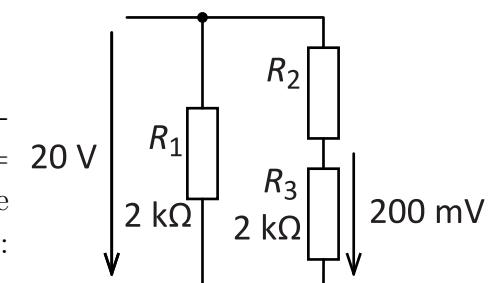


Příklad 1.26: Určete velikost rezistoru R_2 na schématu tak, aby platily hodnoty vyznačených veličin.
(Změna rozsahu voltmetu)

Řešení:

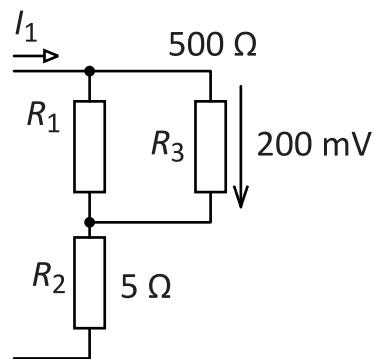
Proud větví s rezistory R_2 a R_3 se určí z proudu rezistorem R_3 podle Ohmova zákona: $I_2 = 0,2/2000 = 0,0001 \text{ A}$. Následuje napětí na rezistoru R_2 , určí se odečtením napětí na R_3 od napětí mezi krajními uzly: $U_{R2} = 20 - 0,2 = 19,8 \text{ V}$.

Odpor R_2 následně podle Ohmova zákona je podíl vypočítaného napětí a vypočítaného proudu: $R_2 = 19,8/0,0001 = 198000 \Omega$.



Příklad 1.27: Určete velikost rezistoru R_1 na schématu tak, aby platily hodnoty vyznačených veličin. (Zvýšení rozsahu ampérmetru) Velikost proudu $I_1 = 4 \text{ A}$

Řešení: Nejprve se určí proud rezistorem R_3 : $I_{R3} = 0,2/500 = 0,0004 \text{ A}$ a nyní je možné určit také proud rezistorem R_1 : $I_{R1} = I_1 - I_{R3} = 4 - 0,0004 = 3,9996 \text{ A}$



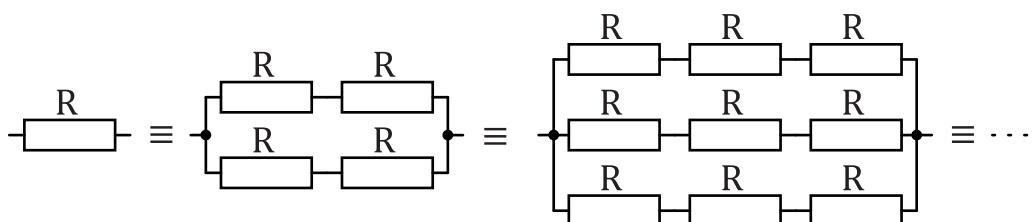
Příklad 1.28: Sestavte rezistor o odporu $R_x = 20 \Omega$ a ztrátovém výkonu a) $P_z > 25 \text{ W}$, b) 80 W pokud máte k dispozici libovolné množství rezistorů o nominálním odporu $R_n = 10 \Omega$ a ztrátovém výkonu $P_{zn} = 15 \text{ W}$

Řešení: Rezistory lze řadit sériově nebo paralelně. Při sériovém řazení se celkový odpor sčítá, takže se dosáhne vyšší hodnoty odporu, než jsou hodnoty jednotlivých rezistorů. V uvedeném příkladu požadovanou hodnotu R_x dosáhneme seřazením dvou rezistorů, neboť:

$$R_x = R_n + R_n = 10 + 10 = 20 \Omega$$

Nyní se ověří povolený maximální ztrátový výkon realizované kombinace. Sériově řazenými rezistory teče stejný proud, ztrátový výkon na každém rezistoru je popsán vzorcem $P_z = R \cdot I^2$; Na obou rezistorech je tedy výkon stejný, součet maximálních výkonů rezistorů je $15 + 15 = 30 \text{ W}$, což je více, než je požadovaný minimální výkon ve variantě a). Řešením je tedy sériové spojení dvou dostupných rezistorů.

Pro variantu b) toto řešení nevyhovuje, sériově řazené rezistory by byly tepelně přetíženy. Pro převod příkonu na teplo musí být využito větší množství rezistorů. Základní postup pro řazení stejných rezistorů:



Obrázek 1.32: Kombinace rezistorů pro stejný odpor a větší příkon

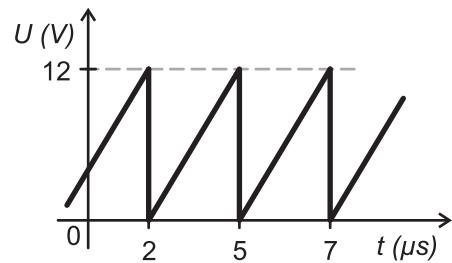
Řešení úlohy je tedy možné tak, že se sériová kombinace zařadí dvakrát paralelně v dvojnásobné sérii za sebou. Použije se 8 rezistorů, každý rezistor může být zatížen stejně 10 W.

1.4 Neřešené příklady

Příklad 1.29: U průběhu 1.33 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.

Řešení:

Perioda: $T = 3 \mu\text{s}$; frekvence: $f = 333,3 \text{ kHz}$; maximální hodnota: $U_m = 12 \text{ V}$; střední hodnota: $U_{av} = 6 \text{ V}$; efektivní hodnota: $U = 6,928 \text{ V}$ a stejnosměrná složka: $U_0 = 6 \text{ V}$.

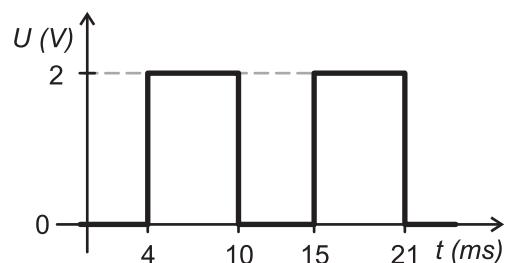


Obrázek 1.33: Průběh

Příklad 1.30: U průběhu 1.34 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.

Řešení:

Perioda: $T = 11 \text{ ms}$; frekvence: $f = 90,91 \text{ Hz}$; maximální hodnota: $U_m = 2 \text{ V}$; střední hodnota: $U_{av} = 1,091 \text{ V}$; efektivní hodnota: $U = 1,477 \text{ V}$ a stejnosměrná složka: $U_0 = 1,091 \text{ V}$.

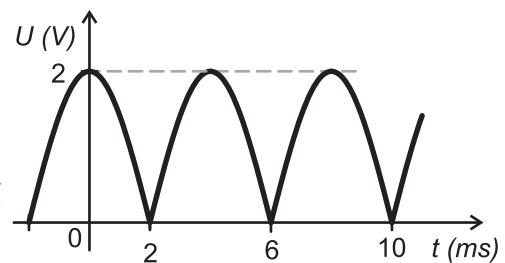


Obrázek 1.34: Průběh

Příklad 1.31: U průběhu 1.35 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.

Řešení:

Perioda: $T = 4 \text{ ms}$; frekvence: $f = 250 \text{ Hz}$; maximální hodnota: $U_m = 2 \text{ V}$; střední hodnota: $U_{av} = 1,273 \text{ V}$; efektivní hodnota: $U = 1,414 \text{ V}$ a stejnosměrná složka: $U_0 = 1,273 \text{ V}$.

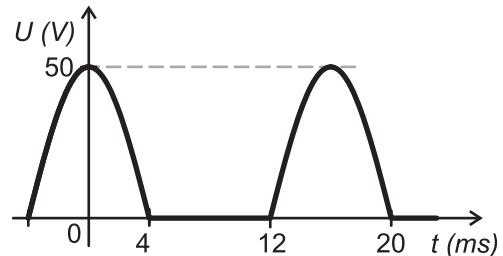


Obrázek 1.35: Průběh

Příklad 1.32: U průběhu 1.36 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.

Řešení:

Perioda: $T = 16$ ms; frekvence: $f = 62,5$ Hz; maximální hodnota: $U_m = 50$ V; střední hodnota: $U_{av} = 15,92$ V; efektivní hodnota: $U = 25$ V a stejnosměrná složka: $U_0 = 15,92$ V

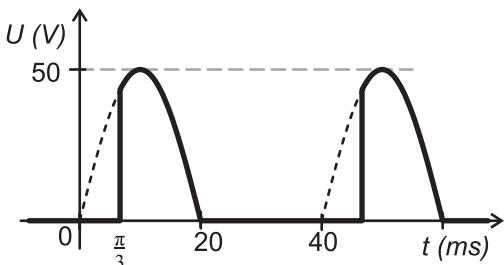


Obrázek 1.36: Průběh

Příklad 1.33: U průběhu 1.37 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.

Řešení:

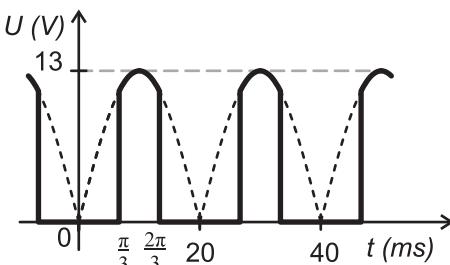
Perioda: $T = 20$ ms; frekvence: $f = 50$ Hz; maximální hodnota: $U_m = 50$ V; střední hodnota: $U_{av} = 11,94$ V; efektivní hodnota: $U = 17,17$ V a stejnosměrná složka: $U_0 = 11,94$ V.



Obrázek 1.37: Průběh

Příklad 1.34: U průběhu 1.38 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.

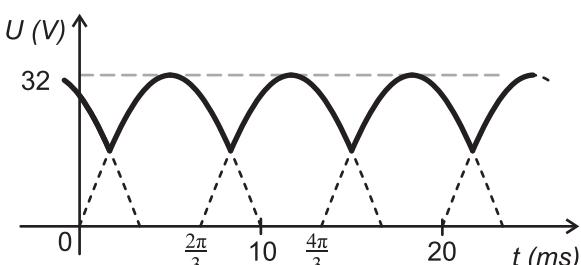
Řešení: Perioda: $T = 10$ ms; frekvence: $f = 100$ Hz; maximální hodnota: $U_M = 13$ V; střední hodnota: $U_{av} = 4,138$ V; efektivní hodnota: $U = 7,173$ V a stejnosměrná složka: $U_0 = 4,138$ V.



Obrázek 1.38: Průběh

Příklad 1.35: U průběhu 1.39 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.

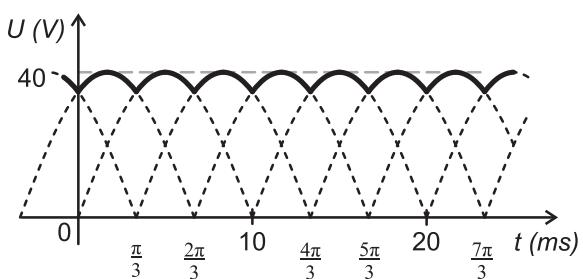
Řešení: Perioda: $6\frac{2}{3}$ ms; frekvence: 150 Hz; maximální hodnota: $U_m = 32$ V; střední hodnota: $U_{av} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}U_m = 26,464$ V; efektivní hodnota: $U = 26,902$ V a stejnosměrná složka: $U_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}U_m = 26,464$ V.



Obrázek 1.39: Průběh

Příklad 1.36: U průběhu 1.40 určete frekvenci, periodu, maximální, střední, efektivní hodnotu a stejnosměrnou složku.

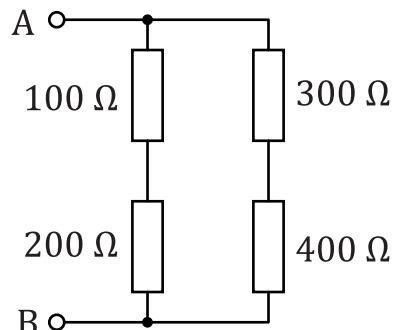
Řešení: Perioda: $3\frac{1}{3}$ ms; Frekvence: 300 Hz; maximální hodnota: $U_m = 40$ V; střední hodnota: $U_{av} = U_m \frac{3}{\pi} = 38,197$ V; efektivní hodnota: $U = U_m \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} = 38,23$ V a stejnosměrná složka: $U_0 = \frac{3}{\pi} U_m = 38,197$ V.



Obrázek 1.40: Průběh

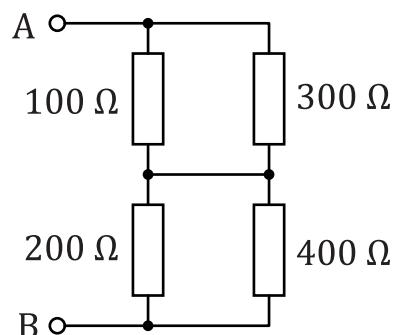
Příklad 1.37: Určete celkový odpor soustavy na schématu

Řešení: $R = 210 \Omega$



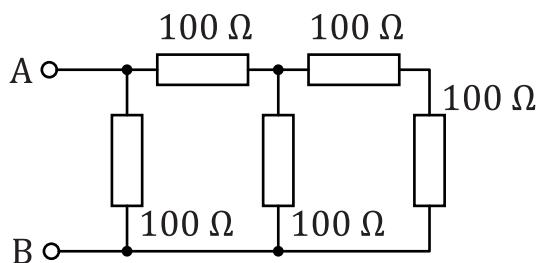
Příklad 1.38: Určete celkový odpor soustavy na schématu

Řešení: $R = 208,333 \Omega$



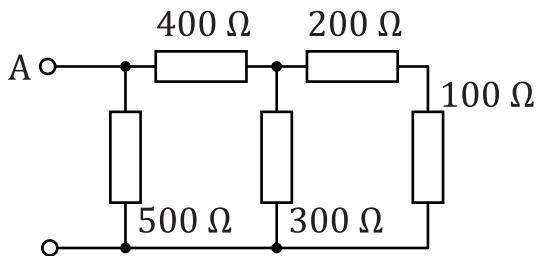
Příklad 1.39: Určete celkový odpor soustavy na schématu

Řešení: $R = 62,5 \Omega$



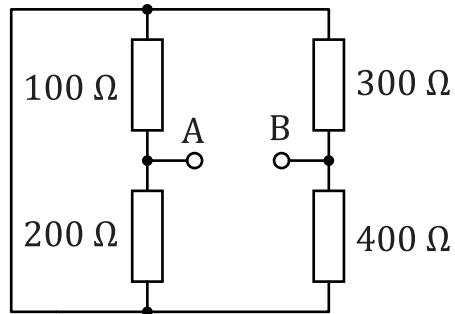
Příklad 1.40: Určete celkový odpor soustavy na schématu

Řešení: $R = 261,905 \Omega$



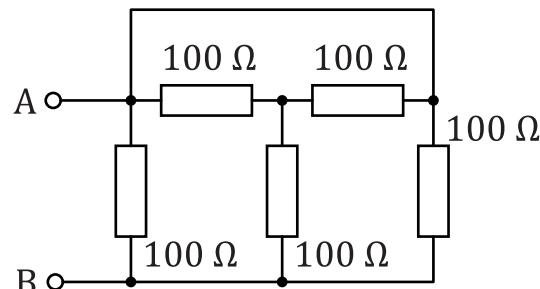
Příklad 1.41: Určete celkový odpor soustavy na schématu

Řešení: $R = 238,095 \Omega$



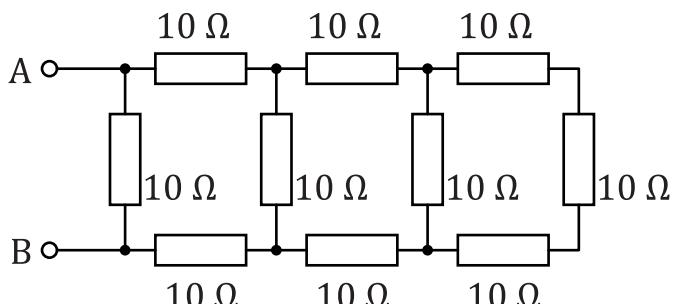
Příklad 1.42: Určete celkový odpor soustavy na schématu

Řešení: $R = 37,5 \Omega$



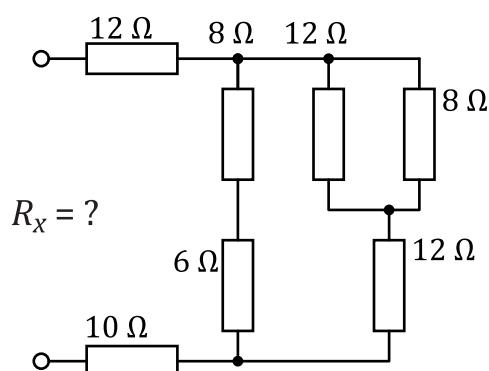
Příklad 1.43: Určete celkový odpor soustavy na schématu

Řešení: $R = 7,3214 \Omega$



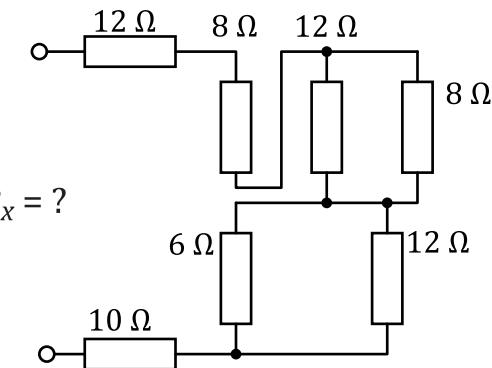
Příklad 1.44: Určete celkový odpor soustavy

Řešení: $R = 29,636 \Omega$



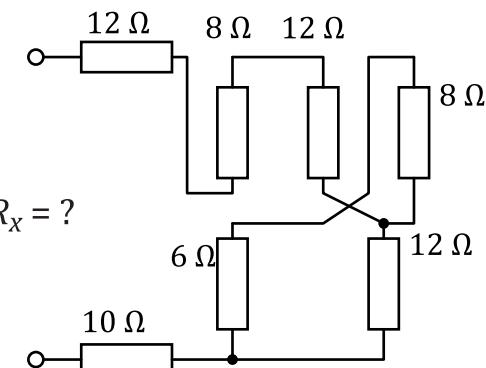
Příklad 1.45: Určete celkový odpor soustavy

Řešení: $R = 38,8 \Omega$



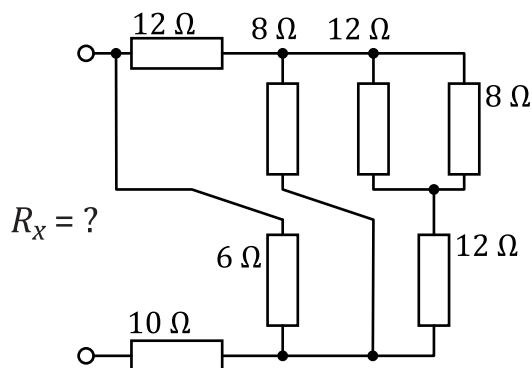
Příklad 1.46: Určete celkový odpor soustavy

Řešení: $R = 48,462 \Omega$



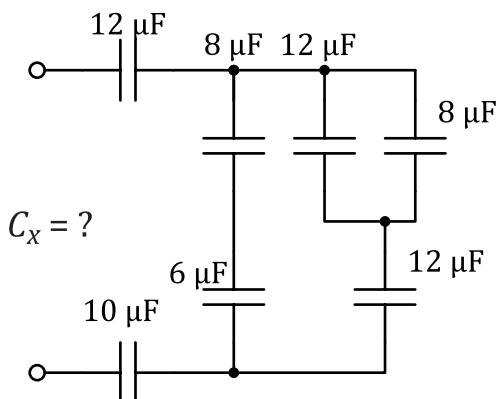
Příklad 1.47: Určete celkový odpor soustavy

Řešení: $R = 14,463 \Omega$



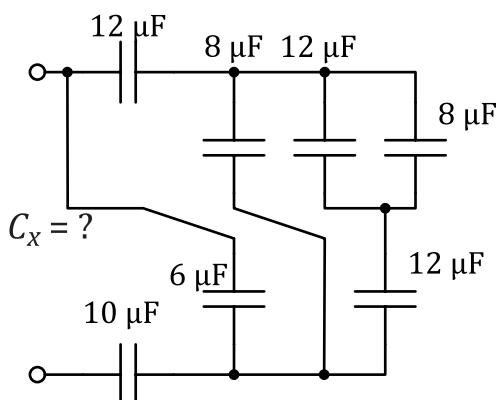
Příklad 1.48: Určete kapacitu soustavy. Hodnoty kapacitorů jsou na schématu.

Řešení: $C = 3,639 \mu\text{F}$



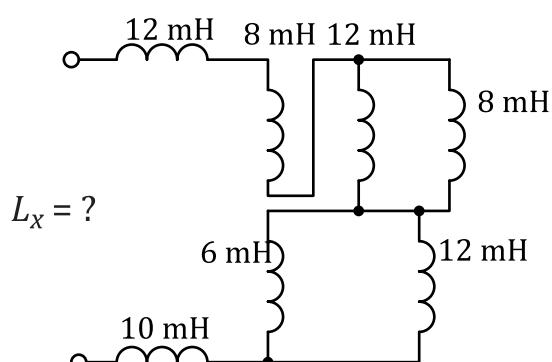
Příklad 1.49: Určete kapacitu soustavy. Hodnoty kapacitorů jsou na schématu.

Řešení: $C = 5,607 \mu\text{F}$



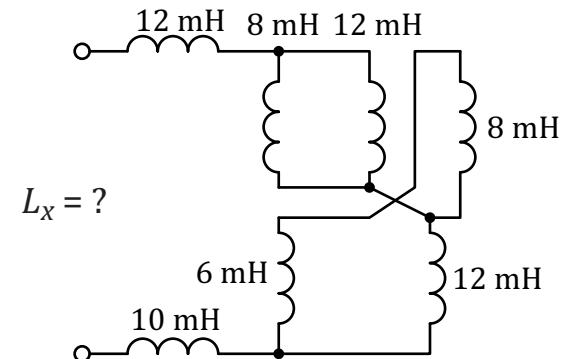
Příklad 1.50: Určete indukčnost soustavy. Magnetické pole induktorů na schématu se vzájemně neovlivňuje. Hodnoty induktorů jsou na schématu.

Řešení: $L = 38,8 \text{ mH}$



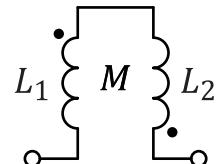
Příklad 1.51: Určete indukčnost soustavy. Magnetické pole induktorů na schématu se vzájemně neovlivňuje. Hodnoty induktorů jsou na schématu.

Řešení: $L = 33,26 \text{ mH}$



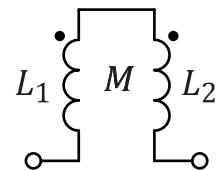
Příklad 1.52: Určete celkovou indukčnost soustavy a činitel vazby soustavy vázaných induktorů pro následující parametry: $L_1 = 520 \text{ mH}$, $L_2 = 180 \text{ mH}$ a $M = 300 \text{ mH}$

Řešení: $L_S = 1300 \text{ mH}$ a $\kappa = 0,9806$



Příklad 1.53: Určete celkovou indučnost a soustavy činitel vazby soustavy vázaných induktorů pro následující parametry: $L_1 = 12 \text{ mH}$, $L_2 = 33 \text{ mH}$ a $M = 19 \text{ mH}$

Řešení: $L_S = 7 \text{ mH}$ a $\kappa = 0,9548$



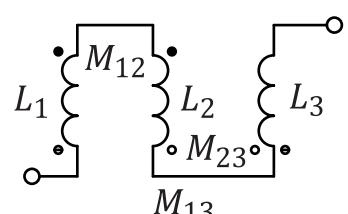
Obrázek 1.41: Schéma obvodu

Příklad 1.54: Určete celkovou indučnost a všechny činitele vazby soustavy vázaných induktorů pro následující parametry:

$L_1 = 1300 \text{ mH}$, $L_2 = 1800 \text{ mH}$, $L_3 = 1200 \text{ mH}$, $M_{12} = 1450 \text{ mH}$, $M_{23} = 1420 \text{ mH}$ a $M_{13} = 1120 \text{ mH}$

Řešení:

$L = 0,8 \text{ H}$ a jednotlivé činitelé vazby $\kappa_{12} = 0,948$, $\kappa_{23} = 0,966$ a $\kappa_{13} = 0,897$



Příklad 1.55: Máte k dispozici rezistory o nominální hodnotě odporu $R_n = 22 \Omega$ a nominálním ztrátovém výkonu $P_n = 50 \text{ W}$. Pomocí sériové a paralelní kombinace sestavte rezistor s výsledným odporem $R_0 = 200\Omega$ a ztrátovým výkonem větším než $P_t = 400 \text{ W}$. Zvolte variantu s co nejmenším počtem rezistorů.

Řešení: Použít 9 sériově řazených rezistorů.

Příklad 1.56: Máte k dispozici rezistory o nominální hodnotě odporu $R_n = 1 \Omega$ a nominálním ztrátovém výkonu $P_n = 5 \text{ W}$. Pomocí sériové a paralelní kombinace sestavte rezistor s výsledným odporem $R_0 = 90,9\text{m}\Omega$ a ztrátovým výkonem větším než $P_t = 450 \text{ W}$. Zvolte variantu s co nejmenším počtem rezistorů.

Řešení: Použít 3 sériové soustavy rezistorů po 33 rezistorech paralelně.

Příklad 1.57: Máte k dispozici rezistory o nominální hodnotě odporu $R_n = 100 \Omega$ a nominálním ztrátovém výkonu $P_n = 10 \text{ W}$. Pomocí sériové a paralelní kombinace sestavte rezistor s výsledným odporem $R_0 = 25\Omega$ a ztrátovým výkonem větším než $P_t = 100 \text{ W}$. Zvolte variantu s co nejmenším počtem rezistorů.

Řešení: Použít celkem 8 dvourezistorových sériových spojení zapojených paralelně. 4 rezistory paralelně nebudou mít dostatečný maximální ztrátový výkon a byly by při provozu přetíženy.

Příklad 1.58: Sestavte rezistor o odporu $R_x = 10 \Omega$ a ztrátovém výkonu $P_z = 60 \text{ W}$, pokud máte k dispozici libovolné množství rezistorů o nominálním odporu $R_n = 10 \Omega$ a ztrátovém výkonu $P_{zn} = 15 \text{ W}$

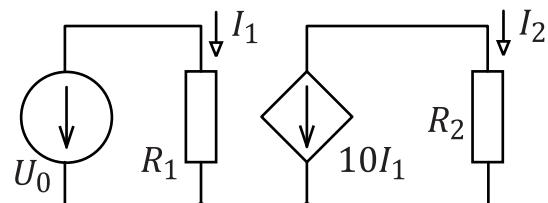
Řešení: Použít 4 rezistory, 2 sériové kombinace paralelně.

Příklad 1.59: Sestavte rezistor o odporu $R_x = 2 \Omega$ a ztrátovém výkonu $P_z = 60 \text{ W}$, pokud máte k dispozici libovolné množství rezistorů o nominálním odporu $R_n = 10 \Omega$ a ztrátovém výkonu $P_{zn} = 15 \text{ W}$

Řešení: Použít 5 rezistorů paralelně.

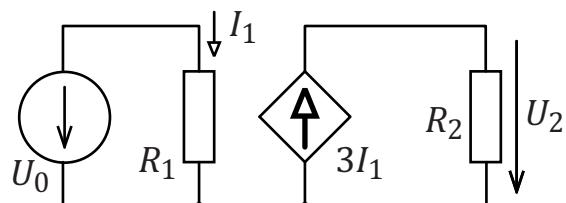
Příklad 1.60: Určete proud I_2 při následujících parametrech obvodu: $U_0 = 15 \text{ V}$, $R_1 = 60 \Omega$ a $R_2 = 450 \Omega$.

Řešení: $I_2 = 5,56 \text{ mA}$



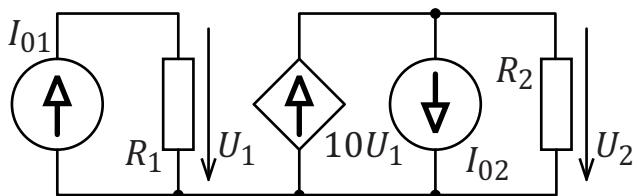
Příklad 1.61: Určete napětí U_2 při následujících parametrech obvodu: $U_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 220 \Omega$ a $R_2 = 2,2 \Omega$.

Řešení: $U_2 = 0,3 \text{ V}$



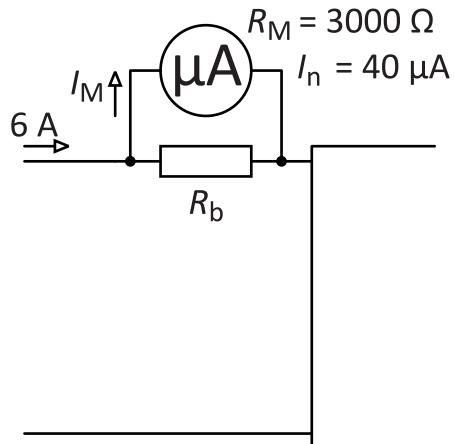
Příklad 1.62: Určete napětí U_2 při následujících parametrech obvodu: $I_{01} = 150 \text{ mA}$, $R_1 = 12 \Omega$, $I_{02} = 6 \text{ A}$ a $R_2 = 1 \Omega$.

Řešení: $U_2 = 12,0 \text{ V}$



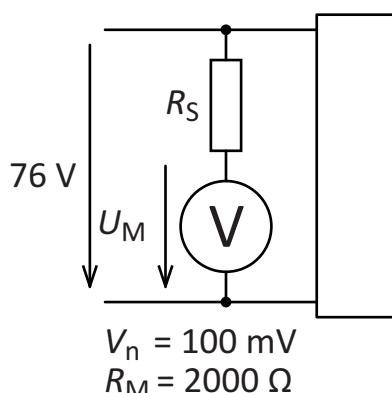
Příklad 1.63: Určete odpor rezistoru R_b na schématu tak, aby zajistil funkci bočníku pro zvýšení rozsahu ampérmetru. Navrhněte základní rozsah ampérmetru tak, aby se původní stupnice nemusela upravovat. Určete maximální příkon bočníku v případě maximálního proudu zvýšeného o 20 %.

Řešení: Z původní stupnice se snadno odečítá, pokud je nový rozsah dekadickým násobkem původního, a dále pokud se nový rozsah násobí nebo dělí dvěma. Dvojnásobek nebo polovinu hodnoty je snadné z odečtené určit z paměti, stejně jako dekadické násobení. V této úloze je původní rozsah $I_n = 40 \mu\text{A}$, nový rozsah má být větší než měřený proud, proto s touto stupnicí vyhovuje $I_{n1} = 8 \text{ A}$, tomu odpovídá $R_b = 0,015 \Omega$, a maximální příkon $P_M = 1,38 \text{ W}$.



Příklad 1.64: Určete odpor rezistoru R_s na schématu tak, aby zajistil funkci předřadného rezistoru pro zvýšení rozsahu voltmetu. Navrhněte základní rozsah voltmetu tak, aby se původní stupnice nemusela upravovat. Určete maximální příkon předřadného odporu v případě maximálního napětí zvýšeného od 20 %.

Řešení: Rozsah do 100 V (viz řešení předchozího příkladu), $R_s = 1\,998\,000 \Omega$, $P_M = 7,2 \text{ mW}$



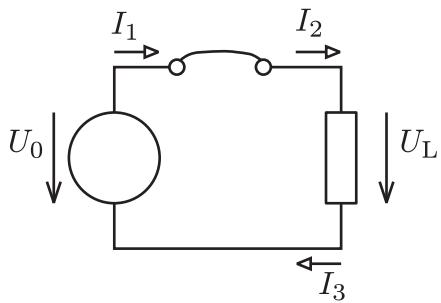
Kapitola 2

Kirchhoffovy zákony a základní obvody

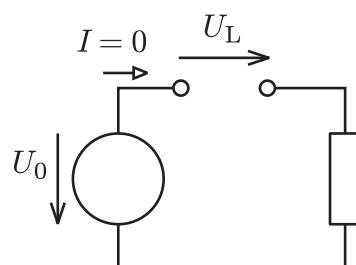
2.1 Základní funkce elektrického obvodu

2.1.1 Uzavřený jednoduchý elektrický obvod

Uzavřený elektrický obvod obsahuje minimálně jeden zdroj napětí nebo proudu jako zdroj elektrického výkonu a minimálně jeden prvek jako spotřebič elektrického výkonu. (obrázek 2.1) Nejjednodušší zapojení spočívá v propojení obou pólů zdroje s oběma póly prvku, který má funkci spotřebiče. Takto vzniká uzavřená smyčka, kterou může téci elektrický proud, který má ve všech částech obvodu stejnou velikost: $I_1 = I_2 = I_3$. Napětí na zdroji i na spotřebiči se rovnají: $U_0 = U_L$



Obrázek 2.1: Jednoduchý uzavřený obvod



Obrázek 2.2: Jednoduchý otevřený obvod

Tokem elektrického proudu se přenáší energie od zdroje ke spotřebiči. Podle zákona zachování energie je okamžitý výkon zdroje roven příkonu spotřebiče.

2.1.2 Otevřený jednoduchý elektrický obvod

Přerušením uzavřeného elektrického obvodu v libovolném místě vzniká otevřený elektrický obvod. (obrázek 2.2) V místě přerušení (v reálném případě může jít o spínač) je mezi oběma rozdělenými konci vodičů napětí. Elektrický proud neteče, nedochází k přenosu elektrického výkonu od zdroje na spotřebič.

2.1.3 Základní topologické pojmy v elektrických obvodech

Uzel elektrického obvodu je bod, kde jsou spojeny póly dvou nebo více obvodových prvků. Mezi dvěma uzly obvodu je možné určit elektrické napětí. Při řešení obvodů se jeden vhodně zvolený uzel označuje jako referenční.

Větev elektrického obvodu je souvislé spojení dvou uzlů obvodu. Může obsahovat jeden nebo více dvojpólových obvodových prvků spojených v řadě za sebou. Na obou koncích větve teče stejný proud.

Smyčka elektrického obvodu je uzavřená trasa, která probíhá po dvou nebo více větvích obvodu. Smyčka nemůže jít jednou větví vícekrát ani se nemůže v žádném uzlu elektrického obvodu krížit.

2.1.4 Celková bilance energie v obvodu

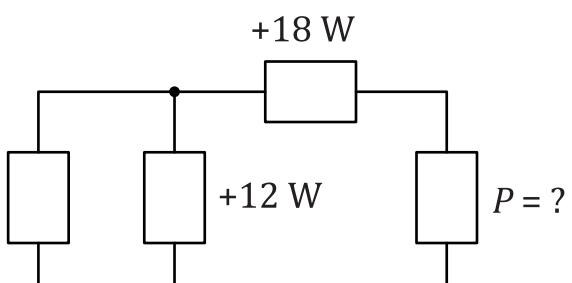
V uzavřeném elektrickém obvodu se musí v každém okamžiku rovnat výkon zdrojů energie příkonu všech spotřebičů. Jako zdroje mohou pracovat oba typy základních aktivních prvků - řízený i neřízený zdroj napětí, stejně i řízené nebo neřízené zdroje proudu. Jako spotřebiče mohou pracovat všechny prvky, jak aktivní (závisí na kvadrantu voltampérové charakteristiky), jak pasivní. Z pasivních prvků rezistor vždy funguje jako spotřebič, oba akumulativní prvky mohou poskytovat po omezený čas elektrický výkon, pokud byly v předcházejícím čase spotřebiči a zvyšovala se tak jejich vnitřní energie (ve formě elektrického náboje nebo ve formě magnetického toku).

Při popisu dvoupólového prvku je vhodné vyjít ze souhlasného směru napětí a proudu. Prvky spotřebující energii mají tak příkon uvedený s kladným znaménkem, prvky poskytující energii znaménko záporné. Při podmínce zachování energie musí být součet vypočtených výkonů roven nule.

Příklad 2.1: Na schématu jsou vyznačeny prvky a jejich výkonový příjem a výdej. Určete příkon posledního prvku s nevyznačeným příkonem.

Řešení: Celková výkonová bilance se musí rovna nule, proto:

$$P = 0 - (-300 + 18 + 12) = 270 \text{ W}$$



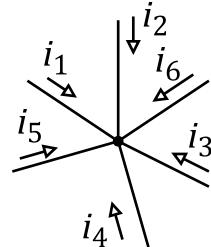
Obrázek 2.3: Výkonové schéma obvodu

2.2 Kirchhoffovy zákony

2.2.1 První Kirchhoffův zákon

Algebraický součet proudů vstupujícího do uzlu je roven nule.

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = \sum_{j=1}^n i_j = 0 \quad (2.1)$$

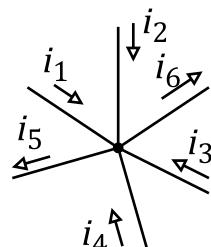


Pokud se uvažují zvlášť proudy vstupující a vystupující, je možné první Kirchhoffův zákon uvést ve formě:

Algebraický součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů vystupujících z uzlu.

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = i_5 + i_6 \quad (2.2)$$

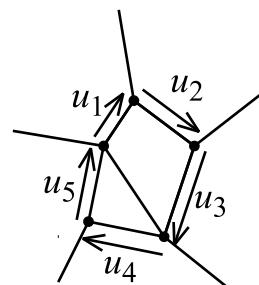
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 - i_5 - i_6 = 0 \quad (2.3)$$



2.2.2 Druhý Kirchhoffův zákon

Součet okamžitých napětí po obvodu smyčky v obvodu je roven nule. Podmínkou je respektování orientace napětí.

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 0 \quad (2.4)$$

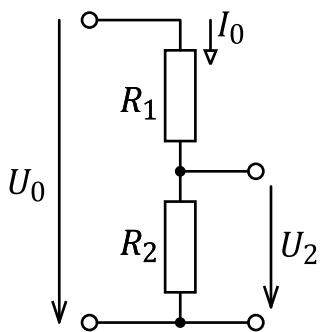


2.3 Děliče napětí a proudu

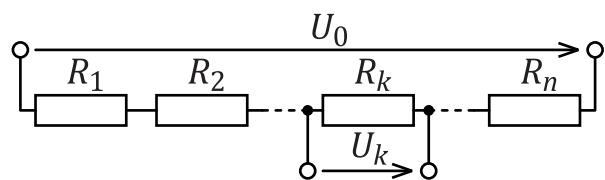
2.3.1 Dělič napětí

Schéma děliče napětí je na obrázku 2.4. Obsahuje vstupní svorku, na kterou je proti společnému uzlu je na ní přivedeno napětí U_0 a výstupní svorku s napětím proti společnému uzlu U_2 . Výstupní napětí U_2 je úbytkem napětí na rezistoru R_2 , kterým protéká proud I_0 . Proud I_0 je zase dán podle Ohmova zákona vstupním napětím U_0 na sériové kombinaci rezistorů R_1 a R_2 . Pokud není dělič zatížen, výstupní napětí U_2 je dánno vzorcem:

$$U_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.5)$$



Obrázek 2.4: Jednoduchý
dělič napětí



Obrázek 2.5: Dělič napětí

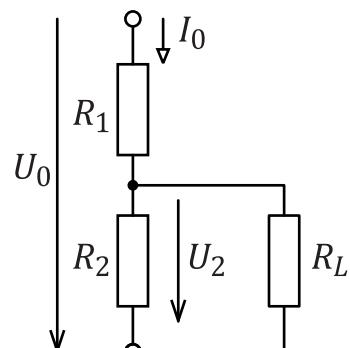
Pokud je dělič tvořen řadou n sériově řazených rezistorů (schéma na obrázku 2.5, na rezistoru R_k je napětí:

$$U_k = U_0 \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_k + \dots + R_n} \quad (2.6)$$

Zatížený dělič napětí rezistorem R_L (Obrázek 2.6).

Proud děličem I_0 se rozdělí na paralelní kombinaci $R_2 \parallel R_L$, proto:

$$\begin{aligned} U_2 &= I_0 \cdot \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = U_0 \cdot \frac{\frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}}{R_1 + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}} = \\ &= U_0 \cdot \frac{R_L R_2}{R_1(R_L + R_2) + R_L R_2} \end{aligned} \quad (2.7)$$



Obrázek 2.6: Zatížený dělič napětí

Příklad 2.2: Dělič napětí má následující parametry: $R_1 = 12 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 33 \text{ k}\Omega$ a na vstupu je napětí $U_0 = 24 \text{ V}$. a) Určete výstupní napětí. b) Určete výstupní napětí, pokud jsou výstupní svorky zatíženy rezistorem $R_L = 100 \text{ k}\Omega$ c) Jaký zatěžovací odpor je možné připojit, aby výstupní napětí se nezměnilo více než o 1 %.

Řešení: a) Výstupní napětí: $U_2 = U_0 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 24 \cdot 33 / (12 + 33) = 17,6 \text{ V}$

b) Výstupní napětí při zátěži: $U_{2Z} = U_0 \cdot R_2 R_L / (R_1 R_2 + R_2 R_L + R_1 R_L) = 16,176 \text{ V}$

c) Výstupní napětí děliče při zátěži vždy klesne. V tomto případě bude při poklesu 1 % napětí sníženo na poměr $k = 1 - 0,01 = 0,99$. Výstupní napětí se zátěží $U_{2L} = k \cdot U_2$

Zatěžovací rezistor se připojuje paralelně k rezistoru R_2 , proto je vhodné všechny odpory převést na vodivosti a podle toho upravit vzorec pro výpočet výstupního napětí:

$$U_2 = U_0 \frac{1/G_2}{1/G_1 + 1/G_2} = U_0 \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad (2.8)$$

Výstupní napětí se zátěží bude potom:

$$U_{2L} = U_0 \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_L} = k \cdot U_0 \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad (2.9)$$

Z této rovnice je potom možné určit maximální vodivost zatěžovacího rezistoru G_L :

$$G_L = \frac{1-k}{k} (G_1 + G_2) \quad (2.10)$$

Vodivost bude převedena na odpor:

$$R_L = \frac{k}{1-k} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.11)$$

Pro zadané parametry děliče je minimální zatěžovací odpor $R_L = 871,2 \text{ k}\Omega$

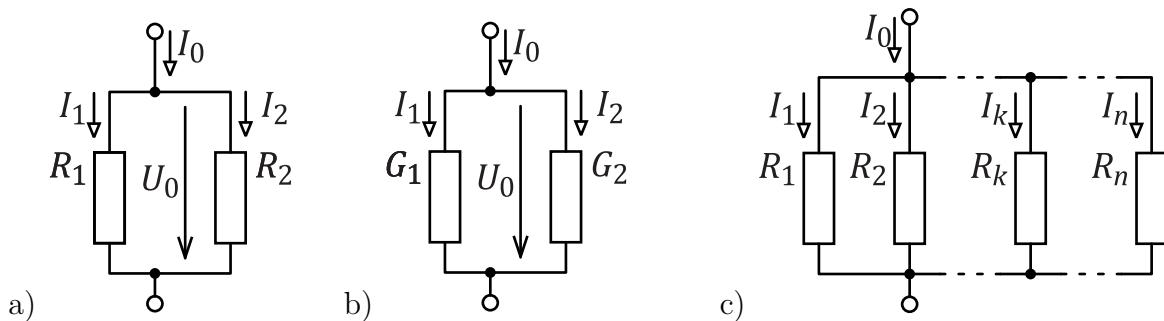
2.3.2 Dělič proudu

Schéma děliče proudu se dvěma rezistory je na obrázku 2.7a) a 2.7b) (Velikosti rezistorů se uvedou ve vodivosti). Na obou rezistorech je napětí $U_0 = I_0/(G_1 + G_2)$, proud rezistorem R_2 je $I_2 = U_0 \cdot G_2$. Po dosazení a přepočtu na hodnoty v odporech:

$$I_2 = I_0 \frac{G_2}{G_1 + G_2} = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.12)$$

Pro n paralelně spojených rezistorů (obrázek 2.7c)) teče rezistorem R_k proud:

$$I_k = I_0 \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \dots + G_k + \dots + G_n} = I_0 \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_k} + \dots + \frac{1}{R_n}} \quad (2.13)$$

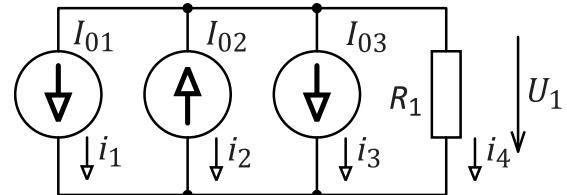


Obrázek 2.7: Dělič proudu

2.4 Řešené příklady

Příklad 2.3: Zjistěte směr proudu, jeho velikost a hodnotu a orientaci napětí na rezistoru R_1 obvodu na obrázku 2.8.

$$I_{01} = 1 \text{ A}, I_{02} = 2 \text{ A}, I_{03} = 3 \text{ A} \text{ a } R_1 = 4 \Omega.$$



Obrázek 2.8: Obvod

Řešení: a) Zdroje proudu jsou řazeny paralelně, je vhodné nahradit je jedním zdrojem, výsledný proud je $I = I_{01} - I_{02} + I_{03} = 1 - 2 + 3 = 2 \text{ A}$. Proud teče rezistorem R směrem nahoru, má velikost 2 A. Na rezistoru R způsobí úbytek napětí 8 V.

b) Použití 1. Kirchhoffova zákona:

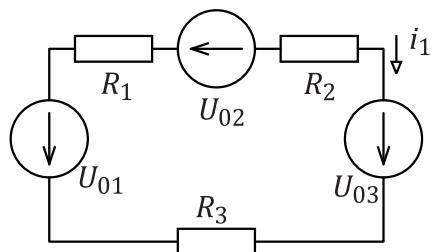
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$i_4 = -I_{01} + I_{02} - I_{03} = -1 + 2 - 3 = -2 \text{ A}$$

$$\text{Výpočet napětí: } U_1 = R_1 \cdot i_4 = 4 \cdot (-2) = -8 \text{ V}$$

Příklad 2.4: Určete velikost proudu a jeho směr rezistorem R_1 v obvodu na obrázku 2.9. Zjistěte směr a velikost napětí na všech rezistorech.

$$U_{01} = 6 \text{ V}, U_{02} = 8 \text{ V}, U_{03} = 10 \text{ V}, R_1 = 3 \Omega, R_2 = 6 \Omega \text{ a } R_3 = 5 \Omega.$$

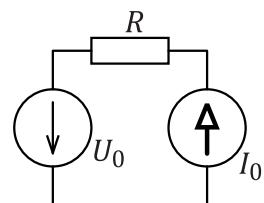


Obrázek 2.9: Obvod

Řešení: V obvodu jsou všechny rezistory a zdroje napětí řazeny sériově, pomocí metody postupného zjednodušování se zjistí souhrnné napětí všech zdrojů $U_0 = 4 \text{ V}$, dále odpor všech rezistorů $R = 14 \Omega$. Podle Ohmova zákona se vypočítá proud $i_1 = 285,7 \text{ mA}$, napětí na rezistorech se určí také podle Ohmova zákona: $U_{R1} = 0,8571 \text{ V}$, $U_{R2} = 1,7143 \text{ V}$ a $U_{R3} = 1,4285 \text{ V}$.

Příklad 2.5: Určete napětí a jeho směr na rezistoru R v obvodu na obrázku 2.10. Vypočtěte výkon nebo příkon jednotlivých prvků a ověřte celkovou bilanci výkonu.

$$U_0 = 8 \text{ V}, I_0 = 0,5 \text{ A} \text{ a } R = 15 \Omega.$$



Obrázek 2.10: Obvod

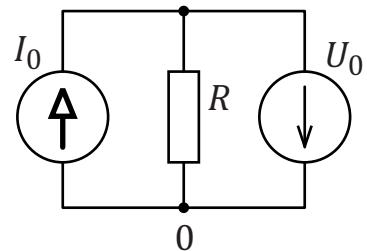
Řešení: Proud I_0 je stejný v celém obvodu, na rezistoru vyvolá úbytek napětí $U_R = R \cdot I_0 = 7,5 \text{ V}$, šipka směřuje zprava doleva. Podle II. Kirchhoffova zákona je na zdroji proudu napětí $U_{I0} = 15,5 \text{ V}$ a chová se jako zdroj energie o výkonu $P_I = -15,5 \cdot 0,5 = -7,75 \text{ W}$. Znaménko - je vloženo z důvodu opačného směru šipek na prvku. Naopak zdroj napětí se chová jako spotřebič o příkonu $P_U = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ W}$, protože směr proudu a napětí na spotřebiči je stejný. Příkon rezistoru je $P_R = 15 \cdot 0,5^2 = 3,75 \text{ W}$.

Součet výkonů na prvcích je tedy:

$$P_I + P_U + P_R = -7,75 + 4 + 3,75 = 0 \text{ W}$$

Bilance výkonů je tedy vyrovnaná.

Příklad 2.6: Určete velikost proudu a jeho směr na zdroji napětí U_0 na obrázku 2.11. Vypočtěte výkon nebo příkon jednotlivých prvků. $U_0 = 18 \text{ V}$, $I_0 = 0,5 \text{ A}$ a $R = 18 \Omega$.



Obrázek 2.11: Obvod

Řešení: Nejprve je vhodné si spodní uzel označit jako referenční. Na výsledné uzlové dvojici, tedy horní uzel proti spodnímu, je napětí určeno zdrojem napětí U_0 . Z tohoto napětí se určí proud rezistorem $I_R = U_0/R = 18/18 = 1 \text{ A}$. Pro horní uzel platí I. Kirchhoffův zákon (kladný směr proudu směrem do uzlu), sestaví se rovnice:

$$\begin{aligned} I_0 + I_U - I_R &= 0 \\ 0,5 + I_U - 1 &= 0 \\ I_0 &= 0,5 \text{ A} \end{aligned}$$

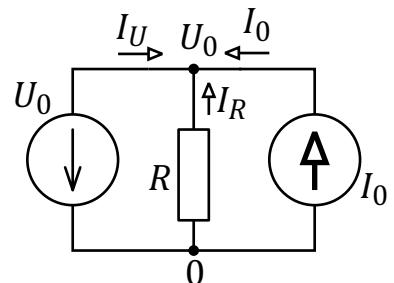
Velikost proudu je $I_U = 0,5 \text{ A}$ a teče směrem nahoru.

Na zdroji proudu jsou směry proudu a napětí opačné, zdroj se chová jako zdroj s výkonem $P_I = -0,5 \cdot 18 = -9 \text{ W}$. Na zdroji napětí jsou směry proudu a napětí také opačné $P_U = 0,5 \cdot -18 = -9 \text{ W}$. Příkon rezistoru: $P_R = 1 \cdot 18 = 18 \text{ W}$.

Celková bilance:

$$P_I + P_U + P_R = -9 - 9 + 18 = 0 \text{ W}$$

Příklad 2.7: Určete proud a jeho směr zdrojem napětí v obvodu 2.12. Po výpočtu ověřete výkonovou bilanci obvodu. Parametry prvků jsou: $U_0 = 20 \text{ V}$, $I_0 = 1 \text{ A}$ a $R = 10 \Omega$.



Obrázek 2.12: Obvod

Řešení: Sestavení obvodové rovnice podle I. K.Z.:

$$\begin{aligned} I_0 + I_R + I_U &= 0 \\ 1 + \frac{0 - U_0}{R} + I_U &= 0 \\ 1 - 2 &= -I_U \\ I_U &= 1 \text{ A} \end{aligned}$$

Výkon - bilance podle šipek:

- Zdroj napětí, šipky nesouhlasné, chová se jako zdroj výkonu

$$P_U = I_U \cdot U_O = 1 \cdot 20 = 20 \text{ W}$$

- Zdroj proudu, šipky nesouhlasné, chová se jako zdroj výkonu

$$P_I = I_0 \cdot U_O = 1 \cdot 20 = 20 \text{ W}$$

- rezistor, šipky souhlasné, chová se jako spotřebič. Příkon:

$$P_R = \frac{U_0^2}{R} = \frac{20^2}{10} = 40 \text{ W}$$

Celková bilance výkonů v obvodu:

Zdroje: $P = P_U + P_I = 20 + 20 = 40 \text{ W}$, spotřebiče: $P_R = 40 \text{ W}$, celková bilance je vyrovnaná.

Proudys i_1 , i_2 a i_3 se určí podle Ohmova zákona z rozdílu napětí na rezistorech R_1 , R_2 a R_3 :

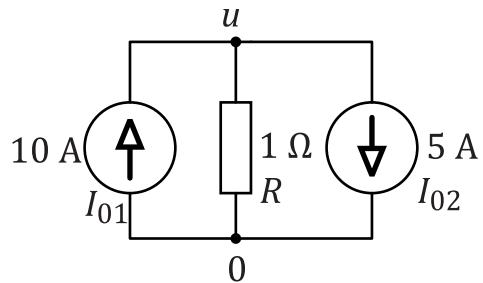
$$\begin{aligned} \frac{U_1 - u}{R_1} + \frac{U_2 - u}{R_2} + \frac{U_3 - u}{R_3} + \frac{0 - u}{R_4} &= 0 \\ u &= \frac{90}{7} \text{ V} \end{aligned}$$

Příklad 2.8: Určete napětí u na rezistoru v obvodu 2.13

Řešení: Aplikace I. K.Z.

$$10 - 5 + \frac{0 - u}{1} = 0$$

$$u = 5 \text{ V}$$



Obrázek 2.13: Obvod

Příklad 2.9: Určete vyznačené napětí u v obvodu 2.14 proti referenčnímu uzlu při následujících parametrech obvodu

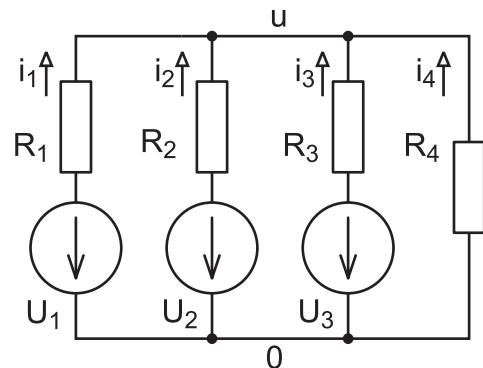
$$R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega;$$

$$R_4 = 20 \Omega; U_1 = 10 \text{ V};$$

$$U_2 = 15 \text{ V} \text{ a } U_3 = 20 \text{ V}$$

Řešení: Sestavení rovnice podle I. K.Z.

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$



Obrázek 2.14: Obvod

Příklad 2.10: Určete vyznačené napětí u proti referenčnímu uzlu v obvodu 2.15 při následujících parametrech obvodu

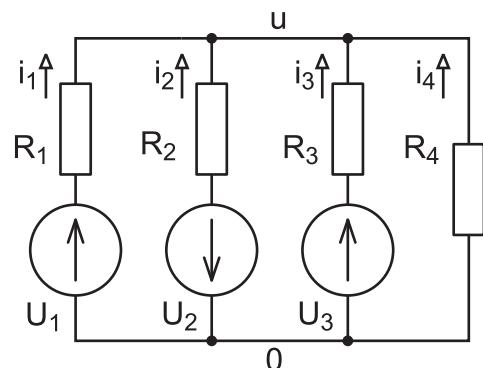
$$R_1 = 5 \Omega; R_2 = 8 \Omega; R_3 = 12 \Omega; R_4 = 20 \Omega;$$

$$U_1 = 10 \text{ V}; U_2 = 15 \text{ V} \text{ a } U_3 = 20 \text{ V}$$

Řešení: Sestavená rovnice podle I KZ:

$$\frac{-10 - u}{5} + \frac{15 - u}{8} + \frac{-20 - u}{12} + \frac{-u}{20} = 0$$

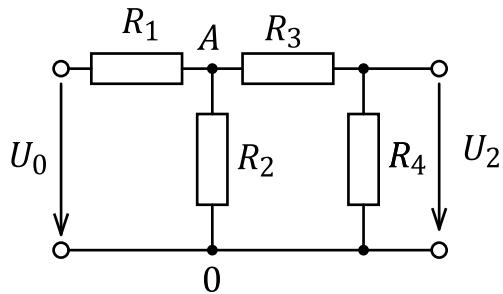
která má řešení $u = -3,909 \text{ V}$.



Obrázek 2.15: Obvod

Příklad 2.11: Určete výstupní napětí nezatíženého děliče U_2 při následujících parametrech obvodu:

$R_1 = 12 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 15 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 18 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 22 \text{ k}\Omega$ a $U_0 = 5 \text{ V}$.



Obrázek 2.16: Obvod

Řešení: Nejprve se určí napětí mezi uzlem A a referenčním uzlem:

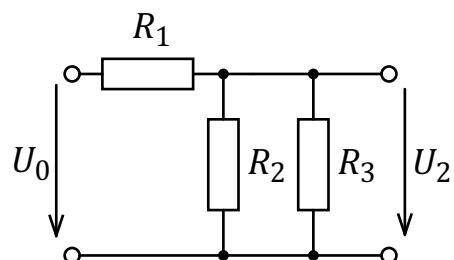
$$U_A = U_0 \frac{R_{234}}{R_1 + R_{234}} = 2,38095 \text{ V} \text{ pro } R_{234} = \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}.$$

Výstupní napětí je potom určeno děličem napětí R_3 a R_4 :

$$U_2 = U_A \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} = 1,3095 \text{ V}$$

Příklad 2.12: Určete velikost rezistoru R_3 při následujících parametrech obvodu:

$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $U_0 = 10 \text{ V}$ a $U_2 = 4 \text{ V}$.



Obrázek 2.17: Obvod

Řešení: Do vztahu pro napěťový dělič se dosadí známé hodnoty:

$$4 = 10 \frac{R_{23}}{10 \cdot 10^3 + R_{23}}$$

kde $1/R_{23} = 1/R_2 + 1/R_3$, po úpravě a výpočtu $R_{23} = \frac{40}{6}$
se dále určí odporník rezistoru R_3 :

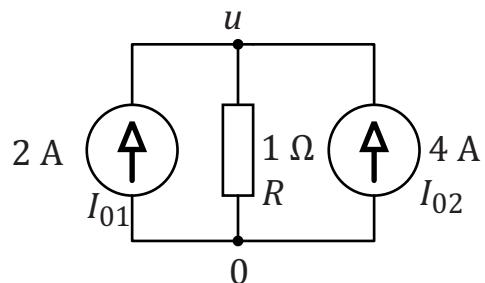
Výpočet rezistoru:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_3} &= \frac{6}{10 \cdot 10^3} - \frac{1}{10 \cdot 10^3} \\ \frac{1}{R_3} &= \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \\ R_3 &= 20 \cdot 10^3 \Omega \end{aligned}$$

2.5 Neřešené příklady

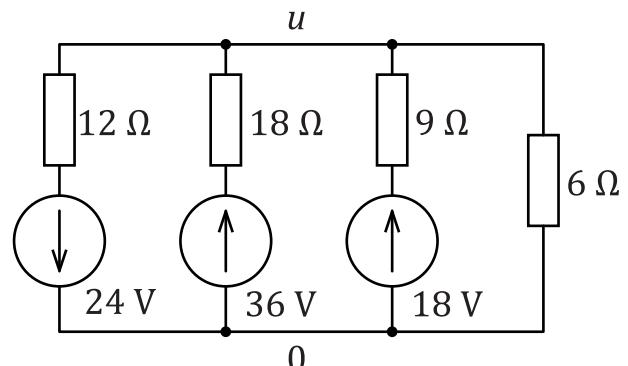
Příklad 2.13: Pro vyznačené hodnoty na obvodu určete napětí u .

Řešení: $u = 6 \text{ V}$



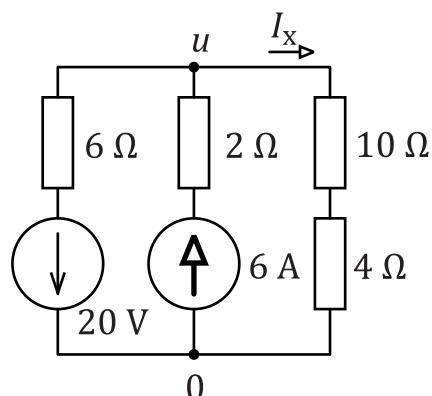
Příklad 2.14: Pro vyznačené hodnoty na obvodu určete napětí u .

Řešení: $u = -4,8 \text{ V}$



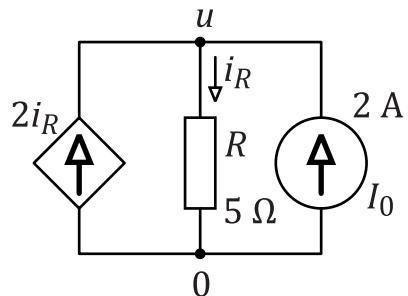
Příklad 2.15: Pro vyznačené hodnoty na obvodu určete napětí u a proud I_x .

Řešení: $u = 39,2 \text{ A}$ a $I_x = 2,8 \text{ A}$



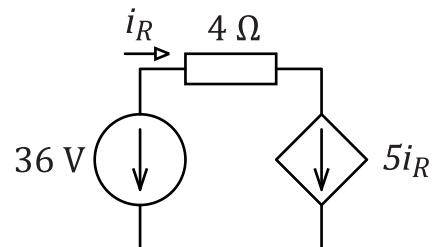
Příklad 2.16: Pro vyznačené hodnoty na obvodu určete napětí u a proud i_R .

Řešení: $u = -10 \text{ V}$, $i_R = -2 \text{ A}$



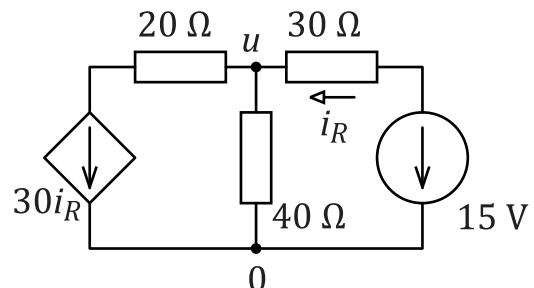
Příklad 2.17: Pro vyznačené hodnoty na obvodu určete proud i_R .

Řešení: $i_R = 4 \text{ A}$



Příklad 2.18: Pro vyznačené hodnoty na obvodu určete proud i_R a napětí u .

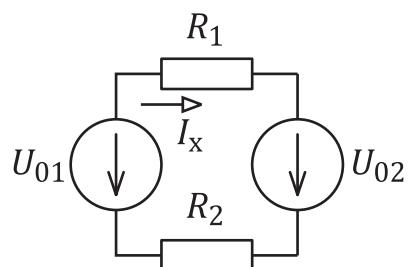
Řešení: $u = 10 \text{ V}$, $i_R = 0,16667 \text{ A}$



Příklad 2.19: Pro zadané hodnoty určete proud I_x .

$U_{01} = 13 \text{ V}$, $U_{02} = 21 \text{ V}$, $R_1 = 37 \Omega$ a $R_2 = 27 \Omega$.

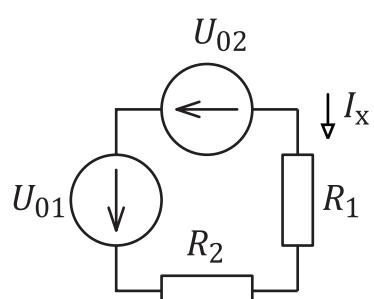
Řešení: $I_x = -0,125 \text{ A}$.



Příklad 2.20: Pro zadané hodnoty určete proud I_x .

$U_{01} = 33 \text{ V}$, $U_{02} = 47 \text{ V}$, $R_1 = 330 \Omega$ a $R_2 = 470 \Omega$

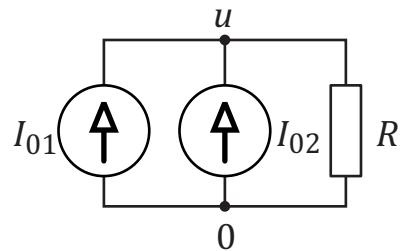
Řešení: $I_x = 0,1 \text{ A}$



Příklad 2.21: Pro zadané hodnoty vyčtěte napětí u .

$$I_{01} = 12 \text{ A}, U_{02} = 20 \text{ A} \text{ a } R = 0,5 \Omega.$$

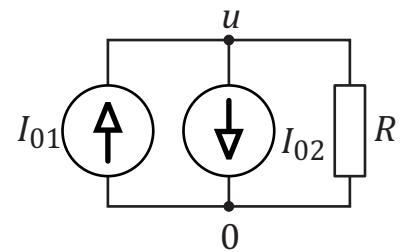
Řešení: $u = 16 \text{ V}$.



Příklad 2.22: Pro zadané hodnoty vyčtěte napětí u .

$$I_{01} = 220 \text{ mA}, U_{02} = 330 \text{ mA} \text{ a } R = 22 \Omega.$$

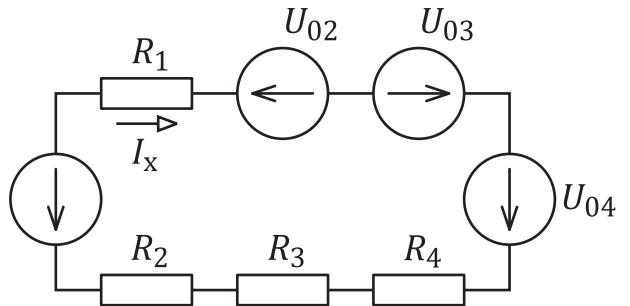
Řešení: $u = -2,42 \text{ V}$



Příklad 2.23: Pro zadané hodnoty určete proud I_x .

$$U_{01} = 12 \text{ V}, U_{02} = 14 \text{ V}, U_{03} = 16 \text{ V}, U_{04} = U_{01} = 18 \text{ V}, R_1 = 4,7 \Omega, R_2 = 5,8 \Omega, R_3 = 7,6 \Omega \text{ a } R_4 = 10,2 \Omega.$$

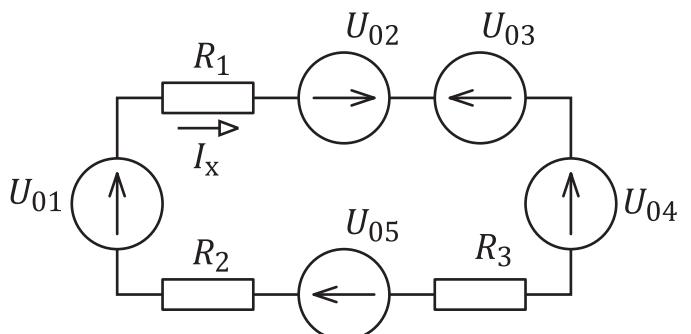
Řešení: $I_x = 0,28269 \text{ A}$



Příklad 2.24: Pro zadané hodnoty určete proud I_x .

$$U_{01} = 22 \text{ V}, U_{02} = 34 \text{ V}, U_{03} = 46 \text{ V}, U_{04} = 58 \text{ V}, U_{05} = 87 \text{ V}, R_1 = 41,7 \Omega, R_2 = 58,8 \Omega \text{ a } R_3 = 101,2 \Omega.$$

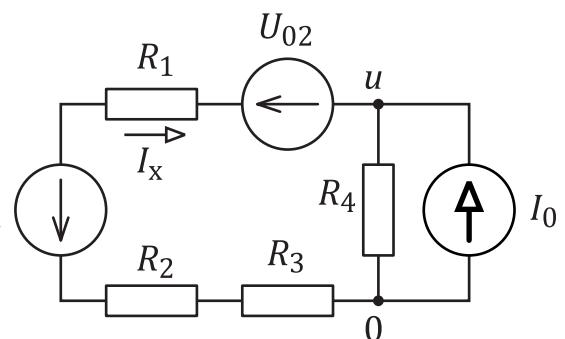
Řešení: $I_x = 0,19336 \text{ A}$



Příklad 2.25: Pro zadané hodnoty určete napětí u vůči referenčnímu uzlu.

$$R_1 = 41,7 \Omega, R_2 = 18,8 \Omega, R_3 = 22,2 \Omega, R_4 = 45,2 \Omega, U_{01} = 22 \text{ V}, U_{02} = 34 \text{ V} \text{ a } U_{01} = 22 \text{ V}, I_0 = 2,42 \text{ A}.$$

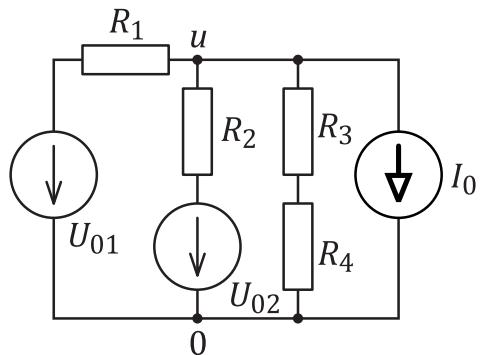
Řešení: $u = 90,518 \text{ V}$



Příklad 2.26: Pro zadané hodnoty určete napětí u vůči referenčnímu uzlu.

$R_1 = 41,7 \Omega$, $R_2 = 58,8 \Omega$, $R_3 = 101,2 \Omega$, $R_4 = 88,2 \Omega$, $U_{01} = 33 \text{ V}$, $U_{02} = 36 \text{ V}$ a $I_0 = 1,32 \text{ A}$.

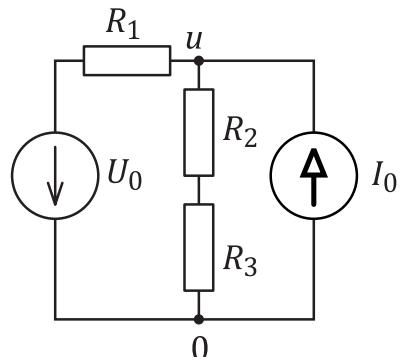
Řešení: $u = 1,807 \text{ V}$



Příklad 2.27: Pro zadané hodnoty určete napětí u vůči referenčnímu uzlu.

$R_1 = 41,7 \Omega$, $R_2 = 58,8 \Omega$, $R_3 = 101,2 \Omega$, $U_0 = 22 \text{ V}$ a $I_0 = 0,55 \text{ A}$.

Řešení: $u = 35,65 \text{ V}$

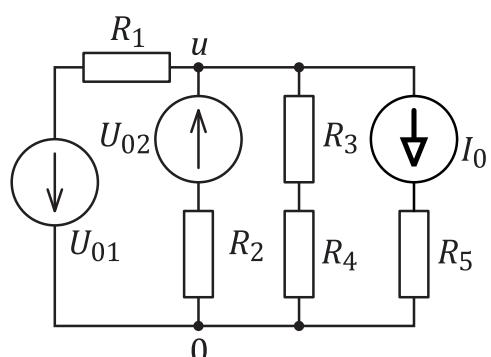


Obrázek 2.18: Obvod

Příklad 2.28: Pro zadané hodnoty určete napětí u vůči referenčnímu uzlu.

$R_1 = 41,7 \Omega$, $R_2 = 58,8 \Omega$, $R_3 = 33,2 \Omega$, $R_4 = 47,2 \Omega$, $R_5 = 12,2 \Omega$, $U_{01} = 22 \text{ V}$, $U_{02} = 22 \text{ V}$ a $I_0 = 1,33 \text{ A}$.

Řešení: $u = -22,02 \text{ V}$



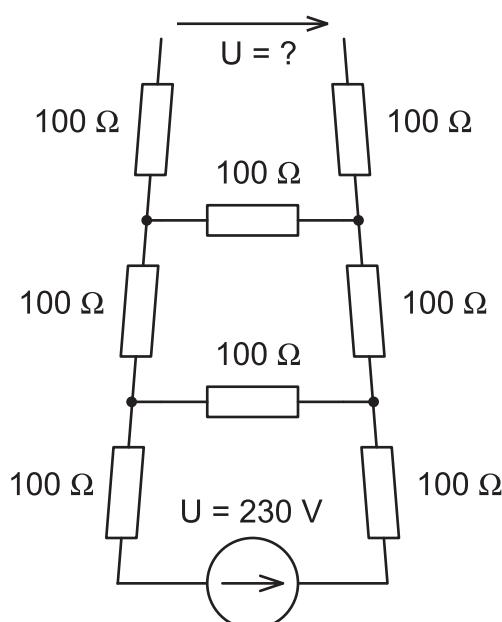
Obrázek 2.19: Obvod

Příklad 2.29: Určete velikost vyznačeného napětí na obrázku č. 2.20

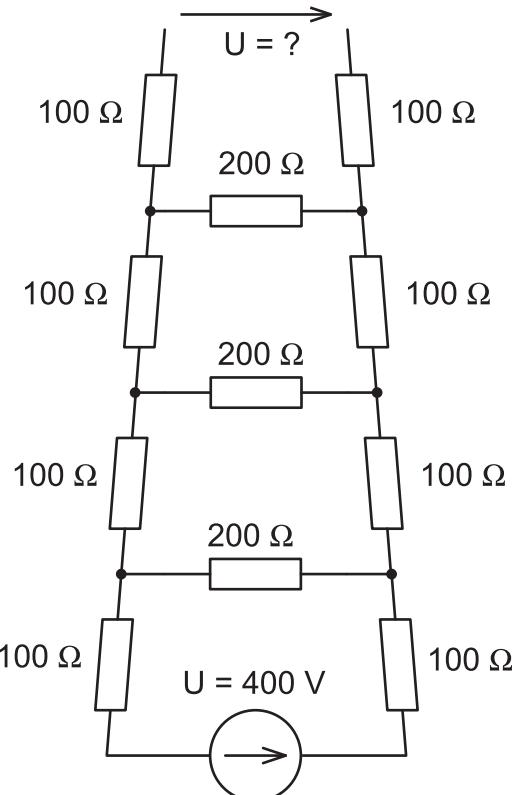
Řešení: $U = 20,91 \text{ V}$

Příklad 2.30: Určete velikost vyznačeného napětí na obrázku č. 2.21

Řešení: $U = 30,77 \text{ V}$



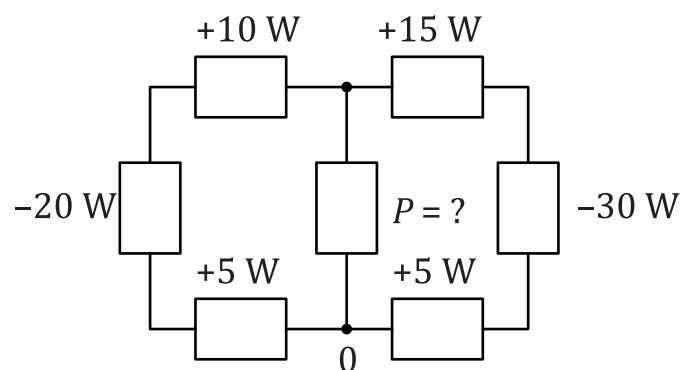
Obrázek 2.20: Obvod - žebřík



Obrázek 2.21: Obvod - žebřík

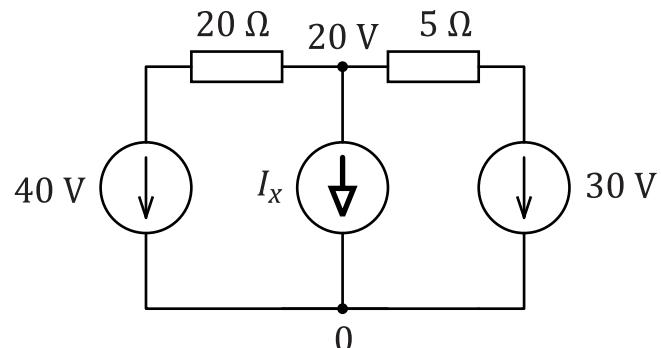
Příklad 2.31: Na schématu jsou vyznačeny prvky a jejich výkonový příjem a výdej. Určete příkon posledního prvku s nevyznačeným příkonem.

Řešení: $P = 15 \text{ W}$



Příklad 2.32: Určete proud zdroje I_x

Řešení: $I_x = 3 \text{ A}$

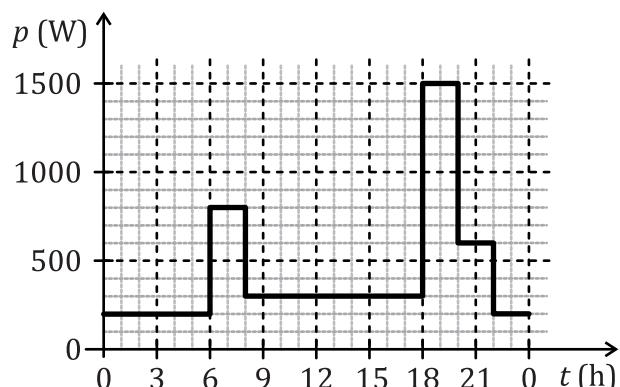


Příklad 2.33: V domácnosti je průměrná denní spotřeba vyznačena na grafu 2.22.

Určete: a) celkovou denní spotřebu v kWh,
b) Denní náklady na spotřebu elektrické energie (při vynechání paušálních plateb) při ceně elektřiny 5 Kč za 1 kWh.

Řešení:

a) 10,4 kWh, b) 52,-Kč



Obrázek 2.22: Průběh spotřeby elektrické energie v domácnosti

Kapitola 3

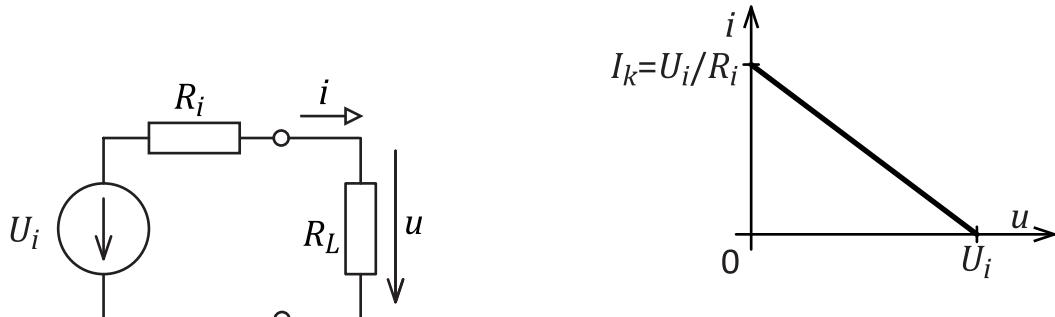
Náhrada a zjednodušování v elektrických obvodech

3.1 Lineární aktivní prvky

Ideální zdroje napětí a proudu jsou jako prvky vzdáleny od reálných zdrojů. Realitě bližší jsou lineární zdroje, kde při odebrání elektrického výkonu dochází k poklesu hlavní veličiny na výstupu zdroje.

3.1.1 Lineární zdroj napětí

Lineární zdroj napětí vznikne zařazením rezistoru do série k ideálnímu zdroji napětí.



Obrázek 3.1: Lineární zdroj napětí - schéma

Obrázek 3.2: Výstupní voltampérová charakteristika lineárního zdroje napětí

Lineárnímu zdroji napětí klesá velikost výstupního napětí úměrně na odebíraném proudu.

$$u = U_i - R_i \cdot i \quad (3.1)$$

Při zkratu je velikost proudu I_k omezená, je dána napětím U_i a velikostí vnitřního odporu R_i .

$$I_k = \frac{U_i}{R_i} \quad (3.2)$$

Pokud je lineární zdroj napětí zatížen rezistorem R_L je velikost výstupního proudu i_{RL} dána vzorcem:

$$i_{RL} = \frac{U_i}{R_i + R_L} \quad (3.3)$$

A velikost napětí:

$$u_{RL} = U_i \frac{R_L}{R_i + R_L} \quad (3.4)$$

Výstupní výkon lineárního zdroje zatíženého rezistorem R_L :

$$P_Z = u_{RL} i_{RL} = U_i \frac{R_L}{R_i + R_L} \cdot \frac{U_i}{R_i + R_L} = U_i^2 \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \quad (3.5)$$

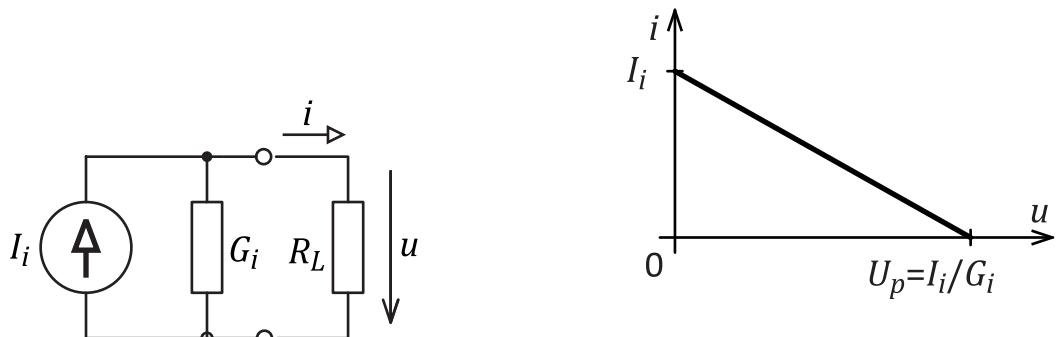
a vnitřní ztrátový výkon zatíženého zdroje (ztráta na vnitřním odporu):

$$P_i = R_i \cdot i^2 = U_i^2 \frac{R_i}{(R_i + R_L)^2} \quad (3.6)$$

Lineární zdroj napětí má maximální výkon, pokud se odpory R_i a R_L rovnají. Výstupní napětí u je přitom poloviční vůči napětí U_i . Tehdy říkáme, že je lineární zdroj napětí **přizpůsobený**.

3.1.2 Lineární zdroj proudu

Lineární zdroj proudu vznikne zařazením rezistoru (konduktoru) paralelně k ideálnímu zdroji proudu.



Obrázek 3.4: Výstupní voltampérová charakteristika lineárního zdroje napětí

Obrázek 3.3: lineární zdroj proudu - schéma

Lineární zdroj proudu má velikost výstupního proudu závislou na napětí na výstupních svorkách.

$$i = I_i - G_i \cdot u \quad (3.7)$$

Lineárnímu zdroji proudu klesá proud úměrně s růstem napětí na výstupu zdroje. Při zapojení bez zátěže je velikost napětí naprázdno U_P omezeno, je dán proudem I_i a velikostí vnitřního konduktoru G_i

$$U_P = \frac{I_i}{G_i} \quad (3.8)$$

Pokud se lineární zdroj proudu zátíží rezistorem $R_L = 1/G_L$, je velikost napětí dáná vzorcem:

$$u_{GL} = \frac{I_i}{G_i + G_L} = \frac{I_i R_L}{G_i R_L + 1} \quad (3.9)$$

A velikost proudu:

$$i_{GL} = I_i \frac{G_L}{G_i + G_L} \quad (3.10)$$

Výstupní výkon lineárního zdroje zatíženého konduktorem G_L :

$$P_Z = u_{GL} i_{GL} = I_i \frac{G_L}{G_i + G_L} \cdot I_i \frac{G_L}{G_i + G_L} = I_i^2 \frac{G_L}{(G_i + G_L)^2} \quad (3.11)$$

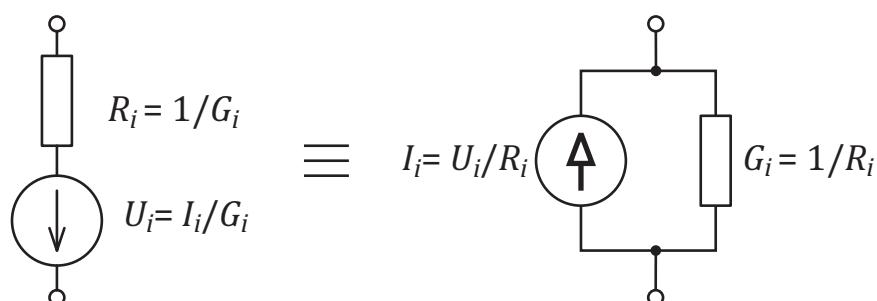
a vnitřní ztrátový výkon zatíženého zdroje (ztráta na vnitřní vodivosti)

$$P_i = G_i \cdot u^2 = I_i^2 \frac{G_i}{(G_i + G_L)^2} \quad (3.12)$$

Výstupní výkon lineárního zdroje proudu je maximální, pokud se vodivosti G_i a G_L rovnají. Výstupní proud i je přitom poloviční vůči proudu I_i . Tehdy říkáme, že je lineární zdroj proudu **přizpůsobený**.

3.1.3 Ekvivalence lineárního zdroje proudu a napětí

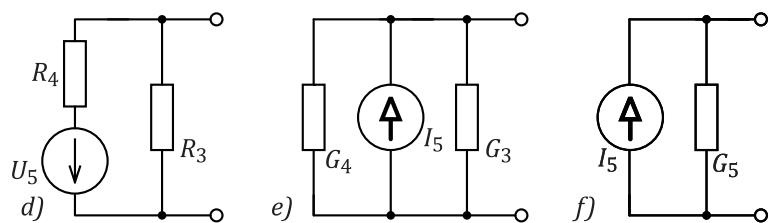
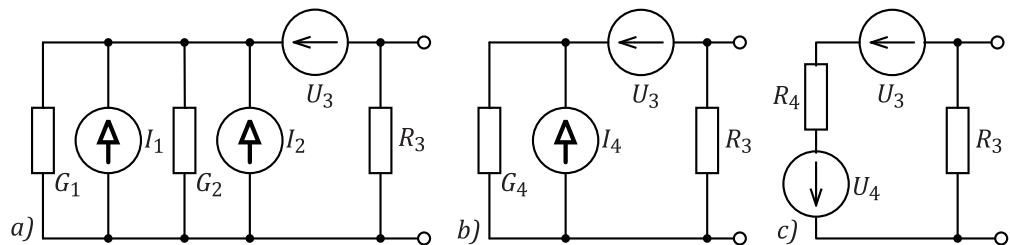
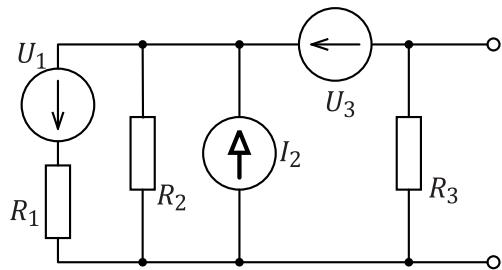
Z předchozího výkladu se dá odvodit ekvivalence lineárního zdroje napětí a lineárního zdroje proudu. Proto je při analýze obvodu často výhodné nahradit jeden typ lineárního zdroje za druhý. Změnou se může získat obvod, který je možné dálé zjednodušit metodou postupného zjednodušování. Vzorce pro přepočet jsou uvedeny ve schématu u jednotlivých prvků.



Obrázek 3.5: Ekvivalence lineárních zdrojů napětí a proudu

Příklad 3.1: Zjednodušte obvod při použití ekvivalence lineárního zdroje proudu a napětí a ekvivalentních náhrad sériově a paralelně řazených prvků

Řešení:

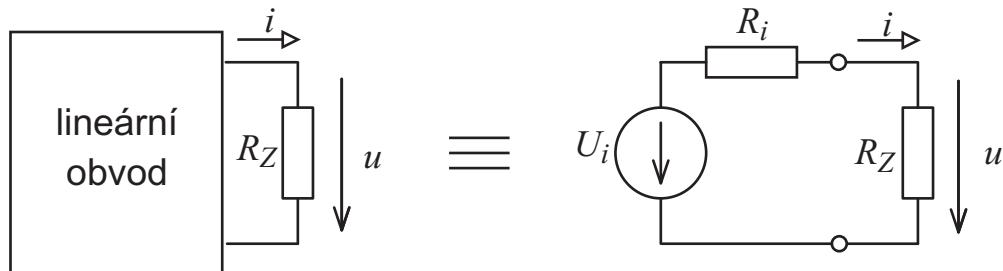


Obrázek 3.6: Postupné zjednodušování obvodu: a) lineární zdroj napětí U_1 a R_1 se zamění za lineární zdroj proudu $I_1 = U_1/R_1$ a $G_1 = 1/R_1$; b) spojení lineární zdroj proudu: $I_4 = I_1 + I_2$ a $G_4 = G_1 + G_2$; c) Záměna druhů zdrojů: $U_4 = I_4/G_4$ a $R_4 = 1/G_4$; d) Řazení zdrojů: $U_5 = U_4 + U_3$. e) Záměna druhů zdrojů: $I_5 = U_5/R_4$ a G_4 se nechá původní. f) Součet konduktorů: $G_5 = G_4 + G_3$

3.2 Obvodové teorémy

3.2.1 Theveninův teorém

Lineární aktivní dvojpól je možné nahradit sériovým spojením ideálního zdroje napětí U_i a rezistoru R_i , kde U_i je napětí dvojpólu naprázdno bez připojené zátěže a R_i se chápe jako vnitřní odpór, tedy poměr mezi napětím naprázdno U_p a proudem nakrátko I_k .

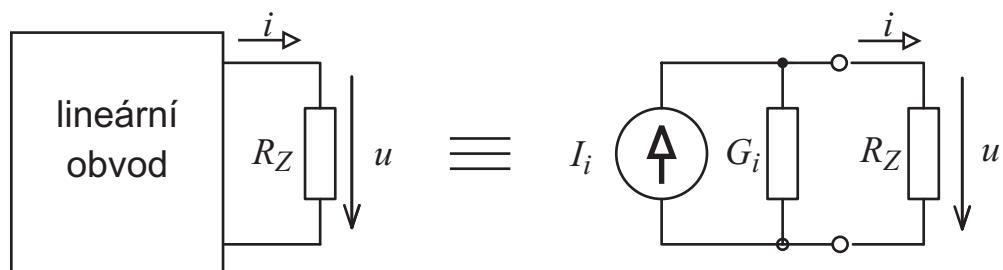


Obrázek 3.7: Theveninův teorém

Pokud lineární aktivní dvojpól neobsahuje řízené zdroje, je možné R_i spočítat tak, že se zdroje napětí nahradí zkratem a zdroje proudu nahradí rozpojeným obvodem. Poté se spočítá celkový odpór zapojení z pohledu výstupních svorek, který se rovná hodnotě R_i . (R_i je odpór daného dvojpólu po vyjmutí zdrojů)

3.2.2 Nortonův teorém

Lineární aktivní dvojpól je možné nahradit paralelním spojením ideálního zdroje proudu I_i a konduktoru G_i , kde I_i je proud dvojpólu nakrátko a G_i se chápe jako vnitřní vodivost, tedy poměr mezi proudem nakrátko a napětím naprázdno.



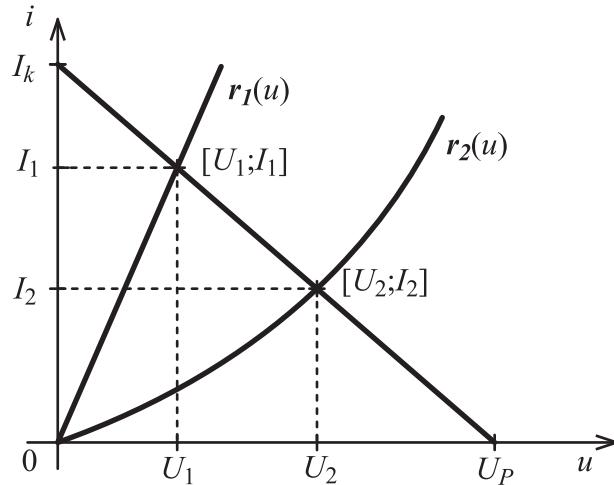
Obrázek 3.8: Nortonův teorém

Stejně jako u Theveninova teorému je možné G_i určit tak, že se zdroje napětí nahradí zkratem a zdroje proudu nahradí rozpojeným obvodem. Poté se spočítá celková vodivost zapojení, která se rovná hodnotě G_i . Lineární dvojpól nesmí obsahovat řízené zdroje.

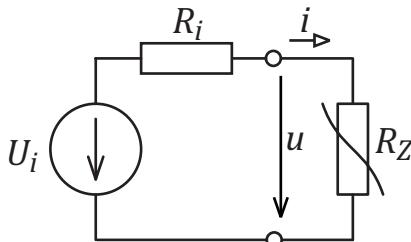
3.2.3 Určení pracovního bodu pomocí zatěžovací přímkы

Charakteristika lineárního zdroje napětí a proudu je úsečka, která prochází z bodu nulového napětí při připojení zátěže nakrátko do bodu nulového proudu při odpojení zátěže. Po

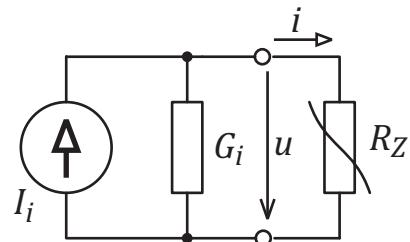
připojení lineárního nebo nelineárního rezistoru je možné nalézt hodnotu napětí a proudu zdroje na průsečíku voltampérové charakteristiky rezistoru a voltampérové charakteristiky lineárního zdroje.



Obrázek 3.9: Určení pracovního bodu pomocí zatěžovací přímky



Obrázek 3.10: Nelineární rezistor připojený na lineární zdroj napětí



Obrázek 3.11: Nelineární rezistor připojený na lineární zdroj proudu

Příklad 3.2: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Theveninova teorému pro obvod obr. 3.12.

Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$ a $U_0 = 15 \text{ V}$.

Řešení: Podle Theveninova teorému se určuje napětí naprázno spolu s vnitřním odporem. Napětí naprázno U_P odpovídá výstupnímu napětí děliče napětí.

$$U_P = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 15 \frac{10}{15} = 10 \text{ V}$$

Vnitřní odpor se může zjistit v případě lineárního obvodu aplikací metody superpozice. Zdroj vnitřního napětí se nahradí zkratem. Vzhledem k vnějším svorkám je výsledný vnitřní odpor obvodu dán paralelní kombinací odporu R_1 a R_2 .

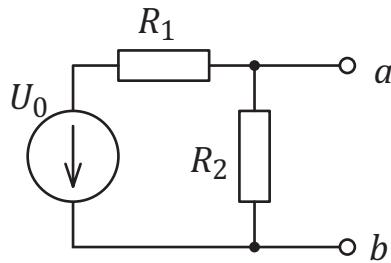
$$R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{50}{15} = 3,33 \Omega$$

Příklad 3.3: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Theveninova teorému pro obvod obr. 3.13.

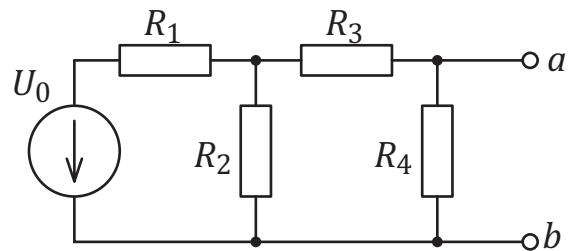
Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$ a $U_0 = 15 \text{ V}$.

Řešení: Příklad se řeší jako předcházející. Nejprve se určí napětí naprátzno U_P . Obvod se zjednoduší metodou ekvivalentních náhrad. Vnitřní odpor R_i se určí postupným zjednodušením obvodu s odstraněným zdrojem napětí.

$$U_i = \frac{60}{11} \text{ V} \text{ a } R_i = \frac{50}{11} \Omega.$$



Obrázek 3.12: Obvod



Obrázek 3.13: Obvod

Příklad 3.4: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Theveninova teorému pro obvod obr. 3.14.

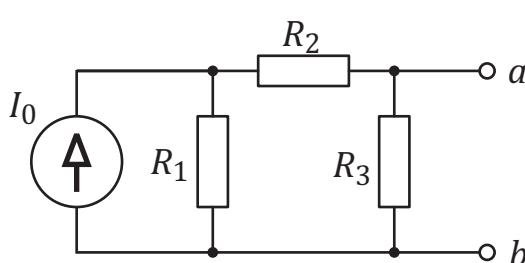
Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$ a $I_0 = 2 \text{ A}$.

Řešení: Proud I_0 se dělí mezi větvemi R_1 a R_{23} , $U_p = 8 \text{ V}$ a $R_i = 6 \Omega$

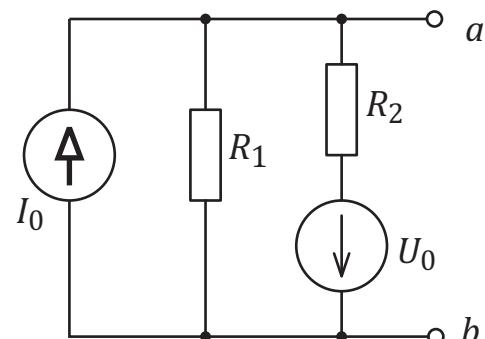
Příklad 3.5: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Theveninova teorému pro obvod obr. 3.15.

Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $U_0 = 15 \text{ V}$ a $I_0 = 2 \text{ A}$.

Řešení: Větev R_2 a U_0 se podle věty ekvivalence lineárního zdroje proudu a napětí nahradí lineárním zdrojem proudu, obvod se zjednoduší a nahradí se lineárním zdrojem napětí. $U_p = 17,5 \text{ V}$ a $R_i = 5 \Omega$.



Obrázek 3.14: Obvod



Obrázek 3.15: Obvod

Příklad 3.6: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Nortonova teorému pro obvod obr. 3.12.

Řešení: Proud I_i se spočítá jako výstupní proud nakrátko: $I_i = \frac{U_0}{R_1}$; vnitřní vodivost G_i se vypočítá z napětí naprázno U_p , které je rovno výstupnímu napětí napěťového děliče: $U_p = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Vnitřní vodivost je tedy $G_i = \frac{I_i}{U_p}$

Příklad 3.7: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Nortonova teorému pro obvod obr. 3.13.

Řešení: Proud I_i je roven výstupnímu proudu nakrátko $I_k = \frac{U_0}{R_1 + R_2 || R_3}$, kde $R_2 || R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$. G_i je převrácená hodnota vnitřního odporu R_i ekvivalentního lineárního zdroje napětí: $G_i = \frac{1}{R_i}$. R_i se vypočítá při uvažování metody superpozice nahrazením zdroje napětí zkratekem:

$$R_i = (R_1 || R_2 + R_3) || R_4 = \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) || R_4 = \frac{\left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) \cdot R_4}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4}$$

pro G_i tedy platí:

$$G_i = \frac{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4}{\left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) \cdot R_4}$$

Příklad 3.8: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Nortonova teorému pro obvod obr. 3.15.

Řešení: Ekvivalentní nahradit zdroje napětí U_0 a rezistoru R_2 lineárním zdrojem proudu a zjednodušení.

Příklad 3.9: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Theveninova teorému pro obvod obr. 3.16.

Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $U_0 = 15 \text{ V}$ a $I_0 = 2 \text{ A}$.

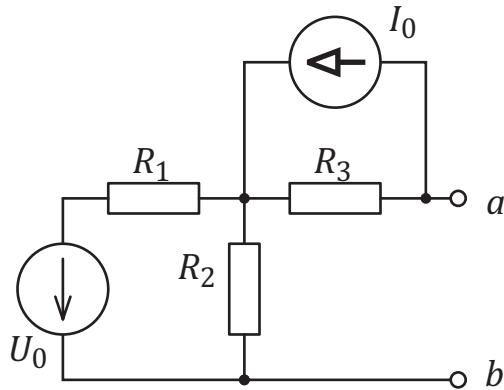
Řešení: Nahradit část obvodu U_0 , R_1 a R_2 lineárním zdrojem napětí stejně jako části I_0 a R_3 . Výsledný obvod zjednodušit na lineární zdroj napětí. $U_p = -5 \text{ V}$ a $R_i = 8 \frac{1}{3} \Omega$

Příklad 3.10: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Theveninova teorému pro obvod obr. 3.17.

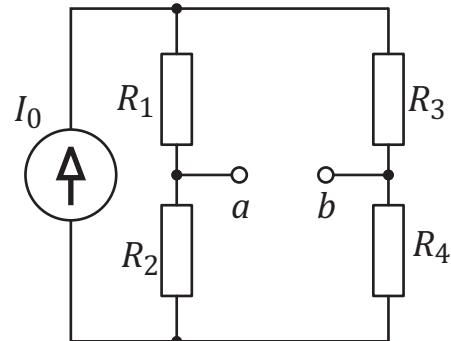
Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$ a $I_0 = 2 \text{ A}$.

Řešení: Napětí naprázdně je rozdíl úbytků napětí na rezistorech R_2 a R_4 , které jsou dány proudy větvemi s rezistory R_1, R_2 a R_3, R_4 . Tyto proudy se určí vzorcem pro proudový dělič. Proto $U_{Pab} = 36 - 32 = 4 \text{ V}$

Vnitřní odpor se určí aplikací metody superpozice. Odstraní se zdroj proudu. Výsledný odpor je dán paralelní kombinací odporu výsledných větví R_1 , R_3 a R_2 a R_4 a je roven $R_i = 21 \Omega$.



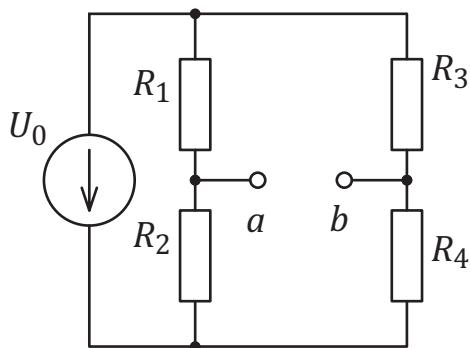
Obrázek 3.16: Obvod



Obrázek 3.17: Obvod

Příklad 3.11: Nalezněte parametry prvků náhradního obvodu podle Theveninova teorému pro obvod obr. 3.18. Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$ a $U_0 = 15 \text{ V}$.

Řešení: Napětí naprátzno je rozdíl výstupních napětí na napěťových děličích R_1, R_2 a R_3, R_4 . $U_p = 11,25 - 10 = 1,25 \text{ V}$. Vnitřní odpor zdroje se určí tak, že se podle metody superpozice nahradí zdroj napětí zkratem a vypočte se odpor výsledného obvodu vzhledem ke svorkám **a** a **b**: $R_1 = 10||30 + 20||40 = 20\frac{5}{6} \Omega$



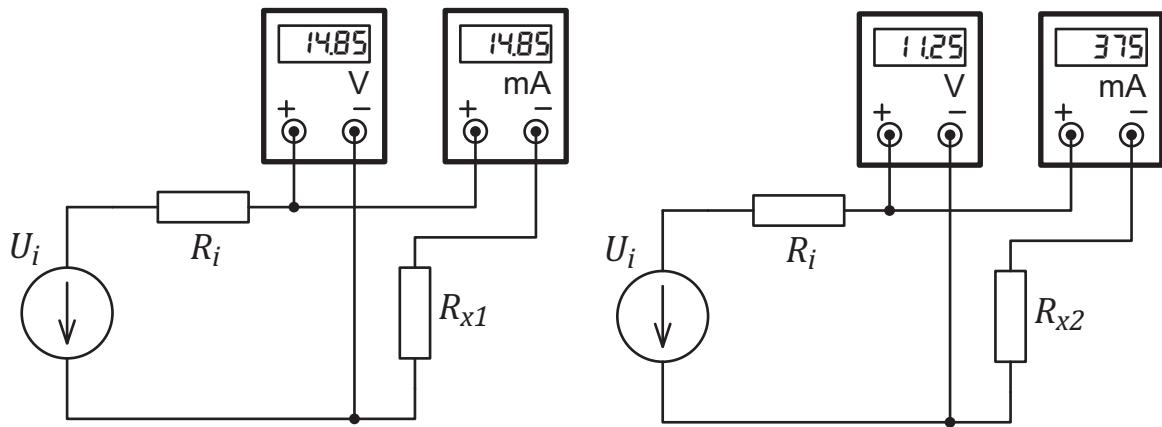
Obrázek 3.18: Obvod

Příklad* 3.12: Náhradní obvod podle Theveninova teorému (obr. 3.19) je nejprve zatížen jedním rezistorem o neznámém odporu R_{x1} a podruhé rezistorem o neznámém odporu R_{x2} . Hodnoty veličin jsou zobrazené na multimetrech připojených do obvodu, vlevo jde o první případ, vpravo o druhý. Určete neznámé hodnoty R_{x1} a R_{x2} . Určete napětí vnitřního zdroje U_i a vnitřní odpor R_i . Vliv přístrojů na obvod je zanedbán.

Řešení: Výpočet odporů:

$$R_{x1} = \frac{14,85}{14,85 \cdot 10^{-3}} = 1000 \Omega$$

$$R_{x2} = \frac{11,25}{375 \cdot 10^{-3}} = 30 \Omega$$



Obrázek 3.19: Obvod

Parametry obvodu podle Theveninova teorému se vypočtou pomocí vytvořené soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_i - R_i \cdot I_1 \\ U_2 &= U_i - R_i \cdot I_2 \end{aligned}$$

Rovnice se od sebe odečtou, a vypočte se vnitřní odpor \$R_i\$:

$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= -R_i \cdot I_1 + R_i \cdot I_2 \\ U_1 - U_2 &= -R_i (I_1 - I_2) \\ -\frac{U_1 - U_2}{I_1 - I_2} &= R_i \end{aligned}$$

a napětí vnitřního zdroje \$U_i\$

$$U_i = U_1 + R_i \cdot I_1$$

Po dosazení:

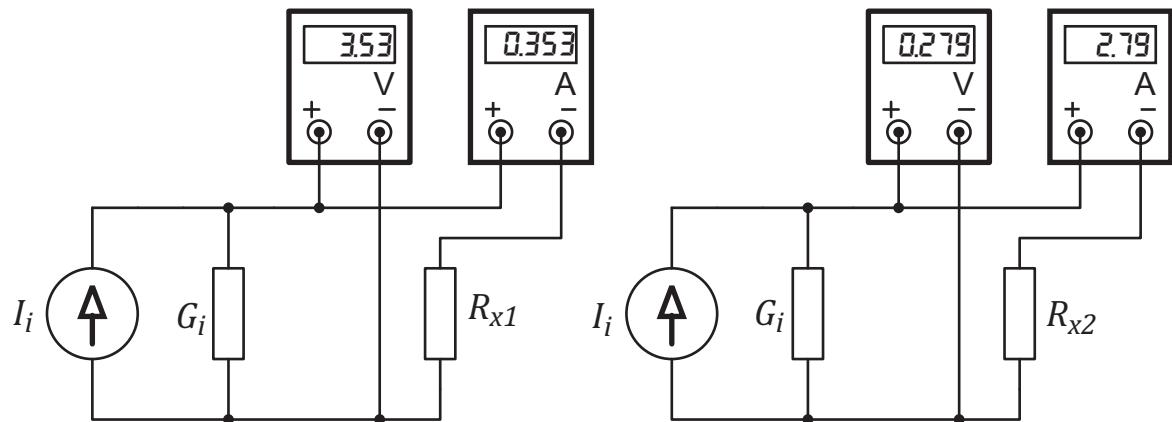
$$\begin{aligned} R_i &= 10 \Omega \\ U_i &= 15 \text{ V} \end{aligned}$$

Příklad 3.13: Náhradní obvod podle Nortonova teorému (obr. 3.20) je nejprve zatížen jedním rezistorem o neznámém odporu \$R_{x1}\$ a podruhé rezistorem o neznámém odporu \$R_{x2}\$. Hodnoty jsou zobrazené na připojených multimetrech, vlevo jde o první případ, vpravo o druhý. Určete neznámé hodnoty \$R_{x1}\$ a \$R_{x2}\$. Určete proud vnitřního zdroje \$I_i\$ a vnitřní vodivost \$G_i\$. Sériový odpor ampérmetru zanedbejte.

Řešení: Řešení je podobné jako u předchozího příkladu. Výpočet odporů:

$$R_{x1} = \frac{3,53}{0,353} = 10 \Omega$$

$$R_{x2} = \frac{0,279}{2,79} = 0,1 \Omega$$



Obrázek 3.20: Obvod

Parametry obvodu podle Nortonova teorému se vypočtou pomocí vytvořené soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}I_1 &= I_i - G_i \cdot U_1 \\I_2 &= I_i - G_i \cdot U_2\end{aligned}$$

Rovnice se od sebe odečtou, a vypočte se vnitřní vodivost G_i :

$$\begin{aligned}I_1 - I_2 &= -G_i \cdot U_1 + G_i \cdot U_2 \\I_1 - I_2 &= -G_i (U_1 - U_2) \\-\frac{I_1 - I_2}{U_1 - U_2} &= G_i\end{aligned}$$

a proud vnitřního zdroje I_i

$$I_i = I_1 + G_i \cdot U_1$$

Po dosazení:

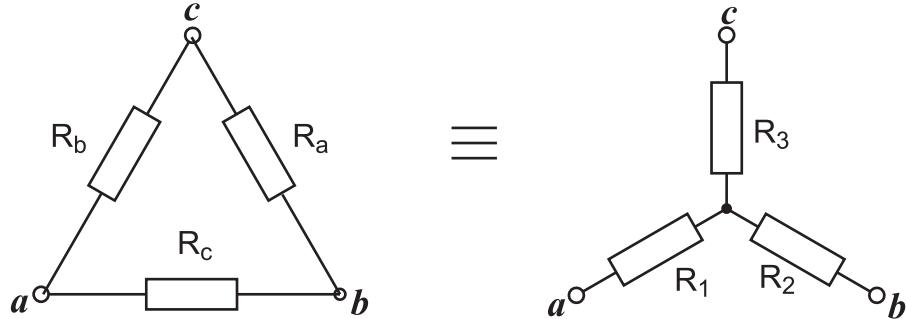
$$\begin{aligned}G_i &= 0,75 \text{ S} \\I_i &= 3 \text{ A}\end{aligned}$$

3.3 Obvodové náhrady

3.3.1 Transfigurace

Transfigurace - popis

Transfigurace je náhrada části obvodu částí s jiným zapojením, ale se stejnými vlastnostmi. Při analýze obvodu se nejčastěji používá náhrada Δ —Y nebo opačně Y— Δ .



Obrázek 3.21: Transfigurace

Transfigurace Δ —Y : Odpor rezistorů v zapojení Y (větve s rezistory R_1 , R_2 a R_3 v obrázku 3.3.1) se vypočítá:

$$R_1 = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (3.13)$$

$$R_2 = \frac{R_c \cdot R_a}{R_a + R_b + R_c} \quad (3.14)$$

$$R_3 = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (3.15)$$

Transfigurace Y— Δ : Odpor rezistorů v zapojení Δ (větve s rezistory R_a , R_b a R_c v obrázku 3.3.1) se vypočítá:

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_1} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \quad (3.16)$$

$$R_b = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_2} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \quad (3.17)$$

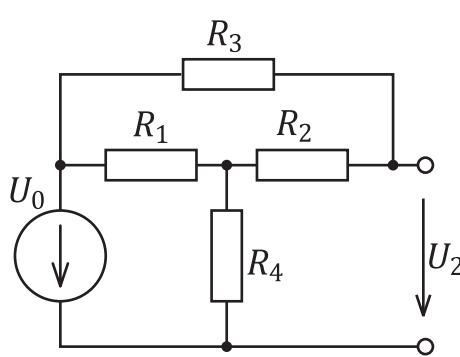
$$R_c = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}{R_3} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \quad (3.18)$$

Pokud jsou obvody vyvážené, tak pro $R_Y = R_1 = R_2 = R_3$ a $R_\Delta = R_a = R_b = R_c$ platí

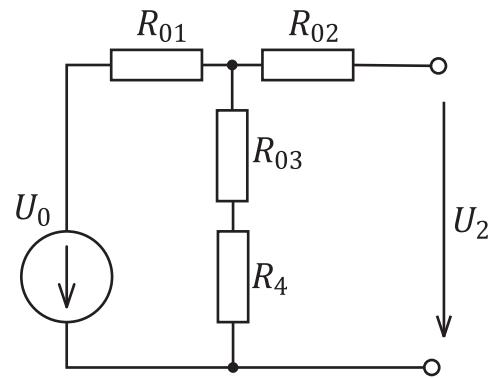
$$R_\Delta = 3 \cdot R_Y \quad \text{nebo} \quad R_Y = \frac{1}{3} \cdot R_\Delta \quad (3.19)$$

Transfigurace - řešené příklady

Příklad 3.14: Určete napětí U_2 v obvodu na obrázku 3.22 pomocí transfigurace Δ — Y pro parametry obvodu: $R_1 = R_2 = R$, $R_3 = aR$ a $R_4 = R/a$.



Obrázek 3.22: Obvod



Obrázek 3.23: Obvod

Řešení: Obvod získaný transfigurací je na obrázku č. 3.23, přičemž platí:

$$R_{01} = \frac{aR \cdot R}{2R + aR}$$

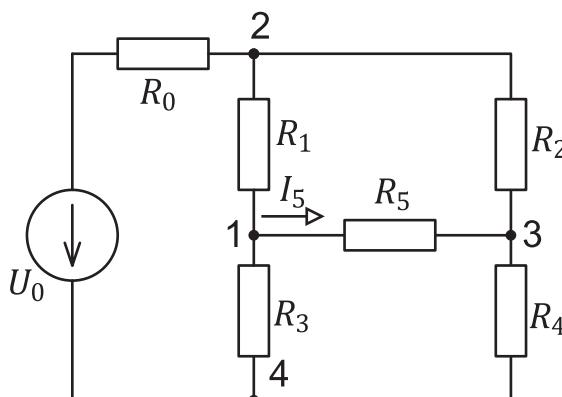
$$R_{02} = \frac{aR \cdot R}{2R + aR}$$

$$R_{03} = \frac{aR \cdot R}{2R + aR}$$

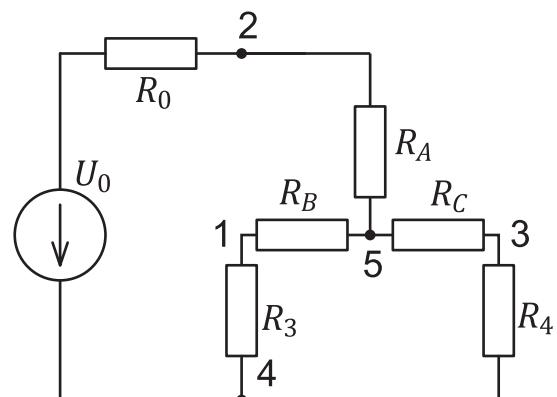
Pomocí vztahu pro dělič se pak dostane:

$$U_2 = U_0 \frac{R_{03} + R/a}{R_{01} + R_{03} + R/a} = U \frac{2(a+1)}{a^2 + 2(a+1)}$$

Příklad 3.15: Určete velikost proudu I_5 v obvodu na obrázku 3.24



Obrázek 3.24: Obvod



Obrázek 3.25: Obvod

Řešení: V tomto případě nelze obvod řešit přímo pomocí metody postupného zjednodušování. Řešit se dá ale pomocí theveninova teorému, ale výpočet je dlouhý. Rychlejsí cesta je pomocí transfigurace části obvodu. Při náhradě části (rezistory R_1 , R_2 a R_5) vznikne nový ekvivalentní obvod 3.25 s rezistory R_A , R_B a R_C . Jejich velikost se určí podle vzorců (3.13). Přitom vznikne nový uzel označený číslem 5. Následně se vypočítá napětí mezi uzlem 5 a 4. K tomu se dojde metodou postupného zjednodušování, tím získáme prostý dělič napětí:

$$U_{54} = U_0 \cdot \frac{R_{x2}}{R_{x1} + R_{x2}}$$

kde $R_{x1} = R_0 + R_A$ a R_{x2}

$$= \frac{(R_B + R_3) \cdot (R_C + R_4)}{R_B + R_3 + R_C + R_4}$$

Nyní se podobným způsobem určí napětí na uzlech 1 a 3:

$$U_1 = U_{54} \cdot \frac{R_3}{R_B + R_3}$$

$$U_3 = U_{54} \cdot \frac{R_4}{R_C + R_4}$$

Nakonec zbývá vypočítat proud

$$I_5 = \frac{(U_1 - U_3)}{R_5}$$

3.3.2 Základní náhrady vázaných induktorů

Náhrada vázaných induktorů - T-článek

Vázané induktory se v lineárních obvodech počítají obtížněji. Základní definice vázaného induktoru vychází se sériového řazení indukce napětí z vlastního magnetického toku a napětí z cizího magnetického toku. Z této definice při známém protékajícím proudu se snadné určit napětí (součtem), ale obtížně určit protékající proud z přiloženého napětí. Jedna z možností je užití inverzní vlastní a vzájemné indukčnosti (vzorce (1.62), (1.63) a (1.2.12))

Pokud není nutné u dvojice vázaných induktorů L_1 a L_2 s vazbou M zachovat kvůli výpočtu galvanické oddělení, je možné realizovat náhradu jiným obvodem se třemi póly. Při této náhradě se propojí jeden uzel z prvního a druhý uzel z druhého induktoru tak, aby vznikl trojpól. Ten se potom nahradí T-článekem složeným z indukčnosti tak, že v novém obvodu nejsou žádné vzájemné indukčnosti. To je výhodné pro řadu výpočtů a odvození. Hodnoty indukčností v náhradním obvodu jsou uvedeny přímo ve schématech (viz. 3.26). Podle spojených uzlů dochází ke změnám ve znaménkách. (viz 3.27)



Náhrada vázaných induktorů - Π -článek

Další možnou náhradou je Π -článek (viz 3.28). Opět dojde k odstranění vazby. Náhradní hodnoty indukčností jsou ve vzorcích (3.20)



Obrázek 3.28: a) spojení uzlů - souhlasné, b) náhradní Π -obvod

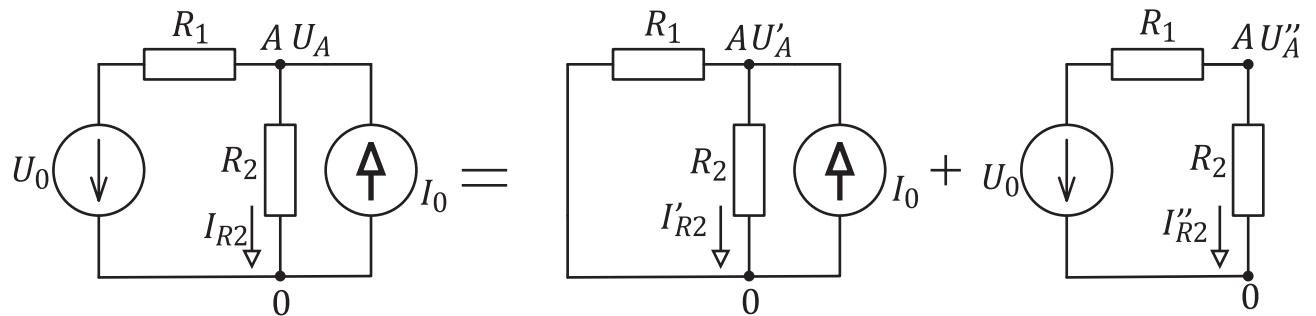
Náhradní indukčnosti L_a , L_b a L_c v náhradě Π -článkem:

$$L_a = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M}, \quad L_b = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M}, \quad L_c = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M} \quad (3.20)$$

Pokud je vazba nesouhlasná, galvanicky je propojen na jednom z induktorů pól s tečkou a na druhém induktoru pól bez tečky, mění se znaménko vzájemné indukčnosti M na znaménko míinus.

3.4 Metoda superpozice

V lineárních obvodech, ve kterých současně působí několik nezávislých zdrojů, můžeme určit kteroukoli obvodovou veličinu jako součet týchž dílčích veličin vyvolaných každým zdrojem samostatně. Ostatní zdroje je nutné vyjmout z obvodu korektně, tj. zdroj napětí nahradit zkratem (nahradit ho zdrojem proudu s nulovým napětím) a zdroj proudu rozpojeným obvodem (nahradit ho zdrojem proudu s nulovým proudem).



Obrázek 3.29: Příklad metody superpozice

Příklad 3.16: V obvodu na schématu na obrázku 3.4 určete velikosti a orientaci napětí U_A a proudu I_{R2} metodou superpozice.

Řešení:

Napětí U_A a proud I_{R2} je možné určit tak, že se vytvoří obvody odvozené vyloučením jednoho ze zdrojů. V každém obvodu se určí veličiny: U'_A a I'_{R2} pro první obvod a U''_A a I''_{R2} pro druhý obvod. Podle principu superpozice pak platí

$$\begin{aligned} U_A &= U'_A + U''_A \\ I_{R2} &= I'_{R2} + I''_{R2} \end{aligned}$$

kde se U'_A určí jako úbytek napětí z paralelního odporu R_1 a R_2 s proudem I_0 :

$$U'_A = I_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

I'_{R2} je určeno z děliče proudu

$$I'_{R2} = I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

U''_A z děliče napětí U_0 na rezistorech R_1 a R_2

$$U''_A = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

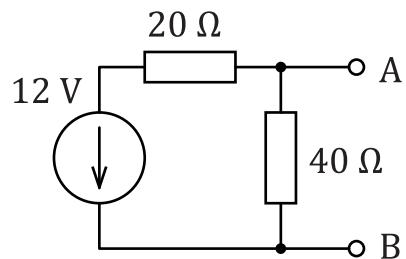
a proud I''_{R2} je proud procházející rezistory R_1 a R_2 spojené do série a napájené zdrojem napětí U_0 :

$$I''_{R2} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

3.5 Neřešené příklady

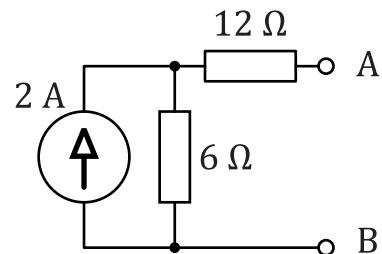
Příklad 3.17: Určete náhradu obvodu mezi svorkami A a B podle Theveninova a Nortonova teorému.

Řešení: Theven. t.: $U_i = 8 \text{ V}$, $R_i = 13,33 \Omega$
 Norton. t.: $I_i = 0,6 \text{ A}$, $G_i = 0,075 \text{ S}$



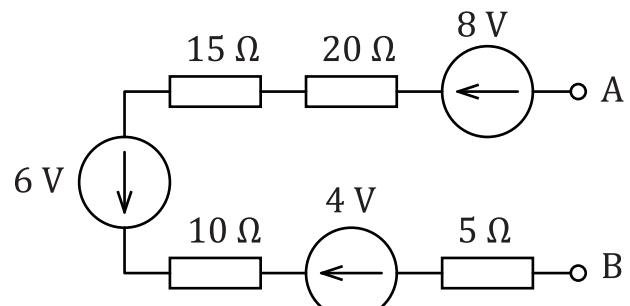
Příklad 3.18: Určete náhradu obvodu mezi svorkami A a B podle Theveninova a Nortonova teorému.

Řešení: Theven. t.: $U_i = 12 \text{ V}$, $R_i = 18 \Omega$
 Norton. t.: $I_i = 0,6667 \text{ A}$, $G_i = 0,05556 \text{ S}$



Příklad 3.19: Určete náhradu obvodu mezi svorkami A a B podle Theveninova a Nortonova teorému.

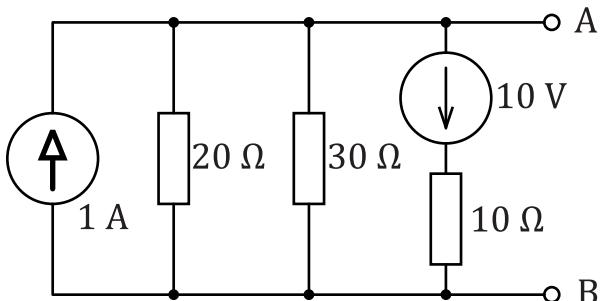
Řešení: Theven. t.: $U_i = 10 \text{ V}$, $R_i = 50 \Omega$
 Norton. t.: $I_i = 0,2 \text{ A}$, $G_i = 0,02 \text{ S}$



Příklad 3.20: Určete náhradu obvodu mezi svorkami A a B podle Theveninova a Nortonova teorému.

Řešení: Theven. t.: $U_i = 10,91 \text{ V}$, $R_i = 5,455 \Omega$

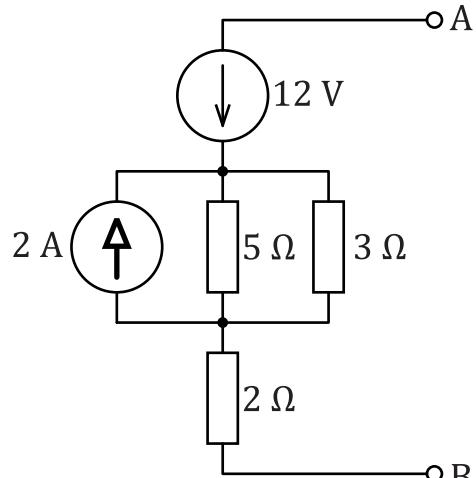
Norton. t.: $I_i = 2 \text{ A}$, $G_i = 0,1833 \text{ S}$



Příklad 3.21: Určete náhradu obvodu mezi svorkami A a B podle Theveninova a Nortonova teorému.

Řešení: Theven. t. $U_i = 15,75 \text{ V}$, $R_i = 3,875 \Omega$

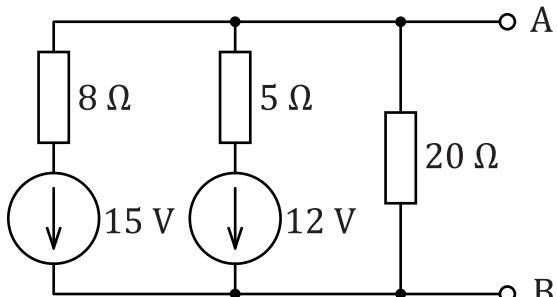
Norton. t. $I_i = 4,065 \text{ A}$, $G_i = 0,2581 \text{ S}$



Příklad 3.22: Určete náhradu obvodu mezi svorkami A a B podle Theveninova a Nortonova teorému.

Řešení: Theven. t. $U_i = 11,4 \text{ V}$, $R_i = 2,667 \Omega$

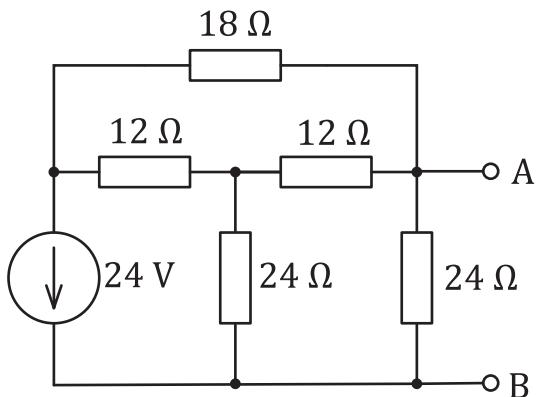
Norton. t. $I_i = 4,28 \text{ A}$, $G_i = 0,375 \text{ S}$



Příklad 3.23: Určete náhradu obvodu mezi svorkami A a B podle Theveninova a Nortonova teorému.

Řešení: Thevenin. t. $U_i = 14,49 \text{ V}$, $R_i = 6,7925 \Omega$

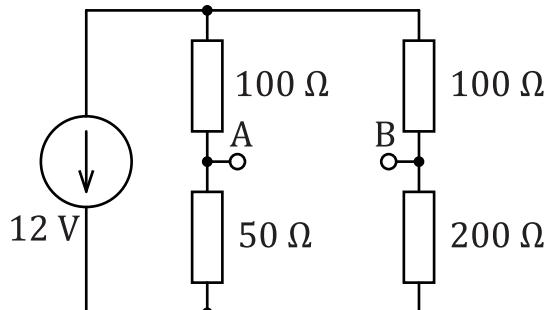
Norton. t. $I_i = 2,1333 \text{ A}$, $G_i = 0,14722 \text{ S}$



Příklad 3.24: Určete náhradu obvodu mezi svorkami A a B podle Theveninova a Nortonova teorému.

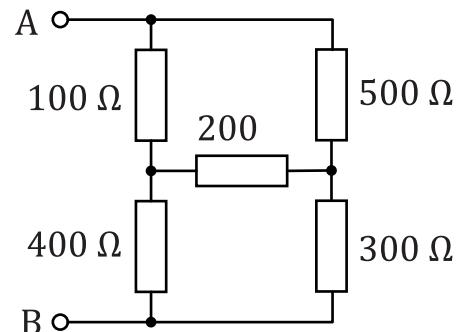
Řešení: Thevenin. t. $U_i = 4$ V, $R_i = 100 \Omega$

Norton. T. $I_i = 0,04$ A, $G_i = 0,01$ S



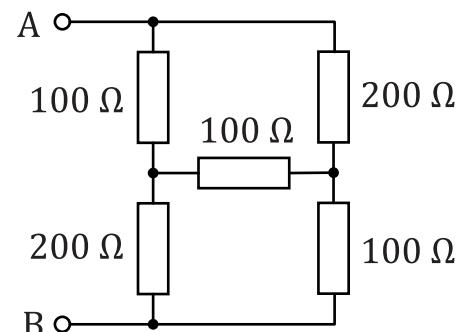
Příklad 3.25: Určete odpor obvodu mezi svorkami A a B, užijte přitom větu o transfiguraci Y—Δ.

Řešení: $R_i = 275 \Omega$



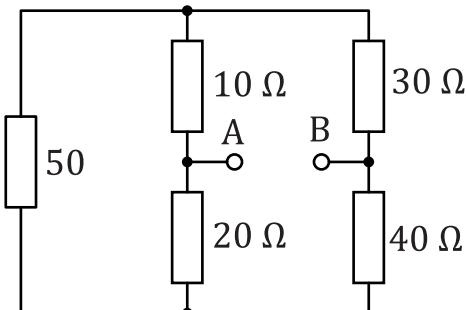
Příklad 3.26: Určete odpor obvodu mezi svorkami A a B, užijte přitom větu o transfiguraci Y—Δ.

Řešení: $R_i = 140 \Omega$



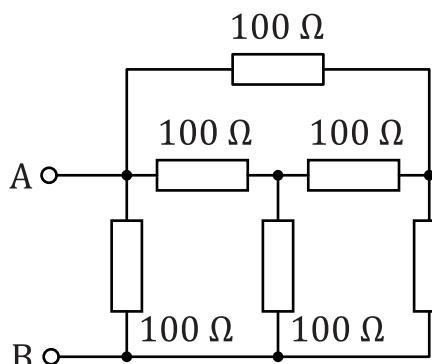
Příklad 3.27: Určete odpor obvodu mezi svorkami A a B, užijte přitom větu o transfiguraci Y—Δ.

Řešení: $R_i = 23,94 \Omega$



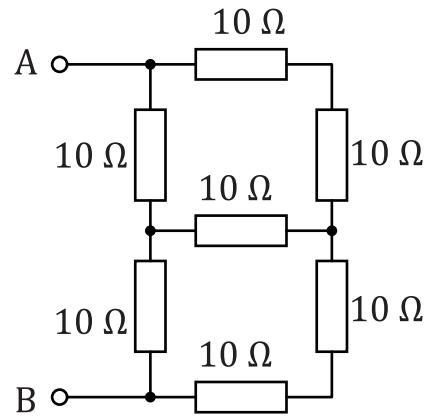
Příklad 3.28: Určete odpor obvodu mezi svorkami A a B, užijte přitom větu o transfiguraci Y—Δ.

Řešení: $R_i = 50 \Omega$



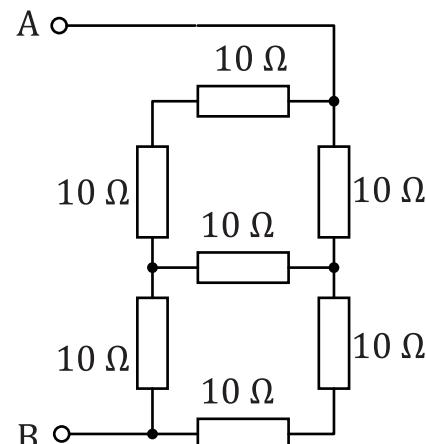
Příklad 3.29: Určete odpor obvodu mezi svorkami A a B, užijte přitom větu o transfiguraci Y—Δ.

Řešení: $R_i = 40/3 \Omega$



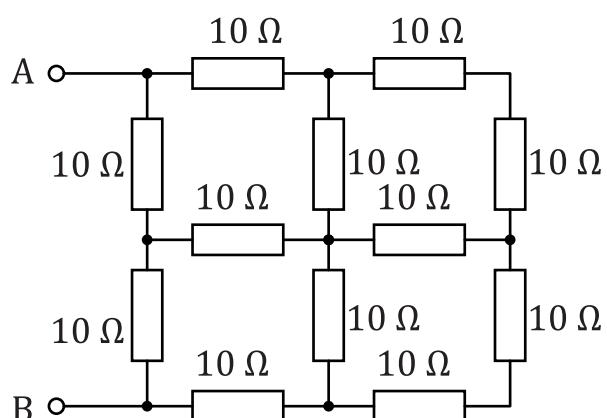
Příklad 3.30: Určete odpor obvodu mezi svorkami A a B, užijte přitom větu o transfiguraci Y—Δ.

Řešení: $R_i = 14 \Omega$



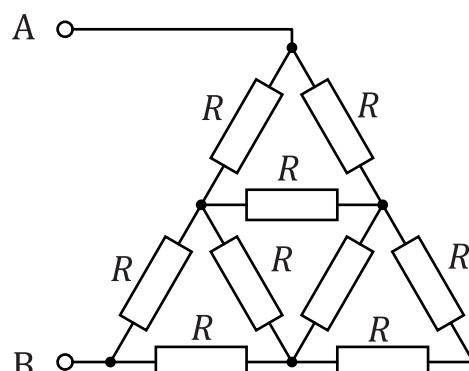
Příklad 3.31: Určete odpor obvodu mezi svorkami A a B, užijte přitom větu o transfiguraci Y—Δ.

Řešení: $R_i = 12,5 \Omega$



Příklad 3.32: Určete odpor obvodu mezi svorkami A a B, užijte přitom větu o transfiguraci Y—Δ.

Řešení: $R_i = \frac{10}{9}R$



Kapitola 4

Řešení obvodů se stejnosměrným napájením

4.1 Základní pojmy popisu obvodů

Větev je taková část obvodu, která se do ostatních částí obvodu připojuje pouze dvěma svorkami. Může jít od jeden základní prvek nebo více základních prvků zapojených sériově. Počet větví obvodu je v . Velikost a směr proudu je v celé větvi stejná, tedy všemi prvky ve větvi protéká stejný proud.

Uzel je taková část elektrického obvodu, kde se spojují dvě nebo více větví. Počet uzlů obvodu je u . V uzlu se mohou spojovat dva nebo více prvků. Pokud mezi dvěma body je více větví, je na každé větvi stejně napětí.

Referenční (vztažný) uzel je zvolený uzel v obvodu. S ostatními uzly vytváří **uzlové dvojice**, mezi kterými se určuje **uzlové napětí**. Počet uzlových dvojic je roven $d = u - 1$.

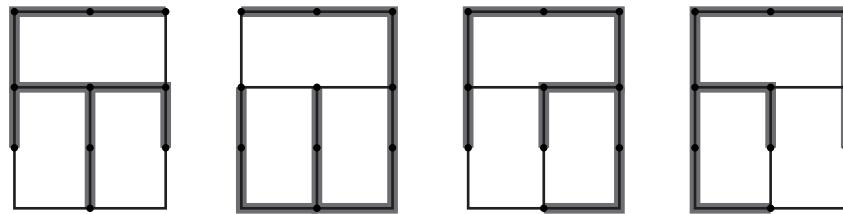
Graf obvodu Graficky realizovaná množina větví a uzlů popisující topologii reálného obvodu a vyjadřující elektrické spojení všech prvků.

Planární obvod Obvod, jehož graf lze nakreslit v rovině bez křížení větví. Graf, který nelze nakreslit bez křížení větví se nazývá *prostorový*.

Separátní část obvodu je taková část obvodu, která nemá s další částí obvodu galvanické spojení. Signálové propojení je pouze přes transformátor, nebo řízený zdroj bez galvanického spojení vstupu a výstupu. Počet separátních částí obvodu je c .

Strom je množina nejmenšího počtu větví, které spojují souvisle všechny uzly v každé separátní části obvodu. Přidáním jediné další větve (nezávislá větev) vznikne smyčka. Ubráním větve se strom rozpadne na dvě části.

Nezávislá větev je taková větev v obvodu, která není součástí stromu.



Obrázek 4.1: Možnosti vytvoření stromu v obvodu

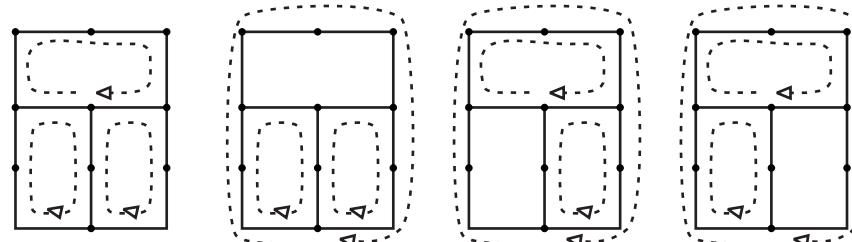
Smyčka je uzavřená dráha v části obvodu tvořená větvemi. V každém uzlu ležícím ve smyčce se smí stýkat pouze dvě větve, které jsou součástí smyčky. Smyčka nejde žádnou větví vícekrát, než jednou. Smyčka se nesmí křížit v žádném z uzlu.

Jednoduchá smyčka je taková, že v uzlech s více než dvěma větvemi další připojené větve odbočují pouze ven ze smyčky.

Nezávislá smyčka je uzavřená dráha obvodu, která obsahuje jednu větev, která není součástí jiné nezávislé smyčky.

Soustava nezávislých smyček je tvořena vždy jednou nezávislou větví a větvemi stromu. V případě planárních obvodů lze na soustavu nezávislých smyček považovat též soustavu smyček jednoduchých. Počet nezávislých smyček s je možné určit z počtu větví v , uzlových dvojic d nebo počtu uzlů u :

$$s = v - d = v - u + 1 \quad (4.1)$$



Obrázek 4.2: Možnosti vytvoření smyček v obvodu

4.2 Základní metody řešení obvodů

4.2.1 Přehled základních metod řešení obvodů

Metoda přímého užití Kirchhoffových zákonů pro výpočet veličin obvodu uvažuje užití prvního i druhého Kirchhoffova zákona. V obvodu se vyznačí uzly, proudy větvemi a soustava nezávislých smyček. Počet rovnic je potom roven součtu počtu smyček s zmenšený o počet větví se zdroji proudu x_i a celkový počet uzlových dvojic d , zmenšený o počet větví tvořených jen jedním zdrojem napětí x_u .

Po dokončení výpočtu jsou k dispozici proudy jednotlivými větvemi a napětí na krajních bodech větví. Napětí uzlových dvojic se pak dopočítá z součtu napětí na vypočítaných větvích s ohledem na druhý Kirchhoffův zákon.

Metoda smyčkových proudů je založená na hledání velikosti částečně fiktivního proudu tekoucího po obvodu smyčky při aplikaci druhého Kirchhoffova zákona (sčítání napětí na smyčce). Počet neznámých smyčkových proudů je $x_i = s - z_i$, kde z_i je počet větví v obvodu, které obsahují zdroje proudu.

Větví, která podle definice nezávislé smyčky není součástí jiné smyčky, teče proud stejný, jako je hledaný smyčkový proud. Při větším počtu smyčkových proudů ve větvi je proud větve dán součtem v případě shodné orientace proudů s výsledným proudem, a pokud má některý ze smyčkových proudů opačnou orientaci, než výsledný proud, od výsledku se odčítá. Pokud výsledný proud větve určený ze smyčkových proudů má záporné znaménko, je reálný směr proudu větvi opačný.

Napětí mezi uzly na obou koncích větve je možné určit z proudu větve, jen pokud v ní nejsou zdroje proudu. Určí se jako součet napětí jednotlivých sériově řazených prvků. Na pasivních prvcích jde o úbytek napětí, který působí vypočítaný proud větve a určí se podle Ohmova zákona a napětí případných napěťových zdrojů (nutné hlídat orientaci).

Metoda uzlových napětí spočívá ve výpočtu napětí na uzlových dvojicích (mezi uzlem a referenčním uzlem) tak, že se na základě aplikace prvního Kirchhoffova zákona sčítají proudy, které přitékají nebo odtékají z jednotlivého uzlu.

Počet neznámých uzlových napětí je $x_u = d - z_u$, kde z_u je počet větví, které jsou tvořeny jen zdrojem napětí.

Po nalezení napětí na uzlových dvojicích se z rozdílu napětí dopočítávají proudy jednotlivými větvemi dosazením do Ohmova zákona.

Postup při řešení obvodu pomocí obvodových rovnic

1. Cílem řešení je nalézt hodnoty napětí na uzlových dvojicích a proud ve všech větvích obvodu.
2. Zpřehlednění a případné zjednodušení obvodu.
3. Volba vhodné metody.

4.2.2 Metoda přímého užití Kirchhoffových zákonů

Nejprve se obvod překreslí tak, aby byl přehledný a jednoduše čitelný. Jeden vhodně vybraný uzel se určí jako referenční, ke každému dalšímu uzlu se přiřadí jedno velké písmeno nebo číslo. Na větve mezi uzly se vyznačí šipkami uvažovaný směr proudu. Pokud je ve větvi zdroj proudu, příslušná vyznačená šipka. Na všechny prvky se vyznačí šipkami polarita napětí, na zdrojích napětí shodná se směrem napětí na zdroji, na zdrojích proudu je vhodné udělat šipku napětí proti šipce proudu (výchozí předpoklad je, že je zdroj proudu vždy zdrojem energier), na pasivních prvcích jsou šipky napětí vždy ve směru proudu. Každá šipka jak napětí, tak proudu se značí vlastním číslem.

Nejprve se aplikuje 1. Kirchhoffův zákon. Pro každý uzel, kde se schází tři a více větví nese vytvoří rovnice s proudy, které tečou do uzlů. Pro referenční uzel se rovnice neustavuje, byla by nadbytečná. Pokud šipka proudu ukazuje směrem do uzlu, proud se přičte, pokud z uzlu, proud se odečte.

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_4 &= 0 \\ i_4 - i_5 - i_6 &= 0 \\ i_2 + i_5 - i_3 &= 0 \end{aligned}$$

v obvodu se vyznačí 3 nezávislé smyčky i_A , i_B , i_C , u každé smyčky se zavede směr. Po určeném směru v každé vyznačené šipce se sčítají napětí na jednotlivých prvcích, po směru kladné znaménko, proti směru záporné:

$$\begin{aligned} u_{R1} + u_1 + u_{R4} + u_{R6} &= 0 \\ -u_{R6} + u_{R5} - u_3 + u_{R3} &= 0 \\ u_{R2} + u_2 - u_{R5} - u_{R4} &= 0 \end{aligned}$$

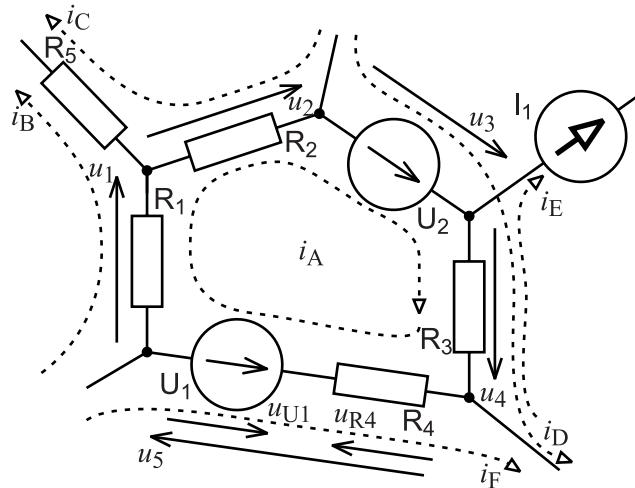
Napětí na pasivních prvcích se nahradí součinem proudu a odporu (impedance) podle Ohmova zákona. $u_{R1} = R_1 \cdot i_1$; $u_{R2} = R_2 \cdot i_2$; $u_{R3} = R_3 \cdot i_3$; $u_{R4} = R_4 \cdot i_4$; $u_{R5} = R_5 \cdot i_5$ a $u_{R6} = R_6 \cdot i_6$. Sestavení výsledné soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_4 i_4 + R_6 i_6 &= -u_1 \\ -R_6 i_6 + R_5 i_5 + R_3 i_3 &= +u_3 \\ R_2 i_2 - R_5 i_5 - R_4 i_4 &= -u_2 \\ i_1 - i_2 - i_4 &= 0 \\ i_4 - i_5 - i_6 &= 0 \\ i_2 + i_5 - i_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nyní jsou určeny všechny proudy větvemi.

4.2.3 Metoda smyčkových proudů

Základní princip užití metody smyčkových proudů bude ilustrován na části obvodu 4.2.3:



Obrázek 4.3: Ukázka aplikace metody smyčkových proudů

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

$$R_1(i_A + i_B) + R_2(i_A - i_C) + U_2 + R_3(i_A + i_D - I_1) + R_4(i_A - i_F) - U_1 = 0$$

Poznámky k sestavení rovnice

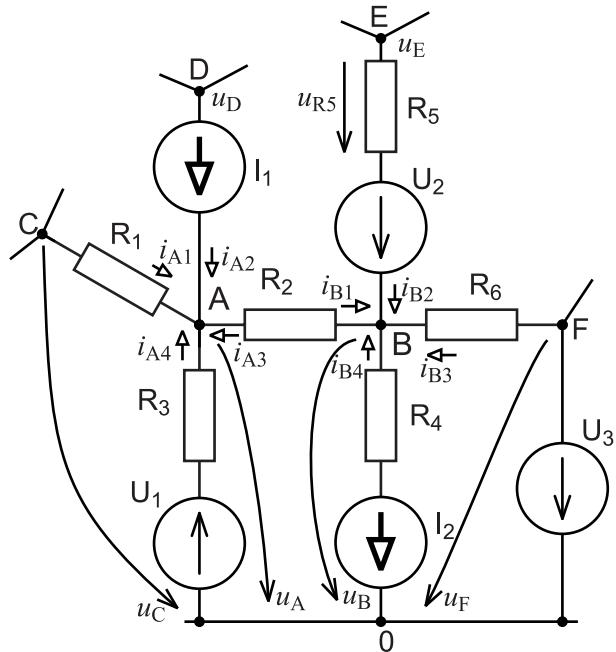
Jak bylo uvedeno, metoda smyčkových proudů vychází z Druhého Kirchhoffova zákona. Na obvodu (zde je jen jeho část) byly vyznačeny smyčky, a sestavení rovnice se provede tak, že hledaný proudu i_A je hlavní proměnná sestavované rovnice. Přitom se využije Ohmův zákon, kde součin odporu větve a smyčkového proudu (nebo kombinace dalších smyčkových proudů, které větví procházejí) dá napětí mezi krajními uzly větve. Součet jednotlivých napětí dá potom podle Druhého Kirchhoffova zákona nulu.

Na příkladu je vidět, že se souhlasné smyčkové proudy sčítají (např.: i_A a i_B na rezistoru R_1), nesouhlasné proudy se odčítají (např.: i_A a i_C na rezistoru R_2), zdroj napětí se podle orientace přičte do rovnice (např.: zdroj napětí U_2). Zdrojem proudu může být veden pouze jeden smyčkový proud, jeho velikost potom určí velikost smyčkového proudu (proud zdroje I_1 je totožný se smyčkovým proudem i_E) a zdroje napětí s opačně orientovaným znaménkem (proti směru šipky smyčkového proudu) se odečítá. (např.: U_2).

Cílem je soustava rovnic o stejném počtu rovnic jako neznámých. Její řešení je už úkolem matematiky. Po určení jednotlivých smyčkových proudů je možné určit výsledné proudy v jednotlivých větvích (proud rezistorem R_1 je dán opět součtem smyčkového proudu i_A a i_B , nebo proud rezistorem R_2 rozdílem vypočtených smyčkových proudů i_A a i_C), napětí na větvích se určí podle Ohmova zákona, atd.

4.2.4 Metoda uzlových napětí

Základní princip užití metody uzlových napětí bude ilustrová na části obvodu



Obrázek 4.4: Část obvodu pro ilustraci metody uzlových napětí

$$\begin{aligned}
 i_{A1} + i_{A2} + i_{A3} + i_{A4} &= 0 \\
 i_{B1} + i_{B2} + i_{B3} + i_{B4} &= 0 \\
 \frac{u_C - u_A}{R_1} + I_1 + \frac{u_B - u_A}{R_1} + \frac{-U_1 - u_A}{R_3} &= 0 \\
 \frac{u_A - u_B}{R_2} + \frac{u_{R5}}{R_5} + \frac{U_3 - u_B}{R_6} - I_2 &= 0 \\
 \frac{u_A - u_B}{R_2} + \frac{u_E - u_B - U_2}{R_5} + \frac{U_3 - u_B}{R_6} - I_2 &= 0
 \end{aligned}$$

pro $u_{R5} + U_2 = u_E - u_B$, tedy $u_{R5} = u_E - u_B - U_2$, a $u_F = U_3$

Poznámky k sestavení rovnice

Rovnice se vytvoří na základě Prvního Kirchhoffova zákona, kdy se sčítají proudy tekoucí z jednotlivých větví. Proud se určuje z Ohmova zákona a napětí se určí rozdílem uzlových napětí na příslušné větví. Např.: Proud i_{A1} směruje od uzlu C , k uzlu A , použije se tedy rozdíl uzlových napětí $u_C - u_A$ děleným odporem větve R_1 . Uzlová napětí se tedy v rovnici uvedou jako proměnné. Zdroje proudu určují proud větví (např.: I_1), uzlová napětí větví připojených k jinému uzlu s uzlovým napětím jen zdrojem napětí jsou určeny uvedeným uzlovým napětím a součtem (nebo rozdílem podle orientace zdroje napětí) napětí zdroje.

4.2.5 Přímé sestavení matice rovnice z obvodu

Pro matematické řešení obvodových rovnic se velmi často užívají maticové metody. Při postupu řešení patří úprava z právě sestavených rovnic do normalizovaného maticového tvaru mezi časově náročnější části řešení. U jednodušších obvodů je možné jednotlivé prvky matice určit přímo, ze základního rozboru obvodu.

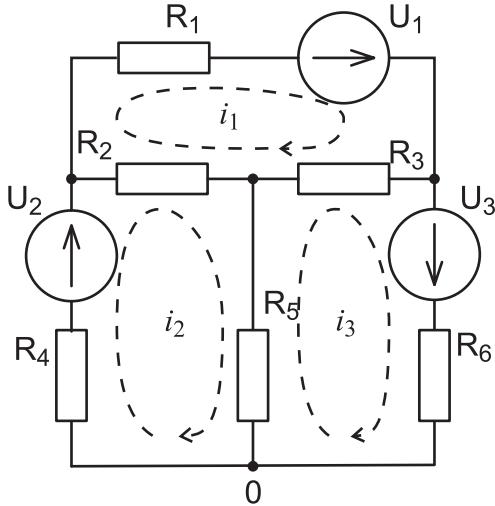
Přímé sestavení matice podle metody smyčkových proudů

První způsob sestavení vychází z metody smyčkových proudů. Z parametrů pasivních prvků se určují přímo koeficienty matice levé strany rovnice, zdroje napětí určují koeficienty pravé strany. Bez úpravy obvodu je možné použít pouze neřízené zdroje napětí, se zdroji proudu a řízenými zdroji je přímé sestavení komplikované, a je vhodnější soustavu připravit tradičním způsobem.

Postup:

1. V obvodu se vyznačí orientované smyčky, které pokryjí celý obvod a jsou navzájem nezávislé, a očíslují se.
2. Podle počtu smyček bude vytvořena čtvercová matice a vedle ní vektor pravé strany stejné hodnosti, jako je počet smyček. (stejný počet řádků a sloupců, jako je počet smyček, vektor má stejný počet dimenzí)
3. Na hlavní diagonálu matice se postupně zapisují součty všech impedancí pasivních prvků (nebo odporů rezistorů), které se nacházejí na uvedené smyčce. Na pozici [1;1] se napíše součet impedancí pasivních prvků na první smyčce, na pozici [2;2] se zapíše součet impedancí prvků na druhé smyčce, atd.
4. Ostatní prvky se realizují podle toho, jestli jsou v prvcích, které sdílejí sousední smyčky, orientace smyček souhlasné, nebo nesouhlasné. Na pozici [1;2] a [2;1] se zapíše součet impedance prvků, které jsou sdíleny smyčkou 1 a 2, apod. K součtu se přiřadí znaménko: pokud jsou uvedené smyčky souhlasně orientované, tak znaménko + a pokud opačně orientované, tak znaménko -. Sestavená matice je tedy symetrická podle hlavní diagonály.
5. Pokud jsou smyčky, které spolu nesdílejí žádný pasivní prvek, jsou příslušné prvky matice nulové.
6. Pro příslušnou dimenzi (pořadí prvku) ve vektoru pravé strany se zapíše součet napětí zdrojů, které jsou na příslušné smyčce. Znaménko závisí na souhlasné nebo nesouhlasné orientaci směru napětí a orientaci smyčky. Pokud je směr opačný, je znaménko kladné, pokud je souhlasný, znaménko je opačné.
7. Vektor neznámých jsou hodnoty smyčkových proudů, ostatní veličny se dopočítají podle nich běžným způsobem.

Příklad 4.1: Pro obvod 4.5 sestavte podle metody smyčkových proudů matici rovnice.



Obrázek 4.5: obvod - smyčkové proudy

Řešení: V obvodu jsou vyznačené 3 nezávislé smyčky, proto matice koeficientů bude mít hodnost 3. Sestavení matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Vektor pravé strany:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -U_1 \\ -U_2 \\ -U_3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Výsledná rovnice matic je potom:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_1 \\ -U_2 \\ -U_3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Přímé sestavení matice podle metody uzlových napětí

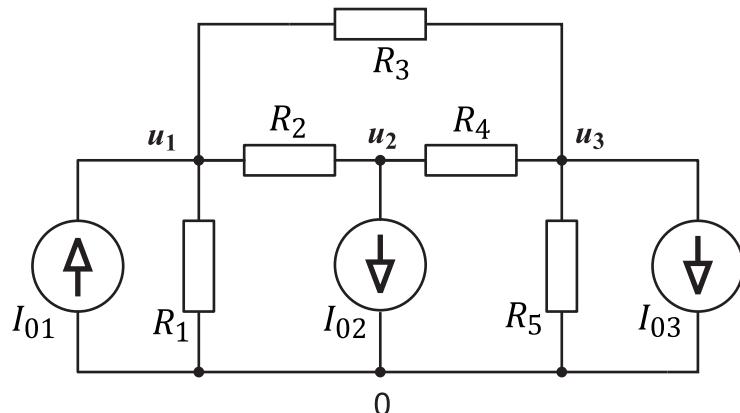
Druhý způsob vychází z metody uzlových napětí. Podobně jako u předcházející metody, jsou koeficienty levé strany matice určeny parametry pasivních prvků, pravá strana proudy zdrojů. Nejsnáze se matice sestavuje, pokud jsou v obvodu pouze neřízené zdroje proudu. Přímé sestavení matice v případě přítomnosti dalších typů zdrojů je obtížné.

Postup sestavení:

1. V obvodu se zvolí referenční uzel a vyznačí uzlové dvojice k referenčnímu uzlu a očísloují se.



2. Podle počtu uzlových dvojic bude vytvořena čtvercová matice stejné hodnosti, jako je počet uzlových dvojic. Vektor pravé strany bude mít stejný počet dimenzí, jako je počet uzlových dvojic.
3. Na hlavní diagonálu se postupně zapisují součty všech admitancí větví, které končí v příslušném uzlu. Pokud je v nějaké větvi zdroj proudu, tato větev se do součtu nezahrnuje. Na pozici [1;1] se napíše součet admitancí (vodivostí rezistorů), které přicházejí do horního uzlu první uzlové dvojice, na pozici [2;2] se zapíše součet admitancí, které přicházejí do druhé uzlové dvojice, atd.
4. Na ostatní pozice se zapisují admitance prvků mezi příslušnými horními uzly (např. na pozici [1;2] a [2;1] se zapíše součet admitancí všech větví, které vedou z horního uzlu první uzlové dvojice do horního uzlu druhé uzlové dvojice. Všechny tyto prvky mají záporné znaménko. Matice je tedy symetrická).
5. Pokud některé uzly nejsou spojené větví, je příslušný prvek matice roven nule.
6. Na příslušnou dimenzi vektoru pravé strany se zapíše součet proudu zdrojů, který teče do příslušného uzlu. Pokud proud směřuje do uzlu, je znaménko kladné, pokud z uzlu, je znaménko záporné.
7. Vektor neznámých jsou hodnoty napětí uzlových dvojic.



Obrázek 4.6: obvod - uzlová napětí

Příklad 4.2: Pro obvod 4.6 sestavte podle metody uzlových napětí matici rovnice

Řešení: V obvodu jsou vyznačené 3 uzlové dvojice, proto matice koeficientů bude mít hodnost 3. Sestavení matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Vektor pravé strany:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} I_{01} \\ -I_{02} \\ -I_{03} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

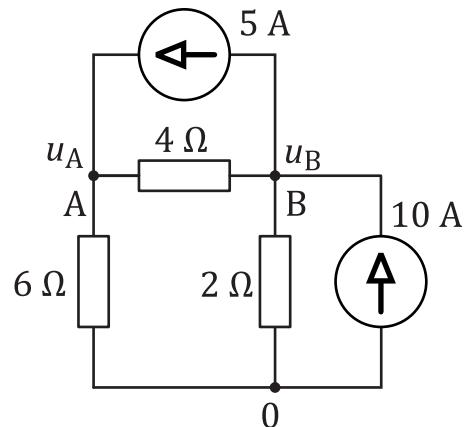
Výsledná rovnice matic je tedy:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{01} \\ -I_{02} \\ -I_{03} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$



4.2.6 Řešené příklady z obvodových rovnic

Příklad 4.3: Vypočtěte uzlová napětí v obvodu na základě vyznačených parametrů prvků. Užijte metodu uzlových napětí. Ověřte výpočet metodou smyčkových proudů.



Obrázek 4.7: Obvod

Řešení: Sestaví se obvodová rovnice podle metody uzlových napětí (vycházející z prvního Kirchhoffova zákona).

$$\begin{aligned} 5 + \frac{u_B - u_A}{4} + \frac{0 - u_A}{6} &= 0 \\ 10 - 5 + \frac{u_A - u_B}{4} + \frac{0 - u_B}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Po zjednodušení:

$$\begin{aligned} 5u_A - 3u_B &= 60 \\ u_A - 3u_B &= -20 \end{aligned}$$

Řešení rovnice: uzlová napětí $u_A = 20$ V a $u_B = \frac{40}{3}$ V.

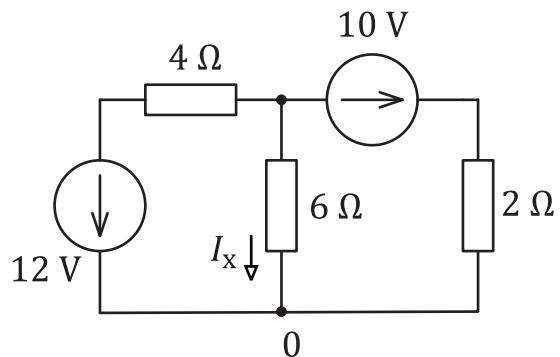
Smyčkové proudy: tři nezávislé smyčky, dva smyčkové proudy určeny zdroji proudu, smyčkové proudy $i_{P1} = 5$ A a $i_{P2} = 10$ A. Sestavuje se rovnice pro smyčkový proud i :

$$\begin{aligned} 6i + 4(5 + i) + 2(10 + i) &= 0 \\ 12i &= -40 \\ i &= -\frac{10}{3} \text{ A} \end{aligned}$$

Uzlová napětí: u_A je první výraz rovnice v opačném směru, u_B je třetí výraz rovnice v opačném směru.

$$\begin{aligned} u_A &= -6i = \frac{6 \cdot 10}{3} = u_A = 20 \text{ V} \\ u_B &= 2(10 + i) = 20 - 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{40}{3} \text{ V} \end{aligned}$$

Příklad 4.4: Určete velikost proudu I_x na základě vyznačených parametrů obvodu. Použijte metodu smyčkových proudů. Ověřte výpočet metodou uzlových napětí.



Obrázek 4.8: Obvod

Řešení: Nejprve se zvolí nezávislé smyčky (dvě stejné vedle sebe orientované po směru hodinových ručiček) a podle nich se sestaví obvodová rovnice:

$$\begin{aligned} -12 + 4i_A + 6(i_A - i_B) &= 0 \\ 6(i_B - i_A) + 10 + 2i_B &= 0 \end{aligned}$$

po zjednodušení:

$$\begin{aligned} 5i_A - 3i_B &= 6 \\ -3i_A + 4i_B &= -5 \end{aligned}$$

Smyčkové proudy jsou potom: $i_A = \frac{9}{11}$ A a $i_B = -\frac{7}{11}$ A.

Hledaný proud I_x je ve vztahu ke smyčkovým proudům (i_A je v souhlasném směru, i_B je ve směru opačném): $I_x = i_A - i_B = \frac{9}{11} - (-\frac{7}{11}) = \frac{16}{11}$ A

Kontrolovat výpočet je možné tak, že se pro stejný obvod sestaví rovnice podle metody uzlových napětí.

$$\frac{12 - u}{4} + \frac{-u}{6} + \frac{10 - u}{2} = 0$$

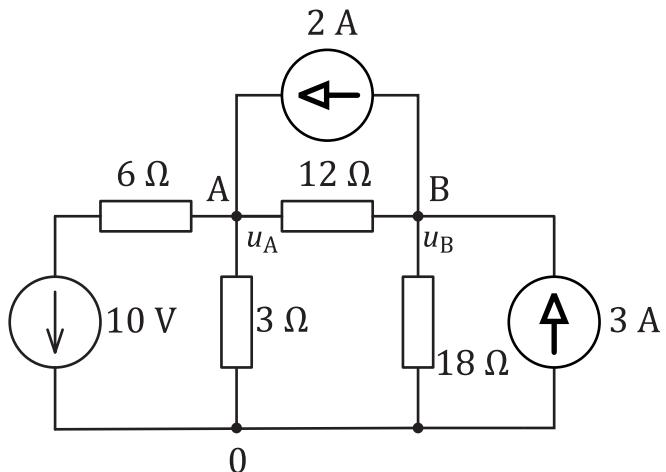
Řešení je $u = \frac{96}{11}$ V

Pomocí Ohmova zákona se z proudu I_x určí úbytek napětí na rezistoru (odpovídá uzlovému napětí u):

$$U_R = 6 \cdot \frac{16}{11} = \frac{96}{11} \text{ V}$$

Výpočet je tak ověřen.

Příklad 4.5: Vypočtěte uzlová napětí v obvodu na základě vyznačených parametrů prvků. Užijte metodu uzlových napětí a pro kontrolu obvod vyřešte také metodou smyčkových proudů.



Obrázek 4.9: Obvod

Řešení: Sestavení rovnic podle metody uzlových napětí:

$$\begin{aligned}\frac{10 - u_A}{6} + \frac{-u_A}{3} + \frac{u_B - u_A}{12} + 2 &= 0 \\ 3 - 2 + \frac{u_A - u_B}{12} - \frac{u_B}{18} &= 0\end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned}-7u_A + u_B &= -44 \\ 3u_A - 5u_B &= -36\end{aligned}$$

Uzlová napětí jsou: $u_A = 8 \text{ V}$ a $u_B = 12 \text{ V}$

Proud rezistorem 3Ω : $I = 8/3 \text{ A}$

Metoda smyčkových proudů: v obvodu je možné vytvořit 4 nezávislé smyčky. Dvě smyčky obsahují zdroje proudů, musí se tedy orientovat ve směru proudu: $i_C = 2 \text{ A}$ a $i_D = 3 \text{ A}$. Smyčky bez zdrojů proudu:

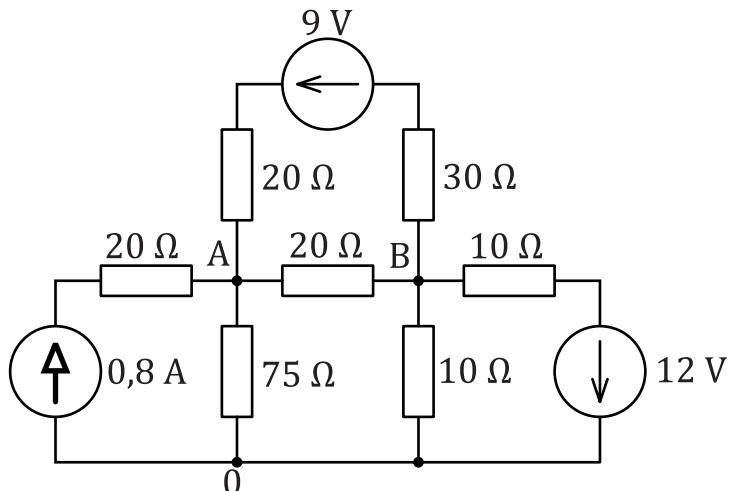
$$\begin{aligned}-10 + 6i_A + 3(i_A + i_B) &= 0 \\ 18(i_B - 3) + 12(i_B - 2) + 3(i_B + i_A) &= 0\end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}9i_A + 3i_B &= 10 \\ 3i_A + 33i_B &= 78\end{aligned}$$

Smyčkové proudy jsou potom $i_A = \frac{1}{3} \text{ A}$ a $i_B = \frac{7}{3} \text{ A}$. Rezistorem 3Ω tečou smyčkové proudy i_A a i_B v souhlasném směru: Celkový proud je potom $I = i_A + i_B = 8/3 \text{ A}$.

Příklad 4.6: Vypočtěte uzlová napětí pro A a pro B při vyznačených parametrech prvků v obvodu. Výpočet ověrte následným použitím metody smyčkových proudů.



Obrázek 4.10: Obvod

Řešení: Nejprve se sestaví obvodová rovnice, pro dva vyznačené uzly vznikne soustava dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 0,8 - \frac{u_A}{75} + \frac{u_B - u_A}{20} + \frac{u_B - 9 - u_A}{20 + 30} &= 0 \\ -\frac{u_B}{10} + \frac{u_A - u_B}{20} + \frac{u_A + 9 - u_B}{20 + 30} + \frac{12 - u_B}{20} &= 0 \\ -25u_A + 21u_B &= -186 \\ 7u_A - 27u_B &= -138 \end{aligned}$$

Řešení - uzlová napětí $u_A = 15$ V a $u_B = 9$ V

Metoda smyčkových proudů: 4 smyčky, levá smyčka smyčkový proud $i_P = 0,8$ A. Další smyčkové proudy:

$$\begin{aligned} i_A : 75(i_A - 0,8) + 20(i_A - i_B) + 10(i_A - i_C) &= 0 \\ i_B : -9 + 50i_B + 20(i_B - i_A) &= 0 \\ i_C : 12 + 10i_C + 10(i_C - i_A) &= 0 \end{aligned}$$

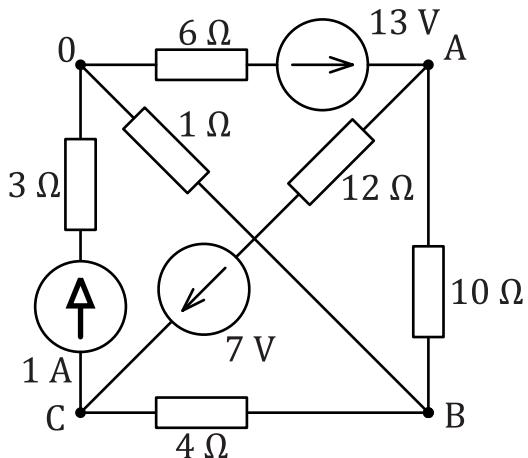
úprava na maticový tvar rovnice

$$\begin{aligned} 105i_A - 20i_B - 10i_C &= 60 \\ -20i_A + 70i_B + 0 &= 9 \\ -10i_A + 0 + 20i_C &= -12 \end{aligned}$$

řešení rovnice: $i_A = 0,6$ A, $i_B = 0,3$ A a $i_C = -0,3$ A

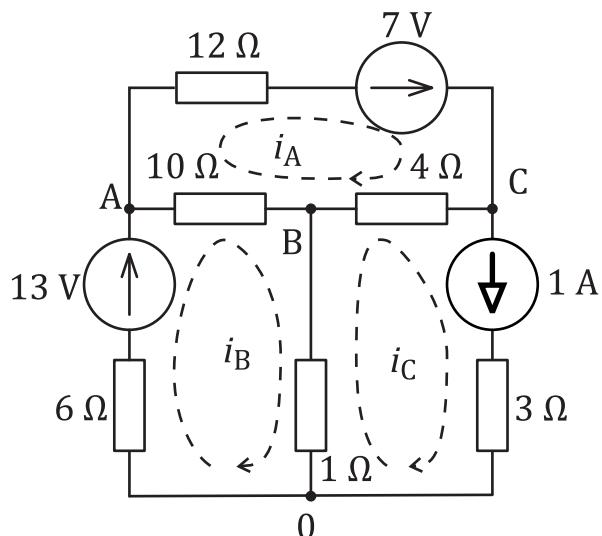
Dopočítání uzlových napětí: $u_A = 75(0,8 - i_A) = 15$ V a $u_B = 10(i_A - i_C) = 10[0,6 - (-0,3)] = 9$ V

Příklad 4.7: Pro zadané hodnoty velikost napětí na uzlech A , B a C vzhledem k neutrálnímu uzlu 0. Pro kontrolu vypočtěte všechny proudy ve větvích a na vybraných uzlech ověřte užitím prvního Kirchhoffova zákona.



Obrázek 4.11: Obvod

Řešení: Nejprve se schéma obvodu překreslí do přehlednější formy, smyčkový proud $i_C = 1 \text{ A}$



Následně se sestaví obvodová rovnice:

$$12i_A + 7 + 4(i_A - 1) + 10(i_A - i_B) = 0$$

$$6i_B + 13 + 10(i_B - i_A) + 1(i_B - 1) = 0$$

po úpravě:

$$26i_A - 10i_B = -3$$

$$-10i_A + 17i_B = -12$$

Smyčkové proudy: $i_A = -0,5 \text{ A}$ a $i_B = -1 \text{ A}$

Sestavení rovnic podle metody uzlových napětí:

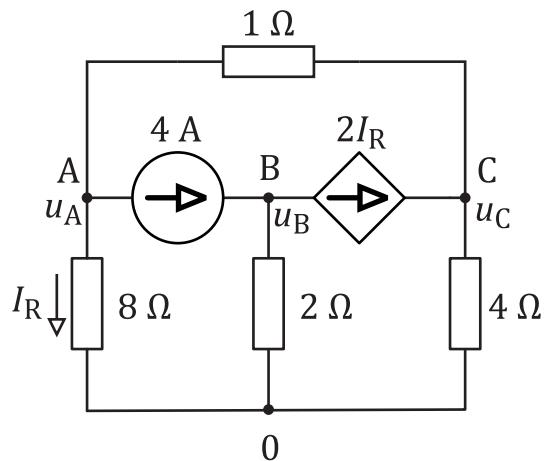
$$\frac{-13 - u_A}{6} + \frac{u_B - u_A}{10} + \frac{u_C + 7 - u_A}{12} = 0$$

$$\frac{u_A - u_B}{10} + \frac{u_C - u_B}{4} - \frac{u_B}{1} = 0$$

$$\frac{u_B - u_C}{4} + \frac{u_A - u_C - 7}{12} - 1 = 0$$

Uzlová napětí jsou potom $u_A = -7 \text{ V}$, $u_B = -2 \text{ V}$ a $u_C = -8 \text{ V}$

Příklad 4.8: Určete napětí uzlových dvojic a proud všemi větvemi na základě vyznačených parametrů prvků.



Obrázek 4.12: Obvod

Řešení: Sestaví se rovnice podle metody uzlových napětí (převaha zdrojů proudu). Proud řízeného zdroje proudu je vhodné definovat z jednoho z navržených uzlových napětí. Tedy $I_R = u_A/8$, proto proud vyznačeného řízeného zdroje proudu je $2 \cdot \frac{u_A}{8}$.

$$\begin{aligned} A : \frac{0 - u_A}{8} - 4 + \frac{u_C - u_A}{1} &= 0 \\ B : 4 - \frac{u_B}{2} - 2 \cdot \frac{u_A}{8} &= 0 \\ C : 2 \cdot \frac{u_A}{8} + \frac{u_A - u_C}{1} - \frac{u_C}{4} &= 0 \end{aligned}$$

po úpravě

$$A : -9u_A + 8u_C = 32$$

$$C : u_A - u_C = 0$$

$$B : u_A + 2u_B = 16$$

Pokud $u_A = u_C$, potom $u_A = -32$ V, $u_C = -32$ V a potom i $u_B = 24$ V

Ověření výpočtu je možné metodou smyčkových proudů. Smyčky je možné namalovat jako dvě menší ve spodní části po směru hodinových ručiček, aby byla zachována podmínka jedinečnosti smyčky přes každý zdroj proudu. Proto $i_A = 4$ A, dále velká smyčka i_C kolem celého obvodu. Potom $i_R = -4 - i_C$, a $i_B = -2(4 + i_C)$.

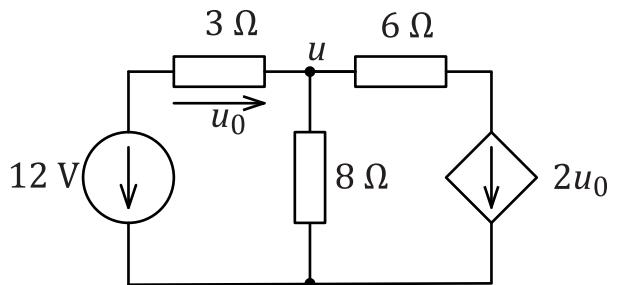
Obvodová rovnice je potom:

$$8(i_A + 4) + i_A + 4[2(-i_A - 4) + i_A] = 0$$

která má řešení $i_A = 0$ A

Vzhledem k tomu, že $i_A = (u_A - u_C)/1 = -32 + 32 = 0$ A bylo sestavení obvodových rovnic správné.

Příklad 4.9: Určete napětí střední uzlové dvojice obvodu na základě vyznačených parametrů prvků.



Obrázek 4.13: Obvod

Řešení: Sestaví se rovnice podle metody smyčkových proudů. Zavedou se smyčkové proudy i_A a i_B v orientaci po směru hodinových ručiček. Napětí na řízeném zdroji je závislé na napětí u_0 na 3 ohmovém rezistoru, a toto napětí podle Ohmova zákona je přímo úměrné smyčkovému proudu: $u_0 = 3 \cdot i_A$. Výsledná soustava rovnic:

$$\begin{aligned} -12 + 3i_A + 8(i_A - i_B) &= 0 \\ 8(i_B - i_A) + 6i_B + 2 \cdot 3i_A &= 0 \end{aligned}$$

po úpravě:

$$\begin{aligned} 11i_A - 8i_B &= 12 \\ -i_A + 7i_B &= 0 \end{aligned}$$

je $i_A = \frac{28}{23}$ A a $i_B = \frac{4}{23}$ A

Napětí mezi horním a dolním středním uzlem (je označeno jako uzlové napětí u) se určí: $u = 8(i_A - i_B) = 8 \frac{24}{23} = \frac{192}{23}$ V

Pro kontrolu se sestaví rovnice podle metody uzlových napětí:

$$\frac{12 - u}{3} - \frac{u}{8} + \frac{2 \cdot (12 - u) - u}{6} = 0$$

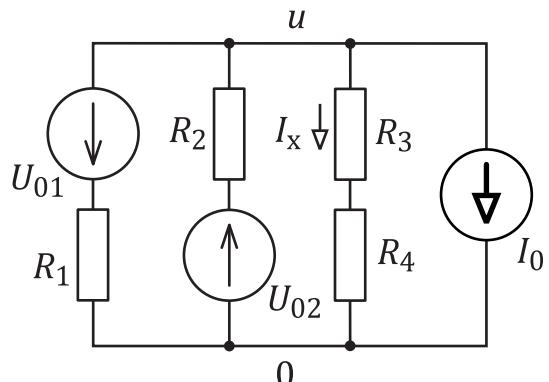
která má řešení: $u = \frac{192}{23}$ V, které ukazuje na správné sestavení obou rovnic.

4.3 Neřešené příklady

Příklad 4.10: Určete proud I_x a napětí u vůči neutrálnímu uzlu.

Parametry obvodu: $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$; $R_3 = 80 \Omega$; $R_4 = 120 \Omega$; $U_{01} = 24 \text{ V}$, $U_{02} = 18 \text{ V}$ a $I_0 = 1 \text{ A}$

Řešení: $u = -20 \text{ V}$ a $I_x = -0,1 \text{ A}$.

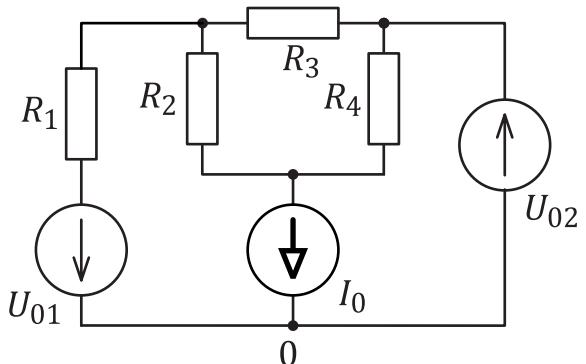


Obrázek 4.14: Obvod

Příklad 4.11: V obvodu určete napětí na všech uzlových dvojicích a proud všemi rezistory.

Parametry obvodu: $R_1 = 80 \Omega$, $R_2 = 60 \Omega$; $R_3 = 40 \Omega$; $R_4 = 40 \Omega$; $U_{01} = 20 \text{ V}$, $U_{02} = 25 \text{ V}$ a $I_0 = 0,1 \text{ A}$

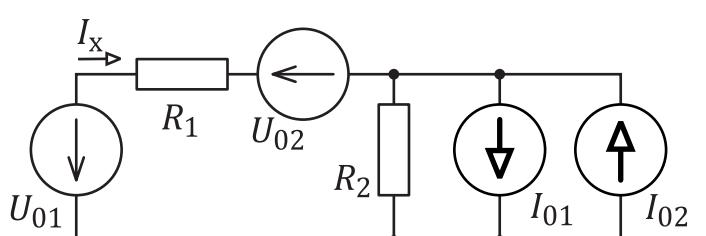
Řešení: $u_A = -14 \text{ V}$, $u_B = -23 \text{ V}$, $u_C = -25 \text{ V}$.



Obrázek 4.15: Obvod

Příklad 4.12: Určete napětí na rezistoru R_2 a proud I_x při zadaných parametrech obvodu:

$R_1 = 80 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $U_{01} = 20 \text{ V}$, $U_{02} = 14 \text{ V}$, $I_{01} = 0,2 \text{ A}$ a $I_{02} = 0,1 \text{ A}$.



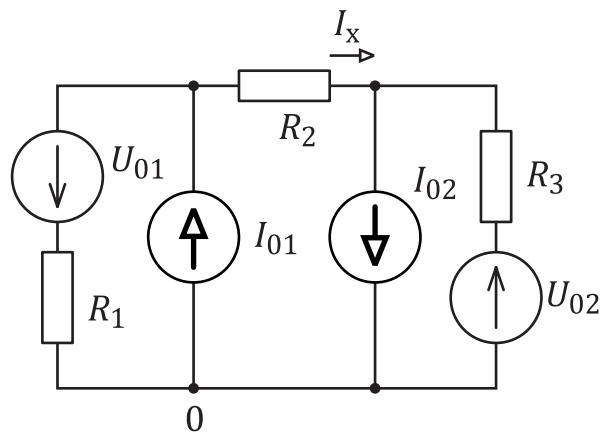
Obrázek 4.16: Obvod

Řešení: $u = 14 \text{ V}$, $I_x = 0,25 \text{ A}$.

Příklad 4.13: Určete velikost proudu I_x při následujících parametrech obvodu:

$R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 70 \Omega$, $R_3 = 80 \Omega$, $U_{01} = 20 \text{ V}$, $U_{02} = 25 \text{ V}$, $I_{01} = 0,1 \text{ A}$ a $I_{02} = 0,1 \text{ A}$.

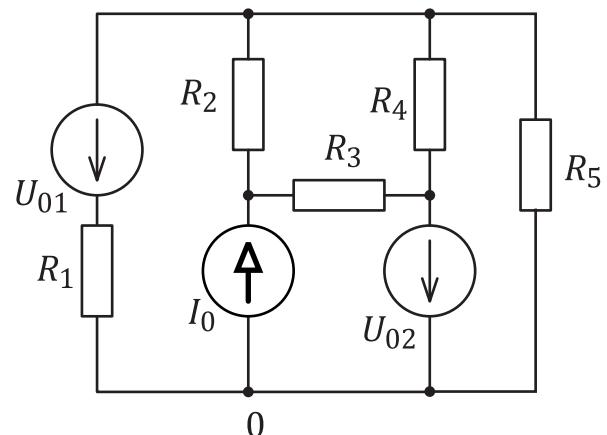
Řešení: $u_A = 10,5 \text{ V}$, $u_B = -9,8 \text{ V}$, $I_x = 0,29 \text{ A}$.



Obrázek 4.17: Obvod

Příklad 4.14: Určete napětí na uzlech a vypočtěte proudy všemi rezistory při zadaných parametrech obvodu:
 $R_1 = 40 \Omega$, $R_2 = 60 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$, $R_5 = 20 \Omega$, $U_{01} = 20 \text{ V}$, $U_{02} = 25 \text{ V}$ a $I_{01} = 0,1 \text{ A}$.

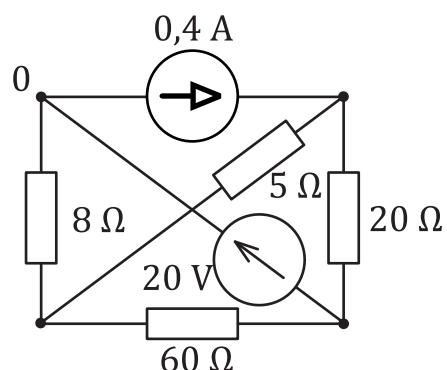
Řešení: $u_A = 15,111 \text{ V}$ a $u_B = 23,444 \text{ V}$.



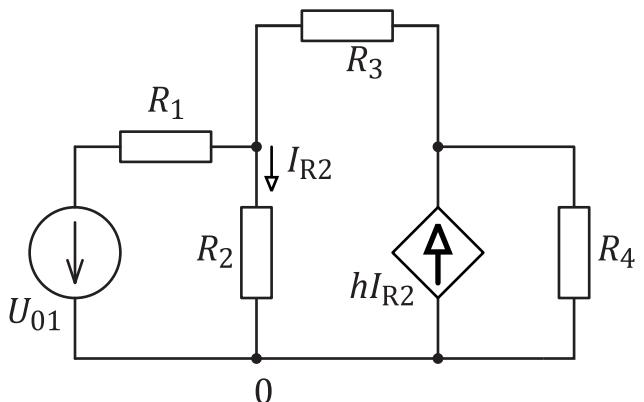
Obrázek 4.18: Obvod

Příklad 4.15: Vypočtěte uzlová napětí v obvodu na základě vyznačených parametrů prvků. Užijte metodu uzlových napětí a pro kontrolu obvod vyřešte také metodou uzlových napětí.

Řešení: $u_A = 8 \text{ V}$, $u_B = 20 \text{ V}$ a $u_C = 12 \text{ V}$.



Obrázek 4.19: Obvod

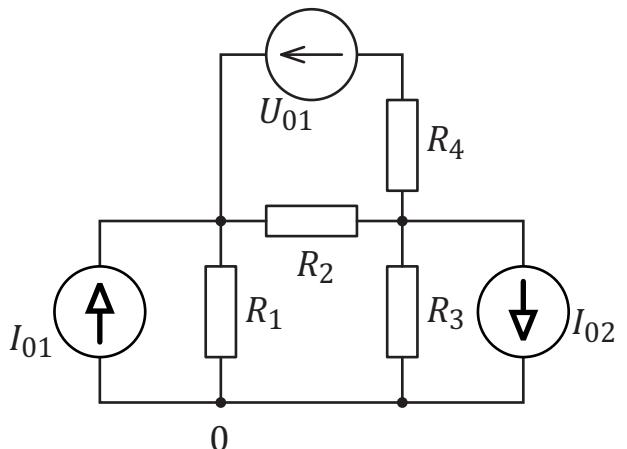


Příklad 4.16: Určete velikost proudu I_{R2} při následujících parametrech obvodu:

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 1000 \Omega, R_3 = 800 \Omega, R_4 = 200 \Omega, U_{01} = 12 \text{ V} \text{ a } h = 12$$

Řešení: $u_A = 12,5 \text{ V}$, $u_B = 26,5 \text{ V}$ a $I_{R2} = 12,5 \text{ mA}$.

Obrázek 4.20: Obvod

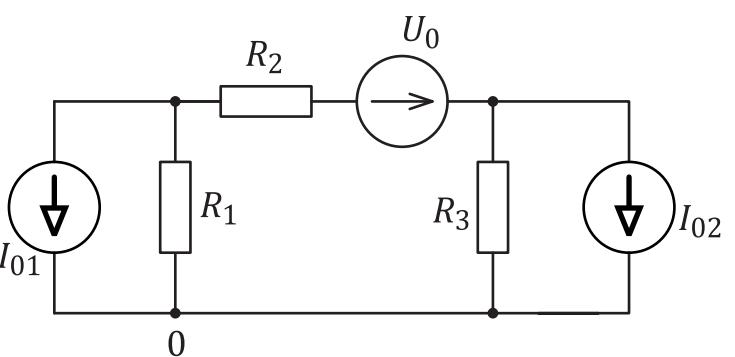


Příklad 4.17: Určete napětí na uzlech a vypočtěte proudy všemi rezistory při zadaných parametrech obvodu:

$$R_1 = 60 \Omega, R_2 = 40 \Omega, R_3 = 60 \Omega, R_4 = 20 \Omega, U_{01} = 20 \text{ V}, I_{01} = 0,1 \text{ A} \text{ a } I_{02} = 0,1 \text{ A.}$$

Řešení: $u_A = -5,4 \text{ V}$ a $u_B = 5,4 \text{ V}$.

Obrázek 4.21: Obvod



Příklad 4.18: Určete napětí na uzlech a vypočtěte proudy všemi rezistory při zadaných parametrech obvodu:

$$R_1 = 80 \Omega, R_2 = 40 \Omega, R_3 = 80 \Omega, U_0 = 12 \text{ V}, I_{01} = 0,2 \text{ A} \text{ a } I_{02} = 0,1 \text{ A.}$$

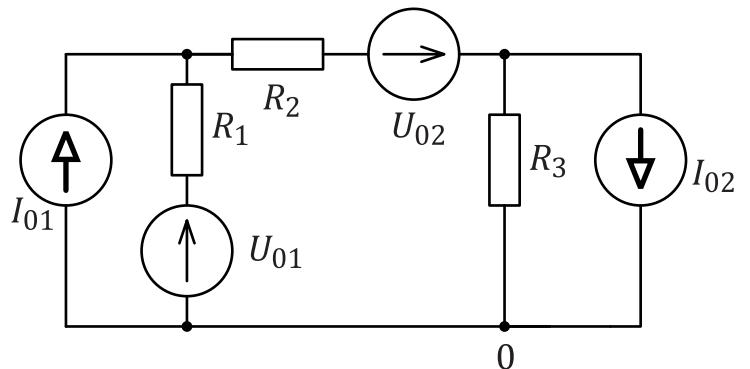
Řešení: $u_A = -8 \text{ V}$ a $u_B = -16 \text{ V}$.

Obrázek 4.22: Obvod

Příklad 4.19: Určete napětí na uzlech a vypočtěte proudy všemi rezistory při zadaných parametrech obvodu:

$$R_1 = 80 \Omega, R_2 = 60 \Omega, R_3 = 80 \Omega, U_{01} = 12 \text{ V}, U_{02} = 20 \text{ V}, I_{01} = 0,2 \text{ A} \text{ a } I_{02} = 0,3 \text{ A.}$$

Řešení: $u_A = 0 \text{ V}$ a $u_B = -20 \text{ V}$.

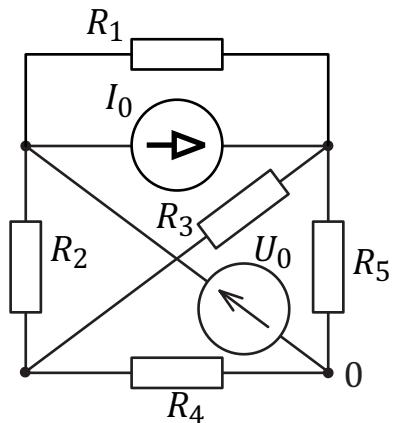


Obrázek 4.23: Obvod

Příklad 4.20: Určete napětí na uzlech a vypočtěte proudy všemi rezistory při zadaných parametrech obvodu:

$$R_1 = 60 \Omega, R_2 = 80 \Omega, R_3 = 90 \Omega, R_4 = 60 \Omega, R_5 = 40 \Omega, U_0 = 15 \text{ V}, \text{ a } I_0 = 0,6 \text{ A.}$$

Řešení: $u_A = -3 \text{ V}$, $u_B = -15 \text{ V}$ a $u_C = 6 \text{ V}$.

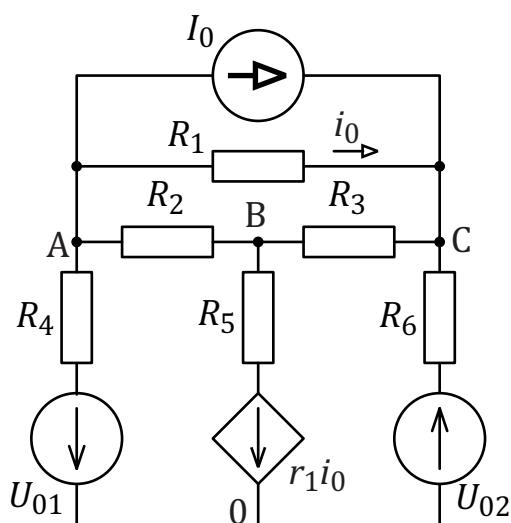


Obrázek 4.24: Obvod

Příklad 4.21: Určete napětí na uzlech a vypočtěte proudy všemi rezistory při zadaných parametrech obvodu:

$$R_1 = 40 \Omega, R_2 = 80 \Omega, R_3 = 60 \Omega, R_4 = 20 \Omega, R_5 = 40 \Omega, R_6 = 20 \Omega, U_{01} = 13 \text{ V}, U_{02} = 14 \text{ V}, I_0 = 0,2 \text{ A} \text{ a } r_0 = 100 \Omega.$$

Řešení: $u_A = 6 \text{ V}$, $u_B = 10 \text{ V}$ a $u_C = -2 \text{ V}$.



Obrázek 4.25: Obvod

Kapitola 5

Přechodný jev prvního řádu v obvodu

5.1 Popis přechodného jevu I. řádu

Přechodný jev je proces, který probíhá v elektrickém obvodu v důsledku skokové změny parametru v obvodu (změna parametrů prvku, sepnutí nebo rozepnutí spínače = změna topologie). Jde o nestacionární a neperiodický děj, na jeho časový průběh má zásadní vliv přítomnost induktorů a kapacitorů, kde při průběhu přechodného děje dochází ke změně množství uložené energie na těchto prvcích; na induktoru se mění magnetický tok a v kapacitoru dochází ke změně elektrického náboje.

Samotný přechodný jev je způsoben skokovou změnou topologie nebo veličiny, proto se při řešení přechodného jevu analyzují dva různé obvody - obvod před změnou topologie nebo parametru a po změně. Důsledkem toho je nezbytné sestavit rovnici pro:

Obvod v přechodném stavu po změně: Topologie obvodu musí odpovídat obvodu **po skoku** (změna topologie, skok napětí, skok parametru) v obvodu. Jde o časově proměnnou událost, při sestavení rovnice se použijí dynamické definice pasivních prvků: rezistory, kapacitory, induktory. Rovnice se potom upraví tak, aby se dostal tvar lineární diferenciální rovnice, v případě prvního řádu: $\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t)$. Časová funkce y je přitom časový průběh hledané veličiny, $x(t)$ je lineární kombinace budící funkce v ustáleném stavu po přechodném ději. Při úpravě se všechny členy s hledanou funkcí převádějí na levou stranu rovnice, členy s budící funkcí (obsahují veličinu zdroje, který je po přechodném ději ve výsledném obvodu obsažen).

Ustálený stav v obvodu před změnou Cílem je určit energetický stav induktorů nebo kapacitorů na počátku přechodného jevu, tedy napětí na kondenzátoru a proud induktorem. Tyto dvě veličiny se na příslušných prvních nemohou měnit skokem, proto jsou stejné v okamžiku těsně před změnou a těsně po změně. Pokud není hledaná veličina přímo některou z uvedených veličin, z energetického stavu induktorů nebo kapacitorů se vypočítá.

Pokud je obvod napájený jen stejnosměrnými zdroji napětí nebo proudu, v ustáleném stavu se induktor chová jako zkrat, a kapacitor jako rozpojený obvod. V případě harmonického napájení je možné pro určení napětí na kapacitoru nebo proudu induktorem použít symbolicko-komplexní metodu.

Pokud do vypočteného přechodného jevu zasahuje jiný přechodný děj, který byl zahájen dříve, je nezbytné začít úplně prvním přechodným dějem (pokud je to možné). V tomto případě se do následujícího přechodného děje dosazují okamžitý energetický stav induktoru nebo kapacitoru.

Ustálený stav v obvodu po změně Určí veličinu ve výsledném ustáleném stavu, je to nutné pro úplné vyřešení difereciální rovnice obvodu. Podobně jako v předcházejícím případě může jít o stejnosměrné napájení (potom se induktor chová jako zkrat a kapacitor jako rozpojený obvod) nebo harmonické napájení (užití symbolicko-komplexní metody).

Protože se při řešení přechodných jevů hledá jen omezený počet veličin v obvodu (obvykle jedna), je vhodné uvedené obvody maximálně zjednodušit použitím ekvivalentních náhrad, užitím Theveninova nebo Nortonova teorému, uplatněním principu superpozice, případně transfigurace apod., aby sestavení obvodové rovnice bylo co nejjednodušší.

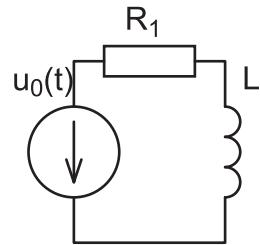
5.1.1 Sestavení obvodové rovnice s akumulativními prvky

Obvody s lineárními akumulativními prvky (s kapacity a induktory včetně vázaných) se sestavují jako obvykle metodou uzlových napětí nebo smyčkových proudů. Při nestacionárním stavu v obvodu se induktor nechová jako zkrat a kapacitor jako rozpojený obvodu. Do rovnic se vkládají dynamické závislosti prvků napětí na proudu, souhrnná tabulka:

$$\begin{array}{ll} u(t) = R \cdot i(t) & i(t) = \frac{u(t)}{R} \\ u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + U(t=0) & i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \\ u(t) = L \frac{di(t)}{dt} & i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + I(t=0) \end{array}$$

Tyto vztahy se potom dosazují do sestavované rovnice. Obvodová rovnice se upraví tak, aby hledaná veličina a její diferenciál zůstaly na levé straně rovnice a ostatní členy se převedly na stranu pravou. Výsledek má podobu lineární diferenciální rovnice prvního řádu, jejíž řešení je běžnou úlohou matematické analýzy. Výsledný časový průběh veličiny je potom v podstatě uplatněním metody superpozice, sčítá se průběh veličiny způsobený změnou energie v akumulativním prvku $y_0(t)$ a průběh veličiny daný ustáleným stavem a topologií obvodu po ukončení přechodného děje $t = \infty$ $y_p(t)$.

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \quad (5.1)$$



Příklad 5.1: V obvodu 5.1 určete proud rezistorem.
Rovnici sestavte pro obecné harmonické napájení.

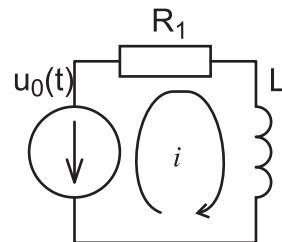
Obrázek 5.1: Obvod LR

Řešení: Sestaví se obvodová rovnice metodou smyčkových proudů podle nákresu 5.2.

$$i : -u_0(t) + R_1 \cdot i + L \frac{di}{dt} = 0$$

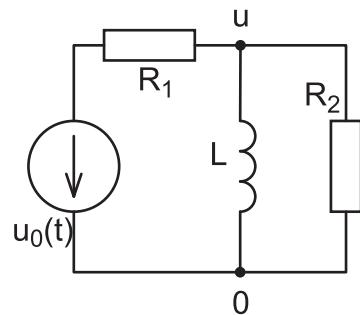
Následuje úprava do standardního tvaru:

$$\frac{L}{R_1} \frac{di}{dt} + i = \frac{u_0(t)}{R_1}$$



Obrázek 5.2: Obvod LR - sestavení rovnice

Příklad 5.2: V obvodu 5.3 určete napětí na uzlové dvojici u . Rovnici sestavte pro obecné harmonické napájení.



Obrázek 5.3: obvod

Řešení: Sestaví se obvodová rovnice metodou uzlových napětí

$$u : \frac{u_0(t) - u}{R_1} - \frac{1}{L} \int_0^t u \, dt + I_L(t=0) - \frac{u}{R_2} = 0$$

Následně se rovnice upraví a zderivuje, aby se odstranil symbol integrálu:

$$\frac{1}{L} u + \frac{du}{dt} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{u'(t)}{R_1}$$

5.2 Řešení diferenciální rovnice pro přechodné jevy prvního řádu

Přechodný děj prvního řádu nastává v obvodu, kde je jen jeden akumulativní prvek (induktor nebo kapacitor), případně je více akumulativních prvků možné ekvivalentní nahradou nahradit za jediný akumulativní prvek. Průběh hledané veličiny v obvodu $y(t)$ je potom popsán lineární diferenciální rovnicí prvního řádu

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t) \quad (5.2)$$

kde τ je časová konstanta obvodu, která je určena parametry obvodových prvků a $x(t)$ je budicí funkce, která v obvodu zahrnuje lineární kombinaci zdrojů. Celkové obecné řešení diferenciální rovnice je

$$y(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + y_p(t) \quad (5.3)$$

Konstanta K a partikulární řešení $y_p(t)$ se určí z matematických a energetických počátečních podmínek. Určí se hodnota se hodnota hledané funkce $y_{t=0}$ pro čas $t = 0^+$ a dále hodnota hledané funkce $y_{t \rightarrow \infty}$ pro ustálený stav po skončení přechodného děje. Dostane se tak soustava dvou rovnic od dvou neznámých:

$$y_{t=0} = K \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} + y_p \quad (5.4)$$

$$y_{t \rightarrow \infty} = K \cdot e^{-\frac{\infty}{\tau}} + y_p \quad (5.5)$$

kde je $e^{-\frac{0}{\tau}} = 1$ a $e^{-\frac{\infty}{\tau}} = 0$. Soustava se tak zjednoduší na:

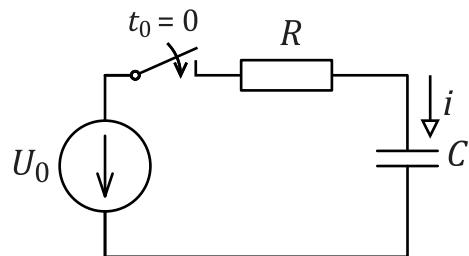
$$y_{t=0} = K \cdot 1 + y_p \quad (5.6)$$

$$y_{t \rightarrow \infty} = K \cdot 0 + y_p \quad (5.7)$$

Vypočítané výrazy K a y_p se spolu s τ dosadí do rovnice (5.3), výsledná funkce určuje průběh hledané veličiny.

5.3 Řešené příklady

Příklad 5.3: Nalezněte časový průběh proudu i po sepnutí spínače v čase $t = 0$ (Schéma 5.3). Hodnoty prvků jsou následující: $R = 220 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$. $U_0 = 24 \text{ V}$

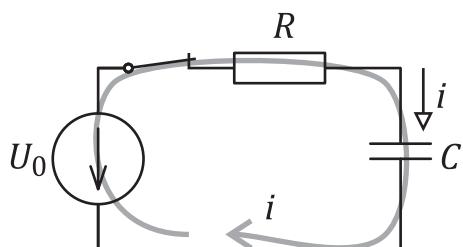


Obrázek 5.4: Obvod

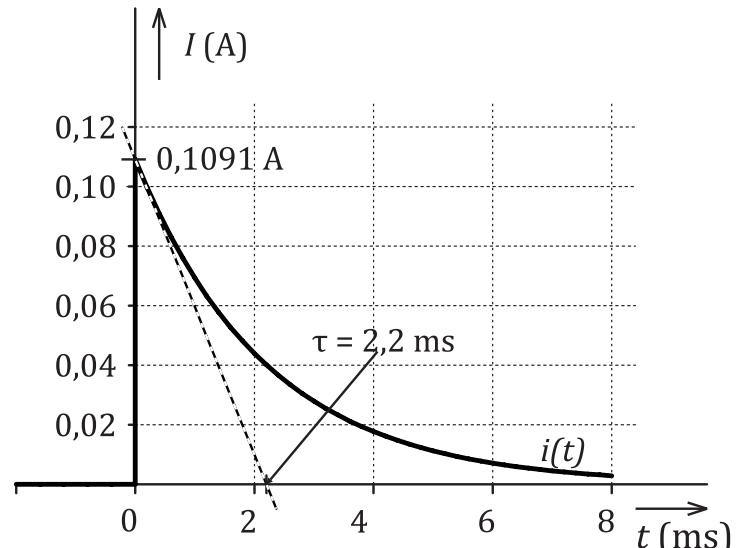
Řešení:

Nejprve se sestaví obvodová rovnice pro obvod po sepnutí spínače podle věty o smyčkových proudech (viz obvod na obrázku: 5.3)

$$-U_0 + R i + \frac{1}{C} \int i(t) dt + U_C(t_0 = 0) = 0$$



Obrázek 5.5: Obvod



Obrázek 5.6: Průběh

Následně upravit do tvaru lineární diferenciální rovnice prvního řádu $\tau \frac{di}{dt} + i = x(t)$:

$$\begin{aligned} Ri + \frac{1}{C} \int i(t) dt &= +U_0 - U_C(t_0 = 0) \Big| \frac{d}{dt} \\ R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &= 0 | \cdot C \\ RC \frac{di}{dt} + i &= 0 \end{aligned}$$

Stejná je i homogenní diferenciální rovnice:

$$RC \frac{di_0}{dt} + i_0 = 0$$

Časová konstanta je $\tau = RC = 220 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 2,2$ ms. Řešení homogenní diferenciální rovnice je:

$$i_0 = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Úplné řešení rovnice se rozšíří o partikulární řešení:

$$i = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p$$

Výpočet parametrů A a i_p se provádí přes určení hledané veličiny v počátku a na konci přechodného děje. Jde tedy o dosazení počátečních podmínek.

Dosazení do rovnice pro hodnotu veličiny v čase $t = 0$. Kapacitor se chová jako zdroj napětí o hodnotě 0 V, tedy jako zkrat. Proud je omezen pouze sériovým rezistorem:

$$\begin{aligned} i(t=0) &= \frac{U_0}{R} \\ i &= A \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} + i_p \\ \frac{24}{220} &= A \cdot 1 + i_p \\ 0,1091 &= A + i_p \end{aligned}$$

Dosazení do rovnice pro hodnotu veličiny v čase $t \rightarrow \infty$. Kapacitor se na konci přechodného děje chová jako rozpojený dvojpól, proud obvodem je roven nule.

$$\begin{aligned} i(t \rightarrow \infty) &= 0 \\ 0 &= A \cdot e^{-\frac{\infty}{\tau}} + i_p \\ 0 &= A \cdot 0 + i_p \\ i_p &= 0 \text{ A} \end{aligned}$$

Následuje dosazení a výpočet A :

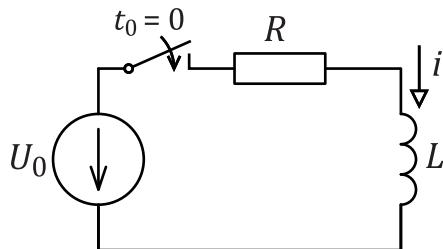
$$\begin{aligned} 0,1091 &= A + 0 \\ A &= 0,1091 \text{ A} \end{aligned}$$

Časový průběh hledané veličiny během přechodného děje popisuje rovnice, průběh proudu i je na grafu 5.6.

$$i = 0,1091 \cdot e^{-\frac{t}{2,2 \cdot 10^{-6}}} \text{ A}$$



Příklad 5.4: Nalezněte časový průběh proudu i po sepnutí spínače v čase $t = 0$ (Obrázek 5.7). Hodnoty prvků jsou následující: $R = 220 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$. $U_0 = 24 \text{ V}$



Obrázek 5.7: Obvod

Řešení:

Pro obvod po zahájení přechodného děje se sestaví obvodová rovnice podle věty smyčkových proudů:

$$-U_0 + Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

Rovnice se upraví na základní tvar lineární diferenciální rovnice prvního řádu:

$$\frac{L di}{R dt} + i = \frac{U_0}{R}$$

kde $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.01}{220} = 45,45 \mu\text{s}$ Řešení rovnice:

$$i = A \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} + i_p$$

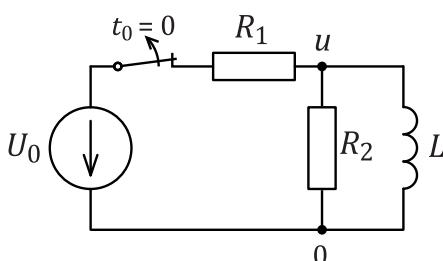
je i hledaným časovým průběhem.

Nyní se vypočítají neznámé K a i_p . Pro $i_{t \rightarrow \infty}$ je $i_p = \frac{U_0}{R} = 109,1 \text{ mA}$. Pro $i_{t=0^+}$ se z vypočítaného i_p určí $K = -\frac{U_0}{R}$.

Hledaný průběh je potom:

$$i = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) = 0,1091 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{45,45 \cdot 10^{-6}}} \right) \text{ A}$$

Příklad 5.5: Nalezněte časový průběh napětí u po rozepnutí spínače v čase $t = 0$ (Obrázek 5.8). Hodnoty prvků jsou následující: $R_1 = 22 \Omega$, $R_2 = 33 \Omega$ a $L = 100 \text{ mH}$. $U_0 = 12 \text{ V}$



Obrázek 5.8: Obvod

Řešení: Po rozepnutí spínače tvoří úplný elektrický obvod pouze paralelně spojené prvky rezistor R_2 a induktor L (viz obr.5.9). Pro tento obvod se sestaví obvodová rovnice metodou

smyčkových proudů, a upraví se na základní tvar $\tau \frac{di}{dt} + i = 0$

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + R_2 i &= 0 \quad | \cdot \frac{1}{R_2} \\ \frac{L}{R_2} \frac{di}{dt} + i &= 0 \end{aligned}$$

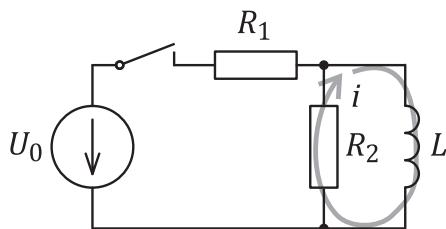
Řešení diferenciální rovnice

$$i = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p$$

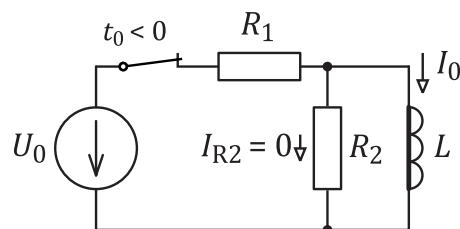
kde

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{0,1}{33} = 3,03 \text{ ms}$$

Nyní se přikročí dosazení počátečních podmínek.



Obrázek 5.9: Obvod



Obrázek 5.10: Obvod

Pro $i(t = 0)$:

V čase $t < 0$ se předpokládá, že byl obvod v ustáleném stavu, induktor se choval jako zkrat, (viz obr.5.10) proto veškerý proud z horního uzlu obvodu procházel induktorem. Velikost proudu induktorem byla omezena jen rezistorem R_1 , proto $I_{L0} = \frac{U_0}{R_1} = \frac{12}{22} = 0,5455 \text{ A}$. Velikost proudu induktorem se nemůže měnit skokem, proto na počátku přechodného děje musí být roven proudu před přechodným dějem. Podle obrázku je zřejmé, že ustálený proud induktorem I_{L0} je směrem a velikostí roven dříve vypočtenému smyčkovému proudu v čase $t = 0$, tedy na počátku přechodného děje.

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{R_1} &= A \cdot e^{-\frac{0 \cdot R_1}{\tau L}} + i_p \\ 0,5455 &= A \cdot 1 + i_p \end{aligned}$$

Pro $i(t \rightarrow \infty)$:

V obvodu s izolovaném od zdrojů napětí a proudu po ustálení neteče žádný proud, tedy $i(t \rightarrow \infty) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot e^{-\frac{\infty}{\tau}} + i_p \\ 0 &= 0 + i_p \\ i_p &= 0 \\ A &= 0,5455 \text{ A} \end{aligned}$$

Časový průběh proudu ve vyznačené proudové smyčce je potom

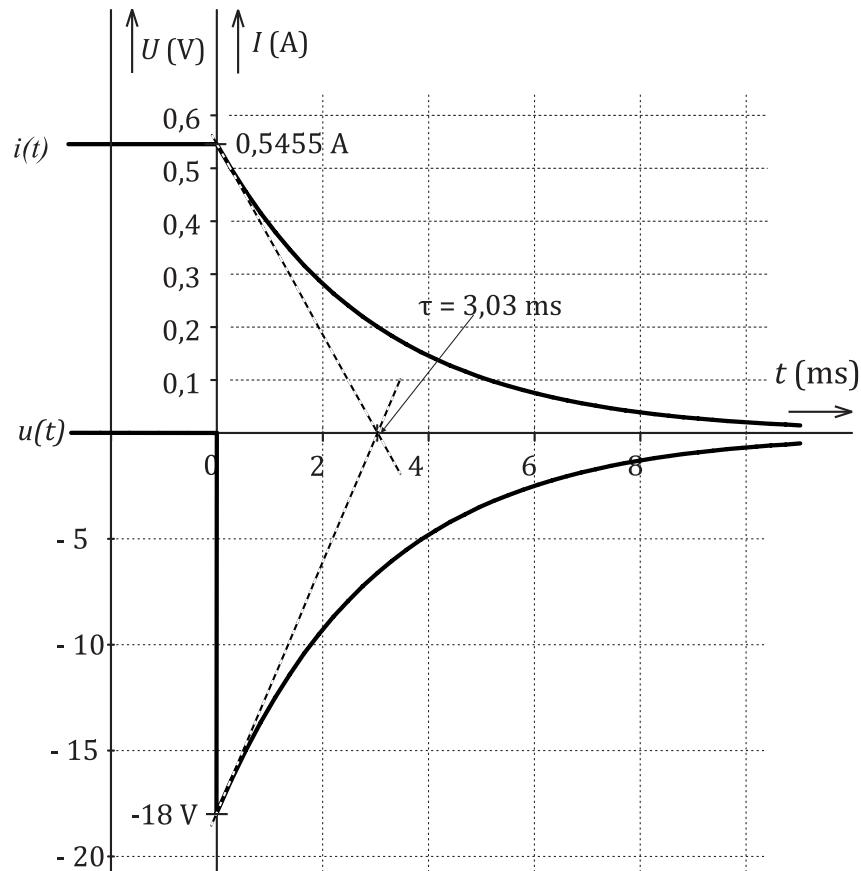
$$i = 0,5455 \cdot e^{-\frac{t}{3,03 \cdot 10^{-3}}} \text{ A}$$



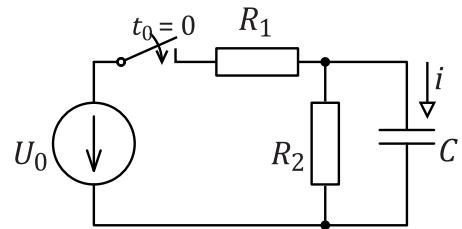
Časový průběh napětí u je možné určit pomocí závislosti napětí na proudu i u induktoru L . Vypočítaný průběh proudu se proto derivuje podle času:

$$u = L \frac{di}{dt} = L \cdot \left(0,5455 \cdot e^{-\frac{t}{3,03 \cdot 10^{-3}}} \right)' = \\ = -\frac{0,1 \cdot 0,5455}{3,03 \cdot 10^{-3}} \cdot e^{-\frac{t}{3,03 \cdot 10^{-3}}} = -18 \cdot e^{-\frac{t}{3,03 \cdot 10^{-3}}} \text{ V}$$

Průběh vyznačeného smyčkového proudu a napětí na uzlu je zobrazen v grafu 5.11.



Obrázek 5.11: Průběh



Příklad 5.6: Nalezněte časový průběh proudu i po sepnutí spínače v čase $t = 0$ (Obrázek 5.12). Hodnoty prvků jsou následující: $R_1 = 220 \Omega$, $R_2 = 330 \Omega$ a $C = 10 \mu\text{F}$. $U_0 = 24 \text{ V}$

Obrázek 5.12: Obvod

Řešení:

První možnost řešení:

Nejprve se určí napětí u na společném uzlu R_1 , R_2 a C sestavením obvodové rovnice podle věty o uzlových napětích:

$$\frac{U_0 - u}{R_1} - \frac{u}{R_2} - C \frac{du}{dt} = 0$$

Upravená diferenciální rovnice

$$\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \frac{du}{dt} + u = \frac{R_2 U_0}{R_1 + R_2}$$

kde $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$

Řešení rovnice:

$$u = K \cdot e^{-\frac{t(R_1+R_2)}{R_1 R_2 C}} + u_p$$

Pro $t \rightarrow \infty$ je $u_p = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, proto průběh napětí u :

$$u = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t(R_1+R_2)}{R_1 R_2 C}} \right)$$

Nyní zbývá určit proud i :

$$i = C \frac{du}{dt} = C \left[\frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t(R_1+R_2)}{R_1 R_2 C}} \right) \right]'$$

Po úpravě:

$$i = \frac{U_0}{R_1} \cdot e^{-\frac{t(R_1+R_2)}{R_1 R_2 C}} = \underline{0,1091 \cdot e^{-757,6t}} \text{ A}$$

Druhá možnost řešení je nahrazení části se zdrojem U_0 a rezistory R_1 a R_2 lineárním zdrojem napětí podle Theveninova teorému.

$$U_i = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Vznikne tak zjednodušený obvod, pro kterou se podle věty o smyčkových proudech sestaví obvodová rovnice:

$$-U_i + i R_i + \frac{1}{C} \int i dt + U_{t=0} = 0$$

Rovnice se upraví a zderivuje (viz výše):

$$R_i C \frac{di}{dt} + i = 0$$

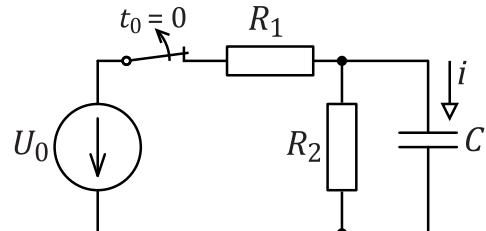
Řešení je

$$i = K \cdot e^{-\frac{t}{R_i C}} + i_p$$

Kde $\tau = R_i C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$. Počáteční podmínky přechodného jevu se určí tak, že předpokládáme, že v prvním okamžiku pro zahájení přechodného jevu se kapacitor chová jako zkrat (zdroj nulového napětí s nulovým vnitřním odporem).

Výsledný průběh proudu je potom:

$$i = \frac{U_0}{R_1} \cdot e^{-\frac{t(R_1+R_2)}{R_1 R_2 C}} = \underline{0,1091 \cdot e^{-757,6t}} \text{ A}$$



Obrázek 5.13: Obvod

Příklad 5.7: Nalezněte časový průběh proudu i po rozepnutí spínače ve vyznačeném obvodu (schéma 5.13). Hodnoty prvků jsou následující:

$U_0 = 24 \text{ V}$, $R_1 = 220 \Omega$, $R_2 = 330 \Omega$ a $C = 2 \mu\text{F}$.

Řešení: Po rozepnutí spínače je obvod tvořen pouze rezistorem R_2 a kapacitorem C . Rovnice se setaví pomocí metody smyčkových proudů:

$$\frac{1}{C} \int i dt + U_{C0} + Ri = 0$$

Rovnice se zderivuje, vytvoří se zkrácená rovnice:

$$R_2 C \frac{di}{dt} + i = 0$$

Časová konstanta obvodu je $\tau = R_2 C = 330 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0,66 \text{ ms}$, řešení zkrácené (homogenní) rovnice je funkce:

$$i_0 = A \cdot e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

a celé řešení je

$$i = i_0 + i_p = A \cdot e^{-\frac{t}{R_2 C}} + i_p$$

Proud kapacitorem se může měnit skokem, napětí je stejné před i po počátku přechodného děje. Počáteční napětí na kapacitoru je určeno děličem: $U_{C0} = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Počáteční proud se určí z Ohmova zákona:

$$i(t=0^+) = \frac{U_C}{R_2} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

Jeho směr je opačný proti vyznačenému proudu na schématu, proto je se znaménkem –.

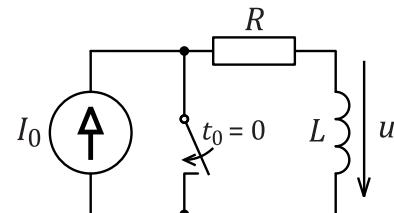
V obvodu nejsou žádné zdroje elektrického výkonu, proto v ustáleném stavu je proud roven nule. Soustava rovnic pro určení konstanty A a partikulárního řešení i_p :

$$i(t = 0) = -\frac{U_0}{R_1 + R_2} = A \cdot -\frac{0}{\tau} + i_p$$

$$i(t \rightarrow \infty) = 0 = A \cdot 0 + i_p$$

$i_p = 0$ a $A = -\frac{U_0}{R_1 + R_2} = 43,64$ mA, výsledný průběh je potom roven:

$$i = -43,64 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-1515t} \text{ A}$$



Příklad 5.8: Nalezněte časový průběh napětí u po sepnutí spínače v čase $t = 0$ (Obrázek 5.14). Hodnoty prvků jsou následující: $R = 2 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$. $I_0 = 2 \text{ A}$

Řešení: Spínač po sepnutí zkratuje zdroj proudu, rovnice se sestavuje metodou uzlových napětí na uzlu mezi L a R :

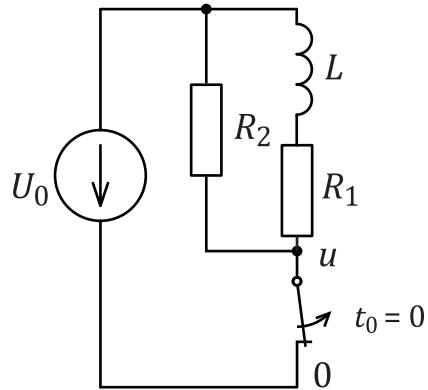
$$\frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + I_{L0} = 0$$

Po derivaci a úpravě je řešení zkrácené (homogenní rovnice): $i_0 = A \cdot e^{-20t}$ Napětí na induktoru se může měnit skokem, proud se skokem nemění a jeho velikost je $I_{L0} = I_0 = 2 \text{ A}$. Po sepnutí spínače se proudová smyčka uzavře přes rezistor R a na rezistoru i induktoru bude napětí $U_0 = RI_0 = -4 \text{ V}$

$$u = -I_0 R \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} = 440 \cdot e^{-2,2t} \text{ V}$$

Obrázek 5.14: Obvod

Příklad 5.9: Nalezněte časový průběh napětí u po rozepnutí spínače ve vyznačeném obvodu (schéma 5.15). Navrhněte odpor rezistoru R_2 tak, aby $u < 60$ V. Hodnoty prvků jsou následující: $U_0 = 24$ V, $R_1 = 220 \Omega$ a $L = 400$ mH.



Obrázek 5.15: Obvod

Řešení: Tento obvod se chová stejným způsobem, jako obvod s elektronickým spínačem, který rozepíná elektromagnetické relé. K rozepnutému relé se přikládá nulová dioda, která zkratuje indukční proud a ten proto nezpůsobí zničení tranzistoru. Sériově k diodě se přikládá rezistor (zde R_2) který zrychlí zánik indukčního proudu za cenu vyšší napěťové špičky na spínači. Delší doba trvání indukčního proudu způsobuje pomalejší odpadnutí kontaktu relé a vyšší delší dobu trvání oblouku na kontaktech relé. Oblouk opaluje kontakty relé, a zkracuje tak jejich životnost.

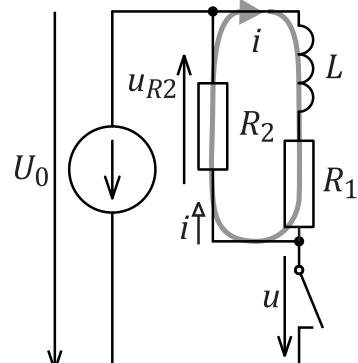
Po rozpojení kontaktu teče induktorem L proud i , uzavírá se ve smyčce přes rezistory R_1 a R_2 viz. schéma 5.16. Pro tento smyčkový proud se sestaví obvodová rovnice:

$$R_1 i + R_2 i + L \frac{di}{dt} = 0$$

Po úpravě se dostane lineární diferenciální rovnice 1. řádu:

$$\frac{L}{R_1 + R_2} \frac{di}{dt} + i = 0$$

která je shodná s homogenní diferenciální rovnicí.



Obrázek 5.16: Obvod

Přitom $\tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$. Při vyšetření průběhu i je nevyšší hodnota proudu hned po zahájení přechodného děje a klesá; v ustáleném stavu je proud induktorem $i_\infty = i = 0$. Pokud byl před rozepnutím spínače obvod ustálený, pro $t = 0$ je $I_0 = I_{0L} = U_0/R_1 = 24/220 = 0,1091$ A. Průběh proud je pak dán rovnicí:

$$i = \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{L}}$$

Dále smyčkový proud i teče přes rezistor R_2 při vzniku úbytku napětí u_{R2} , který je na schématu 5.16 také vyznačen.

Napětí na spínači u se určí z 2. Kirchhoffova zákona. Platí: $U_0 + u_{R2} - u = 0$. Po rozepnutí spínače je na spínači napětí $U_{S0} = U_0 + R_2 I_0$

Pokud má být U_{S0} menší než 60 V, potom je hodnota rezistoru R_2 maximálně:

$$R_2 = \frac{U_{S0} - U_0}{I_0} = \frac{(60 - 24)220}{24} = 330 \Omega$$

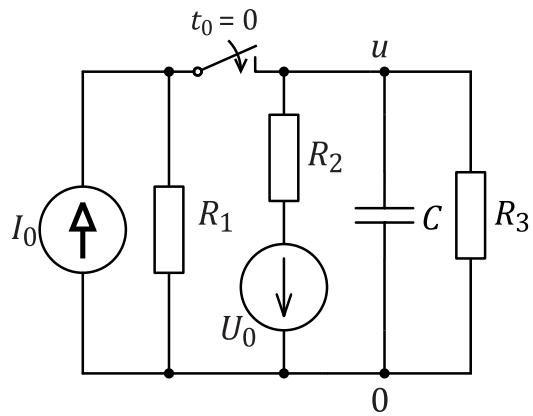
Výsledná časová konstanta $\tau = 727,3 \mu s$

Časový průběh proudu je potom:

$$i = 0,1091e^{-1375t} \text{ A}$$

Časový průběh napětí:

$$u = U_0 + R_2 i = 36 e^{-1375t} + 24 \text{ V}$$



Obrázek 5.17: Obvod

Příklad 5.10: Nalezněte časový průběh napětí u po sepnutí spínače $t_0 = 0$ obvodu (schéma s vyznačeným průběhem napětí zdroje 5.17). Hodnoty prvků jsou následující:

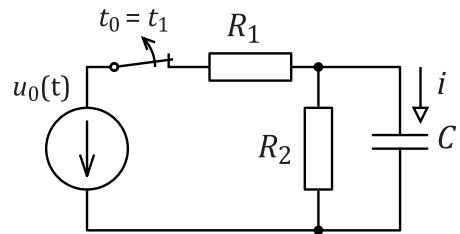
$U_0 = 12 \text{ V}$, $I_0 = 2 \text{ A}$, $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$ a $C = 100 \mu\text{F}$.

Řešení: Obvod se upraví tak, že se zdroj U_0 a rezistor R_2 nahradí lineárním zdrojem proudu podle Nortonova teorému. Nové prvky jsou $I_n = 1 \text{ A}$ a $R_n = 12 \Omega$.

Následně se určí počáteční napětí na kapacitoru $U_{C0} = 6 \text{ V}$ - před počátkem přechodného děje. Poté se sestaví obvod po sepnutí spínače a zjednoduší se pomocí ekvivalentních náhrad (jsou tam 3 paralelní rezistory a dva paralelně zapojené zdroje proudu, výsledkem je lineární zdroj proudu s $I_i = 3 \text{ A}$ a $R_i = 1/G_i = 4 \Omega$). Sestaví se obvodová rovnice pro přechodný jev a určí se časová konstanta obvodu $\tau = CR_i = 400 \mu\text{s}$. Nakonec se určí ustálená hodnota napětí po ukončení přechodného jevu, která vychází z napětí nezatíženého lineárního zdroje proudu $U_\infty = I_i \cdot R_i = 12 \text{ V}$. Časový průběh napětí po zahájení přechodného děje je potom:

$$u = 6 \left(1 - e^{-2500t} \right) + 6 \text{ V}$$

Příklad 5.11: Nalezněte časový průběh proudu i po rozepnutí spínače v čase $t_0 = 0$ s (Obrázek 5.18). Hodnoty prvků jsou následující: $R_1 = 220 \Omega$, $R_2 = 330 \Omega$ a $C = 10 \mu\text{F}$. $u_0(t) = 24 \sin(314t)$ V



Obrázek 5.18: Obvod

Řešení: Nejprve se určí počáteční energetický stav kapacitoru C . Obvod je v harmonickém ustáleném stavu, je možné použít symbolicko-komplexní metodu. Fázor napětí na kapacitoru je určen děličem napětí R_1 ku $R_2||C$ z fázoru napájecího napětí $\hat{\mathbf{U}}_{0M}$. Fázor se nepřepočítává do oboru efektivních hodnot:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}_{CM} &= \hat{\mathbf{U}}_{0M} \frac{\frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}}{R_1 + \frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}} \cdot \frac{1+j\omega R_2 C}{1+j\omega R_2 C} = \hat{\mathbf{U}}_{0M} \frac{R_2}{R_2 + R_1 + j\omega R_1 R_2 C} = \\ &= 12,290 - 5,094 = 13,303 e^{-i0,39293} \text{ V}\end{aligned}$$

Fázor se nyní převede do časového průběhu, a určí se napětí na kapacitoru v čase $t_1 = 0$:

$$u_c(t_1 = 0) = U_M \sin(\omega t + \varphi) = 13,303 \sin(314 \cdot 0 - 0,3929) = -5,094 \text{ V}$$

Vlastní přechodný jev je určen je kapacitorem C a rezistorem R_2 . Diferenciální rovnice se získá z obvodové rovnice sestavené např. metodou uzlových napětí.

$$\begin{aligned}\frac{0-u}{R_2} - C \frac{du}{dt} &= 0 \\ R_2 C \frac{du}{dt} + u &= 0\end{aligned}$$

Časová konstanta je $\tau = CR_2 = 3,3$ ms a řešení homogenní diferenciální rovnice je:

$$u_0 = A_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

Napětí na kondenzátoru v čase $t = 0$ bylo určeno tímto výpočtem:(5.3), napětí $u(t = \infty) = 0$ proto po dosazení okrajových podmínek dostaneme:

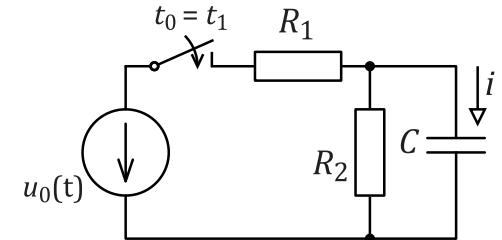
$$u = -5,094 \cdot e^{-303t}$$

Podle zadání je nutno určit proud, který směruje do kondenzátoru shůry. Ten se nejsnáze určí z proudu přes rezistor, který má opačný směr, než proud kondenzátorem, a zjistí se z Ohmova zákona:

$$i_R = \frac{-5,094 \cdot e^{-303t}}{330} = -15,44 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-303t} \text{ A}$$

Proud kondenzátorem:

$$i_C = -i_R = 15,44 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-303t} \text{ A}$$



Příklad 5.12: Nalezněte časový průběh proudu i po sepnutí spínače v čase $t_0 = 5$ ms ve vyznačeném obvodu (schéma s vyznačeným průběhem napětí zdroje 5.19). Hodnoty prvků jsou následující:

$u_0(t) = 24 \sin(314,2t)$ V, $R_1 = 220 \Omega$, $R_2 = 330 \Omega$ a Obrázek 5.19: Obvod s přechodným jevem

Jinou možností je proud kondenzátorem získat derivací z napětí u :

$$i_C = C \frac{d(-5,094 \cdot e^{-303t})}{dt} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot (-303) \cdot (-5,094) \cdot e^{-303t} = 15,44 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-303t} \text{ A}$$

Řešení: Náhrada zdroje a rezistorů R_1 a R_2 podle Theveninova teorému: $u_i(t) = u_0(t) \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 14,4 \sin(314,2t)$ V $R_i = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 132 \Omega$ Sestavení obvodové rovnice podle metody smyčkových proudů (hledanou funkcí je časový průběh proudu).

$$-u_i(t) + R_i \cdot i + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau_0) d\tau_0 + U_c(t=0) = 0$$

Úprava a derivace rovnice:

$$R_i C \frac{di}{dt} + i = C [u_i(t) + U_c(t=0)]$$

Zkrácená (homogenní) rovnice:

$$R_i C \frac{di_0}{dt} + i_0 = 0$$

Výsledná rovnice ukazuje na časovou konstantu $\tau = CR_i = 2,64$ ms Řešení obecné lineární diferenciální rovnice prvního řádu:

$$i = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p$$

v počátku přechodného děje je proud (kapacitor je vybitý, chová se jako zkrat):

$$i(t=0,005^+) = \frac{u_i((t=0^+)}{R_i} = \frac{14,4 \sin(314,2 \cdot 0,005)}{132} = 0,1091 \text{ A}$$

pro $t \Rightarrow \infty$ je obvod v harmonickém ustáleném stavu, časový průběh proudu se určí z jeho fázoru:

$$\hat{\mathbf{I}}_m = \frac{\hat{\mathbf{U}}_i}{R_i + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{14,4}{132 - j159,1} = 0,06965 \cdot e^{j0,8783} \text{ A}$$

Časový průběh: $i(t) = 0,06965 \sin(314,2t + 0,8783)$ A

Počáteční podmínky jsou tedy:

$$t = 0,005 : \quad 0,1091 = A \cdot e^{-\frac{0}{2,64 \cdot 10^{-3}}} + i_p$$
$$t \rightarrow \infty : \quad 0,06965 \sin(314,2t + 0,8783) = A \cdot e^{-\infty} + i_p$$

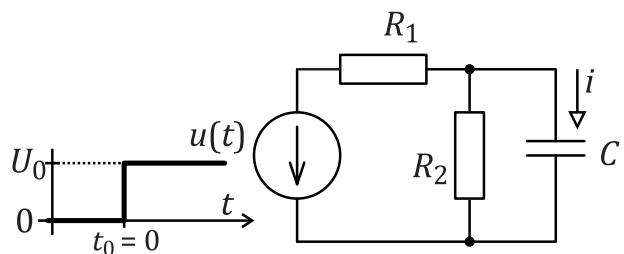
Po vyřešení rovnice: $i_p = 0,06965 \sin(314,2t + 0,8783)$ A a $A = 0,06464$ A Průběh proudu v přechodném jevu je tedy:

$$i(t) = 0,06464 \cdot e^{-\frac{t-0,005}{2,64 \cdot 10^{-3}}} + 0,06965 \sin(314,2t + 0,8783) \text{ A}$$



Příklad 5.13: Nalezněte časový průběh proudu i po skoku napětí $t_0 = 0$ ve vyznačeném obvodu (schéma s vyznačeným průběhem napětí zdroje 5.20). Hodnoty prvků jsou následující:

$$U_0 = 24 \text{ V}, R_1 = 220 \Omega, R_2 = 330 \Omega \text{ a} \\ C_2 = 2 \mu\text{F}.$$



Obrázek 5.20: Obvod

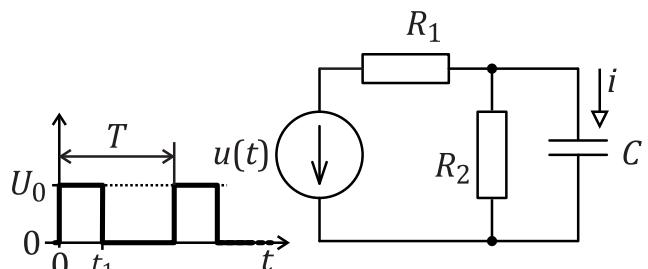
Řešení: Zdroj $u(t)$ a dvojice rezistorů se nahradí podle Thevenina teorému zdrojem s časovým průběhem

$$u_i(t) = u(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

a sériovým rezistorem

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Příklad 5.14: Zdroj napětí dává periodický průběh pulzního napětí s periodou T . Nalezněte časový průběh proudu i během jedné periody délky T , s délkou pulzu t_1 ve vyznačeném obvodu (schéma s vyznačeným průběhem napětí zdroje 5.21). Hodnoty prvků jsou následující: $U_0 = 24 \text{ V}, T = 10 \text{ ms}, t_1 = 3 \text{ ms}, R_1 = 220 \Omega, R_2 = 330 \Omega$ a $C_2 = 100 \mu\text{F}$.



Obrázek 5.21: Obvod

Řešení:

O obvodu probíhají dva přechodné jevy, v kvaziustáleném stavu by průběh proudu měl být také periodický, tedy stejného opakujícího se tvaru. Vhodnější hledaná veličina pro se-stavení diferenciální rovnice je napětí na kapacitoru u_C , protože musí být v okamžiku změny napětí na zdroji spojité. Proud se jednoznačně určí z dosazením napětí do vzorce: $i = C \frac{du}{dt}$

Soustavu $u_0(t)$, R_1 a R_2 je vhodné nahradit podle Theveninova teorému lineárním zdrojem napětí. Napětí náhradního zdroje v maximu:

$$U_i = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 14,4 \text{ V}$$

Odpor náhradního rezistoru:

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Rovnici je možné sestavit podle metody uzlových napětí, po úpravě je diferenciální rovnice pro oba stavů:

$$\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \frac{du_0}{dt} + u_0 = 0$$

Z toho se získá časová konstanta $\tau = \frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 13,2$ ms Protože je napětí u_C v okamžiku skoku napájecího napětí spojité, v periodickém průběhu v okamžiku skoku napájecího napětí z 0 na U_0 bude napětí na kapacitoru v každé periodě rovné U_{C1} a v okamžiku skoku z U_0 na 0 bude v každé periodě rovné U_{C2} .

V první části periody s dobou trvání t_1 je počáteční hodnota napětí rovna U_{C1} a v případě trvání přechodného jevu až do ustálení by napětí dosáhlo hodnoty U_i . Časový počátek, kdy $t = 0$ se zavede do okamžiku zdroje napětí z 0 na U_0 . Časový průběh napětí na kapacitoru je popsán rovnicí:

$$u(t) = (U_i - U_{C1}) \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} + U_{C1} \right)$$

V druhé části periody s dobou trvání $T - t_1$ je počáteční hodnota napětí rovna U_{C2} a v případě trvání přechodného jevu až do ustálení by napětí U_C kleslo až na 0. Časový průběh napětí na kapacitoru při zachování počátku času:

$$u(t) = U_{C2} e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

Z těchto rovnic je možné při dosazení v první rovnici $t = t_1$ určit U_{C2} :

$$U_{C2} = (U_i - U_{C1}) \left(1 + e^{-\frac{t_1}{\tau}} + U_{C1} \right)$$

a z druhé rovnice určit podobně U_{C1} :

$$U_{C1} = U_{C2} e^{-\frac{T-t_1}{\tau}}$$

Druhá rovnice se dosadí do první, a ta má po úpravě tvar:

$$U_{C2} = U_i \frac{1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} = 5,5111 \text{ V}$$

a po dosazení zpět do druhé rovnice je $U_{C1} = 3,2429$ V Časový úsek periody $\langle 0; t_1 \rangle$ je napětí na kapacitoru:

$$u_{C\langle 0; t_1 \rangle} = 11,1571 \left(1 - e^{-75,758t} + 3,2429 \right) \text{ V}$$

a časový úsek periody $\langle t_1; T \rangle$ je napětí na kapacitoru:

$$u_{C\langle t_1; T \rangle} = 5,5111 \cdot e^{-75,758(t-0,003)} \text{ V}$$

A proud se určí pomocí derivace:



5.4 Neřešené příklady

Příklad 5.15: Nalezněte časový průběh napětí u po rozepnutí spínače ve vyznačeném obvodu (schéma 5.22). Hodnoty prvků jsou následující: $I_0 = 1 \text{ A}$, $R = 33 \Omega$ a $C = 200 \mu\text{F}$.

Řešení:

$$u = R \cdot I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = 33 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.66}}\right) \text{ V}$$

Příklad 5.16: Nalezněte časový průběh proudu i po sepnutí spínače v čase $t = 0$ (Obrázek 5.23). Hodnoty prvků jsou následující: $R_1 = 220 \Omega$, $R_2 = 330 \Omega$ a $C = 10 \mu\text{F}$. $I_0 = 2 \text{ A}$

Řešení:

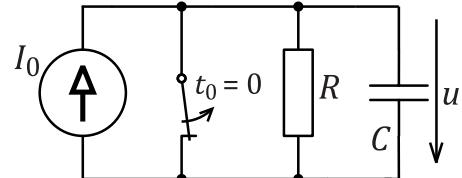
$$i = -\frac{I_0 (R_1 + R_2)}{R_1} \cdot e^{-\frac{t(R_1+R_2)}{R_1 R_2 C}} = -5 \cdot e^{-757,6t} \text{ A}$$

Příklad 5.17: Nalezněte časový průběh proudu i po skoku napětí $t_0 = 0$ ve vyznačeném obvodu (schéma s vyznačeným průběhem napětí zdroje 5.24). Hodnoty prvků jsou následující:

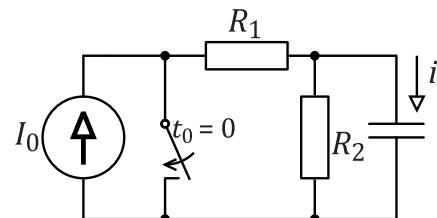
$$U_0 = 24 \text{ V}, R_1 = 12 \Omega, R_2 = 12 \Omega \text{ a } C = 2 \mu\text{F}.$$

Řešení:

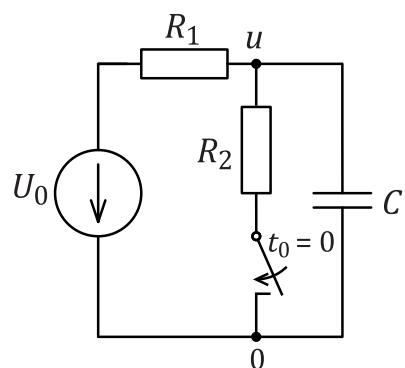
$$u = U_0 \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t(R_1+R_2)}{C R_1 R_2}}\right) + U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \\ = 24 - 12 e^{-83333t} \text{ V}$$



Obrázek 5.22: Obvod



Obrázek 5.23: Obvod



Obrázek 5.24: Obvod

Kapitola 6

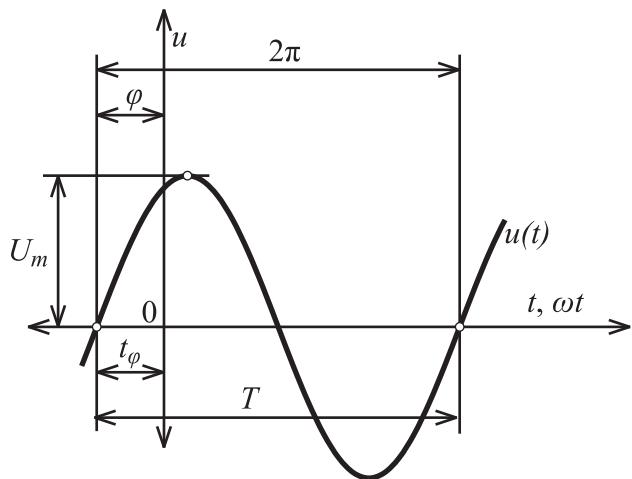
Veličiny v harmonickém ustáleném stavu

6.1 Harmonický průběh napětí - popis

6.1.1 Časový popis harmonického průběhu

Harmonický průběh napětí (podobně i proudu) se popisuje matematickou časovou funkcí - rovnice (6.1). Průběh se zakresluje do souřadného systému v časové oblasti (na vodorovné ose je čas t , vodorovný rozměr se vyznačuje v časové hodnotě) a nebo ve fázové oblasti (na vodorovné ose je fáze $\omega t + \varphi$, kde pro $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$, a $\varphi = t_\varphi \omega = t_\varphi \cdot 2 \cdot \pi \cdot f = t_\varphi \frac{2\pi}{T}$)

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.1)$$



Obrázek 6.1: Harmonický průběh napětí

U harmonického průběhu je maximální hodnota U_m určená amplitudou, střední hodnota U_{av} se určí pomocí integrálu:

$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |U_m \sin(\omega t)| dt = U_m \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} U_m \quad (6.2)$$

Efektivní hodnota:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U_m \sin(\omega t)]^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (6.3)$$

Stejnosměrná složka je rovna nule, protože plocha kladné a záporné části harmonické funkce je stejná. Z předcházejících vztahů je možné snadno určit činitele:

činitel výkyvu

$$k_v = \frac{U_m}{U} = \frac{U_m}{U_m \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad (6.4)$$

činitel tvaru

$$k_t = \frac{U}{U_{av}} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{U_m \frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \doteq 1,1107 \quad (6.5)$$

činitel plnění

$$k_v = \frac{U_{av}}{U_m} = \frac{U_m \frac{2}{\pi}}{U_m} = \frac{2}{\pi} \quad (6.6)$$

Z toho nejdůležitější je činitel výkyvu, který umožňuje snadný přepočet mezi maximální a efektivní hodnotou a dále činitel tvaru, který se používá při cejchování jednoduchých střídavých voltmetrů. Pokud se měřené harmonické napětí usměrní dvoupulzním usměrňovačem, je výsledná stejnosměrná složka rovna střední hodnotě. Pokud se dále vynásobí činitelem tvaru, odpovídá výsledná hodnota efektivní hodnotě měřeného harmonického průběhu. Pokud se měřený průběh od harmonického liší a nemá tedy sinusový průběh, je naměřená hodnota jiná než je skutečná.

6.1.2 Fázor napětí a proudu

Jiný způsob matematického zápisu harmonického průběhu proudu a napětí je možný pomocí **rotujícího fázoru**. Rotující fázor je komplexní funkce závislá na čase t . Definice rotujícího fázoru napětí:

$$\hat{u}(t) = u_1(t) + j \cdot u_2(t) \quad (6.7)$$

kde

$$u_1(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.8)$$

$$u_2(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.9)$$

Z rotujícího fázoru napětí se odvozuje fázor napětí:

$$\hat{u}(t) = U_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi)]$$



Aplikací Eulerova vztahu:

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \quad (6.10)$$

se výraz zkrátí:

$$\hat{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \hat{\mathbf{U}}_m \cdot e^{j\omega t} \quad (6.11)$$

Přitom se rozlišuje fázor pro maximální hodnoty: $\hat{\mathbf{U}}_m = U_m e^{j\varphi}$ a fázor pro efektivní hodnoty: $\hat{\mathbf{U}} = U e^{j\varphi}$, kdy z definice efektivního napětí platí vztah

$$\sqrt{2}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}_m \quad (6.12)$$

Modul fázoru napětí v maximálních hodnotách je tedy maximální hodnota (amplituda) harmonického průběhu $|\hat{\mathbf{U}}_m| = U_m$, která se přímo měří střídavým voltmetrem s nastavenou funkcí PEAK. Modul z fázoru napětí v oboru efektivních hodnot (symbol je bez indexu) je roven reálné efektivní hodnotě. $|\hat{\mathbf{U}}| = U$

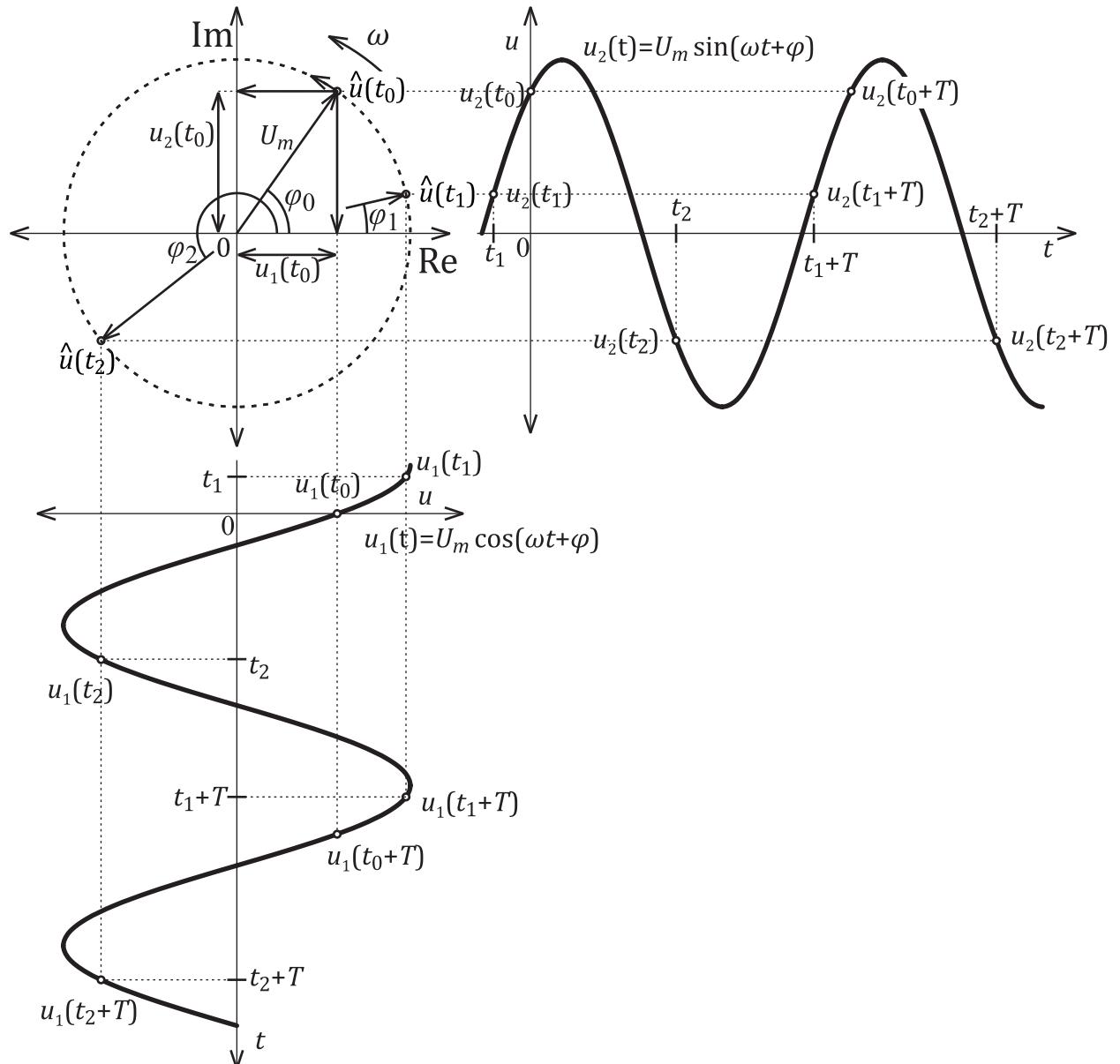
Také k harmonickému průběhu proudu $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ se zavádí **rotující fázor proudu** \hat{i} a **fázor proudu** $\hat{\mathbf{I}}$. Rotující fázor proudu:

$$\hat{i}(t) = i_1(t) + j \cdot i_2(t) = I_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = \quad (6.13)$$

$$= I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \hat{\mathbf{I}}_m \cdot e^{j\omega t} \quad (6.14)$$

Dále se stejně jako u napětí se zavádí **fázor proudu v oboru maximálních hodnot** $\hat{\mathbf{I}}_m$ a **fázor proudu v oboru efektivních hodnot**, které jsou ve vztahu: $\sqrt{2}\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{I}}_m$





Obrázek 6.2: Vztah mezi rotujícím fázorem a reálnou a imaginární složkou. Imaginární složka je odpovídající časový průběh (ten je svislý, proto je časový průběh na pravé straně), vodorovný na reálné ose je v dolní části.

6.2 Impedance a admitance

Parametry prvků v obvodu v harmonickém ustáleném stavu popisují **imitance**. Jsou definovány podílem fázorů napětí a proudu. Podíl fázoru napětí na prvku a fázoru proudu prvkem dává **impedanci** a podíl fázoru proudu prvkem ku fázoru napětí na prvku dává **admitanci**. Vzhledem k tomu, že fázory napětí a proudu jsou obecně komplexní čísla, jsou i imitance komplexní čísla.

6.2.1 Definice imitancí

Impedance v matematickém vyjádření:

$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{\mathbf{U}}}{\hat{\mathbf{I}}} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_m}{\hat{\mathbf{I}}_m} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_U}}{I \cdot e^{j\varphi_I}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} \quad (6.15)$$

Zápis impedance ve složkovém tvaru:

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad (6.16)$$

kde R je *resistance* a X je *reaktance*

Admitance v matematickém vyjádření:

$$\mathbf{Y} = \frac{\hat{\mathbf{I}}}{\hat{\mathbf{U}}} = \frac{\hat{\mathbf{I}}_m}{\hat{\mathbf{U}}_m} = \frac{I \cdot e^{j\varphi_I}}{U \cdot e^{j\varphi_U}} = \frac{I}{U} e^{j(\varphi_I - \varphi_U)} \quad (6.17)$$

Zápis admitance ve složkovém tvaru:

$$\mathbf{Y} = G + jB \quad (6.18)$$

kde G je *konduktance* a X je *susceptance*

Dále platí vztah:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} \quad (6.19)$$

Pro jednotlivé složky pak platí převod:

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{\cos \varphi}{Z} - j \frac{\sin \varphi}{Z} \quad (6.20)$$

kde Z je modul \mathbf{Z} . Proto $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ a $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$. Dále:

$$\mathbf{Z} = R + jX = \frac{1}{G + jB} \cdot \frac{G - jB}{G - jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{\cos \varphi}{Y} - j \frac{\sin \varphi}{Y} \quad (6.21)$$

kde Y je modul \mathbf{Y} . Proto $R = \frac{G}{G^2 + B^2}$ a $X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$.

Při výpočtu imitancí nezáleží, jestli se použije poměr fázorů efektivních nebo maximálních hodnot, podstatné je, aby v jednom zlomku byly bud' jen fázory maximálních nebo efektivních hodnot napětí nebo proudu.



6.3 Náhrady části obvodů při harmonickém napájení

6.3.1 Řazení imitancí v harmonicky napájených obvodech

V obvodech napájených harmonickým napětím platí První a Druhý Kirchhoffův zákon. Pro uzel v obvodu platí, že součet vstupujících proudů do uzlu je roven součtu proudů vystupujících, tedy v případě označení směru proudu do uzlu je okamžitý součet všech proudů roven 0. Pokud jsou proudy harmonické, je možné je popsat pomocí rotujících fázorů

$$\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \cdots + \hat{i}_n = 0 \quad (6.22)$$

dále je možné oddělit a vytknout rotující složku $e^{j\omega t}$:

$$\hat{\mathbf{I}}_1 + \hat{\mathbf{I}}_2 + \cdots + \hat{\mathbf{I}}_n = 0 \quad (6.23)$$

Z toho vyplývá, že platí I. Kirchhofův zákon i pro fázory.

Podobně je možné dokázat platnost II. Kirchhoffova zákona. Tedy pro napětí na prvcích v libovolné smyčce, pokud jsou všechny orientovány ve směru vedení smyčky platí:

$$\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \cdots + \hat{u}_n = 0 \quad (6.24)$$

dále je možné oddělit a vytknout rotující složku $e^{j\omega t}$:

$$\hat{\mathbf{U}}_1 + \hat{\mathbf{U}}_2 + \cdots + \hat{\mathbf{U}}_n = 0 \quad (6.25)$$

Z toho vyplývá, že platí II. Kirchhofův zákon i pro fázory. Z platnosti obou Kirchhoffových zákonů je pak možné určit celkovou impedanci a admitanci lineárních pasivních dvojpólů sestavených z rezistorů, induktorů a kapacitorů. Tyto prvky se popisují jejich impedancí nebo admitancí.

U **Sériového řazení impedancí** je celkový fázor napětí (podle II. K.Z) rovno součtu fázorů napětí na jednotlivých prvcích, fázor proudu je stejný ve všech prvcích:

$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{\mathbf{U}}}{\hat{\mathbf{I}}} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_1 + \hat{\mathbf{U}}_2 + \cdots + \hat{\mathbf{U}}_n}{\hat{\mathbf{I}}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_n \quad (6.26)$$

Sériové řazení admitancí:

$$\frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1} + \frac{1}{\mathbf{Y}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Y}_n} \quad (6.27)$$

Pro **Paralelního řazení admitancí** je celkový fázor vstupujícího proudu do vstupního uzlu (podle I. K.Z) roven součtu fázorů proudu ze vstupního uzlu vystupujících, fázor napětí je stejný ve všech prvcích:

$$\mathbf{Y} = \frac{\hat{\mathbf{I}}}{\hat{\mathbf{U}}} = \frac{\hat{\mathbf{I}}_1 + \hat{\mathbf{I}}_2 + \cdots + \hat{\mathbf{I}}_n}{\hat{\mathbf{U}}} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_n \quad (6.28)$$

Pro **paralelní řazení impedancí** platí obdobně:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_n} \quad (6.29)$$



Při řešení lineárního obvodu s harmonickým napájením je možno dále použít věty pro řešení obvodových rovnic, které byly popsány již dříve:

Transfigurace (viz kapitola 3.3.1, Theveninův a Nortonův teorém (viz kapitola 3.2.1 a Princip superpozice 3.4). Podobně lze realizovat napěťový a proudový dělič pro fázory napětí a proudu.

6.4 Výkon v harmonickém ustáleném stavu

6.4.1 Činný, zdánlivý a jakový výkon

Střední příkon na lineárním prvku po dobu jedné periody je dán:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (6.30)$$

pro:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U) \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_I) \quad (6.31)$$

a úpravě, kdy se počítá s rozdílem fází mezi napětím a proudem $\varphi_P = \varphi_U - \varphi_I$:

$$p(t) = U_m \cdot I_m \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \varphi_P) \quad (6.32)$$

po úpravě:

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi_P - \cos(2\omega t + \varphi_P)] \quad (6.33)$$

po dosazení do vzorce pro výpočet středního výkonu dá nenulový integrál pouze první část výrazu:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m \cdot I_m}{2} \left[\underbrace{\cos \varphi_P}_{\text{konstanta}} - \underbrace{\cos(2\omega t + \varphi_P)}_{P_{av}=0} \right] dt \quad (6.34)$$

Po integraci a dosazení $U_m = \sqrt{2}U$:

$$P = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi_P = U \cdot I \cdot \cos \varphi_P \quad (6.35)$$

Střední výkon pro harmonický průběh nazývá **činným výkonem** (jednotka Watt [W]).

Součin efektivních hodnot napětí a proudu periodického průběhu dává **výkon zdánlivý** (jednotka Voltampér [VA]):

$$S = \frac{U_m \cdot I_m}{2} = U \cdot I \quad (6.36)$$

Dále se definuje **jalový výkon** (jednotka Voltampér reaktanční [var]):

$$Q = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin \varphi_P = U \cdot I \cdot \sin \varphi_P \quad (6.37)$$

Pokud je zátěž taková, že φ_P je záporné, potom je záporný i jalový výkon. Kladná hodnota jalového výkonu ukazuje na induktivní charakter zátěže (fáze napětí na zátěži předbíhá fazu



proudu). Záporná hodnota jalového výkonu ukazuje na kapacitní charakter zátěže. (fáze napětí je zpozděna za fází proudu).

Pro činný, jalový a zdánlivý výkon platí vztah:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (6.38)$$

Trojúhelník o délce S , P a Q je pravoúhlý, kde P a Q jsou odvěsný a S přepona. Tento pak běžně slouží pro výpočet jalového výkonu, kdy činný výkon se určí wattmetrem, zdánlivý výkon pronásobením efektivní hodnoty napětí a proudu, a jalový výkon se určí ze vztahu:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \quad (6.39)$$

6.4.2 Účiník

Účiník λ je poměr činného a zdánlivého příkonu zátěže při napájení proudem s periodickým průběhem. V zahraniční literatuře lze najít pojem **Power factor**.

$$\lambda = \frac{P}{S} \quad (6.40)$$

Pro harmonické průběhy v lineárním obvodu je roven

$$\lambda = \cos \varphi_P \quad (6.41)$$

kde φ je rozdíl fáze napětí od fáze proudu $\varphi_P = \varphi_U - \varphi_I$ napájecího příslušnou lineární zátěž.

6.4.3 Komplexní výkon

Při harmonickém ustáleném stavu, kdy je pro výpočet veličin zavedena symbolicko-komplexní metoda, se činný, jalový a zdánlivý výkon určují z **komplexního výkonu**. Komplexní výkon \mathbf{S} na lineárním prvku se dvěma póly je definován jako:

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{I}}^* = \frac{\hat{\mathbf{U}}_m \cdot \hat{\mathbf{I}}_m^*}{2} \quad (6.42)$$

kde $\hat{\mathbf{U}}$ je fázor napětí na lineárním dvojpólu a $\hat{\mathbf{I}}$ je proud lineárním dvojpólem.

Při zápisu komplexního výkonu \mathbf{S} ve složkovém tvaru $\mathbf{S} = P + jQ$ odpovídá reálná složka činnému výkonu P a imaginární složka jalovému výkonu Q . Při zápisu komplexního výkonu v exponenciálním tvaru je $\mathbf{S} = S \cdot e^{j\varphi_P}$ odpovídá modul S zdánlivému výkonu podle definic (6.35), (6.37) a (6.36).

Pokud má pasivní lineární dvojpólový prvek známou impedanci \mathbf{Z} nebo admitanci \mathbf{Y} , potom se komplexní výkon určí z přímo z modulu fázoru napětí $|\hat{\mathbf{U}}| = U$ nebo z modulu fázoru proudu $|\hat{\mathbf{I}}| = I$. Z výpočtu tak odpadne fáze napětí nebo proudu a výpočet se tak významně zjednoduší.

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{I}}^* = \frac{\hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^*}{\mathbf{Z}^*} = \frac{|U|^2}{\mathbf{Z}^*} = |U|^2 \mathbf{Y}^* = |U|^2 \cdot G - j |U|^2 \cdot B \quad (6.43)$$



Proto platí:

$$P = |U|^2 \cdot G$$

$$Q = -|U|^2 \cdot B$$

a také

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{I}}^* = \frac{\hat{\mathbf{H}}^*}{\mathbf{Y}} = \frac{|I|^2}{\mathbf{Y}} = |I|^2 \mathbf{Z} = |I|^2 \cdot R + j|I|^2 \cdot X \quad (6.44)$$

Proto platí:

$$P = |I|^2 \cdot R$$

$$Q = |I|^2 \cdot X$$

Příklad 6.1: Prvek s impedancí $\mathbf{Z} = 15 + j \cdot 300 \Omega$ je napájen střídavým harmonickým napětím $u(t) = 48 \sin(300t + 0)$. Vypočtěte činný, jalový a zdánlivý výkon.

Řešení: Pro činný, jalový a zdánlivý se použije vzorec pro výpočet komplexního výkonu:

$$\mathbf{S} = \frac{U_m^2}{2 \cdot \mathbf{Z}^*} = \frac{48 \cdot 48}{2(15 - j300)} = \frac{8 \cdot 48 (5 + j100)}{10025} = \underline{0,191521 + j3,83042 \text{ VA}}$$

Činný výkon $P = 0,191521 \text{ W}$ a jalový výkon $Q = 3,83042 \text{ VAr}$. Zdánlivý výkon se určí pomocí Pythagorovy věty: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \underline{3,8352 \text{ VA}}$



6.5 Neřešené příklady

Příklad 6.2: Vodičem teče proud o časovém průběhu $i(t) = 12 \sin(3522t - \frac{\pi}{4})$ A. Zapište průběh ve formě rotujícího fázoru $\hat{i}(t)$, fázoru $\hat{\mathbf{I}}$, fázoru maximální hodnoty $\hat{\mathbf{I}}_m$. Použijte jak složkový, tak exponenciální tvar komplexního čísla.

Řešení: $\hat{i}(t) = 12 \cdot e^{j3522t - \pi/4}$, $\hat{\mathbf{I}} = 8,485 \cdot e^{-j\pi/4} = 6 - j6$ A, $\hat{\mathbf{I}}_m = 12 \cdot e^{-j\pi/4} = 8,485 - j8,485$ A

Příklad 6.3: Dva napěťové zdroje jsou zařazeny do série a každý z nich dává časový průběh napětí: $u_1(t) = 12 \sin(3522t - \frac{\pi}{4})$ V a $u_2(t) = 24 \sin(3522t + \frac{\pi}{4})$ V. Jaký časový průběh napětí je na výstupních svorkách?

Řešení: Převod do fázorů, součet fázorů, převod z fázoru do časového průběhu. $u_t = 26,833 \sin(3522t + 0,32175)$ V

Příklad 6.4: Dva harmonické zdroje proudu zdroje jsou v obvodu zařazeny antiparalelně (paralelně vedle sebe, šipky na schematické značce mají opačný směr), a mají časový průběh: $i_1(t) = 2 \sin(3522t - \frac{\pi}{4})$ A a $i_2(t) = 4 \sin(3522t + \frac{\pi}{4})$ A. Jaký proud teče ze společné svorky?

Řešení: Převod do fázorů, rozdíl fázorů, převod z fázoru do časového průběhu.

$$i_t = 4,4721 \sin(3522t - 1,8925) \text{ A nebo } i_t = 4,4721 \sin(3522t + 1,249) \text{ A}$$

Příklad 6.5: Fázor maximálních hodnot harmonického proudu je $\hat{\mathbf{I}}_m = 0,63 e^{j0,288}$ A a frekvence $f = 130$ Hz. Zapište tento proud ve formě rotujícího fázoru, časového průběhu, fázoru efektivní hodnoty, modulu efektivní hodnoty a modulu střední hodnoty.

Řešení: $\hat{i}(t) = 0,63 \cdot e^{j816,8t + 0,288}$, $i_1(t) = 0,63 \sin(816,8t + 0,288)$ A, $\hat{\mathbf{I}} = 0,4455 \cdot e^{j0,288} = 0,42713 + j0,12653$ A, $\hat{\mathbf{I}}_{av} = 0,40107 \cdot e^{j0,288} = 0,38455 + j0,11392$ A

Příklad 6.6: Fázor maximální hodnoty proudu má reálnou složku $\operatorname{Re}(\hat{\mathbf{I}}_m) = 5$ A a imaginární složku $\operatorname{Im}(\hat{\mathbf{I}}_m) = -5$ A. Úhlová frekvence $\omega = 628$ rad/s. Zapište tento proud ve formě rotujícího fázoru, časového průběhu, fázoru efektivní hodnoty, modulu efektivní hodnoty a modulu střední hodnoty.

Řešení: $\hat{i}(t) = 7,0711 \cdot e^{j628t - \frac{\pi}{4}}$, $i_1(t) = 7,0711 \sin(628t - \frac{\pi}{4})$ A, $\hat{\mathbf{I}} = 5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = 3,5355 - j3,5355$ A, $I = 5$ A a $I_{av} = 4,5016$ A

Příklad 6.7: Fázor efektivních hodnot napětí na určitém prvku je $\hat{\mathbf{U}} = 310 + j120$ V a frekvenci $f = 25$ Hz. Určete okamžitou hodnotu napětí v čase $t_1 = 0,112$ s.

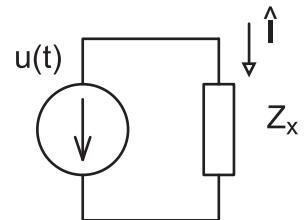
Řešení: Převod na časový průběh napětí a dosazení. $u(t) = 470,11 \cdot \sin(157,08t + 0,36933)$ A, $u(t = 0,112) = -364,5$ V



Příklad 6.8: Určete hodnotu impedance Z_x na schématu 6.3 z časového průběhu napětí $u(t)$ a fázoru proudu $\hat{\mathbf{I}}$:

- a) $u(t) = 120 \sin(600t)$ V a $\hat{\mathbf{I}} = 20 - j5$ A
- b) $u(t) = 12 \sin(600t - \frac{\pi}{6})$ V a $\hat{\mathbf{I}} = 2e^{j\pi/4}$ A
- c) $u(t) = 12 \sin(600t + \frac{\pi}{3})$ V a $\hat{\mathbf{I}} = 20 - j5$ A
- d) $u(t) = 120 \sin(500t + \frac{2\pi}{3})$ V a $\hat{\mathbf{I}} = -2 + j12$ A

Řešení: a) $3,9931 + j0,99827$; b) $1,0981 - j4,0981$; c) $0,1132 + j0,39572$; d) $6,5315 + j2,4469$;

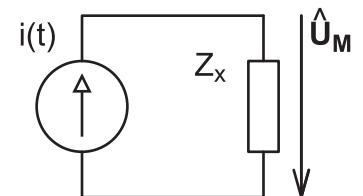


Obrázek 6.3: Schéma

Příklad 6.9: Určete hodnotu impedance Z_x na schématu 6.4 z časového průběhu proudu $i(t)$ a fázoru maximální hodnoty napětí $\hat{\mathbf{U}}_m$:

- a) $i(t) = 1 \sin(600t)$ A a $\hat{\mathbf{U}}_m = 20 - j5$ V
- b) $i(t) = 1,22 \sin(1000t - \frac{\pi}{6})$ A a $\hat{\mathbf{U}}_m = 2e^{j\pi/4}$ V
- c) $i(t) = 2,30 \sin(20 000t + \frac{\pi}{3})$ A a $\hat{\mathbf{U}}_m = 20 - j5$ V
- d) $i(t) = 12 \sin(10 000 000t + \frac{2\pi}{3})$ mA a $\hat{\mathbf{U}}_m = -2 + j12$ V

Řešení: a) $20 - j5$; b) $0,42429 + j1,5835$; c) $2,4652 - j8,6176$; d) $949,36 - j355,66$;

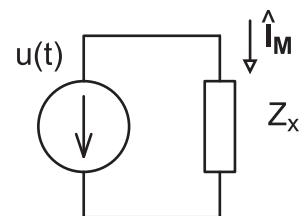


Obrázek 6.4: Schéma

Příklad 6.10: Určete hodnotu impedance Z_x na schématu 6.5 z časového průběhu napětí $u(t)$ a fázoru maximální hodnoty proudu $\hat{\mathbf{I}}_m$:

- a) $u(t) = 120 \sin(600t)$ V a $\hat{\mathbf{I}}_m = 20 - j5$ A
- b) $u(t) = 12 \sin(600t - \frac{\pi}{4})$ V a $\hat{\mathbf{I}}_m = 2e^{j\pi/4}$ A
- c) $u(t) = 12 \sin(600t + \frac{\pi}{3})$ V a $\hat{\mathbf{I}}_m = 20 - j5$ A
- d) $u(t) = 120 \sin(500t + \frac{2\pi}{3})$ V a $\hat{\mathbf{I}}_m = -2 + j12$ A

Řešení: a) $5,647 + j1,412$ Ω, b) $-j6$ Ω, c) $0,1601 + j0,5596$ Ω, d) $9,237 - j3,460$ Ω

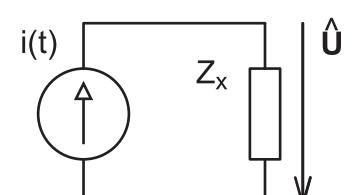


Obrázek 6.5: Schéma

Příklad 6.11: Určete hodnotu impedance Z_x na schématu 6.6 z časového průběhu proudu $i(t)$ a fázoru napětí $\hat{\mathbf{U}}$:

- a) $i(t) = 1 \sin(600t)$ A a $\hat{\mathbf{U}} = 20 - j5$ V
- b) $i(t) = 1,22 \sin(10 000t - \frac{\pi}{4})$ A a $\hat{\mathbf{U}} = 2e^{j\pi/4}$ V
- c) $i(t) = 2,30 \sin(30 000t + \frac{\pi}{3})$ A a $\hat{\mathbf{U}} = 20 - j5$ V
- d) $i(t) = 12 \sin(1 000 000t + \frac{2\pi}{3})$ mA a $\hat{\mathbf{U}} = -2 + j12$ V

Řešení: a) $20\sqrt{2} - j5\sqrt{2}$ Ω, b) $j2,318$ Ω, c) $3,486 - j12,187$ Ω, d) $1342,6 - j503$ Ω



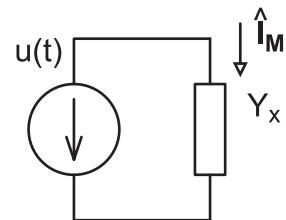
Obrázek 6.6: Schéma



Příklad 6.12: Určete hodnotu admitance \mathbf{Y}_x na schématu 6.7 z časového průběhu napětí $u(t)$ a fázoru maximální hodnoty proudu $\hat{\mathbf{I}}_m$:

- a) $u(t) = 120 \sin(600t)$ V a $\hat{\mathbf{I}} = 20 - j5$ A
- b) $u(t) = 12 \sin(600t - \frac{\pi}{4})$ V a $\hat{\mathbf{I}}_m = 2e^{j\pi/4}$ A
- c) $u(t) = 12 \sin(600t + \frac{\pi}{3})$ V a $\hat{\mathbf{I}}_m = 20 - j5$ A
- d) $u(t) = 120 \sin(500t + \frac{2\pi}{3})$ V a $\hat{\mathbf{I}}_m = -2 + j12$ A

Řešení: a) $0,1667 - j0,0417$ S, b) $j0,1667$ S, c) $0,4725 - 1,6517$ S
a d) $0,09494 - 0,03557$ S

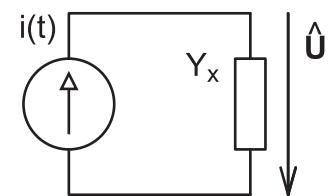


Obrázek 6.7: Schéma

Příklad 6.13: Určete hodnotu admitance \mathbf{Y}_x na schématu 6.8 z časového průběhu proudu $i(t)$ a fázoru napětí $\hat{\mathbf{U}}$:

- a) $i(t) = 1 \sin(600t)$ A a fázor napětí $\hat{\mathbf{U}} = 20 - j5$ $\hat{\mathbf{U}}$
- b) $i(t) = 1,22 \sin(10 000t - \frac{\pi}{4})$ A a fázor napětí $\hat{\mathbf{U}} = 2e^{j\pi/4}$ V
- c) $i(t) = 2,30 \sin(30 000t + \frac{\pi}{3})$ A a fázor napětí $\hat{\mathbf{U}} = 20 - j5$ V
- d) $i(t) = 12 \sin(1 000 000t + \frac{2\pi}{3})$ A a fázor napětí $\hat{\mathbf{U}} = -2 + j12$ V

Řešení: a) $0,03328 - j0,008319$ S, b) $-j0,4313$ S, c) $0,02170 + j0,07585$ S a d) $0,6532 - j0,2447$ S.

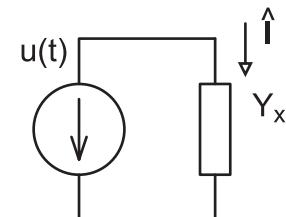


Obrázek 6.8: Schéma

Příklad 6.14: Určete hodnotu admitance \mathbf{Y}_x na schématu 6.9 z časového průběhu napětí $u(t)$ a fázoru proudu $\hat{\mathbf{I}}$:

- a) $u(t) = 120 \sin(600t)$ V a $\hat{\mathbf{I}} = 20 - j5$ A
- b) $u(t) = 12 \sin(600t - \frac{\pi}{6})$ V a $\hat{\mathbf{I}} = 2e^{j\pi/4}$ A
- c) $u(t) = 12 \sin(600t + \frac{\pi}{3})$ V a $\hat{\mathbf{I}} = 20 - j5$ A
- d) $u(t) = 120 \sin(500t + \frac{2\pi}{3})$ V a $\hat{\mathbf{I}} = -2 + j12$ A

Řešení: a) $0,2357 - j0,05893$ S, b) $0,06100 + j0,2277$ S, c) $0,6682 - j2,3359$ S a d) $0,1343 - j0,0503$ S.

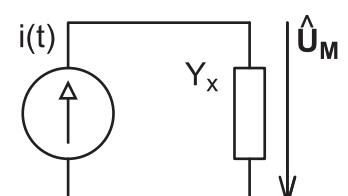


Obrázek 6.9: Schéma

Příklad 6.15: Určete hodnotu admitance \mathbf{Y}_x na schématu 6.10 z časového průběhu proudu $i(t)$ a fázoru maximální hodnoty napětí $\hat{\mathbf{U}}_m$:

- a) $i(t) = 1 \sin(600t)$ A a fázor maximálního napětí $\hat{\mathbf{U}}_m = 20 - j5$ V
- b) $i(t) = 1,22 \sin(1000t - \frac{\pi}{6})$ A a $\hat{\mathbf{U}}_m = 2e^{j\pi/4}$ V
- c) $i(t) = 2,34 \sin(20 000t + \frac{\pi}{3})$ A a $\hat{\mathbf{U}}_m = 20 - j5$ V
- d) $i(t) = 12 \sin(10 000 000t + \frac{2\pi}{3})$ mA a $\hat{\mathbf{U}}_m = -2 + j12$ V

Řešení: a) $0,04706 + j0,01177$ S, b) $0,1579 - j0,5892$ S, c) $0,03122 + j0,1091$ S a d) $0,9237 + j0,3461$ S.



Obrázek 6.10: Schéma



Příklad 6.16: Určete impedanci a admitanci dvojpólu na schématu

Řešení: $Z = 30 - j10 \Omega$, $\mathbf{Y} = 30 + j10 \text{ mS}$

$$\mathbf{Z}_1 = 10 + j30 \Omega \quad \mathbf{Z}_2 = 20 - j40$$

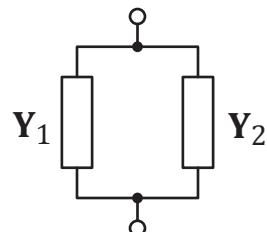
Příklad 6.17: Určete impedanci a admitanci dvojpólu na schématu

Řešení: $Z = 30 - j90 \Omega$, $\mathbf{Y} = 3,333 + j10 \text{ mS}$

$$\mathbf{Z}_1 = 10 - j30 \Omega \quad \mathbf{Y}_2 = 5 - j15 \text{ mS}$$

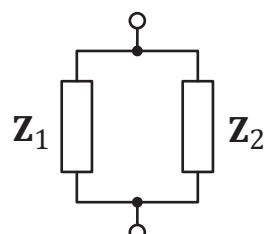
Příklad 6.18: Určete impedanci a admitanci dvojpólu na schématu. Parametry prvků: $\mathbf{Y}_1 = 20 + j40 \text{ mS}$ a $\mathbf{Y}_2 = 10 - j30 \text{ mS}$.

Řešení: $Z = 30 - j10 \Omega$, $\mathbf{Y} = 30 + j10 \text{ mS}$



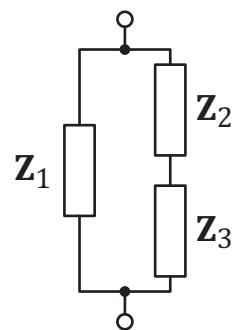
Příklad 6.19: Určete impedanci a admitanci dvojpólu na schématu. Parametry prvků: $\mathbf{Z}_1 = 10 + j10 \Omega$ a $\mathbf{Z}_2 = 10 - j10 \Omega$.

Řešení: $Z = 10 + j0 \Omega$, $\mathbf{Y} = 100 + j0 \text{ mS}$



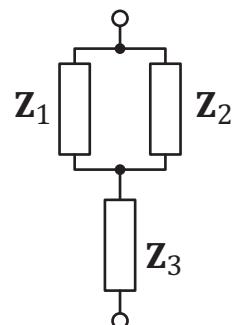
Příklad 6.20: Určete impedanci a admitanci dvojpólu na schématu. Parametry prvků: $\mathbf{Z}_1 = 10 + j30 \Omega$, $\mathbf{Z}_2 = 20 + j40 \Omega$ a $\mathbf{Z}_3 = 20 - j20 \Omega$.

Řešení: $Z = 12 + j16 \Omega$, $\mathbf{Y} = 30 - j40 \text{ mS}$



Příklad 6.21: Určete impedanci a admitanci dvojpólu na schématu. Parametry prvků: $\mathbf{Z}_1 = 10 + j30 \Omega$, $\mathbf{Z}_2 = 20 + j40 \Omega$ a $\mathbf{Z}_3 = 20 - j20 \Omega$.

Řešení: $Z = 26,8966 - j2,7586 \Omega$, $\mathbf{Y} = 36,793 - j3,774 \text{ mS}$



Příklad 6.22: Fázor napětí na dvojpólu je $\hat{\mathbf{U}} = 72 \text{ V}$ a fázor proudu $\hat{\mathbf{I}} = 2,21 - j1,455 \text{ A}$. Určete impedanci, admitanci, činný, zdánlivý, jalový výkon a účiník. Určete reaktanční charakter dvojpólu.

Řešení: $\mathbf{Z} = 22,73 + j14,96 \Omega$, $\mathbf{Y} = 30,69 + j20,21 \text{ mS}$, $\mathbf{S} = 159,1 + j104,8 \text{ VA}$, tedy $P = 159,1 \text{ W}$, $S = 190,5 \text{ VA}$, $Q = 104,81 \text{ VAr}$ a $\Lambda = 0,8352$.

Příklad 6.23: Dvojpól má impedanci $\mathbf{Z} = 230 \cdot e^{j0,112} \Omega$ a je napájen harmonickým napětí o fázoru $\hat{\mathbf{U}} = 50 \text{ V}$. Určete činný, zdánlivý a jalový výkon a účiník.

Řešení: $\mathbf{S} = 10,802 + j1,215 \text{ VA}$, tedy $P = 10,802 \text{ W}$, $S = 10,87 \text{ VA}$, $Q = 1,215 \text{ VAr}$ a $\Lambda = 0,994$.

Příklad 6.24: Dvojpól má impedanci $\mathbf{Z} = 410 - j530 \Omega$ a je napájen harmonickým napětí o fázoru $\hat{\mathbf{U}} = 123 \text{ V}$. Určete činný, zdánlivý a jalový výkon a účiník.

Řešení: $\mathbf{S} = 13,81 - j17,86 \text{ VA}$, tedy $P = 13,81 \text{ W}$, $S = 22,58 \text{ VA}$, $Q = -17,86 \text{ VAr}$ a $\Lambda = 0,612$.

Příklad 6.25: Dvojpól má admitanci $\mathbf{Y} = 5,13 + j5,02 \text{ mS}$ a je napájen harmonickým napětí o fázoru $\hat{\mathbf{U}} = 99,35 \text{ V}$. Určete činný, zdánlivý a jalový výkon a účiník.

Řešení: $\mathbf{S} = 50,66 + j49,65 \text{ VA}$, tedy $P = 50,66 \text{ W}$, $S = 70,91 \text{ VA}$, $Q = -j49,65 \text{ VAr}$ a $\Lambda = 0,714$.

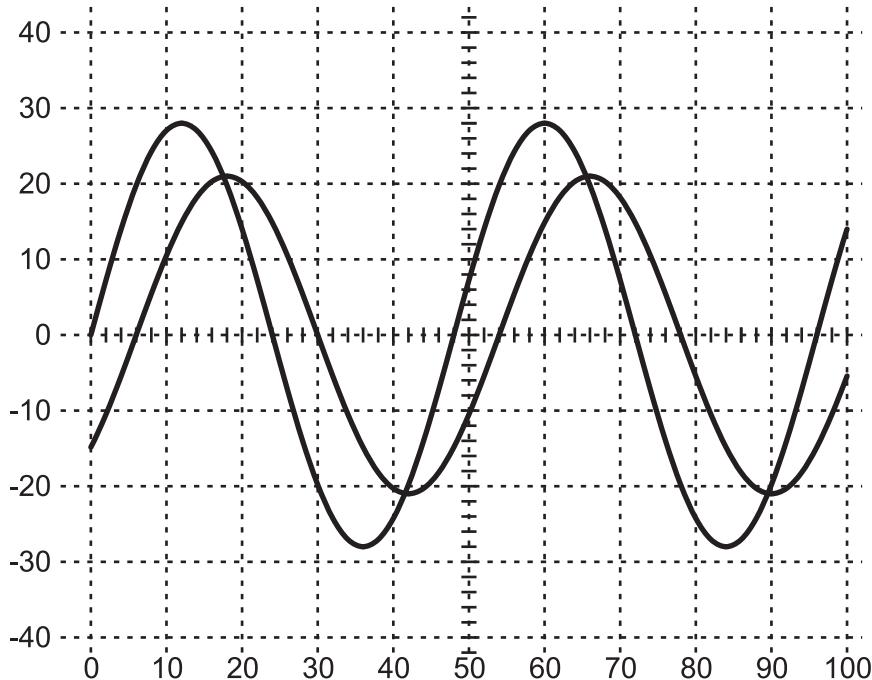
Příklad 6.26: Dvojpól má admitanci $\mathbf{Y} = 12,2 + j33\,200 \mu\text{S}$ a protéká jím proud o fázoru $\hat{\mathbf{I}} = 212 \text{ mA}$. Určete činný, zdánlivý a jalový výkon.

Řešení: $\mathbf{S} = 0,0005 + j1,354 \text{ VA}$, tedy $P = 0,5 \text{ mW}$, $S = 1,354 \text{ VA}$, $Q = -j1,354 \text{ VAr}$ a $\Lambda = 3,67 \cdot 10^{-4}$.



6.6 Určení imitance prvků osciloskopem

Příklad 6.27: Určete impedanci prvku v komplexním tvaru, pokud je průběh napětí a průběh proudu zobrazen na osciloskopu (viz obr. 6.6). Jeden dílek ve vodorovném směru odpovídá času 100 μ s. Napětí má průběh s větší amplitudou, jeden svislý dílek odpovídá napětí 10 V. Proud je zobrazen průběhem s menší menší amplitudou, jeden svislý dílek odpovídá proudu 50 mA. Rozměr jednoho dílku se u osciloskopů uvádí jako vzdálenost mezi svislými nebo vodorovnými přerušovanými čarami.



Obrázek 6.11: Průběh na osciloskopu

Řešení: Nejprve se určí parametry obou průběhů na osciloskopu. Větší průběh má maximální hodnotu přibližně 2,8 dílku, to odpovídá maximálnímu napětí $U_m = 2,8 \cdot 10 = 28$ V. Menší průběh má maximální hodnotu přibližně 2,1 dílku, to odpovídá proudu $U_m = 2,1 \cdot 50 = 105$ mA.

Dále se určí fázový rozdíl průběhů. Nejprve se určí úhlová frekvence. Vzdálenost mezi následujícími dvěma vzestupnými průchody nulou odpovídá periodě T , a na těchto průbězích je vzdálenost těchto průchodů 4,8 dílků. (Pro zpřesnění měření je možné hledat vzdálenost dvou nejvzdálenějších vzestupných průchodů nulou a nalezený údaj dělit příslušným počtem period. Zde je naměřená vzdálenost přibližně 9,6 dílku, po dělením počtem period mezi průchody, tedy 2, dostáváme stejně číslo.) Vzdálenosti 4,8, naměřené na obrazovce osciloskopu, odpovídá čas periody $T = 4,8 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 480 \mu$ s. Z toho se získá frekvence $f = 1/T = 1/480 \cdot 10^{-6} = 2080$ Hz nebo úhlová frekvence $\omega = 2\pi/T = 13100$ rad/s.

Dále se z rozdílů průběhů určí časový posun mezi oběma průběhy. Ten odpovídá přibližně 0,6 dílkům, tedy času $t_\varphi = 0,6 \cdot 10^{-4} = 60 \mu$ s. Fázový posun: $\varphi = \omega \cdot t_\varphi = 0,8$ rad, pokud položíme průběh napětí jako referenční s fázovým posunem rovným nule, je průběh proudu

fázově zpožděn o 0,8 rad. Časové průběhy napětí a proudu je možné zapsat jako:

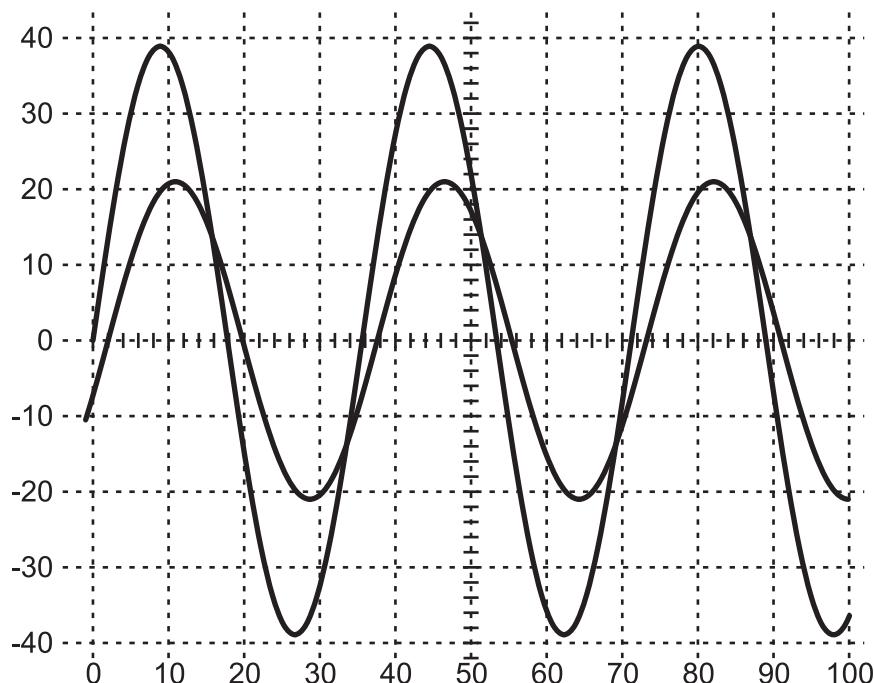
$$u(t) = 28 \sin(13100t) \text{ V}$$

$$i(t) = 105 \sin(13100t - 0,8) \text{ mA}$$

K uvedeným průběhům se určí jejich fázory v oboru maximálních hodnot $\hat{U}_m = 28e^{j0} \text{ V}$ a $\hat{I}_m = 105e^{-j0,8} \text{ mA}$, a z nich určit impedanci:

$$Z = \frac{\hat{U}_m}{\hat{I}_m} = 270e^{-j0,8} \Omega = 185 + j190 \Omega$$

Příklad 6.28: Určete impedanci prvku v komplexním tvaru, pokud je průběh napětí a průběh proudu prvkem zobrazen na osciloskopu (viz obr. 6.6). Jeden dílek ve vodorovném směru odpovídá času 5 μs , napětí odpovídá průběhu s větší amplitudou, jeden svislý dílek odpovídá napětí 100 mV a proudu odpovídá průběhu s menší amplitudou, jeden svislý dílek odpovídá proudu 20 mA. Rozměr jednoho dílku u osciloskopů je zaveden jako vzdálenost mezi svislými nebo vodorovnými přerušovanými čarami.



Obrázek 6.12: Průběh na osciloskopu

Řešení: Určení frekvence: $2T = 7,1 \text{ d} = 7,1 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 3,55 \mu\text{s}$, tedy $T = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Úhlová frekvence $\omega = 2\pi/T = 356000 \text{ rad/s}$

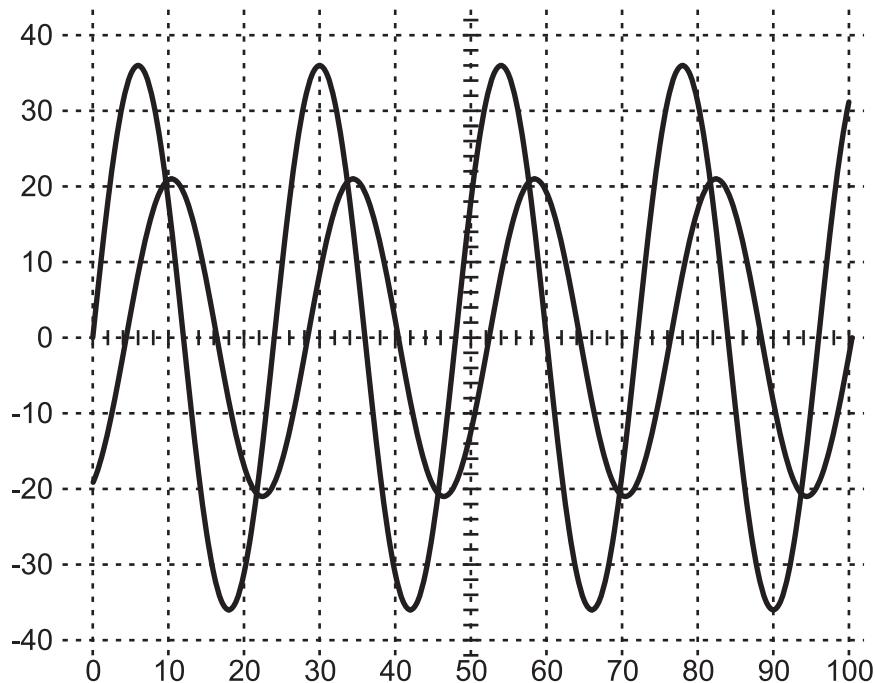
Fázové zpoždění proudu: Čas zpoždění odečtený z grafu - $t_\varphi = 1 \mu\text{s}$, Fázové zpoždění: $\varphi = t_\varphi \omega = 0,356 \text{ rad}$ Amplituda napětí $U_m = 390 \text{ mV}$, amplituda proudu $I_m = 42 \text{ mA}$

Fázory napětí a proudu: $\hat{U}_m = 0,39 \cdot e^{j0} \text{ V}$, $\hat{I}_m = 0,042 \cdot e^{-j0,356} \text{ mA}$

Impedance:

$$Z = \frac{\hat{U}_m}{\hat{I}_m} = 8,70 + j3,24 \Omega$$





Obrázek 6.13: Průběh na osciloskopu

Příklad 6.29: Určete impedanci prvku v komplexním tvaru, pokud je průběh napětí a průběh proudu prvkem zobrazen na osciloskopu (viz obr. 6.6). Jeden dílek ve vodorovném směru odpovídá času $10 \mu\text{s}$, napětí odpovídá průběhu s větší amplitudou, jeden svislý dílek odpovídá napětí 1 V a proudu odpovídá průběhu s menší amplitudou, jeden svislý dílek odpovídá proudu 20 mA.

Řešení: Určení frekvence: $4T = 9,6 \text{ d} = 9,6 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 9,6 \mu\text{s}$, tedy $T = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Úhlová frekvence $\omega = 2\pi/T = 262\,000 \text{ rad/s}$

Fázové zpoždění proudu: Čas zpoždění odečtený z grafu - $t_\varphi = 4,5 \mu\text{s}$, Fázové zpoždění: $\varphi = t_\varphi \omega = 1,18 \text{ rad}$ Amplituda napětí $U_m = 3,6 \text{ V}$, amplituda proudu $I_m = 21 \text{ mA}$

Fázory napětí a proudu: $\hat{\mathbf{U}}_m = 3,6 \cdot e^{j0} \text{ V}$, $\hat{\mathbf{I}}_m = 0,021 \cdot e^{-j1,18} \text{ mA}$

Impedance:

$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_m}{\hat{\mathbf{I}}_m} = 65,3 + j159 \Omega$$



Kapitola 7

Harmonické napájení v RLC obvodech

7.1 Základní prvky při harmonickém napájení

7.1.1 Úvod

V obvodech s harmonickým napájením se průběžně mění napětí a proud, přitom se periodicky ukládá a uvolňuje energie na akumulativních prvcích. Při průchodu harmonickém proudu lineárním induktorem se indukuje při ukládání energie do magnetického toku napětí harmonického průběhu, podobně při přiložení napětí na lineární kapacitor se zvyšuje a snižuje velikost náboje v kondenzátoru při současném harmonickém průtoku proudu. Na lineárních prvcích. Proto je možné u induktoru a kapacitoru definovat impedanci a admitanci, použít je v rámci symbolicko-komplexní metody, která umožní provést analýzu obvodu v podstatě stejným způsobem, jako je stejnosměrná analýza obvodů, které obsahují stejnosměrné zdroje a rezistory.

7.1.2 Rezistor

Pro rezistor platí vztah mezi okamžitým napětím a okamžitým proudem: $u = R \cdot i$.

$$I_m \sin(\omega t + \varphi_I) = \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi_U)}{R} \quad (7.1)$$

Pro fázory v harmonickém ustáleném stavu:

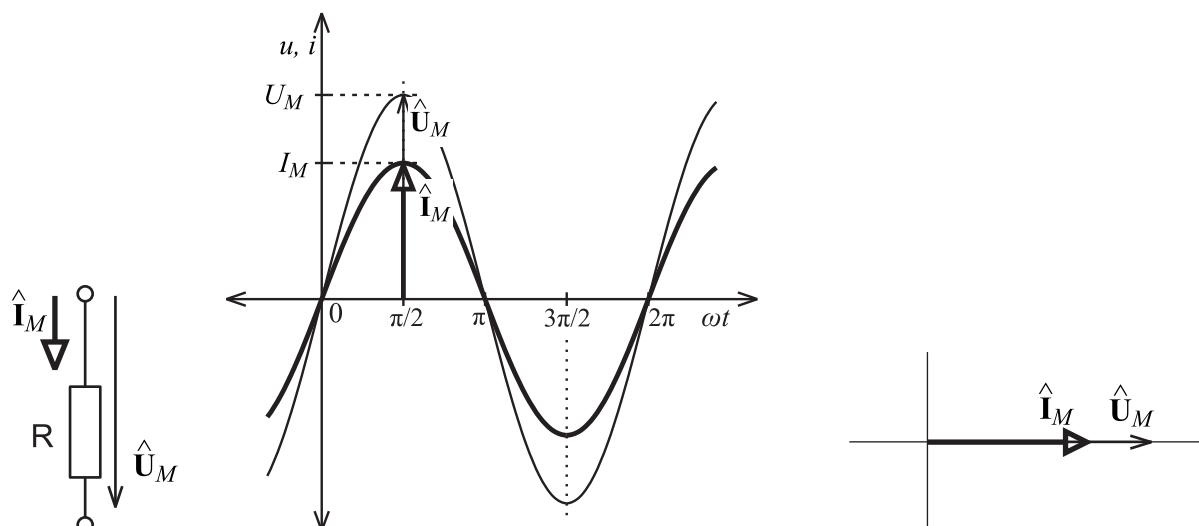
$$\hat{\mathbf{I}}_m = \frac{\hat{\mathbf{U}}_m}{R} \Rightarrow I_m \cdot e^{j\varphi_I} = \frac{U_m \cdot e^{j\varphi_U}}{R} \Rightarrow I_m = \frac{U_m}{R} \quad (7.2)$$

Při definici impedance a admitance:

$$Z = \frac{\hat{\mathbf{U}}_m}{\hat{\mathbf{I}}_m}, \text{ a } Y = \frac{\hat{\mathbf{I}}_m}{\hat{\mathbf{U}}_m} \quad (7.3)$$

je impedance a admitance rezistoru:

$$\mathbf{Z}_R = R \quad \text{a} \quad \mathbf{Y}_R = \frac{1}{R} \quad (7.4)$$



Obrázek 7.1: Obrázek 7.2: Rezistor - časový průběh napětí Obrázek 7.3: Fázor proudu a fázor napětí na rezistoru
Rezistor- a proudu
značka

7.1.3 Kapacitor

Vztah mezi proudem a napětím na kapacitoru:

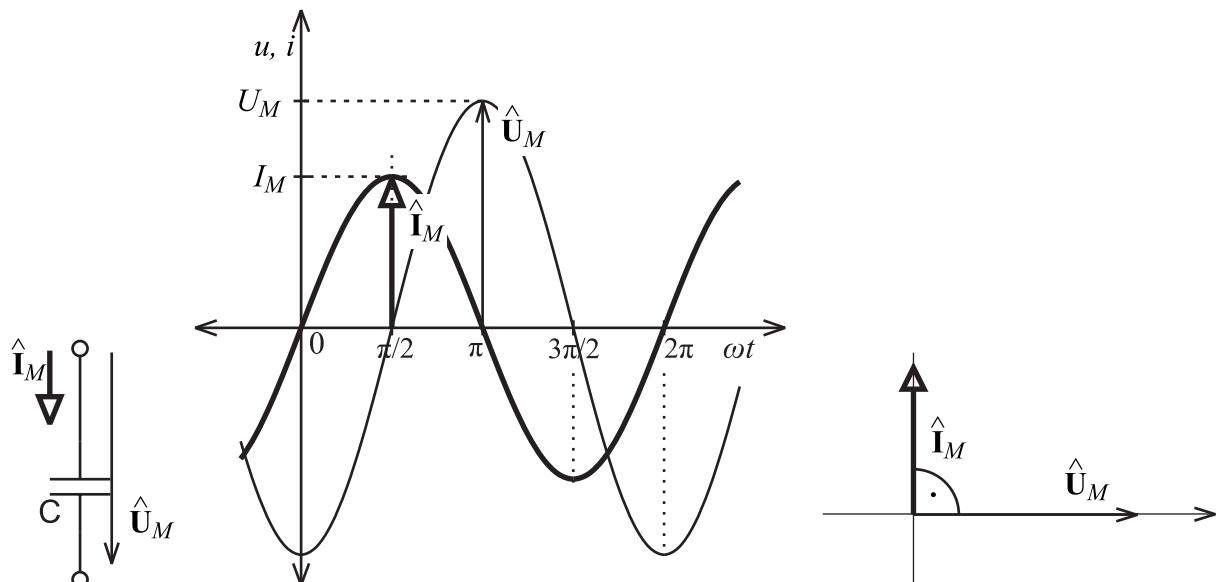
$$i = C \frac{du}{dt} \quad (7.5)$$

Při použití rotujícího fázoru:

$$\hat{i} = \hat{\mathbf{I}}_m e^{j\omega t} = C \frac{d\hat{u}}{dt} = C \frac{d(U_m e^{j\varphi_U} e^{j\omega t})}{dt} = C \frac{d(\hat{\mathbf{U}}_m e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C \hat{\mathbf{U}}_m e^{j\omega t} \quad (7.6)$$

Impedance a admitance kapacitoru je tedy:

$$\hat{\mathbf{I}}_m = j\omega C \hat{\mathbf{U}}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \text{a} \quad \mathbf{Y}_C = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (7.7)$$



Obrázek 7.5: Kapacitor - časový průběh na- značka

Obrázek 7.6: Fázory proudu a napětí na kapacitoru

7.1.4 Induktor

Vztah mezi proudem a napětím na induktoru:

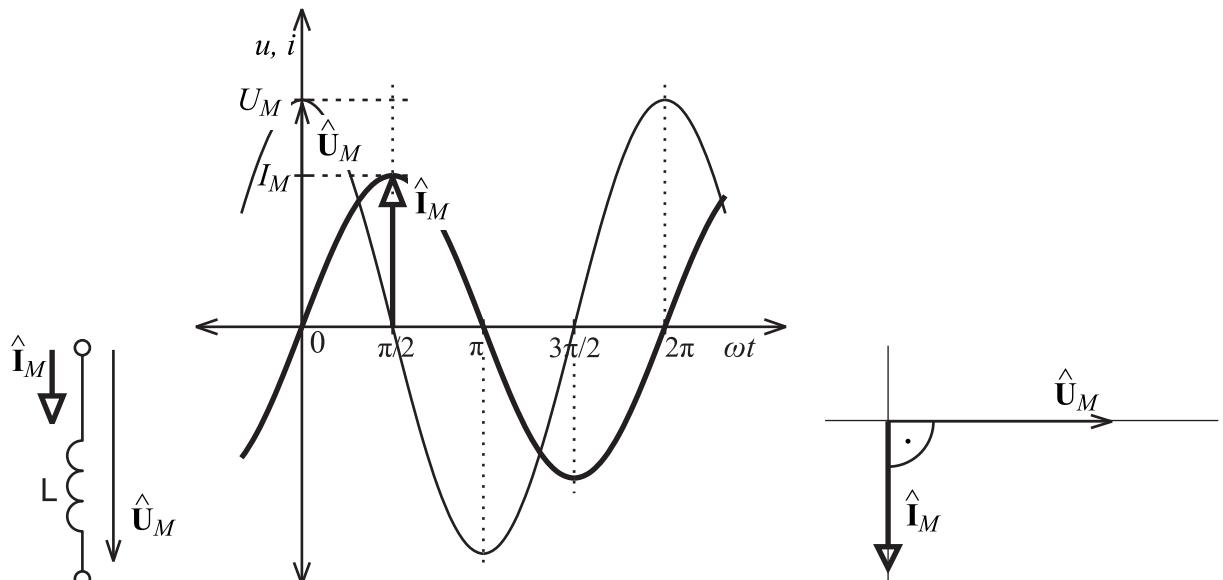
$$u = L \frac{di}{dt} \quad (7.8)$$

Při použití rotujícího fázoru:

$$\hat{u} = \hat{\mathbf{U}}_m e^{j\omega t} = L \frac{d\hat{i}}{dt} = L \frac{d(I_m e^{j\varphi_I} e^{j\omega t})}{dt} = L \frac{d(\hat{\mathbf{I}}_m e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L \hat{\mathbf{I}}_m e^{j\omega t} \quad (7.9)$$

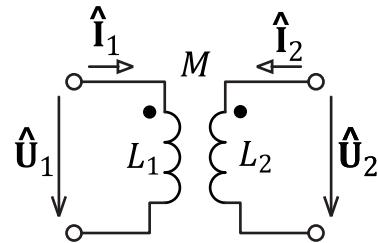
Impedance a admitance induktoru je tedy:

$$\hat{\mathbf{U}}_m = j\omega L \hat{\mathbf{I}}_m \quad \Rightarrow \quad Z_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{a} \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (7.10)$$



Obrázek 7.7: Obrázek 7.8: Induktor, časový průběh napětí
Obrázek 7.9: Fázory proudu a
Induktor - a proudu
značka

7.1.5 Vázaný induktor



Obrázek 7.10: Fázory napětí a proudu u vázaných induktorů

Popis vázaných induktorů v harmonickém ustáleném stavu vychází z obecného popisu vázaných lineárních induktorů. Pokud dva vázané induktory mají každý vlastní indukčnost L_1 a L_2 a dále vzájemnou indukčnost M , a prvním induktorem teče fázor proudu \hat{I}_1 a druhým \hat{I}_2 , potom je na prvním fázor napětí \hat{U}_1 a na druhém fázor napětí \hat{U}_2 , určené rovnicemi, které jsou získané ze vztahu (1.58)

$$\hat{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \hat{I}_1 \pm j\omega M \cdot \hat{I}_2 \quad (7.11)$$

$$\hat{U}_2 = j\omega L_2 \cdot \hat{I}_2 \pm j\omega M \cdot \hat{I}_1 \quad (7.12)$$

Znaménka v rovnicích budou kladná, pokud fázory proudu do obou induktorů vstupují souhlasně (oba směrem do strany induktoru označené tečkou nebo oba do opačné strany). Znaménko mínus se u obou rovnic položí tehdy, pokud jeden z fázorů proudu bude do induktoru vstupovat do strany s tečkou a druhý bez tečky.

Při požadavku mít fázor proudu induktory jako závislou veličinu a fázor napětí jako nezávislou je možné soustavu rovnic upravit (podle rovnice (1.60)):

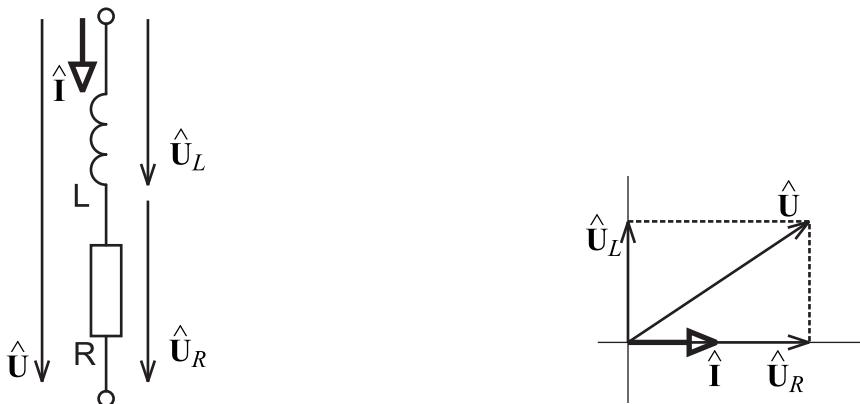
$$\hat{I}_1 = \frac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}\hat{U}_1 - \frac{M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}\hat{U}_2 \quad (7.13)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}\hat{U}_2 - \frac{M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}\hat{U}_1 \quad (7.14)$$

7.2 Imitance a komplexní výkon základních dvojpólů RL, RC a RLC

7.2.1 Sériový dvojpól RL

Sériový dvojpól RL se skládá ze sériově řazeného rezistoru a induktoru. Oběma prvky teče stejný proud, je na nich různý úbytek napětí. Proud je popsán fázorem $\hat{\mathbf{I}}$, úbytek napětí na rezistoru $\hat{\mathbf{U}}_R$, úbytek napětí na induktoru $\hat{\mathbf{U}}_L$. Napětí na dvojpólu je popsáno fázorem $\hat{\mathbf{U}}$ a podle II. KZ musí pro fázory napětí platit: $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}_R + \hat{\mathbf{U}}_L$.



Obrázek 7.11: Schéma sériového RL dvojpólu Obrázek 7.12: Fázorový diagram sériového s vyznačenými fázory napětí a proudu RL dvojpólu

V grafickém znázornění má fázor proudu $\hat{\mathbf{I}}$ stejný směr jako fázor napětí na rezistoru $\hat{\mathbf{U}}_R$. Fázor napětí na induktoru $\hat{\mathbf{U}}_L$ svíra s fázorem proudu $\hat{\mathbf{I}}$ a tedy i s fázorem napětí na rezistoru $\hat{\mathbf{U}}_R$ pravý úhel a je otočen proti směru otáčení hodinových ručiček. Celkový fázor napětí $\hat{\mathbf{U}}$ je možné určit grafickým součtem $\hat{\mathbf{U}}_R$ a $\hat{\mathbf{U}}_L$ podobně, jako u vektorů.

Impedance celého dvojpólu je dána součtem impedancí rezistoru a induktoru: $\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L$. Při dosazení parametrů prvků R a L a kruhové frekvence ω — $\mathbf{Z}_R = R$ a $\mathbf{Z}_L = j\omega L$:

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L \quad (7.15)$$

Admitance \mathbf{Y} se určí jako převrácená hodnota impedance $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{|Z|^2} - j \frac{\omega L}{|Z|^2} \quad (7.16)$$

Komplexní výkon se určuje podle zadané veličny. Při znalosti celkového fázoru napětí $\hat{\mathbf{U}}$:

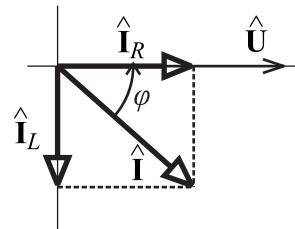
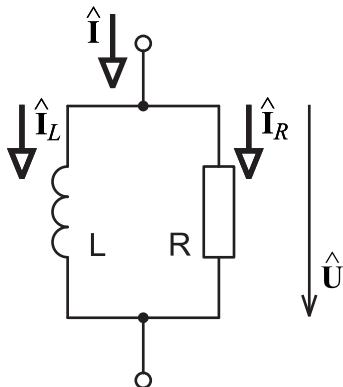
$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{I}}^* = \frac{|U|^2}{\mathbf{Z}^*} = |U|^2 \frac{R}{|Z|^2} + j |U|^2 \frac{\omega L}{|Z|^2} \quad (7.17)$$

Pokud je jako veličina zadán fázor proudu $\hat{\mathbf{I}}$:

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{I}}^* = |I|^2 \cdot \mathbf{Z} = |I|^2 \cdot R + j |I|^2 \omega L \quad (7.18)$$

7.2.2 Paralelní dvojpól RL

Paralelní dvojpól RL se skládá ze paralelně řazeného rezistoru a induktoru. Na obou prvcích je stejné napětí, které se popisuje fázorem \hat{U} . Do společného uzlu teče proud popsaný fázorem \hat{I} , do rezistoru dále teče proud \hat{I}_R a do induktoru \hat{I}_L . Podle I KZ musí pro tyto proudy platit: $\hat{I} = \hat{I}_R + \hat{I}_L$.



Obrázek 7.13: Schéma paralelního RL dvojpólu
Obrázek 7.14: Fázorový diagram paralelního půlu s vyznačenými fázory napětí a proudu

V grafickém znázornění fázor má fázor napětí \hat{U} stejný směr jako fázor proudu rezistorem \hat{I}_R , fázor proudu induktorem \hat{I}_L s fázorem napětí \hat{U} svírá pravý úhel, a je otocen po směru otáčení hodinových ručiček. Celkový fázor proudu \hat{I} je možné určit grafickým součtem jednotlivých fázorů proudu \hat{I}_R a \hat{I}_L .

Celková admitance \mathbf{Y} je rovna součtu admitance rezistoru \mathbf{Y}_R a admitance induktoru \mathbf{Y}_L :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} \quad (7.19)$$

Celková impedance \mathbf{Z} je rovna převrácené hodnotě celkové admitance \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L}} = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = \frac{R\omega^2 L^2 + j\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (7.20)$$

Komplexní výkon \mathbf{S} se určí podle zadанé veličiny, přiložené na dvojpól. Pro fázor napětí \hat{U} :

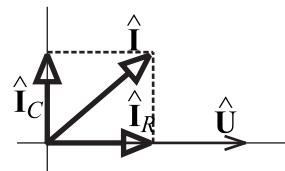
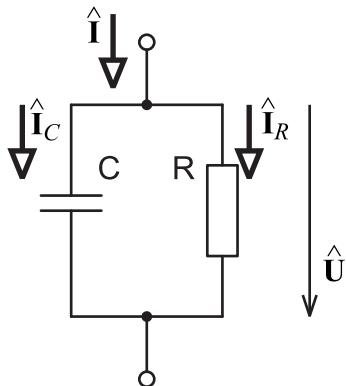
$$\mathbf{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = |\hat{U}|^2 \cdot \mathbf{Y}^* = \frac{U^2}{R} + j \frac{U^2}{\omega L} \quad (7.21)$$

Pro fázor proudu:

$$\mathbf{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = |\hat{I}|^2 \cdot \mathbf{Z} = I^2 \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j I^2 \frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (7.22)$$

7.2.3 Paralelní dvojpól RC

Paralelně řazený rezistor s kapacitorem, na obou prvcích stejný fázor napětí \hat{U} , prvky tečou různé fázory proudu \hat{I}_R a \hat{I}_C s rozdílem fáze $\frac{\pi}{2}$. Fázor proudu rezistorem \hat{I}_R je ve fázi s fázorem napětí \hat{U} , celkový fázor proudu se získá součtem $\hat{I} = \hat{I}_R + \hat{I}_C$.



Obrázek 7.15: Schéma paralelního RC dvojpólu
Obrázek 7.16: Fázorový diagram paralelního RC dvojpólu

Celková admitance zapojení \mathbf{Y} se určí jako součet admitance rezistoru $\mathbf{Y}_R = 1/R$ a admitance kapacitoru $\mathbf{Y}_C = j\omega C$:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C \quad (7.23)$$

Celková impedance zapojení \mathbf{Z} je převrácená hodnota admitance \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{\frac{1}{R} - j\omega C}{1 + (\omega C)^2} = \frac{R - j\omega CR^2}{1 + (\omega C^2 R^2)} = \frac{\frac{1}{R}}{|Y|^2} - j \frac{\omega C}{|Y|^2} \quad (7.24)$$

Komplexní výkon \mathbf{S} se určí podle zadané veličiny, přiložené na dvojpól. Pro fázor napětí \hat{U} :

$$\mathbf{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = |\hat{U}|^2 \cdot \mathbf{Y}^* = \frac{U^2}{R} - jU^2\omega C \quad (7.25)$$

Pro fázor proudu:

$$\mathbf{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = |\hat{I}|^2 \cdot \mathbf{Z} = I^2 \frac{\frac{1}{R}}{|Y|^2} - jI^2 \frac{\omega C}{|Y|^2} \quad (7.26)$$

7.2.4 Sériový dvojpól RC

Sériově řazený rezistor s kapacitorem, oběma prvky teče stejný fázor proudu $\hat{\mathbf{I}}$, na prvcích jsou fázory napětí: $\hat{\mathbf{U}}_C$ a $\hat{\mathbf{U}}_R$, celkový fázor napětí: $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}_C + \hat{\mathbf{U}}_R$

Celková impedance \mathbf{Z} je dána součtem jednotlivých impedancí:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C} + R = R - j\frac{1}{\omega C} \quad (7.27)$$

Celková admitance \mathbf{Y} :

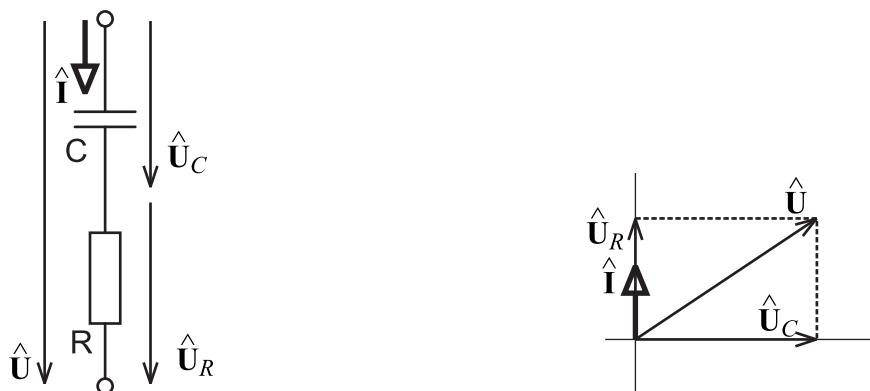
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} = \frac{\omega^2 RC^2 + j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (7.28)$$

Komplexní výkon pro fázor napětí:

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{I}}^* = |\hat{\mathbf{U}}|^2 \cdot \mathbf{Y}^* = U^2 \cdot \frac{\omega^2 RC^2 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (7.29)$$

Pro fázor proudu:

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{I}}^* = |\hat{\mathbf{I}}|^2 \cdot \mathbf{Z} = I^2 \cdot \left(R - j\frac{1}{\omega C} \right) \quad (7.30)$$



Obrázek 7.17: Schéma sériového RC dvojpólu Obrázek 7.18: Fázorový diagram sériového s vyznačenými fázory napětí a proudu RC dvojpólu

7.2.5 Sériový dvojpól RLC

Dvojpól je složen ze sériově řazeného induktoru, kapacitoru a rezistoru. Všemi prvky teče stejný fázor proudu $\hat{\mathbf{I}}$, na prvcích jsou fázory napětí: $\hat{\mathbf{U}}_L$, $\hat{\mathbf{U}}_C$ a $\hat{\mathbf{U}}_R$.

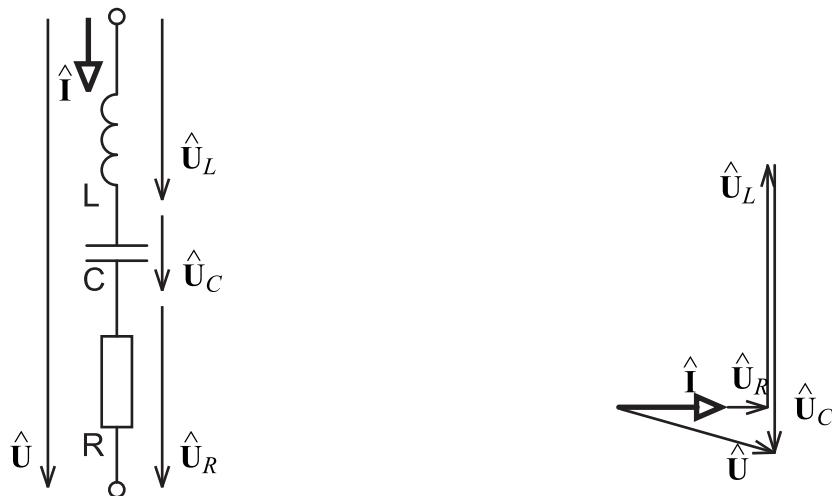
Celkový fázor napětí: $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}_L + \hat{\mathbf{U}}_C + \hat{\mathbf{U}}_R$

Impedance \mathbf{Z} je dána součtem jednotlivých impedancí:

$$\mathbf{Z} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (7.31)$$

Admitance z převrácené hodnoty impedance $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (7.32)$$



Obrázek 7.19: Schéma sériového RLC dvojpólu
Obrázek 7.20: Fázorový diagram pro sériový pól s vyznačenými fázory napětí a proudu RLC dvojpól

Komplexní výkon

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{I}}^* = |\hat{\mathbf{I}}|^2 \cdot \mathbf{Z} = I^2 \cdot \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \quad (7.33)$$

7.2.6 Paralelní dvojpól RLC

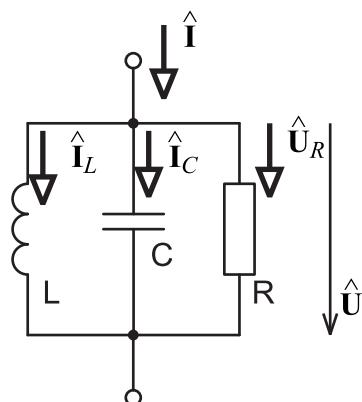
Dvojpól je složen z paralelně řazeného induktoru, kapacitoru a rezistoru, na prvcích je stejný fázor napětí \hat{U} , Celkový fázor proudu \hat{I} je dán součtem fázorů proudů \hat{I}_L , \hat{I}_C a \hat{I}_R .

Admitance \mathbf{Y} :

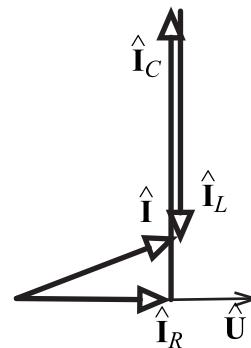
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (7.34)$$

Impedance z převrácené hodnoty admitance:

$$\mathbf{Z} = \frac{\frac{1}{R} - j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad (7.35)$$



Obrázek 7.21: Schéma paralelního RLC dvojpólu s vyznačenými fázory napětí a proudu



Obrázek 7.22: Fázorový diagram

7.2.7 Paralelní dvojpól RLC s RL v sérii

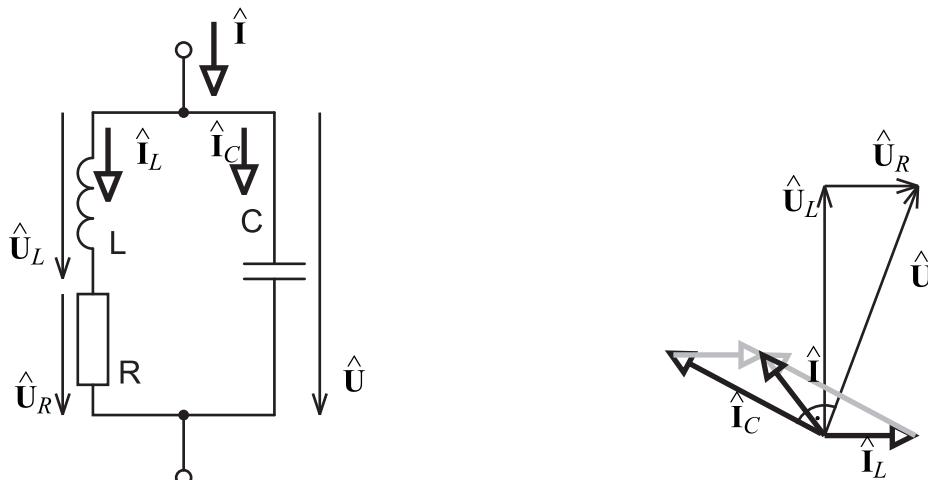
Tento dvojpól lépe charakteruje reálný paralelní obvod RLC. Dvojpól je složen z paralelně řazeného sériového dvojpólu RL a samostatného kapacitoru C. Celkový fázor proudu $\hat{\mathbf{I}}$ se získá součtem fázoru proudu kapacitorem $\hat{\mathbf{I}}_C$ a fázorem proudu dvojpólem $\hat{\mathbf{I}}_{RL}$. Celkový fázor napětí $\hat{\mathbf{U}}$ je stejný na kapacitoru stejně jako na dvojpólu RL, které tvoří součet fázoru napětí na induktoru $\hat{\mathbf{U}}_L$ a rezistoru $\hat{\mathbf{U}}_R$. Přehled o fázorech schematicky znázorňuje fázorový diagram. 7.23

Admitance dvojpólu \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right) \quad (7.36)$$

Impedance určená z převrácené hodnoty admitance:

$$\mathbf{Z} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot (R + j\omega L)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j(\omega L - \omega R^2 C - \omega^3 L^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (7.37)$$



Obrázek 7.23: Schéma paralelního RLC dvojpólu s RL v sérii s vyznačenými fázory napětí a proudu

Obrázek 7.24: Fázorový diagram

7.3 Rezonance

Dvojpóly s dvěma rozdílnými akumulativními prvky (induktem a kapacitorem) při vhodném zapojení k pracují tak, že při harmonickém napájení dochází k vzájemné výměně energie zmíněných dvojpólů. Během jedné periody přejde energie z formy magnetického toku do formy elektrického náboje, a to celkem dvakrát z energie elektrického pole do energie magnetického toku a dvakrát zpět. Přitom jak u elektrického pole, tak u magnetického se vystřídají obě polarity polí.

Při konkrétní frekvenci f_r nastává jev, kdy se maximální velikosti energie v magnetickém toku a energie v elektrickém náboji během periody rovnají. Induktor a kapacitor si vyměňují energie mezi sebou a zdroj pokrývá pouze tepelné ztráty. Tento jev se nazývá **rezonancí** a frekvence f_r je **rezonanční frekvencí**. Dvojpól při této rezonancii odebírá pouze činný výkon (určený ke krytí ztrát), jalový výkon, který při jiné frekvenci, než je rezonanční, slouží k výměně energie mezi zdrojem a některým z prvků, není při rezonanční frekvenci ze zdroje odebírány. Fázový posun mezi fází napětí a fází proudu zdroje, který napájí rezonanční obvod, je roven nule.

Při analýze rezonančního chování RLC dvojpólů se následně bude popisovat sériový RLC rezonanční obvod, paralelní rezonanční obvod RLC a paralelní rezonanční obvod s RL v sérii.

7.3.1 Sériový rezonanční dvojpól

Sériový rezonanční dvojpól je sériové spojení induktoru, kapacitoru a rezistoru. Na něm dochází k **rezonancii napěťové**, při rezonanční frekvenci je na induktoru a kapacitoru vyšší napětí, než je napětí zdroje. Dále je při rezonanční frekvenci modul impedance nejmenší, je roven impedanci rezistoru R . Při konstantním napájecím harmonickém napětí je tedy v rezonancii proud sériovým RLC rezonančním dvojpólem největší.

Rezonanční frekvence sériového RLC dvojpólu se určí z impedance. Hledá se taková úhlová frekvence ω_r , kdy imaginární složka impedance je rovná nule:

$$\mathbf{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

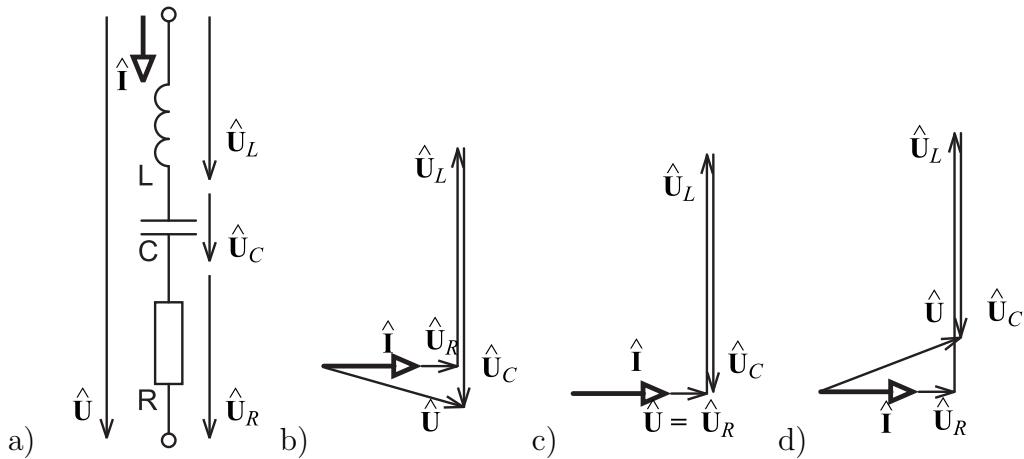
pro rezonanční úhlovou frekvenci ω_r musí platit, že:

$$\begin{aligned} \omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} &= 0 \\ \omega_r L &= \frac{1}{\omega_r C} \\ \omega_r^2 &= \frac{1}{LC} \\ \omega_r &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

pro frekvenci f_r :

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (7.38)$$





Obrázek 7.25: a) Schéma sériového RLC dvojpólu s vyznačenými fázory napětí a proudu, b) fázorový diagram pro $\omega < \omega_r$, b) fázorový diagram pro rezonanci: $\omega = \omega_r$, c) fázorový diagram pro $\omega > \omega_r$,

který je znám pod názvem Thompsonův vzorec.

Pro popis frekvenční charakteristiky impedance sériové rezonančního dvojpólu se vzorec normalizuje tak, že se fázor proudu $\hat{\mathbf{I}}$ při úhlové frekvenci ω vztahuje k proudu $\hat{\mathbf{I}}_r$ při rezonanční frekvenci ω_r :

$$\frac{\hat{\mathbf{I}}}{\hat{\mathbf{I}}_r} = \frac{\mathbf{Z}_r}{\mathbf{Z}} = \frac{R}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j \frac{L}{R} \left(\omega - \frac{1}{\omega LC} \right)} = \quad (7.39)$$

$$= \frac{1}{1 + j \frac{L}{R} \left(\omega - \frac{\omega_r^2}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega_r L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + j Q \left(s - \frac{1}{s} \right)} \quad (7.40)$$

při použití těchto náhrad: $s = \omega/\omega_r$ je poměrná funkce frekvence, $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ je rezonanční frekvence a $Q = \omega_r L / R$ je činitel jakosti rezonančního obvodu, pro který také platí:

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R} = \frac{U_{Lr}}{U} = \frac{U_{Cr}}{U} \quad (7.41)$$

Činitel jakosti rezonančního obvodu tedy ukazuje poměr mezi napětím v rezonanci a napětím zdroje, což je důležité pro určení maximálního napětí, které musí vydržet kapacitor v rezonančním LRC obvodu.

Při řešení rezonančních dvojpólů se často používá pojem šířka pásma. Jde o okolí rezonanční frekvence na frekvenční ose, které je ohraničené poklesem modulu proudu vůči proudu rezonanci o 3 dB, což odpovídá poměru:

$$\frac{\hat{\mathbf{I}}}{\hat{\mathbf{I}}_r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (7.42)$$

V tomto bodě je také poměr mezi reálnou a absolutní hodnotou imaginární složky impedance roven 1 a absolutní hodnota fázového úhlu je rovna $\pi/4$. Dolní mez pásma se může označit jako ω_1 a horní mez ω_2 .

7.3.2 Paralelní rezonanční dvojpóly

Paralelní rezonanční dvojpól je paralelní spojení induktoru, kapacitoru a rezistoru. Jeho admitance je:

$$\mathbf{Y} = 1/R + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (7.43)$$

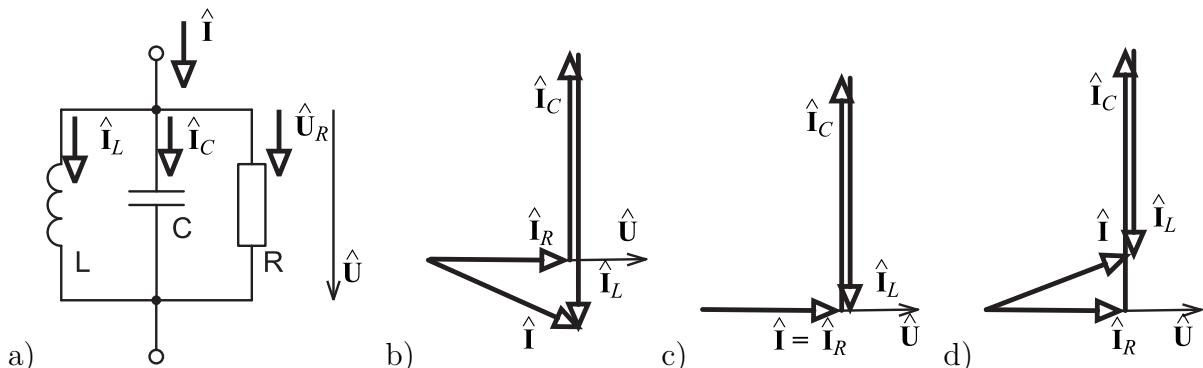
Výpočet rezonanční frekvence je možný opět pomocí Thompsonova vzorce:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (7.44)$$

Při rezonanční frekvenci napájecího zdroje je modul jeho admitance nejmenší a je rovna admitanci rezistoru. $\mathbf{Y} = G = 1/R$. U ideálního rezonančního obvodu (s největší jakostí) se modul jeho admitance blíží k nule, tedy odpor R se má blížit k nekonečnu. Při rezonanční frekvenci na něm dochází k **rezonanci proudové**, protože proudy mezi induktorem a kapacitorem jsou větší, než je hodnota napájecího proudu.

Stejně jako sériový rezonanční obvod je možné paralelní rezonanční obvod normalizovat, činitel jakosti podobně jako u sériového rezonančního obvodu znamená poměr mezi proudem induktorem a kapacitorem v rezonanci a napájecím proudem:

$$Q = \frac{I_{Cr}}{I} = \frac{I_{Lr}}{I} = \omega_r RC = \frac{R}{\omega_r L} \quad (7.45)$$



Obrázek 7.26: a) Schéma paralelního RLC dvojpólu s vyznačenými fázory napětí a proudu, b) fázorový diagram pro $\omega < \omega_r$, c) fázorový diagram pro rezonanci: $\omega = \omega_r$, d) fázorový diagram pro $\omega > \omega_r$,

V zapojení paralelního rezonančního dvojpólu, který je bližší skutečnosti, je rezistor s induktorem zapojen sériově. Protože jeho admitance je $\mathbf{Y} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right)$, rezonanční frekvence je

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad (7.46)$$

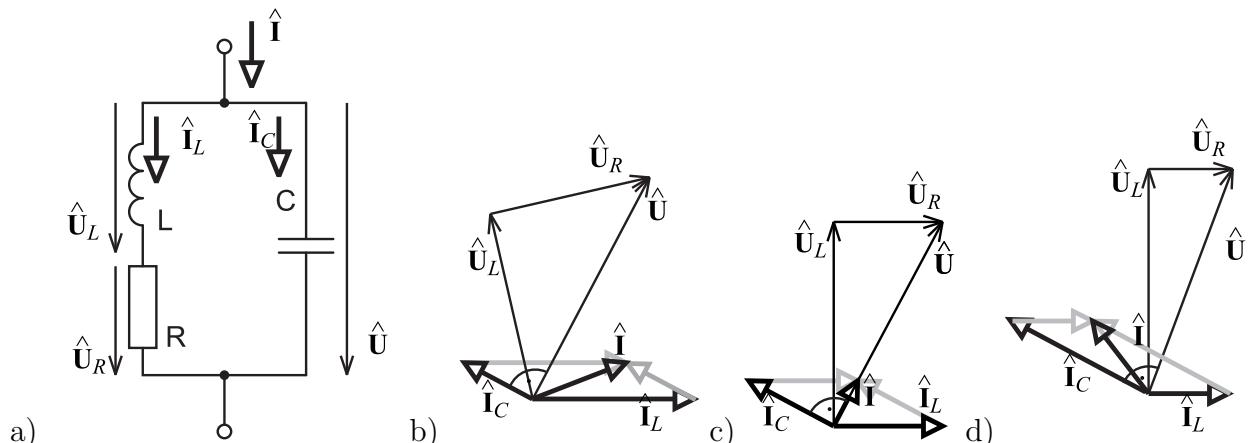
Je patrné, že na velikost rezonanční frekvence má vliv rezistor připojený v sérii s induktorem, pokud se zvyšuje, rezonanční frekvence klesá.

Paralelní rezonanční dvojpól s RL v sérii je možné také normalizovat, použije se opět náhrada $s = \omega/\omega_r$, $\omega_{r0} = 1/\sqrt{LC}$ a $Q_0 = \omega_{r0}L/R$.

Hodnota rezonanční frekvence rovna

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - LC \left(\frac{R}{L} \right)^2} = \omega_{r0} \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}} \quad (7.47)$$

pro $R \ll \omega_{r0}L$ je $Q \gg 1$, takže rezonanční frekvence ω_{r0} a ω_r se téměř rovnají.



Obrázek 7.27: a) Schéma paralelního RLC dvojpólu s RL v sérii s vyznačenými fázory napětí a proudu, b) fázorový diagram pro $\omega < \omega_r$, b) fázorový diagram pro rezonanci: $\omega = \omega_r$, c) fázorový diagram pro $\omega > \omega_r$,

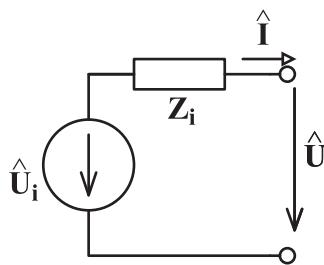
7.4 Lineární harmonický zdroj a jeho přizpůsobení

Lineární harmonický zdroj napětí je takový zdroj, který při zátěži naprázdno má na výstupu fázor napětí vnitřního zdroje \hat{U}_i , při výstupu nakrátko je jeho fázor proudu roven $\hat{I}_k = \hat{U}_i / Z_i$

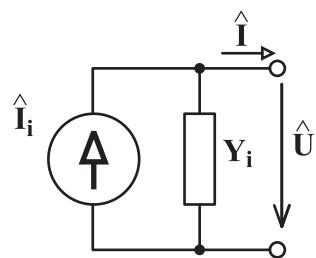
Při odběru fázoru proudu \hat{I} je jeho výstupní napětí

$$\hat{U} = \hat{U}_i - Z_i \cdot \hat{I} \quad (7.48)$$

Kde \hat{U}_i je fázor napětí vnitřního zdroje napětí a Z_i jeho vnitřní impedance.



Obrázek 7.28: Lineární harmonický zdroj na- Obrázek 7.29: Lineární harmonický zdroj
pětí proudu



Lineární harmonický zdroj proudu je takový zdroj, který při zátěži nakrátko dává fázor proudu vnitřního zdroje \hat{I}_i , při zátěži naprázdno je na něm fázor napětí $\hat{U}_p = \hat{I}_i / G_i$

Při připojení zátěže, na které je fázor napětí \hat{U}_0 je jeho výstupní fázor proudu

$$\hat{I} = \hat{I}_i - G_i \cdot \hat{U} \quad (7.49)$$

kde \hat{I}_i je fázor proudu vnitřního zdroje a G_i je jeho vnitřní admitance.

Přizpůsobení zátěže o impedanci Z_s vůči lineárnímu zdroji napětí (proudu) nastane tehdy, když se na zátěž přenese maximální činný výkon.

Pokud se zvolí lineární harmonický zdroj napětí, pak jeho činný výkon na výstupu při uvažování zátěže o impedanci Z_s je:

$$P = \operatorname{Re}(\hat{U}\hat{I}^*) = \operatorname{Re} \left[\frac{\hat{U}_i Z_s}{Z_s + Z_i} \left(\frac{\hat{U}_i}{Z_s + Z_i} \right)^* \right] = \\ = \Re \left[U_i^2 \frac{R_s + jX_s}{[(R_s + R_i) + j(X_s + X_i)] \cdot [(R_s + R_i) - j(X_s + X_i)]} \right] = \frac{U_i^2 R_s}{(R_s + R_i)^2 + (X_s + X_i)^2} \quad (7.50)$$

Z rovnice 7.4 vyplývá, že maximální činný výkon dostaneme při $R_s = R_i$ a $X_s + X_i = 0$, tedy $X_s = -X_i$. Zátěž je vůči lineárnímu harmonickému zdroji napětí připůsobená, pokud se na lineární harmonický zdroj napětí s vnitřním impedancí Z_i připojí zátěž o impedanci $Z_0 = Z_i^*$. Tomuto přizpůsobení také říkáme **úplné přizpůsobení**.

Neúplné přizpůsobení nastane tehdy, pokud se na lineární harmonický zdroj napětí s modulem vnitřní impedance Z_i připojí zátěž s modulem impedance $Z_0 = Z_i$

7.5 Jakost a ztrátový činitel

Reálný induktor i reálný kapacitor vykazuje nenulovou míru disipativní složky. Z tohoto důvodu byly zavedeny pro akumulativní prvky parametry, které tuto složku charakterizují. Jedná se o **činitel jakosti** Q a **ztrátový činitel** D . Oba parametry jsou vhodné jak pro reálné induktory, tak i pro reálné kapacitory. Činitel jakosti se používá především u reálných induktorů a ztrátový činitel u kapacitorů. Je nezbytné doplnit, že jak činitel jakosti tak ztrátový činitel se uvádí s frekvencí, při které byl určen. Při jiné frekvenci je hodnota obou činitelů odlišná.

Energetická definice **činitele jakosti** Q (bezrozměrná veličina) je:

$$Q = 2\pi \frac{W_{ak}}{W_{dis}} \quad (7.51)$$

kde W_{ak} je největší energie akumulovaná na některém z akumulativních prvků (induktor, kapacitor) během periody příslušné rezonanční frekvence a W_{dis} je energie, která se během celé periody na pasivních prvcích promění v teplo.

Příklad 7.1: Určete jakost Q vf. cívky v ladicím obvodu při frekvenci $f = 1$ MHz, pokud je nahrazena sériovým LR dvojpólem s parametry prvků $L = 20 \mu\text{H}$ a $R = 2 \Omega$.

Řešení: Energetickou veličinou v induktoru je proud, při sériovém náhradním schématu teče induktorem i rezistorem stejný harmonický proud o efektivní hodnotě I .

Maximální akumulovaná energie v induktoru během periody: $w_{ak} = \frac{1}{2}LI_m^2 = LI^2$

Celková ztrátová energie za periodu v rezistoru: $w_{dis} = \frac{R \cdot I^2}{f}$

Činitel jakosti:

$$Q = 2\pi \frac{w_A}{w_D} = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI^2}{\frac{R \cdot I^2}{f}} = \frac{\omega L}{R}$$

Po dosazení: $Q = 63$

Podobným způsobem je možné určit vzorec pro jakost paralelního RC dvojpólu, sériového RC dvojpólu i paralelního LR dvojpólu:

Činitel jakosti sériového LR a CR dvojpólu:

$$Q = \frac{\omega_R L}{R} = \frac{1}{\omega_R C R} \quad (7.52)$$

Činitel jakosti paralelního LR a dvojpólu je potom:

$$Q = \frac{R}{\omega_R L} = \omega_R C R \quad (7.53)$$

Ztrátový činitel prvku při harmonickém napájení je definován jako poměr mezi činným a absolutní hodnotou jalového výkonu. Velmi často je ztrátový činitel označován výrazem $\operatorname{tg}\delta$, kde úhel δ je úhel proti odvěsně délky P v pravoúhlém troúhelníku (6.38).

$$D = \operatorname{tg}\delta = \frac{P}{|Q|} \quad (7.54)$$



Pro paralelní RC dvojpól je ztrátový činitel:

$$D = \frac{P}{|Q|} = \frac{\frac{U^2}{R_P}}{|-U^2\omega C_P|} = \frac{1}{\omega R_P C_P} \quad (7.55)$$

Příklad 7.2: U kondenzátoru z internetového obchodu dodavatel uvádí parametry u elektrolytického kondenzátoru o nominální hodnotě $C_n = 220 \mu\text{F}$ ztrátový činitel $\operatorname{tg}\delta = 0,14$ při frekvenci $f_1 = 120 \text{ Hz}$. Určete ztrátový činitel pro frekvenci $f_2 = 50 \text{ Hz}$, pokud v náhradním paralelním RC dvojpólu nedošlo ke změně odporu ani kapacity.

Řešení:

Nejprve se určí hodnota náhradního rezistoru. Při paralelním dvojpólu je na obou prvcích stejný fázor napětí, činný výkon $P = U^2/R$, jalový výkon $Q = -U^2 \cdot \omega C$,

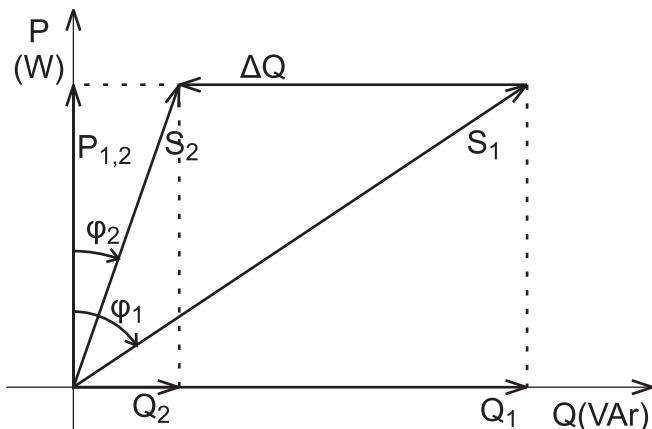
Ztrátový činitel pro paralelní RC dvojpól $D = \frac{P}{|Q|} = \frac{1}{\omega_1 R C}$, proto odpor náhradního rezistoru $R = \frac{1}{D\omega_1 C} = 43 \Omega$.

Ztrátový činitel pro frekvenci $f_2 = 50 \text{ Hz}$: $D = \frac{1}{\omega_2 R C} = 0,336$.



7.6 Kompenzace účiníku

Častým úkolem u lineární zátěže připojené na harmonický zdroj napětí je takové doplnění obvodu, aby zátěž odebírala z harmonického zdroje napájení pouze činný výkon. Tento problém je možné vyřešit vložením vhodného akumulativního prvku mezi zdroj a zátěž. Má tak dojít k přiblížení účiníku k hodnotě $\cos \varphi = 1$. Pokud je prvek vložen sériově se zátěží, jde o *sériovou kompenzaci*. Pokud je vložen paralelně k zátěži, jde o *paralelní kompenzaci*.



Obrázek 7.30: Kompenzace účiníku

Příklad 7.3: Provedte paralelní kompenzaci účiníku, určete typ a velikost pomocného prvku u zátěže s induktivním charakterem se známou hodnotou zdánlivého výkonu S , s účiníkem $\cos \varphi$ a napájecím harmonickým napětím o efektivní hodnotě U a známé frekvenci f .

Řešení:

$$C = \frac{S}{\omega U^2} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \quad (7.56)$$



7.7 Řešené příklady

7.7.1 Řešené příklady - impedance

Příklad 7.4: Ke střídavému zdroji o napětí $U_s = 230$ V a frekvenci $f = 50$ Hz se má připojit žárovka od nominálního napětí $U_n = 24$ V a nominálním proudem $I_n = 50$ mA.

a) Určete hodnotu předřadného rezistoru tak, aby proud žárovkou nepřekročil nominální hodnotu proudu I_n

b) Určete hodnotu kapacity předřadného kondenzátoru, aby proud žárovkou nepřekročil nominální hodnotu I_n . Určete minimální povolené napětí, které musí kondenzátor vydržet.

c) Uveďte, jaké řešení je z hlediska spotřeby elektrické energie výhodnější.

Řešení: a) Napětí se rozdělí mezi žárovku a předřadný odpor. $R = (U_s - U_n)/I_n = (230 - 24)/0,05 = 4,12$ k Ω Ztrátový výkon na předřadném odporu: $P_R = (U_s - U_n) \cdot I_n = 10,3$ W

b) Žárovku se bude považovat za zátěž s lineárním odporovým charakterem. Pokud je s žárovkou sériově spojen kondenzátor, oběma prvky teče proud stejně velikosti a fáze. Fáze napětí na kondenzátoru je přitom o $\pi/2$ zpožděná proti fázi napětí na žárovce a na fázorovém diagramu svírají pravý úhel. Celkový fázor napětí je téměř desetkrát delší, než fázor napětí na žárovce, vůči fázorům napětí na žárovce a kondenzátoru tvoří přeponu. Z Pythagorovy věty se může určit velikost fázoru napětí na kondenzátoru: $U_C = \sqrt{(U_s^2 - U_n^2)} = 228,7$ V. Z výsledku je patrné, že velikost napětí na kondenzátoru je prakticky stejná jako velikost napětí zdroje, proto je možné při určování předřadné impedance odpor žárovky zanedbat, a určit hodnotu kondenzátoru tak, aby jím při napětí $U_s = 230$ V protékal požadovaný proud.

Potřebná impedance předřadného kondenzátoru bez uvažování žárovky: $Z = U_s/I_n = 230/0,05 = 4,6$ k Ω . Protože $Z_C = 1/(\omega C)$, je jeho kapacita $C = 1/(j\omega Z_C)$. Při $\omega = 2\pi 50 = 314,2$ rad/s vychází kapacita předřadného kondenzátoru $C = 692,0$ nF.

Při uvažování žárovky je potřebná $Z_C 2 = 228,7/0,05 = 4574$ Ω . Kapacita předřadného kondenzátoru $C_2 = 1/(\omega Z_C) = 695,8$ nF. Zjednodušený přístup způsobil relativní chybu asi 0,6%.

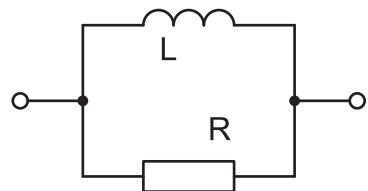
c) Na rezistoru vzniká ztrátový činný příkon $P = 10,3$ W, na ideálním kapacitoru vzniká příkon pouze jalový, který nemá u kondenzátoru tepelné účinky. Činný ztrátový příkon se mění na teplo, proto je výhodnější použít kondenzátor.

Příklad 7.5: Induktorem o indukčnosti 100 mH teče střídavý harmonický proud o časovém průběhu $i(t) = 0,53 \cdot \sin(242t)$ A. Určete časový průběh napětí na induktoru. Použijte symbolicko-komplexní metodu.

Řešení: Nejprve se určí fázor proudu v maximální hodnotě: $\hat{\mathbf{I}}_m = 0,53 + j0$ A. Dále se určí impedance induktoru $\mathbf{Z} = j\omega L = j242 \cdot 0,1 = j24,2$ Ω . Následuje fázor napětí v maximální hodnotě $\hat{\mathbf{U}}_m$ určený podle Ohmova zákona: $\hat{\mathbf{U}}_m = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{I}}_m = 0,53 \cdot j24,2 = j12,83$ V. Zbývá převod z fázoru do časového průběhu: $u(t) = 12,83 \sin(242t + \frac{\pi}{2})$ V

Příklad 7.6: Nalezněte hodnotu impedance a admittance dvojpólu na obrázku 7.31. Frekvence harmonického proudu je 400 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R = 15 \text{ k}\Omega, L = 1 \text{ H}$$



Obrázek 7.31: dvojpól

Řešení: Dvojpól je paralelní spojení dvou prvků. Výpočet z impedancí prvků:

$$\mathbf{Z}_R = R = 15000\Omega \text{ a } \mathbf{Z}_L = j\omega L = j2513\Omega$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_R \cdot \mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{j\omega R^2 L + \omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{9,4728 \cdot 10^{10} + j5,6543 \cdot 10^{11}}{213315169} =$$

$$= \underline{409,519 + j2444,414 \Omega}$$

$$\text{Admitance prvků: } \mathbf{Y}_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{15000} \quad \mathbf{Y}_L = \frac{-j}{\omega L} = \frac{1}{j2513}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} = \frac{\omega L - jR}{R\omega L} = \frac{2513 - j15000}{37695000}$$

$$\underline{\mathbf{Y} = 6,6667 \cdot 10^{-5} - j3,9793 \cdot 10^{-4} \text{ S}}$$

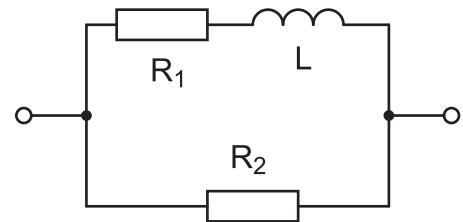
Pro kontrolu:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\frac{2513 - j15000}{37695000}} = \frac{37695000}{2513 - j15000} \cdot \frac{2513 + j15000}{2513 + j15000} = \frac{9,4728 \cdot 10^{10} + j5,6543 \cdot 10^{11}}{213315169}$$

$$\underline{\mathbf{Z} = 409,519 + j2444,414 \Omega}$$

Příklad 7.7: Nalezněte hodnotu impedance a admitance dvojpólu na obrázku 7.32. Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R_1 = 20 \Omega, R_2 = 200 \Omega, L = 1 \text{ H}$$



Obrázek 7.32: dvojpól

Řešení: Pro výpočet impedancí využijeme těchto vzorců:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{R1}} = R_1 = 20\Omega, \mathbf{Z}_{\mathbf{R2}} = R_2 = 200\Omega \text{ a } \mathbf{Z}_{\mathbf{L}} = j\omega L = j314\Omega$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{(\mathbf{Z}_{\mathbf{R1}} + \mathbf{Z}_{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Z}_{\mathbf{R2}}}{\mathbf{Z}_{\mathbf{R1}} + \mathbf{Z}_{\mathbf{L}} + \mathbf{Z}_{\mathbf{R2}}} = \frac{4000 + j62800}{220 + j314} \cdot \frac{220 - j314}{220 - j314} = \frac{20599200 + j12560000}{146996} = \\ &= \underline{\mathbf{Z} = (140, 134 + j85, 445)\Omega} \end{aligned}$$

Pro výpočet admitance se použije těchto vzorců

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{R1}} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{20}$$

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{R2}} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200}$$

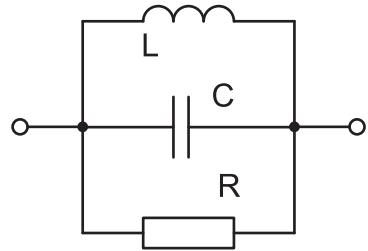
$$\mathbf{Y}_{\mathbf{L}} = \frac{-j}{\omega L} = \frac{1}{j314}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \frac{\mathbf{Y}_{\mathbf{R1}} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{L}}}{\mathbf{Y}_{\mathbf{R1}} + \mathbf{Y}_{\mathbf{L}}} + \mathbf{Y}_{\mathbf{R2}} = -\frac{0,05 \cdot j0,00318}{0,05 - j0,00318} \cdot \frac{0,05 + j0,00318}{0,05 + j0,00318} + 0,005 = \\ &= \frac{7,95 \cdot 10^{-6} - 5,05 \cdot 10^{-7}}{2,51 \cdot 10^{-3}} + 0,005 = \underline{(5,202 \cdot 10^{-3} - j3,172 \cdot 10^{-3})S} \end{aligned}$$

Pro kontrolu:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{5,202 \cdot 10^{-3} - j3,172 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5,202 \cdot 10^{-3} + j3,172 \cdot 10^{-3}}{5,202 \cdot 10^{-3} + j3,172 \cdot 10^{-3}} = \\ &= \frac{5,202 \cdot 10^{-3} + j3,172 \cdot 10^{-3}}{3,712 \cdot 10^{-5}} = \underline{(140,14 + j85,452)\Omega} \end{aligned}$$





Příklad 7.8: Nalezněte hodnotu impedance a admitance dvojpólu na obrázku 7.33. Frekvence harmonického proudu je 80 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R = 22 \text{ k}\Omega, L = 500 \text{ mH a } C = 500 \text{ nF}$$

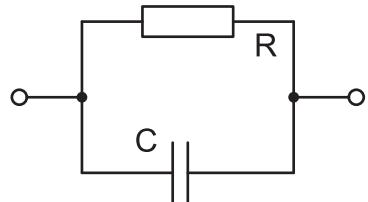
Obrázek 7.33: dvojpól

Řešení: Výpočet admitance:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{R} + j\omega c + \frac{1}{j\omega L} \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{22 \cdot 10^3} + j2\pi f 500 \cdot 10^{-9} + \frac{1}{j2\pi f \cdot 0,5} \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{22 \cdot 10^3} + j2,513 \cdot 10^{-4} + \frac{1}{j251,327} \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{22 \cdot 10^3} + j2,513 \cdot 10^{-4} + \frac{1}{j251,327} \cdot \frac{-j}{-j} \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{22 \cdot 10^3} + j2,513 \cdot 10^{-4} - j\frac{1}{251,327} \\ \mathbf{Y} &= 4,545 \cdot 10^{-5} - j3,728 \cdot 10^{-3} \\ \mathbf{Y} &= \underline{\underline{3,728 \cdot 10^{-3} e^{j-1,559}}} \end{aligned}$$

Výpočet impedance:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{1}{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{Z} &= \frac{1}{4,545 \cdot 10^{-5} - j3,728 \cdot 10^{-3}} \\ \mathbf{Z} &= \frac{1}{4,545 \cdot 10^{-5} - j3,728 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{4,545 \cdot 10^{-5} - j3,728 \cdot 10^{-3}}{4,545 \cdot 10^{-5} - j3,728 \cdot 10^{-3}} \\ \mathbf{Z} &= \frac{4,545 \cdot 10^{-5} - j3,728 \cdot 10^{-3}}{1,390 \cdot 10^{-5}} \\ \mathbf{Z} &= \underline{\underline{3,270 + j268,200}} = \underline{\underline{268,22 \cdot e^{j1,559}}} \\ \tan \varphi &= \frac{268,2}{3,270} \\ \varphi &= \underline{\underline{1.559 \text{ rad}}} \end{aligned}$$



Příklad 7.9: dvojpól na obrázku 7.34 je napájen střídavým harmonickým proudem $i(t) = 2 \sin(200t + 0)$. Vypočtěte činný, jalový a zdánlivý výkon. Parametry obvodových prvků jsou: $R = 20 \text{ k}\Omega$, $C = 5 \mu\text{F}$

Obrázek 7.34: dvojpól

Řešení: Přestože dvojpól tvoří paralelní řazení prvků, je napájen proudem, proto je vhodné určit výkon z impedance. Nejprve se určí admitance:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{20000} + j200 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-5} + j1 \cdot 10^{-3}$$

Dále se určí impedance:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5} + j1 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-5} - j1 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-5} - j1 \cdot 10^{-3}} = \frac{5 \cdot 10^{-5} - j1 \cdot 10^{-3}}{1,0025 \cdot 10^{-6}} = \underline{49,87 - j997,5 \Omega}$$

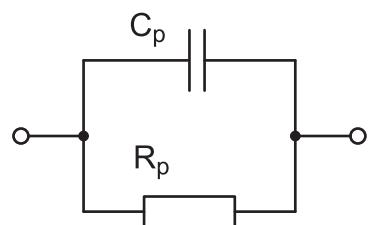
Činný a jalový výkon se opět vypočítá ze složek komplexního výkonu:

$$\mathbf{S} = \frac{I_m^2}{2} \mathbf{Z} = \frac{2 \cdot 2}{2} (49,87 - j997,5) = \underline{99,75 - j1995 \text{ VA}}$$

Činný výkon $P = 99,75 \text{ W}$ a jalový výkon $Q = 1995 \text{ VAr}$. Dále se pomocí Pythagorovy věty vypočítá zdánlivý výkon: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \underline{1998 \text{ VA}}$

7.7.2 Náhradní obvody

Příklad 7.10: Vypočtěte ztrátový činitel D náhradního obvodu reálného kondenzátoru na obrázku 7.7.2 pro frekvenci 50 Hz. Vypočtěte parametry prvků sériového náhradního obvodu C_S a R_S . $C_P = 1 \mu\text{F}$, $R_P = 20 \text{ k}\Omega$



Řešení: Ztrátový činitel

$$D = \frac{1}{\omega R_P C_P} = \underline{0,1592}$$

Impedance paralelního i sériového náhradního obvodu musí být stejná, tedy $\mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}_P$. Pro impedanci sériového obvodu zřejmě platí:

$$\mathbf{Z}_S = R_S - \frac{j}{\omega C_S}$$



Proto impedanci paralelního obvodu můžeme úpravou převést do složkového tvaru komplexního čísla:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_P &= \frac{1}{\frac{1}{R_P} + j\omega C_P} \cdot \frac{R_P}{R_P} = \frac{R_P}{1 + j\omega C_P R_P} \cdot \frac{1 - j\omega C_P R_P}{1 - j\omega C_P R_P} = \frac{R_P - j\omega C_P R_P^2}{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2} = \\ &= \frac{R_P}{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2} - \frac{j\omega C_P R_P^2}{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2}\end{aligned}$$

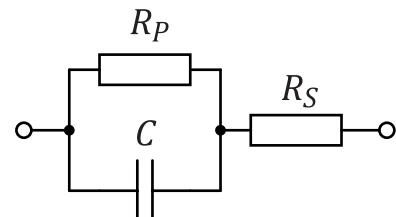
Protože

$$\mathbf{Z}_S = R_S - \frac{j}{\omega C_S} = \frac{R_P}{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2} - \frac{j\omega C_P R_P^2}{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2}$$

platí:

$$\begin{aligned}R_S &= \frac{R_P}{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2} \\ \frac{-j}{\omega C_S} &= -\frac{j\omega C_P R_P^2}{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2} \\ \frac{1}{C_S} &= \frac{\omega^2 C_P R_P^2}{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2} \\ C_S &= \frac{1 + \omega^2 C_P^2 R_P^2}{\omega^2 C_P R_P^2} = \frac{1}{\omega^2 C_P R_P^2} + C_P\end{aligned}$$

Po dosazení zadaných hodnot: $R_S = 494,09 \Omega$ a $C_S = 1,0253 \mu\text{F}$.



Obrázek 7.35: dvojpól

Příklad 7.11: Vypočtěte ztrátový činitel D náhradního obvodu reálného kondenzátoru (miniaturní tantalový kondenzátor z nabídky obchodu Farnell) pro frekvenci a) 50 Hz, b) 1 000 Hz, a c) 10 000 Hz. Vypočtěte parametry prvků paralelního náhradního obvodu C_P a R_P . $C = 22 \mu\text{F}$, $R_1 = 1,5 \text{ k}\Omega$ $R_2 = 3,7 \Omega$

Řešení: Zrátový činitel je definován jako podíl činného a absolutní hodnoty jalového výkonu. Pokud pro komplexní výkon na dvojpólu: $\mathbf{S} = P + jQ = I^2(R + jX)$, potom:

$$D = \frac{P}{|Q|} = \frac{RI^2}{|XI^2|} = \frac{R}{|X|}$$

Pro určení ztrátového činitele stačí určit impedanci dvojpólu:

$$\mathbf{Z} = \frac{R_1}{1 + j\omega C R_1} + R_2 = \frac{R_1}{1 + \omega^2 C^2 R_1^2} + R_2 + j \frac{\omega C R_1 R_2}{1 + \omega^2 C^2 R_1^2}$$

a) $\mathbf{Z} = 17,53 + j143,35 \Omega$ a $D = 0,1223$, b) $\mathbf{Z} = 3,735 + j7,234 \Omega$ a $D = 0,5163$ a c) $\mathbf{Z} = 3,700 + j0,7234 \Omega$ a $D = 5,1150$.

Dále se určí náhradní paralelní RC dvojpól. Jedna z možností je vypočítat z impedance admitanci: $\mathbf{Y} = G + jB = \mathbf{Z}^{-1}$, kde $R_P = 1/G$ a $C = B/\omega$. Potom

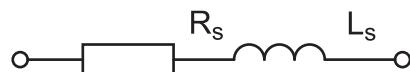
- a) $R_P = 1190 \Omega$ a $C = 21,88 \mu\text{F}$, b) $R_P = 17,75 \Omega$ a $C = 17,37 \mu\text{F}$ a c) $R_P = 3,842 \Omega$ a $C = 8,099 \mu\text{F}$.

Příklad 7.12: Katalog součástek uvádí pro konkrétní typ kondenzátoru kapacitu $C_s = 1000 \text{ nF}$ a ztrátový činitel při frekvenci 1 kHz $D = 6 \cdot 10^{-4}$. Vypočtěte hodnotu rezistoru v paralelním náhradním obvodu. Určete parametry sériového náhradního obvodu.

Řešení:

$$D = \frac{1}{\omega R_P C_P} \Rightarrow D \cdot \omega C_P = \frac{1}{R_P} \Rightarrow R_P = \frac{1}{D \cdot \omega \cdot C_P} = \underline{2,65 \cdot 10^5}$$

Příklad 7.13: Vypočtěte koeficient jakosti Q náhradního obvodu reálné cívky na obrázku 7.36 pro frekvenci 1000 Hz. Vypočtěte parametry prvků paralelního náhradního obvodu L_P a R_P . $L_S = 20 \text{ mH}$, $R_S = 6 \Omega$



Obrázek 7.36: dvojpól

Řešení:

$$Q = \frac{\omega L_S}{R_S} = \frac{2\pi 1000 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{6} = \underline{20,9}$$



7.8 Neřešené příklady

7.8.1 Harmonický proud a napětí na L a C

Příklad 7.14: Kapacitorem o kapacitě 470 nF teče střídavý harmonický proud o časovém průběhu $i(t) = 0,05 \cdot \sin(24\,200 t) \text{ A}$. Určete časový průběh napětí na kapacitoru. Použijte symbolicko-komplexní metodu.

Řešení: $u(t) = 4,396 \sin(24\,200t - \frac{\pi}{2}) \text{ V}$

Příklad 7.15: Na induktor o indukčnosti 32 mH je přiloženo střídavé napětí časovém průběhu $u(t) = 10,0 \cdot \sin(10\,000 t) \text{ V}$. Určete časový průběh proudu induktorem. Stejnosměrná složka proudu $I_0 = 0 \text{ A}$. Použijte symbolicko-komplexní metodu.

Řešení: $i = 31,25 \sin(10\,000t - \frac{\pi}{2}) \text{ mA}$

Příklad 7.16: Jak velký harmonický proud o frekvenci 430 Hz je možné vést kapacitorem o kapacitě $2 \mu\text{F}$, aby nebylo překročeno maximální napětí kapacitoru 200 V . Stejnosměrná složka napětí $U_0 = 0 \text{ V}$.

Řešení: $I = 0,7642 \text{ A}$

Příklad 7.17: Jak velké napětí o harmonickém průběhu o úhlové frekvenci $\omega = 48\,000 \text{ rad/s}$ může být přiloženo na induktor o indukčnosti $L = 2,56 \text{ mH}$, aby nebyl překročen maximální povolený proud $I_m = 0,22 \text{ A}$? Průběh je ustálený, neobsahuje stejnosměrnou složku.

Řešení: $U = 19,12 \text{ V}$

Příklad 7.18: Určete indukčnost tlumivkového předřadníku u zářivky a minimální proud, pokud při zapojení na běžnou rozvodnou síť s nominálním napětím 230 V a frekvencí 50 Hz je napětí na zářivce 80 V a příkon 36 W . Předřadník je zapojen sériově, trubice má čistě reálný odpor - fáze napětí na tlumivce předbíhá fázi napětí na rezistoru o $\pi/2$.

Řešení: Při zahrnutí napětí na trubici: $L = 1,525 \text{ H}$, při zanedbání napětí na trubici: $1,627 \text{ H}$.

7.8.2 Impedance a admittance na dvojpólech RLC



Obrázek 7.37: Schéma

Příklad 7.19: Nalezněte hodnotu impedance a admittance dvojpólu. Frekvence harmonického proudu je 50 Hz . Parametry obvodových prvků jsou:

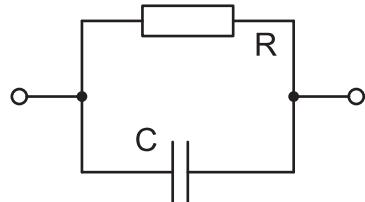
$$R = 20 \Omega, L = 0,5 \text{ H}$$

Řešení: $Z = 20 + j157,08 \Omega, Y = 7,979 \cdot 10^{-4} - j157,08 \cdot 10^{-3} \text{ S}$

Příklad 7.20: Nalezněte hodnotu impedance a admitance dvojpólu. Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R = 20 \text{ k}\Omega, C = 50 \mu\text{F}$$

Řešení: $Z = 0,2026 - j63,6613 \Omega$,
 $Y = 5 \cdot 10^{-5} + j1,571 \cdot 10^{-2} \text{ S}$

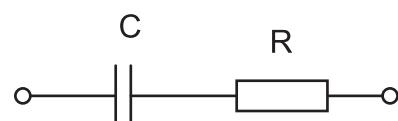


Obrázek 7.38: Schéma

Příklad 7.21: Nalezněte hodnotu impedance a admitance dvojpólu. Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R = 5 \Omega, C = 33 \mu\text{F}$$

Řešení: $Z = 5 - j96,4575 \Omega$,
 $Y = 5,3596 \cdot 10^{-4} + j1,0339 \cdot 10^{-2} \text{ S}$

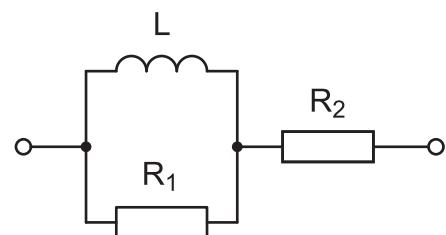


Obrázek 7.39: Schéma

Příklad 7.22: Nalezněte hodnotu impedance a admitance dvojpólu. Frekvence harmonického proudu je 1000 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R_1 = 2 \text{ k}\Omega, R_2 = 1 \text{ k}\Omega, L = 200 \text{ mH}$$

Řešení: $Z = 1566,1 + j900,95 \Omega$,
 $Y = 4,7976 \cdot 10^{-4} - j2,76 \cdot 10^{-4} \text{ S}$

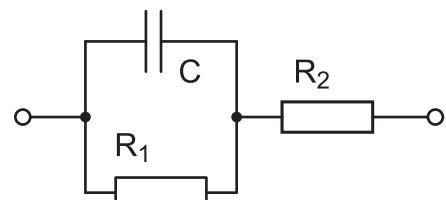


Obrázek 7.40: Schéma

Příklad 7.23: Nalezněte hodnotu impedance a admitance dvojpólu. Frekvence harmonického proudu je 10 kHz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R_1 = 50 \Omega, R_2 = 30 \Omega, C = 100 \text{ nF}$$

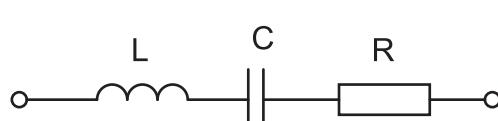
Řešení: $Z = 75,5081 - j14,297 \Omega$,
 $Y = 0,0127852 + j2,4208 \cdot 10^{-3} \text{ S}$



Obrázek 7.41: Schéma

Příklad 7.24: Nalezněte hodnotu impedance a admitance dvojpólu na obrázku 7.42. Frekvence harmonického proudu je 1000 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R = 80 \Omega, L = 40 \text{ mH a } C = 1 \mu\text{F}$$

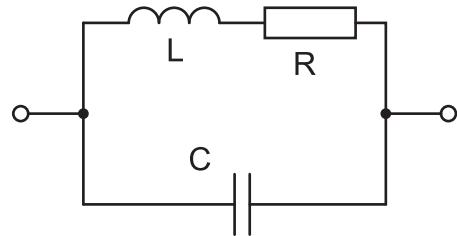


Obrázek 7.42: Schéma

Řešení: $Z = 80 + j92,172 \Omega, Y = 5,371 \cdot 10^{-3} - j6,1878 \cdot 10^{-3} \text{ S}$

Příklad 7.25: Nalezněte hodnotu impedance \mathbf{Z} a admitance \mathbf{Y} dvojpólu. Parametry obvodových prvků a frekvence harmonického zdroje napětí jsou:

- $R = 10 \Omega$, $L = 3 \text{ mH}$, $C = 2 \mu\text{F}$ a $f = 3 \text{ kHz}$.
- $R = 22 \Omega$, $L = 33 \mu\text{H}$, $C = 1 \mu\text{F}$ a $f = 30 \text{ kHz}$.
- $R = 15 \Omega$, $L = 820 \text{ mH}$, $C = 20 \mu\text{F}$ a $f = 40 \text{ Hz}$.

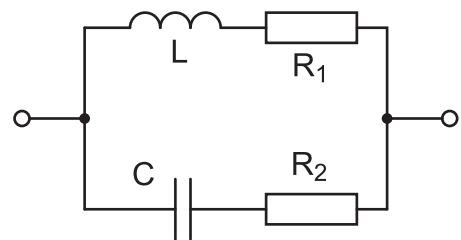


Obrázek 7.43: Schéma

Řešení: a) $\mathbf{Z} = 1,94 - j25,2 \Omega$, $\mathbf{Y} = 0,00303 - j0,0394 \text{ S}$; b) $\mathbf{Z} = 1,277 - j5,3583 \Omega$, $\mathbf{Y} = 0,04209 - j0,1766 \text{ S}$; c) $\mathbf{Z} = 2150 - j1223 \Omega$, $\mathbf{Y} = 351 - j200 \mu\text{S}$.

Příklad 7.26: Nalezněte hodnotu impedance \mathbf{Z} a admitance \mathbf{Y} dvojpólu na obrázku 7.44. Parametry obvodových prvků a frekvence harmonického zdroje napětí jsou:

- $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$, $C = 47 \text{ nF}$ a $f = 3 \text{ kHz}$.
- $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $L = 220 \mu\text{H}$, $C = 150 \text{ nF}$ a $f = 30 \text{ kHz}$.
- $R_1 = 120 \Omega$, $R_2 = 330 \Omega$, $L = 220 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$ a $f = 120 \text{ Hz}$.



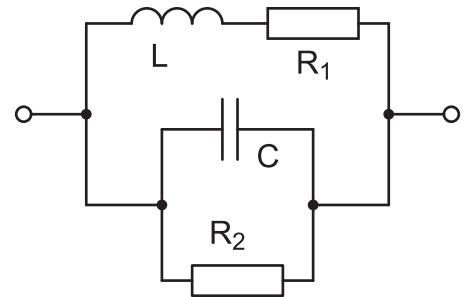
Obrázek 7.44: Schéma

Řešení: a) $\mathbf{Z} = 373,5 - j2776,1 \Omega$, $\mathbf{Y} = 47,61 - j353,8 \mu\text{S}$. b) $\mathbf{Z} = 37,83 - j9,77 \Omega$, $\mathbf{Y} = 24,78 - j6,401 \text{ mS}$. c) $\mathbf{Z} = 142,5 - j75,75 \Omega$, $\mathbf{Y} = 5,472 - j2,909 \text{ mS}$.

Příklad 7.27: Nalezněte hodnotu impedance \mathbf{Z} a admitance \mathbf{Y} dvojpólu na obrázku 7.45. Parametry obvodových prvků a frekvence harmonického zdroje napětí jsou:

- a) $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 2000 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ $C = 1 \mu\text{F}$ a $f = 1200 \text{ Hz}$. b) $R_1 = 33 \Omega$, $R_2 = 180 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ $C = 33 \text{ nF}$ a $f = 20 \text{ kHz}$. c) $R_1 = 22 \Omega$, $R_2 = 220 \Omega$, $L = 68 \text{ nH}$ $C = 12 \text{ pF}$ a $f = 180 \text{ MHz}$.

Řešení: a) $\mathbf{Z} = 469,2 - j351,8 \Omega$, $\mathbf{Y} = 1,364 - j1,023 \text{ mS}$. b) $\mathbf{Z} = 111,63 - j49,011 \Omega$, $\mathbf{Y} = 7,511 - j3,298 \text{ mS}$. c) $\mathbf{Z} = 120,7 - j23,47 \Omega$, $\mathbf{Y} = 7,984 - j1,552 \text{ mS}$.

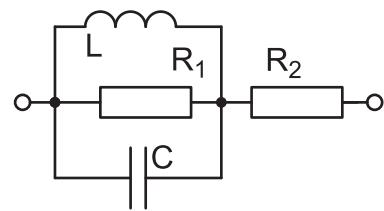


Obrázek 7.45: Schéma

Příklad 7.28: Nalezněte hodnotu impedance \mathbf{Z} a admitance \mathbf{Y} dvojpólu na obrázku 7.46. Frekvence harmonického proudu je 160 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R_1 = 300 \Omega, R_2 = 100 \Omega, L = 200 \text{ mH} \text{ a } C = 8 \mu\text{F}$$

Řešení: $\mathbf{Z} = 262,4 - j149,5 \Omega, \mathbf{Y} = 2,877 - j1,639 \text{ mS}$.

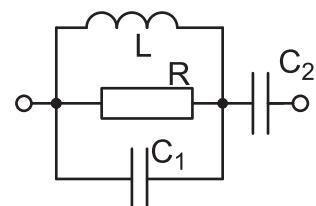


Obrázek 7.46: Schéma

Příklad 7.29: Nalezněte hodnotu impedance \mathbf{Z} a admitance \mathbf{Y} dvojpólu na obrázku 7.47. Frekvence harmonického proudu je 500 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R = 100 \Omega, L = 8 \text{ mH}, C_1 = 6 \mu\text{F} \text{ a } C_2 = 6 \mu\text{F}$$

Řešení: $\mathbf{Z} = 18,572 + j14,1637 \Omega, \mathbf{Y} = 0,0340 - j0,0260i \text{ S}$

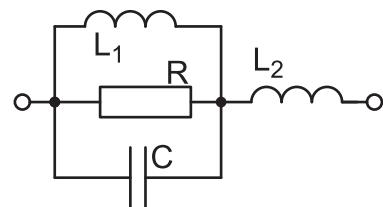


Obrázek 7.47: Schéma

Příklad 7.30: Nalezněte hodnotu impedance \mathbf{Z} a admitance \mathbf{Y} dvojpólu na obrázku 7.48. Frekvence harmonického proudu je 320 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R = 50 \Omega, L_1 = 50 \text{ mH}, L_2 = 25 \text{ mH} \text{ a } C = 20 \mu\text{F}$$

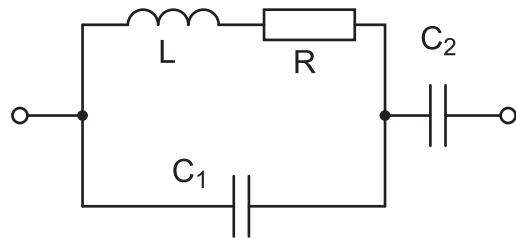
Řešení: $\mathbf{Z} = 15,198 + j27,267 \Omega, \mathbf{Y} = 0,0156 - j0,0280 \text{ S}$



Obrázek 7.48: Schéma

Příklad 7.31: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.49. Frekvence harmonického proudu je 200 Hz. Parametry obvodových prvků jsou: $R = 20 \Omega$, $L = 80 \text{ mH}$, $C_1 = 2 \mu\text{F}$ a $C_2 = 10 \mu\text{F}$

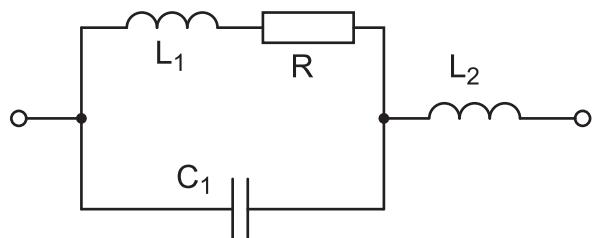
Řešení: $Z = 35,648 + j52,544 = 63,495 \cdot e^{j \cdot 0,97468} \Omega$ $Y = 0,0088421 - j0,013033 = 0,015749 \cdot e^{-j \cdot 0,97468} \text{ S}$



Obrázek 7.49: Schéma

Příklad 7.32: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.50. Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou: $R = 20 \Omega$, $L_1 = 160 \text{ mH}$, $L_2 = 250 \text{ mH}$ a $C = 80 \mu\text{F}$

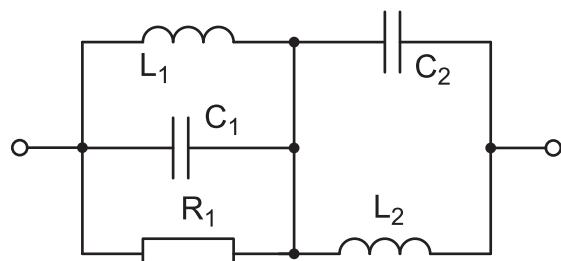
Řešení: $Z = 62,113 + j6,214 = 62,423 \cdot e^{j \cdot 0,099711} \Omega$, $Y = 0,01594 - j0,0015947 = 0,01602 \cdot e^{-j \cdot 0,099711} \text{ S}$



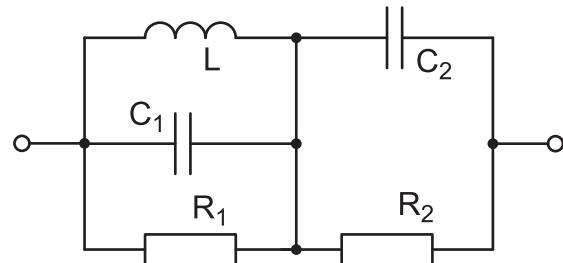
Obrázek 7.50: Schéma

Příklad 7.33: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.51. Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou: $R = 100 \Omega$, $L_1 = 80 \text{ mH}$, $L_2 = 30 \text{ mH}$, $C_1 = 40 \mu\text{F}$ a $C_2 = 30 \mu\text{F}$

Řešení: $Z = 11,89 + j42,71 = 44,334 \cdot e^{j \cdot 1,2993} \Omega$, $Y = 0,0060491 - j0,02173 = 0,022556 \cdot e^{-j \cdot 1,2993} \text{ S}$



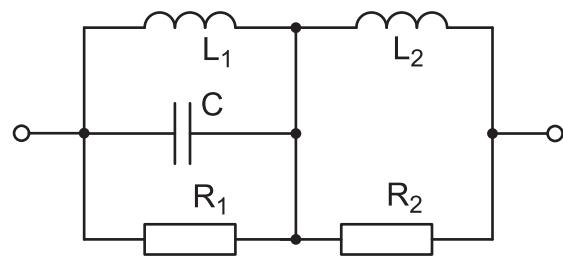
Obrázek 7.51: Schéma



Příklad 7.34: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.52. Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 400 \Omega$, $L = 260 \text{ mH}$, $C_1 = 10 \mu\text{F}$ a $C_2 = 2,5 \mu\text{F}$

Řešení: $Z = 376 - j5,8091 = 376,04 \cdot e^{-j \cdot 0,015449} \Omega$, $Y = 0,002659 + j4,1081e^{-0,005} = 0,0026593 \cdot e^{j \cdot 0,015449} \text{ S}$

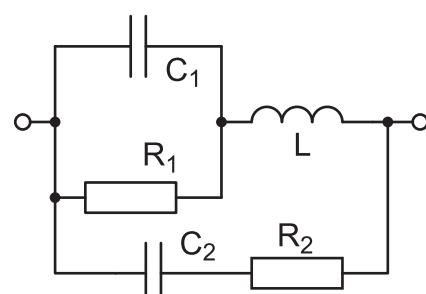
Obrázek 7.52: Schéma



Příklad 7.35: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.53. Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $L_1 = 500 \text{ mH}$, $L_2 = 30 \text{ mH}$ a $C = 9 \mu\text{F}$

Řešení: $Z = 22,004 + j10,338 = 24,311 \cdot e^{j \cdot 0,4392} \Omega$, $Y = 0,037229 - j0,01749 = 0,041133 \cdot e^{-j \cdot 0,4392} \text{ S}$.

Obrázek 7.53: Schéma



Příklad 7.36: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.54. Parametry obvodových prvků jsou:

a) $f = 30 \text{ Hz}$ $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $L = 3 \text{ H}$, $C_1 = 13 \mu\text{F}$ a $C_2 = 9 \mu\text{F}$

b) $f = 500 \text{ Hz}$ $R_1 = 160 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$, $L = 150 \text{ mH}$, $C_1 = 400 \text{ nF}$ a $C_2 = 800 \text{ nF}$

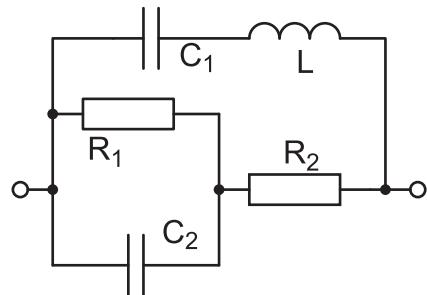
Řešení: a) $Z = 290,55 + j189,57 = 346,92 \cdot e^{j \cdot 0,57811} \Omega$, $Y = 0,0024141 - j0,0015751 = 0,0028825 \cdot e^{-j \cdot 0,57811} \text{ S}$.

b) $Z = 1508 - j911,47 = 1762,1 \cdot e^{-j \cdot 0,54365} \Omega$, $Y = 0,00048569 + j0,00029355 = 0,00056751 \cdot e^{j \cdot 0,54365} \text{ S}$.

Obrázek 7.54: Schéma

Příklad 7.37: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.55. Frekvence harmonického proudu je 80 Hz. Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $L = 40 \text{ mH}$, $C_1 = 130 \mu\text{F}$ a $C_2 = 65 \mu\text{F}$

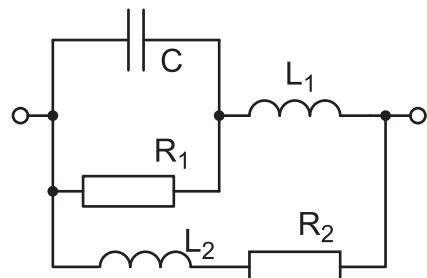
Řešení: $Z = 0,54028 + j5,0834 = 5,112 \cdot e^{j \cdot 1,4649} \Omega$, $Y = 0,020674 - j0,19452 = 0,19562 \cdot e^{-j \cdot 1,4649} \text{ S}$.



Obrázek 7.55: Schéma

Příklad 7.38: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.56. Frekvence harmonického proudu je 160 Hz. Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 80 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $L_1 = 40 \text{ mH}$, $L_2 = 80 \text{ mH}$, $C = 20 \mu\text{F}$

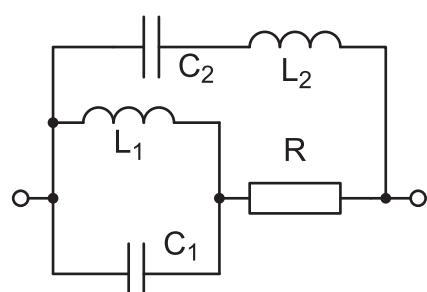
Řešení: $Z = 18,217 + j7,9479 = 19,875 \cdot e^{j \cdot 0,41139} \Omega$, $Y = 0,046116 - j0,02012 = 0,050314 \cdot e^{-j \cdot 0,41139} \text{ S}$.



Obrázek 7.56: Schéma

Příklad 7.39: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.57. Frekvence harmonického proudu je 300 Hz. Parametry obvodových prvků jsou: $R = 20 \Omega$, $L_1 = 25 \text{ mH}$, $L_2 = 50 \text{ mH}$, $C_1 = 9 \mu\text{F}$ a $C_2 = 7 \mu\text{F}$

Řešení: $Z = 0,10546 + j17,123 = 17,124 \cdot e^{j \cdot 1,5646} \Omega$, $Y = 0,00035967 - j0,058397 = 0,058399 \cdot e^{-j \cdot 1,5646} \text{ S}$.

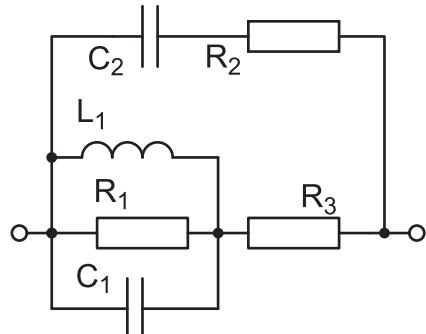


Obrázek 7.57: Schéma

Příklad 7.40: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.58 . Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R_1 = 1000 \Omega, R_2 = 150 \Omega, R_3 = 330 \Omega, L = 25 \text{ mH}, C_1 = 800 \text{ nF} \text{ a } C_2 = 2 \mu\text{F}$$

Řešení: $Z = 313,98 - j56,006 = 318,94 \cdot e^{-j \cdot 0,17652} \Omega, Y = 0,0030867 + j0,0005506 = 0,0031354 \cdot e^{j \cdot 0,17652} \text{ S.}$

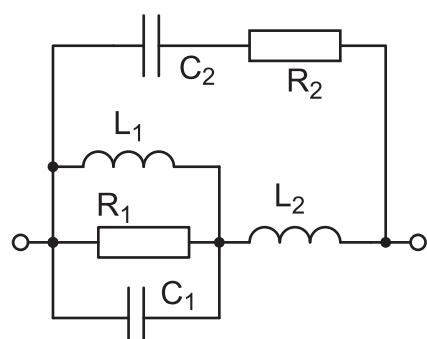


Obrázek 7.58: Schéma

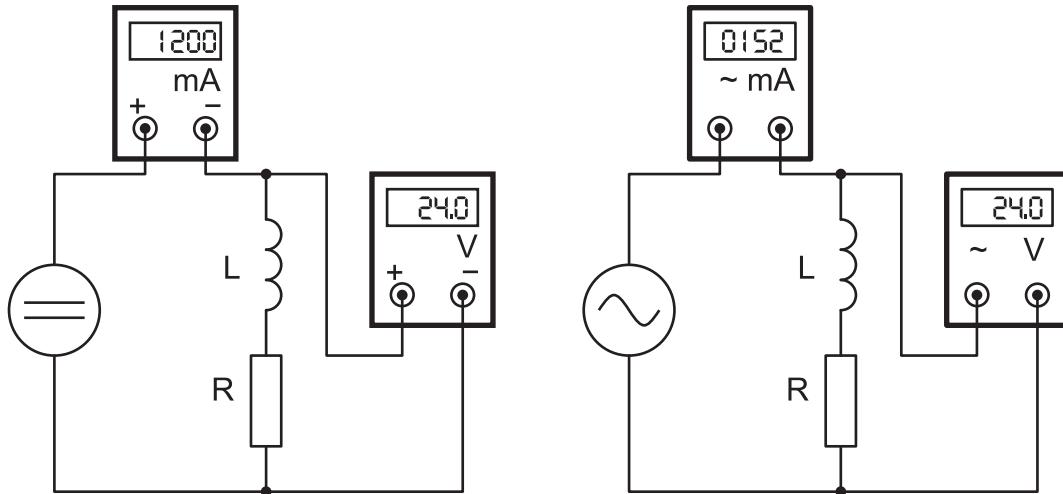
Příklad 7.41: Nalezněte hodnotu impedance Z a admitance Y dvojpólu na obrázku 7.8.2 . Frekvence harmonického proudu je 50 Hz. Parametry obvodových prvků jsou:

$$R_1 = 2000 \Omega, R_2 = 100 \Omega, L_1 = 26 \text{ mH}, L_2 = 8 \text{ mH}, C_1 = 270 \text{ nF} \text{ a } C_2 = 330 \text{ nF}$$

Řešení: $Z = 121,65 + j76,297 = 143,59 \cdot e^{j \cdot 0,56019} \Omega, Y = 0,0058997 - j0,0037003 = 0,0069641 \cdot e^{-j \cdot 0,56019} \text{ S.}$



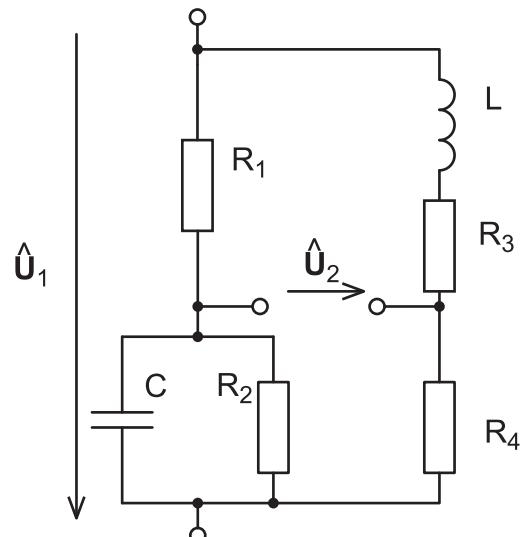
Příklad 7.42: Nalezněte hodnotu indukčnosti L a odporu R u zadané sériové kombinace na obrázku 7.59. Vlevo je na dvojpól přiloženo stejnosměrné napětí, vpravo střídavé harmonické o frekvenci $f = 50$ Hz. Vnitřní odpor ampérmetru a vnitřní vodivost voltmetru se zanedbá.



Obrázek 7.59: dvojpól

Řešení: $R = 20 \Omega$, $L = 4,986 \text{ H}$

Příklad 7.43: Nalezněte fázor napětí \hat{U}_2 v obvodu 7.60. $L = 300 \text{ mH}$, $C_1 = 100 \text{ nF}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$, $\hat{U}_1 = 30 \text{ V}$ a $f = 1 \text{ kHz}$.



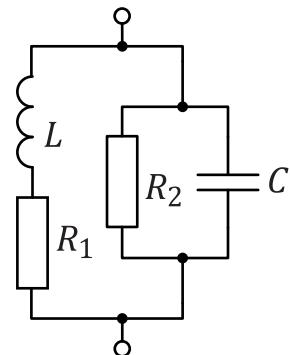
Obrázek 7.60: Schéma

Řešení: $\hat{U}_2 = -0,6866 + j4,7205 \text{ V}$

7.8.3 Výkon, jakost a ztrátový činitel na dvojpólech RLC

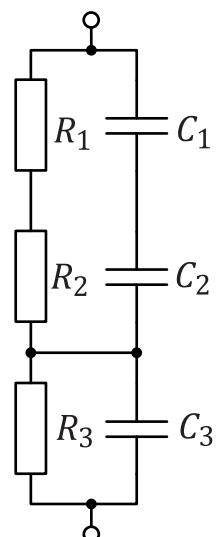
Příklad 7.44: Určete impedanci, admitanci, činný, jalový, zdánlivý výkon a účiník dvojpólu napájeného proudem $i(t) = 221 \sin(820t)$ mA pro parametry prvků: $L = 20$ mH, $C = 10 \mu\text{F}$, $R_1 = 8 \Omega$ a $R_2 = 28 \Omega$

Řešení: Impedance $\mathbf{Z} = 11,369 + j7,813 \Omega$,
admitance $\mathbf{Y} = 5,97 \cdot 10^{-2} - j4 \cdot 10^{-2} \text{ S}$,
činný výkon $P = 0,2777 \text{ W}$,
jalový výkon $Q = 0,1908 \text{ VAr}$,
zdánlivý výkon $S = 0,33689 \text{ VA}$ a
účiník $\lambda = 0,8242$



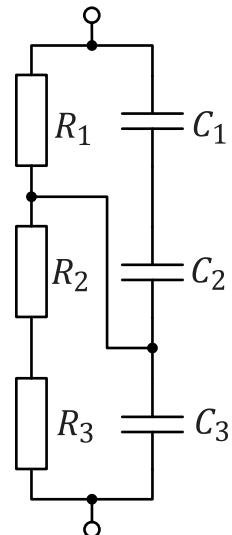
Příklad 7.45: Určete impedanci, admitanci, činný, jalovým zdánlivý výkon a účiník dvojpólu napájeného proudem $i(t) = 112 \sin(11420t)$ mA pro parametry prvků: $C_1 = 150 \text{ nF}$, $C_2 = 820 \text{ nF}$, $C_3 = 57 \text{ nF}$, $R_1 = 120 \Omega$, $R_2 = 28 \Omega$ a $R_3 = 280 \Omega$

Řešení: Impedance $\mathbf{Z} = 412,5 - j79,72 \Omega$,
admitance $\mathbf{Y} = 2,337 \cdot 10^{-3} - j4,516 \cdot 10^{-4} \text{ S}$,
činný výkon $P = 2,587 \text{ W}$,
jalový výkon $Q = -0,500 \text{ VAr}$,
zdánlivý výkon $S = 2,635 \text{ VA}$ a
účiník $\lambda = 0,9818$



Příklad 7.46: Určete impedanci, admitanci, činný, jalový a zdánlivý výkon dvojpólu napájeného napětím $u(t) = 11,82 \sin(35,2 \cdot 10^6 t)$ V pro parametry prvků: $C_1 = 15 \text{ pF}$, $C_2 = 82 \text{ pF}$, $C_3 = 13 \text{ pF}$, $R_1 = 80 \Omega$, $R_2 = 120 \Omega$ a $R_3 = 120 \Omega$

Řešení: Impedance $Z = 317,04 - j28,897 \Omega$,
admitance $Y = 3,128 \cdot 10^{-3} + j0,2851 \cdot 10^{-3} \text{ S}$,
činný výkon: $P = 0,1990 \text{ W}$,
jalový výkon: $Q = -0,0181 \text{ VAr}$,
zdánlivý výkon: $S = 0,1998 \text{ VA}$ a
účiník $\lambda = 0,996$.

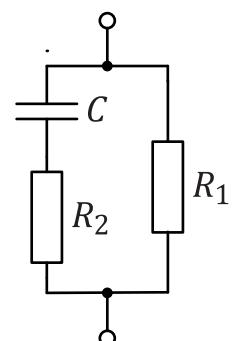


Obrázek 7.61: Schéma

Příklad 7.47: Určete ztrátový činitel dvojpólu pro frekvence $f_1 = 100 \text{ Hz}$, $f_2 = 1000 \text{ Hz}$ a $f_3 = 10000 \text{ Hz}$ u kondenzátoru s náhradním obvodem 7.62 s parametry prvků: $C_1 = 20 \mu\text{F}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ a $R_2 = 2 \Omega$

Nápověda: budě řešte nejprve čistě obecně podle definice, a pak dosadte a vypočtěte z odvozeného vzorce; nebo si zvolte napětí mezi krajními svorkami (např. 10 V), číselně vypočtěte činný a jalový výkon a dál ztrátový činitel podle definice.

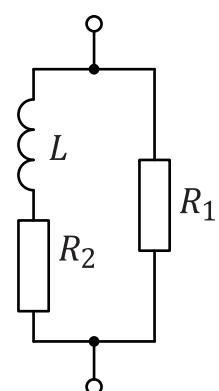
Řešení: $D(f_1) = 0,06495$; $D(f_2) = 0,2556$ a $D(f_3) = 2,5162$.



Obrázek 7.62: Schéma

Příklad 7.48: Určete činitel jakosti tlumivky pro frekvence $f_1 = 100 \text{ Hz}$, $f_2 = 1000 \text{ Hz}$ a $f_3 = 10000 \text{ Hz}$ s náhradním obvodem 7.8.3 s parametry prvků: $L_1 = 50 \text{ mH}$, $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ a $R_2 = 5 \Omega$

Řešení: $Q(f_1) = 6,258$,
 $Q(f_2) = 45,04$ a
 $Q(f_3) = 15,52$



Kapitola 8

Třífázová soustava

8.1 Úvod

Jednofázové obvody jsou napájeny jedním zdrojem harmonického napětí, spotřebiče jsou tak připojeny dvěma vodiči. Pro rozvod elektrické energie a pro napájení točivých motorů má však význam vícefázová soustava, kdy se používají dva a více zdrojů harmonického napětí stejné frekvence s navzájem různou fází.

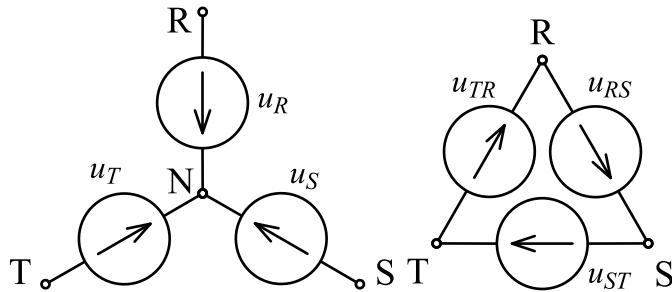
Vícefázová soustava - soustava s harmonickými zdroji stejné frekvence s neměnným fázovým posuvem vůči sobě.

Symetrická trojfázová soustava je soustava tvořená třemi zdroji harmonického napětí stejného kmitočtu a amplitudy, jejichž vzájemný posun je $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$. Tato soustava může být minimálně třívodičová a slouží k přenosu elektrické energie.

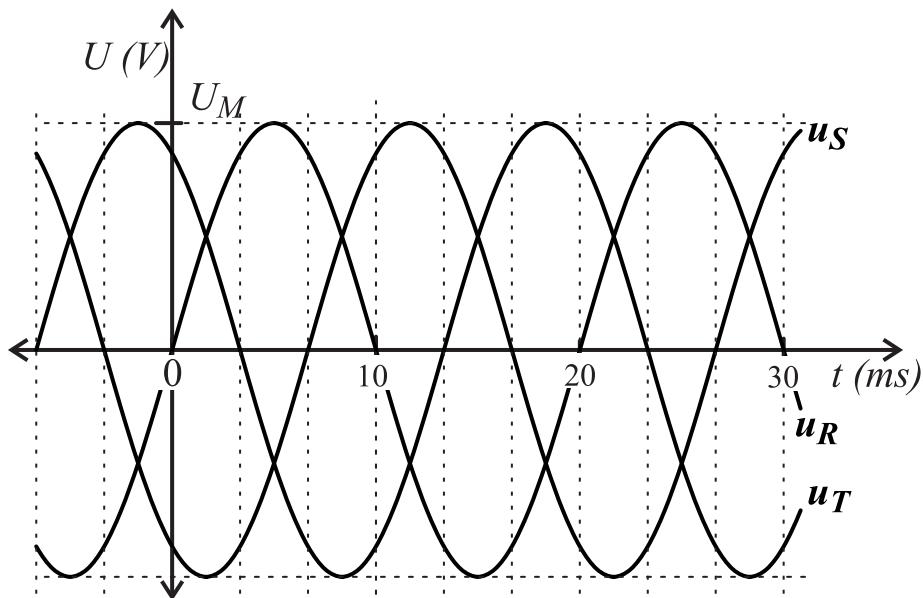
8.2 Třífázová soustava a její vlastnosti

8.2.1 Průběhy napětí v symetrické trojfázové soustavě

Symetrická trojfázová soustava se realizuje pomocí soustavy tří zdrojů harmonického napětí. V místních podmínkách mají všechny tři zdroje efektivní hodnotu napětí $U_f = 230$ V a frekvence $f = 50$ Hz při zapojení do hvězdy. Pro napěťovou složku soustavy se používá označení **fáze**, pro takové pořadí napětí složek napětí na časové ose, kdy kladná maxima následují za sebou, se používá název **sled fází**.



Obrázek 8.1: Zapojení zdrojů ve 3fázové soustavě: Zapojení do hvězdy a zapojení do trojúhelníku



Obrázek 8.2: Časový průběh fázových napětí v trojfázové soustavě

Fázová napětí U_f jsou napětí mezi vodiči **R**, **S**, **T** a nulovým vodičem **N**. Pro souměrnou soustavu fázových napětí platí časový průběh napětí:

$$u_R = U_m \sin(\omega t) \quad (8.1)$$

$$u_S = U_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.2)$$

$$u_T = U_m \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.3)$$

V symetrické trojfázové soustavě musí dále platit:

$$u_R(t) + u_S(t) + u_T(t) = 0 \quad (8.4)$$

Sdružená napětí se nacházejí mezi svorkami R, S a T. Mezi svorkou R a S je napětí u_{RS} , mezi svorkami S a T je u_{ST} a mezi svorkami T a R je sdružené napětí u_{TR} . V symetrické soustavě se efektivní hodnota sdruženého napětí označuje jako U_L . Tato napětí se určují jako rozdíly fázových napětí, tedy:

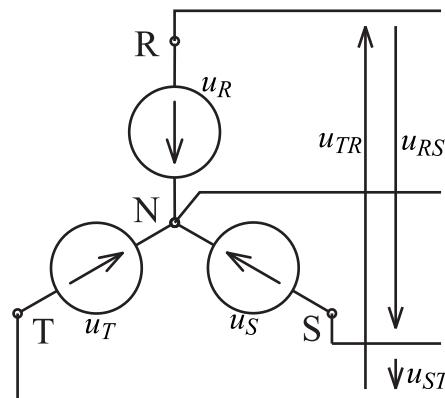
$$u_{RS} = u_R - u_S \quad (8.5)$$

$$u_{ST} = u_S - u_T \quad (8.6)$$

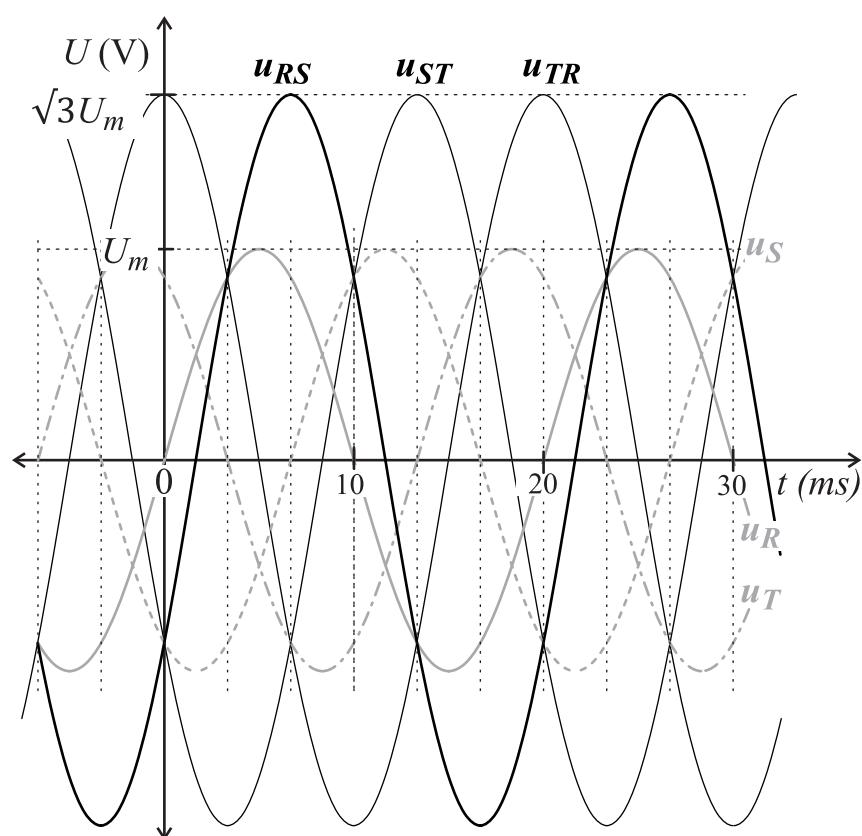
$$u_{TR} = u_T - u_R \quad (8.7)$$

Konkrétní průběh je pak možné obecně určit pomocí vzorců pro rozdíl funkce sinus. V tomto zapojení musí pochopitelně platit druhý Kirchhoffův zákon:

$$u_{RS} + u_{ST} + u_{TR} = 0 \quad (8.8)$$



Obrázek 8.3: Fázové a sdružené napětí na zdrojích zapojených do hvězdy



Obrázek 8.4: Fázový průběh sdružených napětí v trojfázové soustavě, vztah k fázovým napětím

8.2.2 Fázory napětí v symetrické trojfázové soustavě

Napětí a proudy v trojfázové soustavě se s výhodou popisují pomocí symbolicko-komplexní metody. Fázory fázových napětí v symetrické trojfázové soustavě jsou:

$$\hat{U}_S = \hat{U}_R \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} \quad (8.9)$$

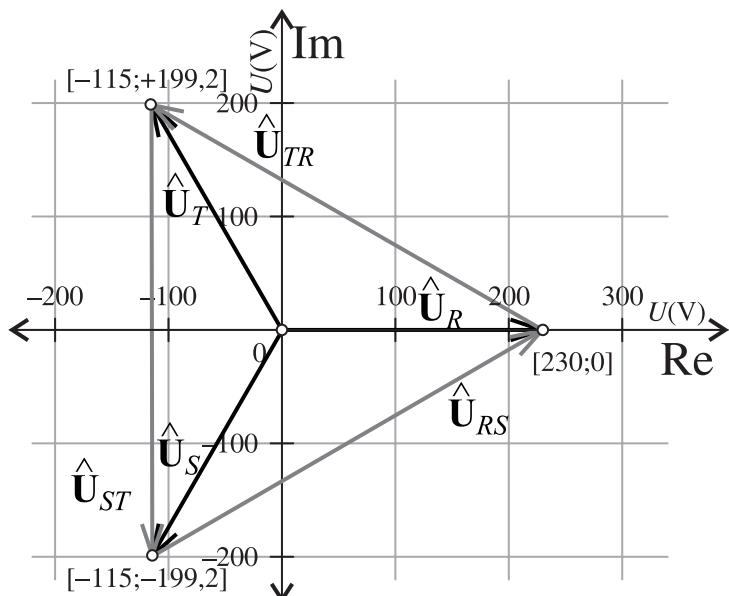
$$\hat{U}_T = \hat{U}_S \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} = \hat{U}_R \cdot e^{j \frac{2\pi}{3}} \quad (8.10)$$

V místních podmínkách je zavedena efektivní hodnota fázového napětí $U = 230$ V:

$$\hat{U}_R = 230 \cdot e^0 \text{ V} = 230 \text{ V} \quad (8.11)$$

$$\hat{U}_S = 230 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} \text{ V} = -115 - j199,18 \quad (8.12)$$

$$\hat{U}_T = 230 \cdot e^{j \frac{2\pi}{3}} \text{ V} = -115 + j199,18 \quad (8.13)$$



Obrázek 8.5: Fázory fázových napětí v trojfázové soustavě

Tedy i pro fázory:

$$\hat{U}_R + \hat{U}_S + \hat{U}_T = 0 \quad (8.14)$$

V trojfázové soustavě se pro zjednodušení zavádí pomocné komplexní číslo \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = e^{j \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (8.15)$$

Pro které dále platí:

$$\mathbf{a}^2 = e^{j \frac{2 \cdot 2\pi}{3}} = e^{-j \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (8.16)$$

Fázory sdružených napětí Sdruženým napětím odpovídají fázory sdružených napětí. Mezi svorkou **R** a svorkou **S** je fázor sdruženého napětí $\hat{\mathbf{U}}_{RS} = \hat{\mathbf{U}}_R - \hat{\mathbf{U}}_S$, mezi svorkami **S** a **T** je $\hat{\mathbf{U}}_{ST} = \hat{\mathbf{U}}_S - \hat{\mathbf{U}}_T$ a mezi svorkami **T** a **R** je $\hat{\mathbf{U}}_{TR} = \hat{\mathbf{U}}_T - \hat{\mathbf{U}}_R$.

Fázory sdružených napětí jsou proto:

$$\hat{\mathbf{U}}_{RS} = \sqrt{3} \cdot 230e^{j\frac{\pi}{6}} \text{ V} = 345 + j199,2 \text{ V} \quad (8.17)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{ST} = \sqrt{3} \cdot 230e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ V} = -j398,4 \text{ V} \quad (8.18)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{TR} = \sqrt{3} \cdot 230e^{j\frac{5\pi}{6}} \text{ V} = -345 + j199,2 \text{ V} \quad (8.19)$$

Pokud se v počítaném obvodu vyskytují pouze sdružená napětí, je možné celkovou fázi pootočit tak, aby se výpočet usnadal. Ke všem fázorům sdružených napětí lze přičíst úhel vhodně zvolený tak, aby některé ze sdružených napětí mělo fázový úhel rovný nule.

$$\hat{\mathbf{U}}_{RS} = \sqrt{3} \cdot 230e^0 \text{ V} = 398,4 \text{ V} \quad (8.20)$$

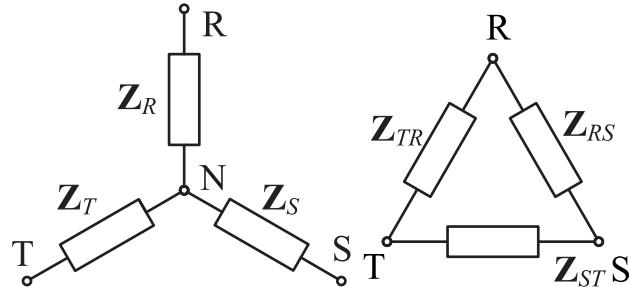
$$\hat{\mathbf{U}}_{ST} = \sqrt{3} \cdot 230e^{-j\frac{2\pi}{3}} \text{ V} = -199,2 - j345 \text{ V} \quad (8.21)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{TR} = \sqrt{3} \cdot 230e^{j\frac{2\pi}{3}} \text{ V} = -199,2 + j345 \text{ V} \quad (8.22)$$

Výsledné velikosti a pořadí úhlů sdružených napětí pak budou stejné jako u fázových napětí.

8.2.3 Zátěž v symetrické trojfázové soustavě

Stejně jako u soustavy zdrojů pro symetrickou trojfázovou soustavu používáme soustavu třífázových zátěží v zapojení do trojúhelníku a do hvězdy.



Obrázek 8.6: Zapojení zátěží ve 3fázové soustavě: zátěž v zapojení do trojúhelníku a hvězdy, zápis pomocí fázorů

Pro výpočet lze s výhodou využít transfiguraci D/Y a opačně.

Vyvážená zátěž v symetrické trojfázové soustavě v zapojení do hvězdy nebo do trojúhelníku:

$$\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_Y \quad (8.23)$$

a

$$\mathbf{Z}_{RS} = \mathbf{Z}_{ST} = \mathbf{Z}_{TR} = \mathbf{Z}_\Delta \quad (8.24)$$

\mathbf{Z}_Y je impedance zátěže na jednu fázi při zapojení do hvězdy, podobně i \mathbf{Z}_Δ je impedance zátěže na jednu fázi při zapojení do trojúhelníka.

v tomto případě je vztah vycházející z transfigurace:

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y \quad (8.25)$$

resp.

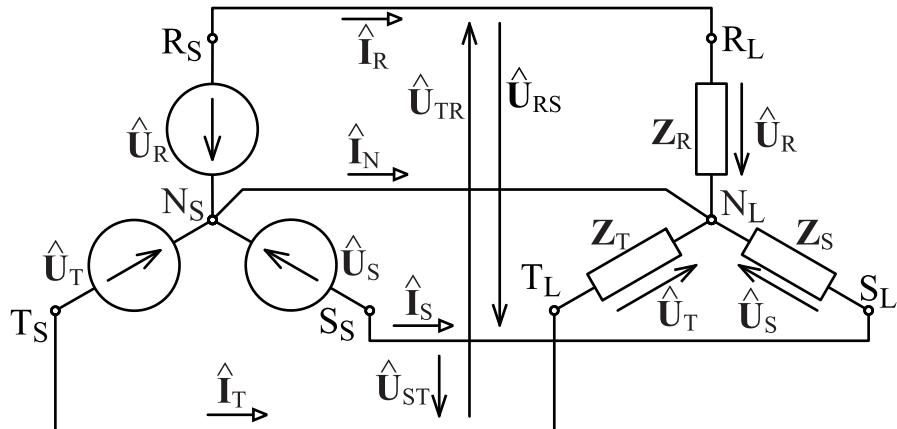
$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} \quad (8.26)$$

8.3 Základní trojfázové soustavy

Pro analýzu vlastností trojfázové soustavy má význam zadefinovat některé základní soustavy zapojení zdrojů a spotřebičů, které jsou nejdůležitější.

8.3.1 Soustava Y-Y

Na obrázku 8.7 je znázorněna trojfázová soustava typu Y-Y. Zdroje a spotřebiče jsou zapojeny do hvězdy a jsou propojeny 3 fázovými a jedním středním vodičem. Střední úzel zdrojů i spotřebičů jsou na jednom potenciálu.



Obrázek 8.7: Třífázová soustava YY

Pro fázové proudy \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T platí:

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_R}{Z_R} = \hat{U}_R \cdot \mathbf{Y}_R \quad (8.27)$$

$$\hat{I}_S = \frac{\hat{U}_S}{Z_S} = \hat{U}_S \cdot \mathbf{Y}_S \quad (8.28)$$

$$\hat{I}_T = \frac{\hat{U}_T}{Z_T} = \hat{U}_T \cdot \mathbf{Y}_T \quad (8.29)$$

Fázor proudu \hat{I} vychází z 1. Kirchhoffova zákona:

$$\hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T + \hat{I}_N = 0 \quad (8.30)$$

tedy:

$$-\hat{I}_N = \frac{\hat{U}_R}{Z_R} + \frac{\hat{U}_S}{Z_S} + \frac{\hat{U}_T}{Z_T} = \hat{U}_R \cdot \mathbf{Y}_R + \hat{U}_S \cdot \mathbf{Y}_S + \hat{U}_T \cdot \mathbf{Y}_T \quad (8.31)$$

Velký význam má vyvážená zátěž:

$$Z_R = Z_S = Z_T = Z_Y \quad (8.32)$$

Při vyvážené zátěži je fázor proudu středním vodičem \hat{I}_N :

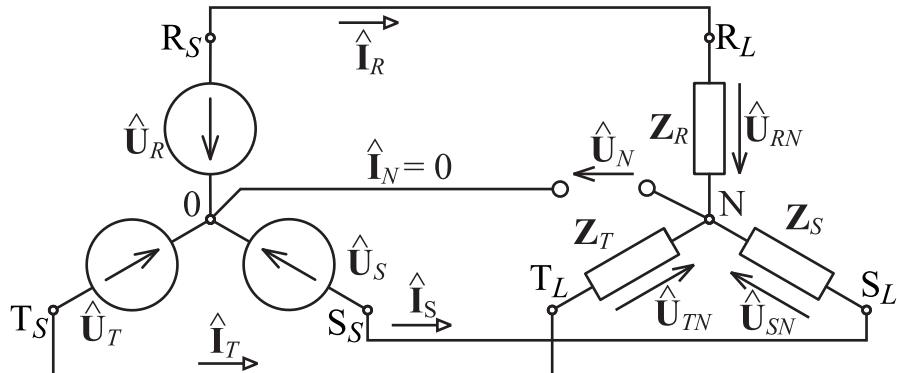
$$-\hat{I}_N = \frac{\hat{U}_R}{Z_Y} + \frac{\hat{U}_S}{Z_Y} + \frac{\hat{U}_T}{Z_Y} = \frac{1}{Z_Y} (\hat{U}_R + \hat{U}_S + \hat{U}_T) \quad (8.33)$$

protože

$$\hat{\mathbf{U}}_R + \hat{\mathbf{U}}_S + \hat{\mathbf{U}}_T = 0$$

je i

$$\hat{\mathbf{I}}_N = 0 \quad (8.34)$$



Obrázek 8.8: Třífázová soustava YY s rozpojeným středním vodičem, napětí na odpojeném středu

V případě soustavy YY s odpojeným středním vodičem a nevyváženou zátěží vzniká mezi odpojeným středem a střední svorkou zdrojů napětí $\hat{\mathbf{U}}_N$. Jeho velikost je možné určit aplikací metody uzlových napětí (která vychází z 1. Kirchhoffova zákona). Pro proudy tekoucí do svorek R, S a T platí:

$$\hat{\mathbf{I}}_R + \hat{\mathbf{I}}_S + \hat{\mathbf{I}}_T = 0 \quad (8.35)$$

Aplikací metody uzlových napětí dostaneme:

$$\frac{\hat{\mathbf{U}}_R - \hat{\mathbf{U}}_N}{Z_R} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_S - \hat{\mathbf{U}}_N}{Z_S} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_T - \hat{\mathbf{U}}_N}{Z_T} = 0 \quad (8.36)$$

Jednoduchými úpravami se fázor $\hat{\mathbf{U}}_N$ určí jako:

$$\hat{\mathbf{U}}_N = \frac{\frac{\hat{\mathbf{U}}_R}{Z_R} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_S}{Z_S} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_T}{Z_T}}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_T}} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_R \cdot \mathbf{Y}_R + \hat{\mathbf{U}}_S \cdot \mathbf{Y}_S + \hat{\mathbf{U}}_T \cdot \mathbf{Y}_T}{\mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_S + \mathbf{Y}_T} \quad (8.37)$$

Při symetrické zátěži (všechny impedance zátěže jsou si rovny): $Z_R = Z_S = Z_T = Z_Y$, potom vzhledem k: $\hat{\mathbf{U}}_R + \hat{\mathbf{U}}_S + \hat{\mathbf{U}}_T = 0$ platí:

$$\hat{\mathbf{U}}_N = \frac{\frac{\hat{\mathbf{U}}_R}{Z_Y} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_S}{Z_Y} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_T}{Z_Y}}{\frac{1}{Z_Y} + \frac{1}{Z_Y} + \frac{1}{Z_Y}} = \frac{\frac{1}{Z_Y} \cdot (\hat{\mathbf{U}}_R + \hat{\mathbf{U}}_S + \hat{\mathbf{U}}_T)}{3 \cdot \frac{1}{Z_Y}} = 0 \quad (8.38)$$

Symetrická zátěž

Při symetrické zátěži mají fázory proudu stejnou velikost a jejich vzájemný fázový posun je $2\pi/3$. To předpokládá také shodnost impedancí v každé fázi.

$$\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_Y \quad (8.39)$$

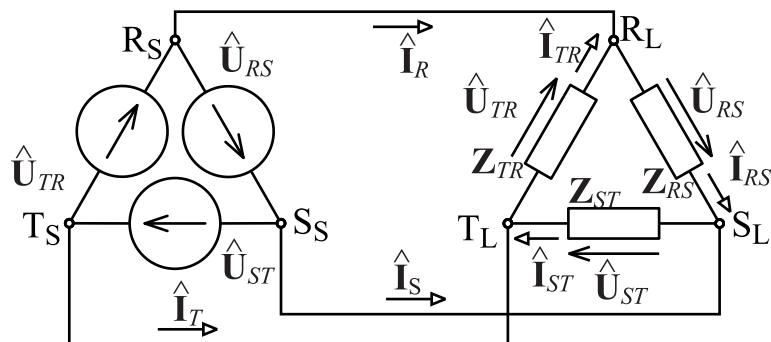
Pro velikosti síťových proudů platí:

$$I_R = I_S = I_T = I_L = \frac{U_f}{|\mathbf{Z}_Y|} \quad (8.40)$$

8.3.2 Soustava D-D

Soustava D-D je tvořena zdroji zapojeným do trojúhelníka a spotřebiči zapojenými do trojúhelníka. Mezi zdroji a spotřebiči vedou jen tři vodiče. Pokud by byla zátěž nesymetrická, na spotřebičích je přesto symetrické napětí.

Proti soustavě Y-Y je zde k dispozici jen jedno napětí, používá se název fázové nebo síťové.



Obrázek 8.9: Třífázová soustava DD

Proudys $\hat{\mathbf{I}}_R$, $\hat{\mathbf{I}}_S$ a $\hat{\mathbf{I}}_T$ se určují podle I. KZ:

$$\hat{\mathbf{I}}_R = \hat{\mathbf{I}}_{RS} - \hat{\mathbf{I}}_{TR} \quad (8.41)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_S = \hat{\mathbf{I}}_{ST} - \hat{\mathbf{I}}_{RS} \quad (8.42)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_T = \hat{\mathbf{I}}_{TR} - \hat{\mathbf{I}}_{ST} \quad (8.43)$$

a fázory proudů $\hat{\mathbf{I}}_{RS}$, $\hat{\mathbf{I}}_{ST}$ a $\hat{\mathbf{I}}_{TR}$ zase aplikací Ohmova zákona:

$$\hat{\mathbf{I}}_{RS} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_{RS}}{\mathbf{Z}_{RS}} = \hat{\mathbf{U}}_{RS} \cdot \mathbf{Y}_{RS} \quad (8.44)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_{ST} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_{ST}}{\mathbf{Z}_{ST}} = \hat{\mathbf{U}}_{ST} \cdot \mathbf{Y}_{ST} \quad (8.45)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_{TR} = \frac{\hat{\mathbf{U}}_{TR}}{\mathbf{Z}_{TR}} = \hat{\mathbf{U}}_{TR} \cdot \mathbf{Y}_{TR} \quad (8.46)$$

Při symetrické zátěži mají síťové proudy stejnou velikost a jejich vzájemné fázové posunutí je $2\pi/3$ rad. To předpokládá komplexní shodnost impedancí

$$\mathbf{Z}_{RS} = \mathbf{Z}_{ST} = \mathbf{Z}_{TR} \quad (8.47)$$

Pro velikosti fázových proudů potom platí

$$I_f = I_{RS} = I_{ST} = I_{TR} \quad (8.48)$$

a potom i síťové proudy budou stejné

$$I_L = I_R = I_S = I_T \quad (8.49)$$

Vztah mezi síťovým a fázovým proudem

$$I_L = \sqrt{S} I_f \quad (8.50)$$

8.4 Výkon v trojfázové soustavě

8.4.1 Soustava Y-Y

V soustavě s harmonickým ustáleným stavem je střední příkon dodávaný spotřebiči popisován jako činný, výkon určený součinem efektivní hodnoty napětí a proudu na spotřebiči uváděn jako zdánlivý. Výkon, který se vyměňuje mezi reaktancí zátěže a zdrojem je jalový. V třífázové symetrické soustavě se uvádí celý činný příkon soustavy. U soustavy Y-Y je shodný proud každé fáze na zdroji i spotřebiči, stejně je i stejně napětí na zdroji tak i na spotřebiči. Proto je elektrický výkon konkátní převáděn na spotřebič jen té příslušné fáze. Podmínkou je propojení středního uzlu soustavy zdrojů se středním uzlem soustavy spotřebičů. Celkový výkon soustavy je potom dán součtem výkonů jednotlivých fází. Fázové posuny φ_R , φ_S a φ_T jsou rozdíly fází napětí a proudu na příslušné fázi.

Činný příkon:

$$P = U_R I_R \cos \varphi_R + U_S I_S \cos \varphi_S + U_T I_T \cos \varphi_T \quad (8.51)$$

Jalový výkon:

$$Q = U_R I_R \sin \varphi_R + U_S I_S \sin \varphi_S + U_T I_T \sin \varphi_T \quad (8.52)$$

a zdánlivý výkon:

$$S = U_R I_R + U_S I_S + U_T I_T \quad (8.53)$$

A celkově platí: $S^2 = P^2 + Q^2$

Při použití symbolicko-komplexní metody se napětí a proudy zavádějí jako fázory napětí a fázory proudu. Z nich se počítá komplexní výkon, který je potom dán jako součet komplexních výkonů jednotlivých fází.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_S + \mathbf{S}_T = \hat{\mathbf{U}}_R \hat{\mathbf{I}}_R^* + \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{I}}_S^* + \hat{\mathbf{U}}_T \hat{\mathbf{I}}_T^* \quad (8.54)$$

Celkový činný, jalový a zdánlivý výkon se potom určí jako: $P = \operatorname{Re} [\mathbf{S}]$, $Q = \operatorname{Im} [\mathbf{S}]$ a $S = |\mathbf{S}|$

Při impedanci každé fáze zátěže \mathbf{Z}_R , \mathbf{Z}_S a \mathbf{Z}_T

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \hat{\mathbf{U}}_R \hat{\mathbf{I}}_R^* + \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{I}}_S^* + \hat{\mathbf{U}}_T \hat{\mathbf{I}}_T^* = \hat{\mathbf{U}}_R \frac{\hat{\mathbf{U}}_R^*}{\mathbf{Z}_R^*} + \hat{\mathbf{U}}_S \frac{\hat{\mathbf{U}}_S^*}{\mathbf{Z}_S^*} + \hat{\mathbf{U}}_T \frac{\hat{\mathbf{U}}_T^*}{\mathbf{Z}_T^*} = \\ &= \frac{U_R^2}{\mathbf{Z}_R^*} + \frac{U_S^2}{\mathbf{Z}_S^*} + \frac{U_T^2}{\mathbf{Z}_T^*} = U_f^2 \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_R^*} + \frac{1}{\mathbf{Z}_S^*} + \frac{1}{\mathbf{Z}_T^*} \right) = U_f^2 (\mathbf{Y}_R^* + \mathbf{Y}_S^* + \mathbf{Y}_T^*) \end{aligned}$$

V případě symetrické zátěže $\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_Y$ je činný výkon pro velikost fázového napětí U_f nebo sdružené napětí $U_L = \sqrt{U_f}$, síťový proud $I_f = I_L$ a stejný fázový posun mezi proudem a napětím φ . Činný příkon P :

$$P = 3U_f I_f \cos \varphi = \sqrt{3}U_L I_f \cos \varphi \quad (8.55)$$

Jalový výkon:

$$Q = 3U_f I_f \sin \varphi = \sqrt{3}U_L I_f \sin \varphi \quad (8.56)$$

a zdánlivý výkon:

$$S = 3U_f I_f = \sqrt{3}U_L I_f \quad (8.57)$$

V případě odpojeného středního vodiče se výkon soustavy určuje tak, že se zátěže převedou transfigurací hvězda/trojúhelník a výkon se počítá jako v soustavě D-D (viz kapitola 8.4.2).

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{RS} &= \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_S + \frac{\mathbf{Z}_R \cdot \mathbf{Z}_S}{\mathbf{Z}_T} \\ \mathbf{Z}_{ST} &= \mathbf{Z}_S + \mathbf{Z}_T + \frac{\mathbf{Z}_S \cdot \mathbf{Z}_T}{\mathbf{Z}_R} \\ \mathbf{Z}_{TR} &= \mathbf{Z}_T + \mathbf{Z}_R + \frac{\mathbf{Z}_T \cdot \mathbf{Z}_R}{\mathbf{Z}_S}\end{aligned}$$

8.4.2 Soustava D-D

V soustavě DD je výkon zdrojů dán součtem výkonů jednotlivých fází stejně jako příkon spotřebičů. Spotřebiče zapojené do trojúhelníku mají impedance: \mathbf{Z}_{RS} , \mathbf{Z}_{ST} a \mathbf{Z}_{TR} a mezi uzel jsou fázory sdružených napětí: $\hat{\mathbf{U}}_{RS}$, $\hat{\mathbf{U}}_{ST}$ a $\hat{\mathbf{U}}_{TR}$. Komplexní výkon \mathbf{S} je dán součtem výkonů jednotlivých fází $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{RS} + \mathbf{S}_{ST} + \mathbf{S}_{TR}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \hat{\mathbf{U}}_{RS} \hat{\mathbf{I}}_{RS}^* + \hat{\mathbf{U}}_{ST} \hat{\mathbf{I}}_{ST}^* + \hat{\mathbf{U}}_{TR} \hat{\mathbf{I}}_{TR}^* = \hat{\mathbf{U}}_{RS} \frac{\hat{\mathbf{U}}_{RS}^*}{\mathbf{Z}_{RS}^*} + \hat{\mathbf{U}}_{ST} \frac{\hat{\mathbf{U}}_{ST}^*}{\mathbf{Z}_{ST}^*} + \hat{\mathbf{U}}_{TR} \frac{\hat{\mathbf{U}}_{TR}^*}{\mathbf{Z}_{TR}^*} = \\ &= \frac{U_{RS}^2}{\mathbf{Z}_{RS}^*} + \frac{U_{ST}^2}{\mathbf{Z}_{ST}^*} + \frac{U_{TR}^2}{\mathbf{Z}_{TR}^*} = U_f^2 \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_{RS}^*} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{ST}^*} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{TR}^*} \right) = U_L^2 (\mathbf{Y}_{RS}^* + \mathbf{Y}_{ST}^* + \mathbf{Y}_{TR}^*)\end{aligned}$$

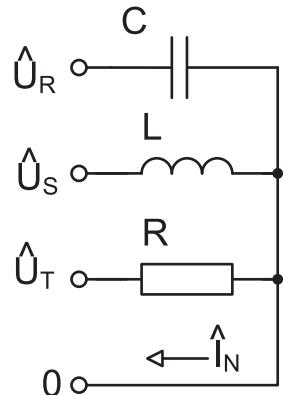
Velmi často nejsou hodnoty impedancí známy. Pokud jsou k dispozici fázory sítových proudů spolu s fázory sdružených napětí, je komplexní výkon:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \hat{\mathbf{U}}_{RS} \hat{\mathbf{I}}_R^* - \hat{\mathbf{U}}_{ST} \hat{\mathbf{I}}_T^* = \hat{\mathbf{U}}_{RS} (\hat{\mathbf{I}}_{RS}^* - \hat{\mathbf{I}}_{TR}^*) - \hat{\mathbf{U}}_{ST} (\hat{\mathbf{I}}_{TR}^* - \hat{\mathbf{I}}_{ST}^*) = \\ &= \hat{\mathbf{U}}_{RS} \hat{\mathbf{I}}_{RS}^* - \hat{\mathbf{U}}_{RS} \hat{\mathbf{I}}_{TR}^* - \hat{\mathbf{U}}_{ST} \hat{\mathbf{I}}_{TR}^* + \hat{\mathbf{U}}_{ST} \hat{\mathbf{I}}_{ST}^* = \hat{\mathbf{U}}_{RS} \hat{\mathbf{I}}_{RS}^* + \hat{\mathbf{U}}_{ST} \hat{\mathbf{I}}_{ST}^* + (-\hat{\mathbf{U}}_{RS} - \hat{\mathbf{I}}_{ST}) \hat{\mathbf{I}}_{TR}^* = \\ &= \hat{\mathbf{U}}_{RS} \hat{\mathbf{I}}_{RS}^* + \hat{\mathbf{U}}_{ST} \hat{\mathbf{I}}_{ST}^* + \hat{\mathbf{U}}_{TR} \hat{\mathbf{I}}_{TR}^*\end{aligned}$$

8.5 Řešené příklady

Příklad 8.1: V obvodu 8.10 spočtěte velikost proudu \hat{I}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Vypočtěte celkový komplexní výkon. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:

$$R = 100 \Omega, L = 200 \text{ mH} \text{ a } C = 50 \mu\text{F}.$$



Obrázek 8.10: Obvod

Řešení:

$$\begin{aligned}\hat{I}_N &= \hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T = \hat{U}_R j\omega C + \frac{\hat{U}_S}{j\omega L} + \frac{\hat{U}_T}{R} \\ \hat{I}_N &= 230.j0,01571 + \frac{-115 - j199,2}{j62,8318} + \frac{-115 + j199,2}{100} = \\ &= 0 + j3,6128 - 3,1701 + j1,8303 - 1,15 + j1,992 = -4,320 + j7,435 \text{ A}\end{aligned}$$

Převod do exponenciálního tvaru, výpočet modulu pomocí Pythagorovy věty:

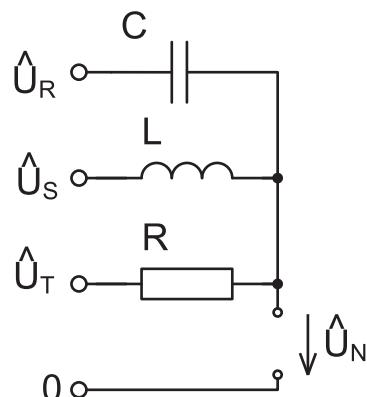
$$|\hat{I}_N| = \sqrt{(\text{Re}(\hat{I}_N))^2 + (\text{Im}(\hat{I}_N))^2} = \sqrt{(-4,320)^2 + (7,435)^2} = 8,599 \text{ A}$$

Výpočet argumentu, reálná složka je záporná, k výsledku se přičítá π

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}(\hat{I}_N)}{\text{Re}(\hat{I}_N)} + \pi = \arctg \frac{7,435}{-4,320} + \pi = 2,0972 \text{ rad } \hat{I}_N = -4,320 + j7,435 \text{ A} = 8,599 \exp(j2,0972) \text{ A}$$

Příklad 8.2: V obvodu 8.11 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:

$$R = 100 \Omega, L = 200 \text{ mH} \text{ a } C = 50 \mu\text{F}.$$



Obrázek 8.11: Obvod

Řešení: Napětí $\hat{\mathbf{U}}_N$ se vypočte z rovnice sestavené podle I. KZ.:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{I}}_R + \hat{\mathbf{I}}_S + \hat{\mathbf{I}}_T &= 0 \\
 \frac{\hat{\mathbf{U}}_R - \hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_R} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_S - \hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_S} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_T - \hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_T} &= 0 \\
 \frac{\hat{\mathbf{U}}_R}{\mathbf{Z}_R} - \frac{\hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_R} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_S}{\mathbf{Z}_S} - \frac{\hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_S} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_T}{\mathbf{Z}_T} - \frac{\hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_T} &= 0 \\
 \frac{\hat{\mathbf{U}}_R}{\mathbf{Z}_R} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_S}{\mathbf{Z}_S} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_T}{\mathbf{Z}_T} &= \frac{\hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_R} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_S} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_N}{\mathbf{Z}_T} \\
 \frac{\hat{\mathbf{U}}_R}{\mathbf{Z}_R} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_S}{\mathbf{Z}_S} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_T}{\mathbf{Z}_T} &= \hat{\mathbf{U}}_N \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_R} + \frac{1}{\mathbf{Z}_S} + \frac{1}{\mathbf{Z}_T} \right) \\
 \hat{\mathbf{U}}_R \cdot \mathbf{Y}_R + \hat{\mathbf{U}}_S \cdot \mathbf{Y}_S + \hat{\mathbf{U}}_T \cdot \mathbf{Y}_T &= \hat{\mathbf{U}}_N (\mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_S + \mathbf{Y}_T) \\
 \hat{\mathbf{U}}_N &= \frac{\frac{\hat{\mathbf{U}}_R}{\mathbf{Z}_R} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_S}{\mathbf{Z}_S} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_T}{\mathbf{Z}_T}}{\frac{1}{\mathbf{Z}_R} + \frac{1}{\mathbf{Z}_S} + \frac{1}{\mathbf{Z}_T}} \\
 \hat{\mathbf{U}}_N &= \frac{\hat{\mathbf{U}}_R \cdot \mathbf{Y}_R + \hat{\mathbf{U}}_S \cdot \mathbf{Y}_S + \hat{\mathbf{U}}_T \cdot \mathbf{Y}_T}{\mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_S + \mathbf{Y}_T}
 \end{aligned}$$

Nyní se vypočte hodnota výrazu v čitateli. Označí se jako $\hat{\mathbf{I}}_X$, protože má fyzikální rozměr fázoru proudu:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{I}}_X &= \hat{U}_R \cdot j\omega C + \frac{\hat{U}_S}{j\omega L} + \frac{\hat{U}_T}{R} \\
 \hat{\mathbf{I}}_X &= 230 \cdot j0,01571 + \frac{-115 - j199,2}{j62,8318} + \frac{-115 + j199,2}{100} \\
 \hat{\mathbf{I}}_X &= 0 + j3,6128 - 3,1701 + j1,8303 - 1,15 + j1,992 = -4,320 + j7,435 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Dále se zjistí hodnota výrazu ve jmenovateli. Jde o součet admitancí jednotlivých prvků, proto se označí jako $\hat{\mathbf{Y}}_X$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_X &= j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} \\
 \mathbf{Y}_X &= j0,01571 + \frac{1}{j62,8318} + \frac{1}{100} = 0,01 - j2,055 \cdot 10^{-4}
 \end{aligned}$$

Napětí $\hat{\mathbf{U}}_N$ se vypočte podle vzorce:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{U}}_N &= \frac{\hat{\mathbf{I}}_X}{\mathbf{Y}_X} = \frac{-4,320 + j7,435}{0,01 - j2,055 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{0,01 + j2,055 \cdot 10^{-4}}{0,01 + j2,055 \cdot 10^{-4}} = \\
 &= \frac{-0,04320 + j0,7435 - j0,0008878 - 0,001528}{0,0001 + 4,223 \cdot 10^{-8}} = -447 + j734 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Nakonec následuje převod do exponenciálního tvaru. Počítá se nejprve modul $|\hat{\mathbf{U}}_N|$ a následně i úhel φ .

$$|\hat{\mathbf{U}}_N| = \sqrt{[\operatorname{Re}(\hat{\mathbf{U}}_N)]^2 + [\operatorname{Im}(\hat{\mathbf{U}}_N)]^2} = \sqrt{(-447)^2 + (734)^2} = 859 \text{ V}$$

Reálná složka \hat{U}_N je záporná, proto se úhel φ počítá podle vzorce:

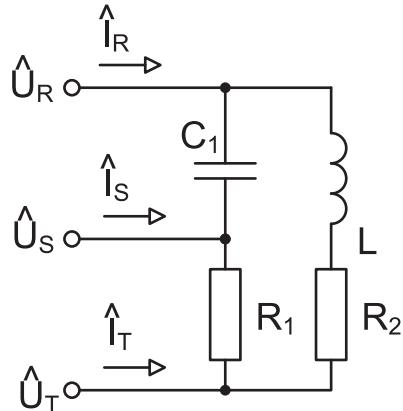
$$\varphi = \arctg \frac{\operatorname{Im}(\hat{U}_N)}{\operatorname{Re}(\hat{U}_N)} + \pi = \arctg \frac{734}{-447} + \pi = -1,024 + 3,142 = 2,118 \text{ rad}$$

Výsledný tvar:

$$\underline{\hat{U}_N = 859 \cdot e^{j \cdot 2,118} \text{ V}}$$

Příklad 8.3: Spočtěte velikost proudů \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků u obvodu na obrázku 8.12. Vypočtěte celkový komplexní výkon. Parametry prvků jsou:

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 20 \Omega, L = 800 \text{ mH} \text{ a } C = 15 \mu\text{F}$$



Obrázek 8.12: Obvod

Řešení: Proud \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T se dají spočítat podle vzorců (I. KZ): $\hat{I}_R = \hat{I}_{RS} - \hat{I}_{TR}$, $\hat{I}_S = \hat{I}_{ST} - \hat{I}_{RS}$ a $\hat{I}_T = \hat{I}_{TR} - \hat{I}_{ST}$. a fázory proudů \hat{I}_{RS} , \hat{I}_{ST} a \hat{I}_{TR} zase aplikací Ohmova zákona: $\hat{I}_{RS} = \frac{\hat{U}_{RS}}{\mathbf{Z}_{RS}} = \hat{U}_{RS} \cdot \mathbf{Y}_{RS}$, $\hat{I}_{ST} = \frac{\hat{U}_{ST}}{\mathbf{Z}_{ST}} = \hat{U}_{ST} \cdot \mathbf{Y}_{ST}$ a $\hat{I}_{TR} = \frac{\hat{U}_{TR}}{\mathbf{Z}_{TR}} = \hat{U}_{TR} \cdot \mathbf{Y}_{TR}$.

Pro zadané hodnoty parametrů prvků $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $L = 800 \text{ mH}$ a $C = 15 \mu\text{F}$ se mohou vypočítat impedance případně admintance:

$$\mathbf{Y}_{RS} = j\omega C = j314,2 \cdot 15 \cdot 10^{-6} = j4,713 \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

$$\mathbf{Z}_{ST} = 100 \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{TR} = R_2 + j\omega L = 20 + j314,2 \cdot 0,8 = 20 + j251,4 \Omega$$

Dále se vypočítají proudy $\hat{I}_{RS} = \hat{U}_{RS} \cdot \mathbf{Y}_{RS} = \sqrt{3} \cdot 230 \cdot j4,713 \cdot 10^{-3} = j1,876 \text{ A}$, $\hat{I}_{ST} = \frac{\hat{U}_{ST}}{\mathbf{Z}_{ST}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 230 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{100} = -1,992 - j3,45 \text{ A}$ a $\hat{I}_{TR} = \frac{\hat{U}_{TR}}{\mathbf{Z}_{TR}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 230 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}}{20 + j314,2 \cdot 0,8} = 1,301 + j0,896 \text{ A}$

Nakonec se vypočítají proudy:

$\hat{I}_R = \hat{I}_{RS} - \hat{I}_{TR} = -1,301 + j0,981 \text{ A}$, $\hat{I}_S = \hat{I}_{ST} - \hat{I}_{RS} = -1,992 - j5,327 \text{ A}$ a $\hat{I}_T = \hat{I}_{TR} - \hat{I}_{ST} = 3,293 + j4,346 \text{ A}$. Kontrolou může být součet proudů: $\hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T = -1,301 + j0,981 - 1,992 - j5,327 + 3,293 + j4,346 = 0$ podle rozšířeného I. KZ.

Celkový komplexní výkon při zapojení zátěže do trojúhelníku se spočítá nejlépe podle vzorce (platí pro $U_L = |\hat{U}_{RS}| = |\hat{U}_{ST}| = |\hat{U}_{TR}|$):

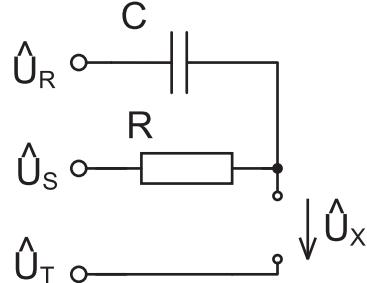
$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{RS} + \mathbf{S}_{ST} + \mathbf{S}_{TR} = \hat{U}_{RS} \cdot \hat{I}_{RS}^* + \hat{U}_{ST} \cdot \hat{I}_{ST}^* + \hat{U}_{TR} \cdot \hat{I}_{TR}^* = U_L^2 \cdot \mathbf{Y}_{RS}^* + \frac{U_L^2}{\mathbf{Z}_{ST}^*} + \frac{U_L^2}{\mathbf{Z}_{TR}^*}$$

Po dosazení:

$$158\,700 \cdot (-j4,713 \cdot 10^{-3}) + \frac{158\,700}{100} + \frac{158\,700}{20 - j251,4} = 1637 - j120,5 \text{ VA}$$

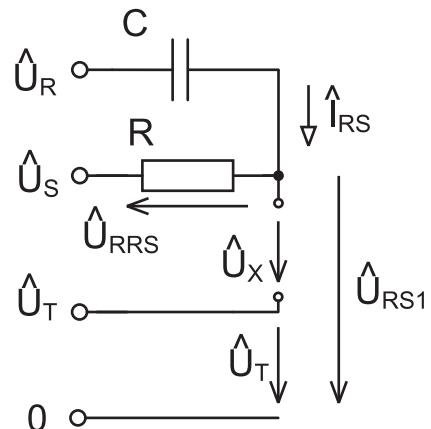
Příklad 8.4: Nalezněte hodnotu fázoru napětí \hat{U}_X u obvodu č. 8.13. Obvod je napájen běžnou trojfázovou sítí. Parametry prvků jsou:

$$R = 100 \Omega \text{ a } C = 50 \mu\text{F}.$$



Obrázek 8.13: Obvod

Řešení: Schéma obvodu se doplní o referenční uzel, který odpovídá uzlu N v symetrické trojfázové soustavě. (obvod č. 8.14). K němu se vztahují všechna fázová napětí napájecích svorek, stejně i ostatní hodnoty napětí na uzlech. Dále se vyznačí proud \hat{I}_{RS} , úbytek napětí na rezistoru \hat{U}_{RRS} , napětí mezi uzlem a svorkou s nulovým potenciálem \hat{U}_{RRS} .



Obrázek 8.14: Obvod

Výpočet proběhne následujícím způsobem. Nejprve se vypočítá proud \hat{I}_{RS} :

$$\hat{I}_{RS} = \frac{\hat{U}_R - \hat{U}_S}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{230 - (-115 - j199,2)}{100 + \frac{1}{j314,250 \cdot 10^{-6}}} = 1,553 + j2,98 \text{ A}$$

Dále úbytek napětí na rezistoru R (označeno \hat{U}_{RRS}):

$$\hat{U}_{RRS} = \hat{I}_{RS} R = (1,5527 + j2,9803) \cdot 100 = 155,27 + j298,03 \text{ V}$$

Napětí mezi uzlem (mezi rezistorem a kapacitorem) a nulovou svorkou \hat{U}_{RS1} je dáno součtem napětí \hat{U}_S a \hat{U}_{RRS} .

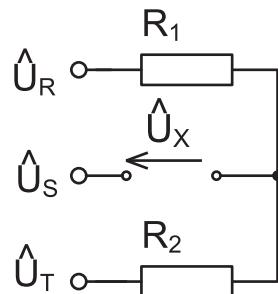
$$\hat{U}_{RS1} = \hat{U}_S + \hat{U}_{RRS} = 40,267 + j98,846 \text{ V}$$

Výsledné napětí \hat{U}_X je potom:

$$\hat{U}_X = \hat{U}_{RS1} - \hat{U}_T = 155,27 - j100,34 \text{ V}$$

Příklad 8.5: Nalezněte hodnotu fázoru napětí \hat{U}_X u obvodu č. 8.15. Obvod je napájen běžnou trojfázovou sítí. Parametry prvků jsou:

$$R_1 = 100 \Omega \text{ a } R_2 = 220 \Omega.$$



Obrázek 8.15: Obvod

Řešení: Pro síťové proudy \hat{I}_R a \hat{I}_T podle I. Kirchhoffova zákona platí:

$$\hat{I}_R + \hat{I}_T = 0$$

Pro výpočet napětí se potom použije metoda uzlových napětí:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{U}_R - (\hat{U}_X + \hat{U}_S)}{R_1} + \frac{\hat{U}_T - (\hat{U}_X + \hat{U}_S)}{R_1} &= 0 \\ R_2 \hat{U}_R - R_2 (\hat{U}_X + \hat{U}_S) + R_1 \hat{U}_T - R_1 (\hat{U}_X + \hat{U}_S) &= 0 \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} \hat{U}_R + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \hat{U}_T - \hat{U}_S &= \hat{U}_X \end{aligned}$$

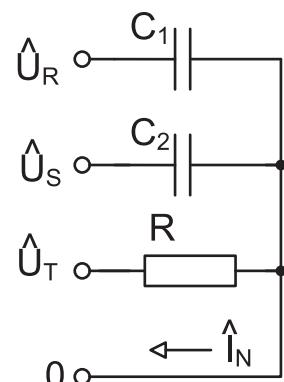
Nyní je možné do vypočtené rovnice dosadit:

$$\begin{aligned} \hat{U}_X &= \frac{220}{100 + 220} 230 + \frac{100}{100 + 220} (-115 + j199,2) - (-115 - j199,2) \\ \hat{U}_X &= \underline{237,2 + j261,5 = 353,0 e^{j0,834} \text{ V}} \end{aligned}$$

8.6 Neřešené příklady

Příklad 8.6: V obvodu 8.16 spočtěte velikost proudu \hat{I}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 2 \mu\text{F}$ a $C_2 = 5 \mu\text{F}$.

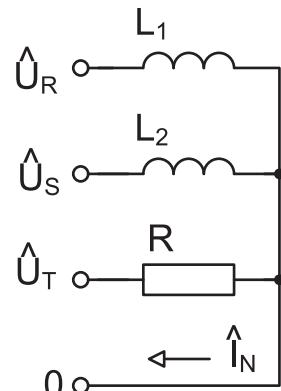
Řešení: $\hat{I}_N = 0,1979 + j0,1631 = 0,2564 \cdot e^{j0,68922} \text{ A}$



Obrázek 8.16: Obvod

Příklad 8.7: V obvodu 8.17 spočtěte velikost proudu \hat{I}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou: $R = 200 \Omega$, $L_1 = 500 \text{ mH}$ a $L_2 = 200 \text{ mH}$.

Řešení: $\hat{I}_N = -3,7451 + j1,3620 = 3,9851 \cdot e^{j2,7928} \text{ A}$

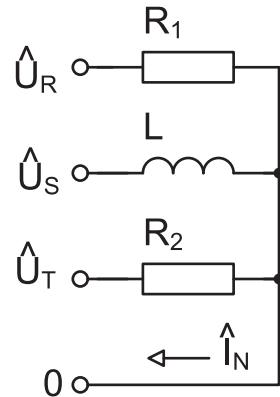


Obrázek 8.17: Obvod

Příklad 8.8: V obvodu 8.18 spočtěte velikost proudu \hat{I}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:

$$R_1 = 2 \text{ k}\Omega, R_2 = 1 \text{ k}\Omega \text{ a } L = 2 \text{ H.}$$

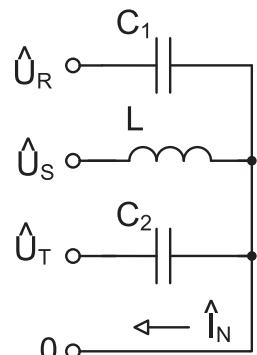
Řešení: $\hat{I}_N = -0,3170 + j0,3822 = 0,4966 \cdot e^{j2,2632} \text{ A}$



Obrázek 8.18: Obvod

Příklad 8.9: V obvodu 8.19 spočtěte velikost proudu \hat{I}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:
 $L = 500 \text{ mH}$, $C_1 = 10 \mu\text{F}$ a $C_2 = 20 \mu\text{F}$.

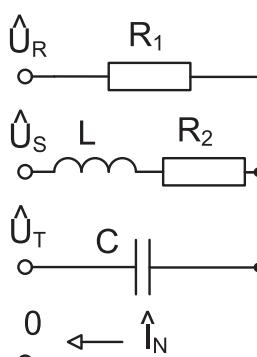
Řešení: $\hat{I}_N = -2,5196 + j0,7321 = 2,6238 \cdot e^{j2,8588} \text{ A}$



Obrázek 8.19: Obvod

Příklad 8.10: V obvodu 8.20 spočtěte velikost proudu \hat{I}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:
 $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $L = 500 \text{ mH}$ a $C = 50 \mu\text{F}$.

Řešení: $\hat{I}_N = -2,1947 - j1,4221 = 2,6152 \cdot e^{-j2,5666} \text{ A}$



Obrázek 8.20: Obvod

Příklad 8.11: V obvodu 8.21 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:
 $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 2 \mu\text{F}$ a $C_2 = 5 \mu\text{F}$.

Řešení: $\hat{U}_N = 95,348 - j46,624 = 106,14 \cdot e^{-j0,4548} \text{ V}$

Příklad 8.12: V obvodu 8.22 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:
 $R = 200 \Omega$, $L_1 = 500 \text{ mH}$ a $L_2 = 200 \text{ mH}$.

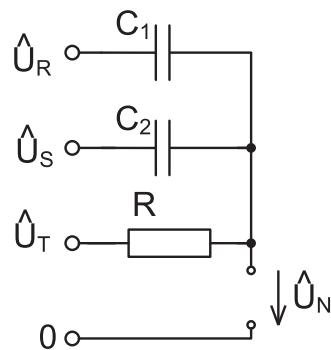
Řešení: $\hat{U}_N = -94,105 - j146,965 = 174,51 \cdot e^{-j2,1403} \text{ V}$

Příklad 8.13: V obvodu 8.23 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:
 $L = 500 \text{ mH}$, $C_1 = 10 \mu\text{F}$ a $C_2 = 20 \mu\text{F}$.

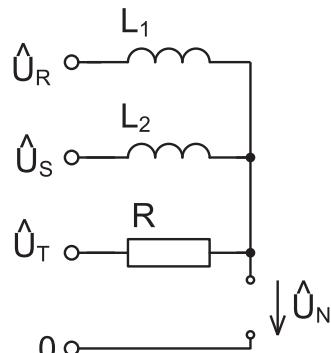
Řešení: $\hat{U}_N = 239,36 - j823,77 = 857,85 \cdot e^{j1,288} \text{ V}$

Příklad 8.14: V obvodu 8.24 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:
 $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ a $L = 2 \text{ H}$.

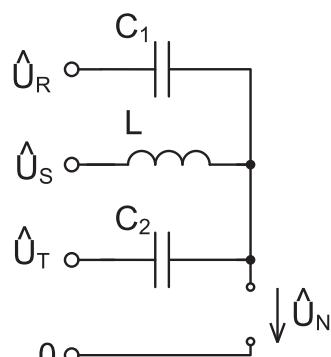
Řešení: $\hat{U}_N = -226,6 + j14,379 = 227,06 \cdot e^{j3,0782} \text{ V}$



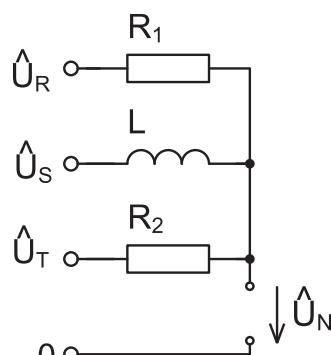
Obrázek 8.21: Obvod



Obrázek 8.22: Obvod



Obrázek 8.23: Obvod

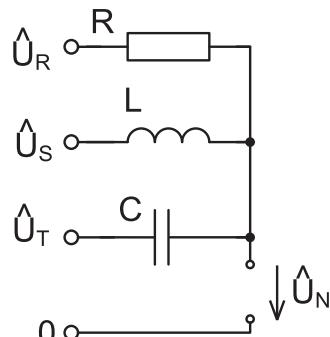


Obrázek 8.24: Obvod

Příklad 8.15: V obvodu 8.25 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:

$$R = 100 \Omega, L = 300 \text{ mH} \text{ a } C = 30 \mu\text{F}$$

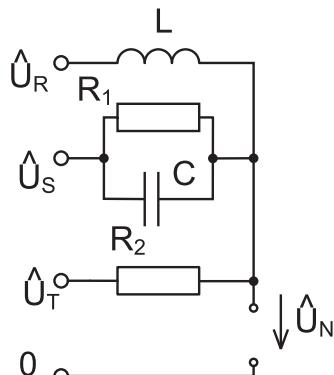
Řešení: $\hat{U}_N = -168,32 - j6,322 = 168,44 \cdot e^{-j3,1041} \text{ V}$



Obrázek 8.25: Obvod

Příklad 8.16: V obvodu 8.26 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:
 $R_1 = 500 \Omega, R_2 = 300 \Omega, L = 1 \text{ H} \text{ a } C = 10 \mu\text{F}$.

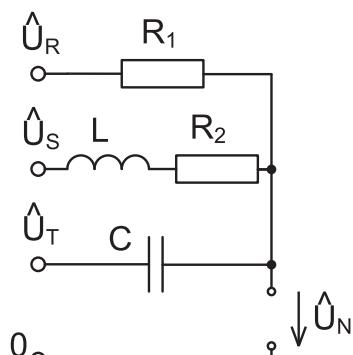
Řešení: $\hat{U}_N = 3,5379 - j155,1877 = 155,23 \cdot e^{-j1,548} \text{ V}$



Obrázek 8.26: Obvod

Příklad 8.17: V obvodu 8.27 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:
 $R_1 = 200 \Omega, R_2 = 50 \Omega, L = 500 \text{ mH} \text{ a } C = 20 \mu\text{F}$.

Řešení: $\hat{U}_N = -217,495 - j46,050 = 222,32 \cdot e^{-j2,933} \text{ V}$

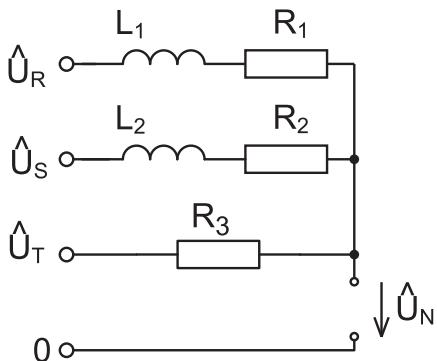


Obrázek 8.27: Obvod

Příklad 8.18: V obvodu 8.28 vypočtěte velikost napětí \hat{U}_N ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků. Obvod je napájen z běžné trojfázové sítě o efektivní hodnotě fázového napětí 230 V. Parametry prvků jsou:

$L_1 = 1 \text{ H}$, $R_1 = 20 \Omega$, $L_2 = 2 \text{ H}$, $R_2 = 30 \Omega$ a $R_3 = 500 \Omega$.

Řešení: $\hat{U}_N = -13,709 - j100,326 = 101,26 \cdot e^{-j1,7066} \text{ V}$

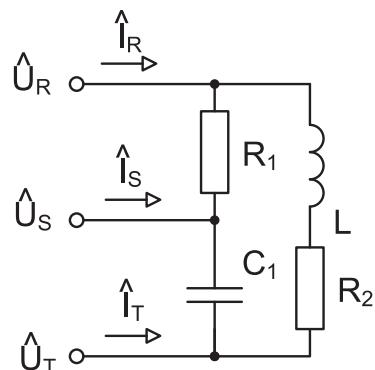


Obrázek 8.28: Obvod

Příklad 8.19: Spočtěte velikost proudů \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků u obvodu na obrázku 8.29. Vypočtěte celkový komplexní výkon. Parametry prvků jsou:

$R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ a $C = 20 \mu\text{F}$.

Řešení: Fázory síťových proudů: $\hat{I}_R = 2,9183 - j0,6849 = 2,9975 \cdot e^{-j0,23052} \text{ A}$, $\hat{I}_S = -1,816 - j1,2515 = 2,2055 \cdot e^{-j2,5382} \text{ A}$ a $\hat{I}_T = -1,1022 + j1,9364 = 2,2281 \cdot e^{j2,0883} \text{ A}$,
a výkon - činný: $P = 1611,1 \text{ W}$, jalový: $Q = -493,13 \text{ VAr}$ a zdánlivý: $S = 1684,8 \text{ VA}$. Účiník: 0,95621.

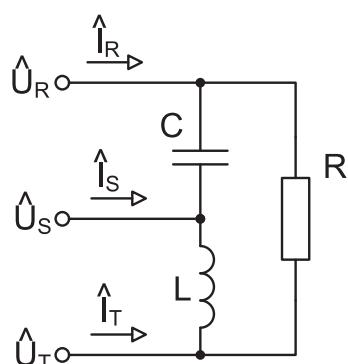


Obrázek 8.29: Obvod

Příklad 8.20: Spočtěte velikost proudů \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků u obvodu na obrázku 8.30. Vypočtěte celkový komplexní výkon. Parametry prvků jsou:

$R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 1,2 \text{ H}$ a $C = 20 \mu\text{F}$.

Řešení: Fázory síťových proudů: $\hat{I}_R = 0,1992 + j2,158 = 2,1672 \cdot e^{j1,4788} \text{ A}$, $\hat{I}_S = -0,9151 - j1,9747 = 2,1764 \cdot e^{-j2,005} \text{ A}$ a $\hat{I}_T = 0,71596 - j0,18336 = 0,73906 \cdot e^{-j0,2507} \text{ A}$;
a výkon - činný: $P = 158,7 \text{ W}$, jalový: $Q = -576,2 \text{ VAr}$ a zdánlivý: $S = 597,63 \text{ VA}$. Účiník: 0,26555.

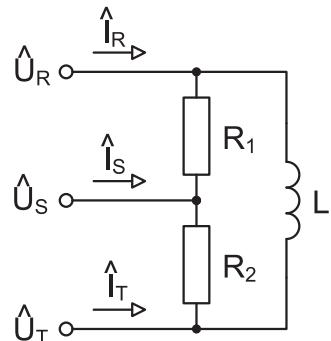


Obrázek 8.30: Obvod

Příklad 8.21: Spočtěte velikost proudů \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků u obvodu na obrázku 8.31. Vypočtěte celkový komplexní výkon. Parametry prvků jsou:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega, R_2 = 2 \text{ k}\Omega \text{ a } L = 2 \text{ H}.$$

Řešení: Fázory síťových proudů: $\hat{I}_R = -0,15071 - j0,31701 = 0,35102 \cdot e^{-j2,0146} \text{ A}$, $\hat{I}_S = -0,49796 - j0,17250 = 0,527 \cdot e^{-j2,8081} \text{ A}$ a $\hat{I}_T = 0,64868 - j0,48951 = 0,81265 \cdot e^{-j0,6465} \text{ A}$, a výkon - činný: $P = 238,05 \text{ W}$, jalový: $Q = -252,58 \text{ VAr}$ a zdánlivý: $S = 347,08 \text{ VA}$. Účiník: 0,68587.

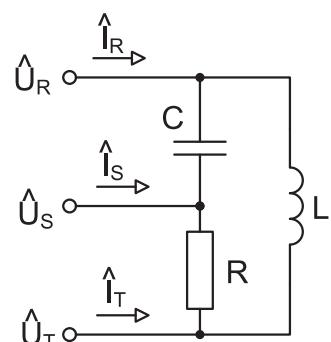


Obrázek 8.31: Obvod

Příklad 8.22: Spočtěte velikost proudů \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků u obvodu na obrázku 8.32. Vypočtěte celkový komplexní výkon. Parametry prvků jsou:

$$R = 800 \Omega, L = 1 \text{ H} \text{ a } C = 8 \mu\text{F}.$$

Řešení: Fázory síťových proudů: $\hat{I}_R = -1,0982 - j0,3672 = 1,1579 \cdot e^{j2,8189} \text{ A}$, $\hat{I}_S = -0,24898 - j1,43247 = 1,4539 \cdot e^{-j1,7429} \text{ A}$ a $\hat{I}_T = 1,3472 + j1,0653 = 1,7175 \cdot e^{-j0,66908} \text{ A}$, a výkon - činný: $P = 198,37 \text{ W}$, jalový: $Q = 106,30 \text{ VAr}$ a zdánlivý: $S = 225,06 \text{ VA}$. Účiník: 0,88143.

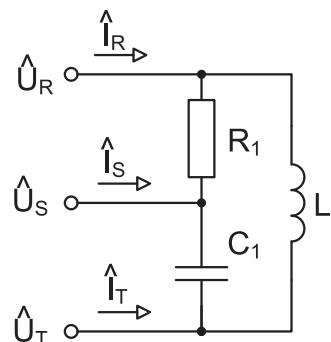


Obrázek 8.32: Obvod

Příklad 8.23: Spočtěte velikost proudů $\hat{\mathbf{I}}_R$, $\hat{\mathbf{I}}_S$ a $\hat{\mathbf{I}}_T$ ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků u obvodu na obrázku 8.33. Vypočtěte celkový komplexní výkon. Parametry prvků jsou:

$$R = 150 \Omega, L = 500 \text{ mH} \text{ a } C = 20 \mu\text{F}.$$

Řešení: Fázory síťových proudů: $\hat{\mathbf{I}}_R = 0,45947 - j1,26806 = 1,3487 \cdot e^{-j1,2232} \text{ A}$, $\hat{\mathbf{I}}_S = -0,48811 - j1,25152 = 1,3433 \cdot e^{-j1,9427} \text{ A}$ a $\hat{\mathbf{I}}_T = 0,02864 + j2,5196 = 2,5197 \cdot e^{j1,5594} \text{ A}$,
a výkon - činný: $P = 1058,0 \text{ W}$, jalový: $Q = 13,174 \text{ VAr}$ a zdánlivý: $S = 1058,1 \text{ VA}$. Účiník: 0,9999.

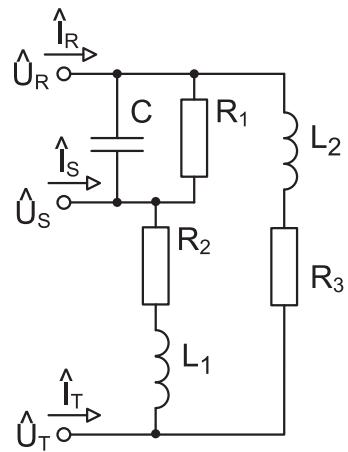


Obrázek 8.33: Obvod

Příklad 8.24: Spočtěte velikost proudů \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků u obvodu na obrázku 8.34. Vypočtěte celkový komplexní výkon. Parametry prvků jsou:

$$R_1 = 2000 \Omega, C = 7 \mu F, R_2 = 50 \Omega, L_1 = 2 H, R_3 = 40 \Omega \text{ a } L_2 = 1,5 H.$$

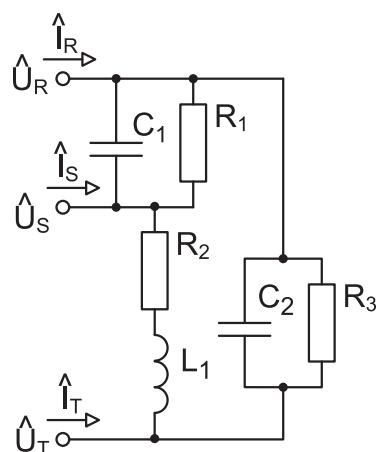
Řešení: Fázory síťových proudů: $\hat{I}_R = -0,49207 + j0,39470 = 0,63081 \cdot e^{j2,4656} A$, $\hat{I}_S = -0,76988 - j0,60447 = 0,97883 \cdot e^{-j2,4760} A$ a $\hat{I}_T = 1,26195 + j0,20976 = 1,2793 \cdot e^{j0,16471} A$, a výkon - činný: $P = 127,7 W$, jalový: $Q = 236,35 VAr$ a zdánlivý: $S = 268,65 VA$. Účiník: 0,47536.



Obrázek 8.34: Obvod

Příklad 8.25: Spočtěte velikost proudů \hat{I}_R , \hat{I}_S a \hat{I}_T ve složkovém a v exponenciálním tvaru při zadaných parametrech obvodových prvků u obvodu na obrázku 8.35. Vypočtěte celkový komplexní výkon. $R_1 = 800 \Omega, C_1 = 30 \mu F, R_2 = 30 \Omega, L_1 = 300 mH, R_3 = 800 \Omega \text{ a } C_2 = 30 \mu F$.

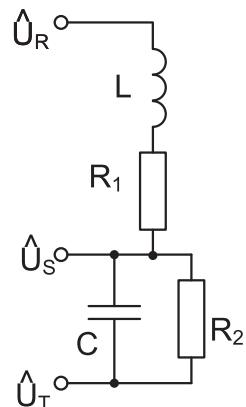
Řešení: Fázory síťových proudů: $\hat{I}_R = 3,9985 + j5,2006 = 6,5600 \cdot e^{j0,91534} A$, $\hat{I}_S = -4,4326 - j2,8936 = 5,2934 \cdot e^{-j2,5633} A$ a $\hat{I}_T = 0,43410 - j2,30703 = 2,3475 \cdot e^{-j1,3848} A$; a výkon - činný: $P = 883,43 W$, jalový: $Q = -1462,5 VAr$ a zdánlivý: $S = 1708,6 VA$. Účiník: 0,51705.



Obrázek 8.35: Obvod

Příklad 8.26: Vypočtěte celkový komplexní výkon u obvodu na obrázku 8.36. Parametry prvků jsou: $L = 100 \text{ mH}$, $R_1 = 2 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$ a $R_2 = 0,2 \text{ k}\Omega$.

Řešení: Horní větev: $\mathbf{S} = 320,21 + j5030,54 \text{ VA}$, spodní větev: $\mathbf{S} = 793,50 - j2493,18 \text{ VA}$.

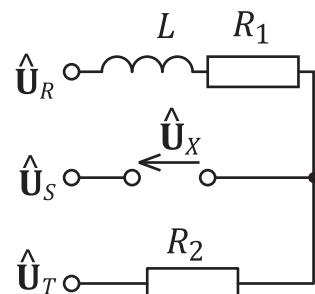


Obrázek 8.36: Obvod

Příklad 8.27: Nalezněte hodnotu fázoru napětí \hat{U}_X u obvodu č. 8.37. Obvod je napájen běžnou trojfázovou sítí.

$$R_1 = 40 \Omega; L = 800 \text{ mH} \text{ a } R_2 = 220 \Omega.$$

Řešení: $\hat{U}_X = 66,69 + j165,4 \text{ V} = 178,3e^{j1,1875} \text{ V}^*$.

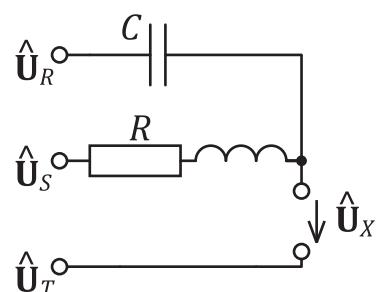


Obrázek 8.37: Obvod

Příklad 8.28: Nalezněte hodnotu fázoru napětí \hat{U}_X u obvodu č. 8.38. Obvod je napájen běžnou trojfázovou sítí. Parametry prvků jsou:

$$L = 450 \text{ mH}, R = 40 \Omega \text{ a } C = 16 \mu\text{F}.$$

Řešení: $\hat{U}_X = -781,57 - j104,77 \text{ V} = 788,6e^{-j3,0083} \text{ V}.$



Obrázek 8.38: Obvod

Kapitola 9

Vybraná rozšiřující téma elektrických obvodů

9.1 Obvodové rovnice s akumulativními prvky

9.1.1 Obvodové rovnice v harmonickém ustáleném stavu - řešené příklady

Příklad 9.1: Vypočtěte fázor napětí \hat{u} na obrázku 9.1 při následujících parametrech obvodových prvků.

$$L_1 = 200 \text{ mH};$$

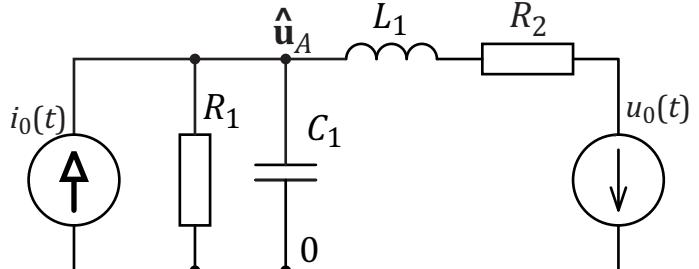
$$C_1 = 20 \mu\text{F};$$

$$R_1 = 200 \Omega;$$

$$R_2 = 10 \Omega;$$

$$u_0(t) = 30 \sin(314t) \text{ V a}$$

$$i_0(t) = 1 \sin(314t + \frac{\pi}{4}) \text{ V}$$



Obrázek 9.1: Schéma obvodu

Řešení: Pro tento obvod se sestaví obvodová rovnice podle věty o uzlových napětích. Hledá se fázor napětí \hat{U}_1 . Platí:

$$\hat{I}_0 + (0 - \hat{u}_A) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right) + \frac{\hat{U}_0 - \hat{u}_A}{R_2 + j\omega L_1} = 0$$

kde fázor napětí a fázor proudu použitých zdrojů jsou:

$$\hat{U}_0 = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21,213 \text{ V}$$

$$\hat{I}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = 0,5 + j0,5 \text{ A}$$

Dále se do obvodové rovnice dosadí:

$$0,5 + j0,5 - \hat{\mathbf{u}}_A \cdot \left(\frac{1}{200} + j314 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \right) + \frac{\frac{30}{\sqrt{2}} - \hat{\mathbf{u}}_A}{10 + j314 \cdot 0,2} = 0$$

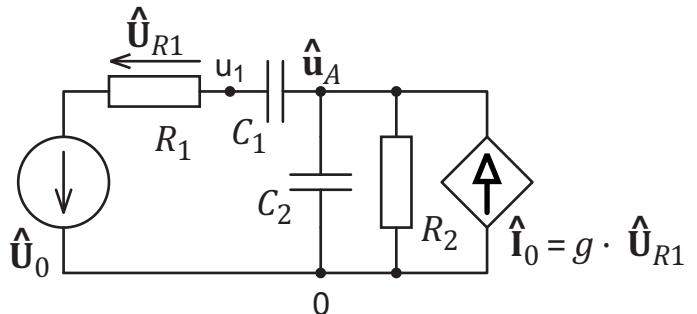
Komplexní čísla ve jmenovateli se převedou do čitatele:

$$0,5 + j0,5 - \hat{\mathbf{u}}_A \cdot \left(\frac{1}{200} + j314 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \right) + \left(\frac{30}{\sqrt{2}} - \hat{\mathbf{u}}_A \right) \left(2,473 \cdot 10^{-3} - j0,01553 \right) = 0$$

Po roznásobení a součtu členů stejného typu

$$\begin{aligned} 0,10246 + j0,1706 &= \hat{\mathbf{u}}_A (0,007473 - j0,00925) \\ \hat{\mathbf{u}}_A &= \underline{-5,7448 + j15,718} \end{aligned}$$

Příklad 9.2: Sestavte obvodovou rovnici pro obvod na schématu 9.2.



Obrázek 9.2: Schéma obvodu

Řešení: Sestavení rovnice podle metody uzlových napětí:

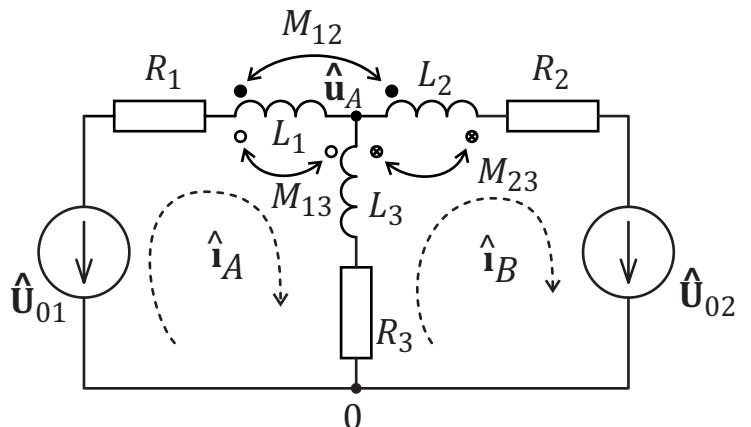
$$\frac{\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_A}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} - \frac{\hat{\mathbf{u}}_A}{R_2} - \hat{\mathbf{u}}_A \cdot j\omega C_2 + \hat{\mathbf{I}}_0 = 0$$

Dále se vyjádří $\hat{\mathbf{I}}_0$ pomocí zadaných parametrů a $\hat{\mathbf{u}}_A$:

$$\hat{\mathbf{I}}_0 = -g \cdot \left(\hat{\mathbf{U}}_0 + R_1 \frac{\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_A}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right)$$

Po dosazení a úpravě:

$$\hat{\mathbf{U}}_0 \left(\frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} - g - \frac{gR_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) - \hat{\mathbf{u}}_A \left(\frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_2 - \frac{gR_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) = 0$$



Příklad 9.3: Sestavte obvodovou rovnici metodou smyčkových proudů pro obvod na schématu 9.3. Určete fázor napětí \hat{u}_A

Obrázek 9.3: Schéma obvodu

Řešení: Pro tento obvod se sestaví soustava rovnic pomocí metody smyčkových proudů. Je nutné věnovat pozornost orientaci druhého smyčkového proudu při průchodu vázaným induktorem, aby se znaménka zapsala správně.:

$$\begin{aligned} -\hat{U}_1 + R_1 \hat{i}_A + j\omega [L_1 \hat{i}_A + M_{12} \hat{i}_B + M_{13}(\hat{i}_A - \hat{i}_B) + L_3(\hat{i}_A - \hat{i}_B) + M_{13} \hat{i}_A - M_{23} \hat{i}_B] + \\ + R_3(\hat{i}_A - \hat{i}_B) = 0 \\ \hat{U}_2 + R_3(\hat{i}_B - \hat{i}_A) + j\omega [L_3(\hat{i}_B - \hat{i}_A) + M_{13} \hat{i}_A + M_{23} \hat{i}_B + L_3 \hat{i}_B + M_{12} \hat{i}_A - M_{23}(\hat{i}_B - \hat{i}_A)] + \\ + R_2 \hat{i}_B = 0 \end{aligned}$$

Napětí uzlové dvojice \hat{u}_A se určí z napětí jedné z větví, např. přes rezistor R_1 :

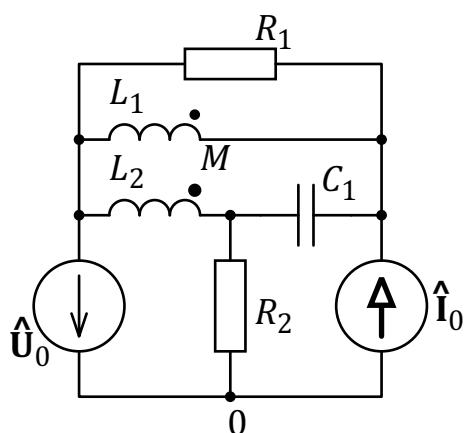
$$\hat{u}_A = \hat{U}_{01} - R_1 \hat{i}_A + j\omega [-L_1 \hat{i}_A + M_{13}(\hat{i}_B - \hat{i}_A) - M_{12} \hat{i}_B]$$

Příklad 9.4: Sestavte obvodovou rovnici pro obvod na schématu 9.4.

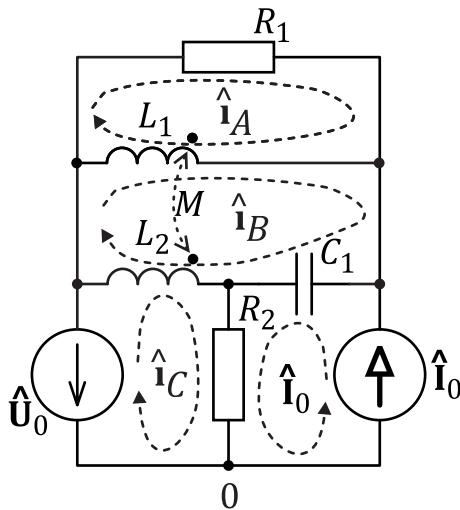
Řešení:

Dva vázané induktory spojené do jednoho uzlu umožňují vedle sestavení obvodových rovnic metodou uzlových napětí nebo smyčkových proudů použít také obvodové náhrady (viz. kapitola 3.3.2)

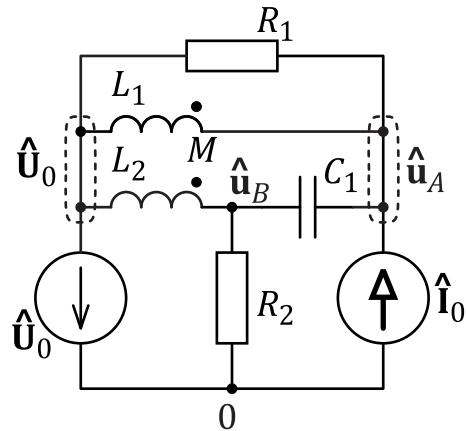
Metoda smyčkových proudů : Obvod je možné popsat čtyřmi nezávislými smyčkami, kdy jedna smyčka má smyčkový proud definovaný zdrojem proudu \hat{I}_0 , výsledkem je soustava tří rovnic o třech neznámých smyčkových prudech. Schéma obvodu s vyznačenými smyčkami - obrázek 9.5.



Obrázek 9.4: Schéma obvodu



Obrázek 9.5: Vyznačené smyčky pro řešení metodu smyčkových proudů



Obrázek 9.6: Vyznačená napětí uzlových dvojic pro řešení metodou uzlových napětí

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}}_A : & R_1 \hat{\mathbf{i}}_A + j\omega L_1 (\hat{\mathbf{i}}_A - \hat{\mathbf{i}}_B) + j\omega M (\hat{\mathbf{i}}_B - \hat{\mathbf{i}}_C) = 0 \\ \hat{\mathbf{i}}_B : & j\omega L_1 (\hat{\mathbf{i}}_B - \hat{\mathbf{i}}_A) + j\omega M (\hat{\mathbf{i}}_C - \hat{\mathbf{i}}_B) + j\omega L_2 (\hat{\mathbf{i}}_B - \hat{\mathbf{i}}_C) + j\omega M (\hat{\mathbf{i}}_B - \hat{\mathbf{i}}_A) + \frac{\hat{\mathbf{i}}_B + \hat{\mathbf{i}}_0}{j\omega C_1} = 0 \\ \hat{\mathbf{i}}_C : & -\hat{\mathbf{U}}_0 + j\omega L_2 (\hat{\mathbf{i}}_C - \hat{\mathbf{i}}_B) + j\omega M (\hat{\mathbf{i}}_B - \hat{\mathbf{i}}_A) + R_2 (i_C + \hat{\mathbf{i}}_0) = 0 \end{aligned}$$

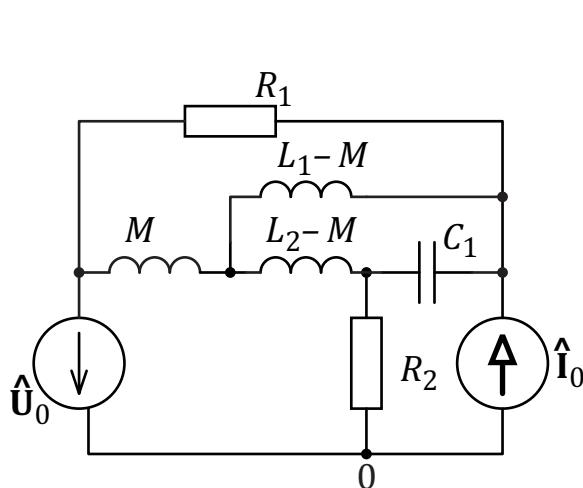
Metoda uzlových napětí Sestavení rovnice metodou uzlových napětí je možné při použití inverzní indukčností Γ_1 , Γ_2 a Γ_M . Vyznačené uzlové dvojice jsou na schématu 9.6.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_A : & \frac{\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_A}{R_1} + j\omega \Gamma_1 (\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_A) + j\omega \Gamma_M (\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_B) + j\omega C_1 (\hat{\mathbf{u}}_B - \hat{\mathbf{u}}_A) + \hat{\mathbf{i}}_0 = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_B : & j\omega \Gamma_2 (\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_B) + j\omega \Gamma_M (\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_A) + j\omega C_1 (\hat{\mathbf{u}}_A - \hat{\mathbf{u}}_B) - \frac{\hat{\mathbf{u}}_B}{R_2} = 0 \end{aligned}$$

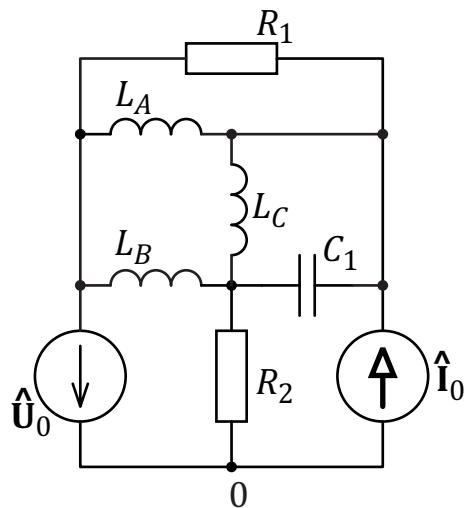
$$\text{kde } \Gamma_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2}, \Gamma_2 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \text{ a } \Gamma_M = -\frac{M}{L_1 L_2 - M^2}$$

Použití obvodových náhrad Další možností je nahradit vázaný induktor T-článkem (Schéma 9.7) nebo Π -článkem (schéma: 9.8). Při náhradě T-článkem a použitím metody uzlových napětí se obdrží opět soustava tří rovnic (jeden uzel je určen združením napětí $\hat{\mathbf{U}}_0$). Poslední představená náhrada Π -článkem umožní sestavit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Při náhradě T-článkem se tak pomocí metody uzlových napětí sestaví soustava obvodových rovnic:



Obrázek 9.7: Náhrada T-článkem

Obrázek 9.8: Náhrada Π -článkem

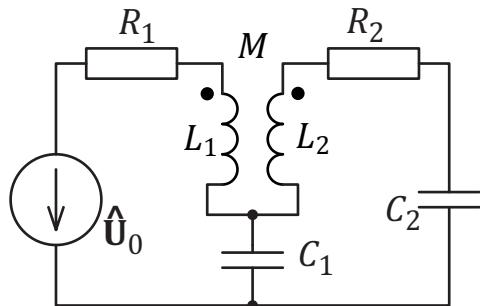
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_A : \quad & \frac{\hat{U}_0 - \hat{\mathbf{u}}_A}{j\omega M} + \frac{\hat{\mathbf{u}}_C - \hat{\mathbf{u}}_A}{j\omega(L_2 - M)} + \frac{\hat{\mathbf{u}}_B - \hat{\mathbf{u}}_A}{j\omega(L_1 - M)} = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_B : \quad & \frac{\hat{U}_0 - \hat{\mathbf{u}}_B}{R_1} + \frac{\hat{\mathbf{u}}_A - \hat{\mathbf{u}}_B}{j\omega(L_1 - M)} + (\hat{\mathbf{u}}_C - \hat{\mathbf{u}}_B) j\omega C_1 + \hat{\mathbf{I}}_0 = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_C : \quad & \frac{\hat{\mathbf{u}}_A - \hat{\mathbf{u}}_C}{j\omega(L_2 - M)} + (\hat{\mathbf{u}}_B - \hat{\mathbf{u}}_C) j\omega C_1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}_C}{R_2} = 0\end{aligned}$$

Při náhradě Π -článkem se určují pouze dvě uzlové dvojice, sestavuje se soustava dvou rovnic.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_A : \quad & \frac{\hat{U}_0 - \hat{\mathbf{u}}_A}{j\omega L_B} + \frac{\hat{\mathbf{u}}_B - \hat{\mathbf{u}}_A}{j\omega L_C} + (\hat{\mathbf{u}}_B - \hat{\mathbf{u}}_A) j\omega C_1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}_A}{R_2} = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_B : \quad & \frac{\hat{U}_0 - \hat{\mathbf{u}}_B}{R_1} + \frac{\hat{U}_0 - \hat{\mathbf{u}}_B}{j\omega L_A} + \frac{\hat{\mathbf{u}}_A - \hat{\mathbf{u}}_B}{j\omega L_C} + (\hat{\mathbf{u}}_A - \hat{\mathbf{u}}_B) j\omega C_1 + I_0 = 0\end{aligned}$$

kde: $L_A = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M}$, $L_B = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M}$ a $L_C = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}$

Příklad 9.5: Sestavte obvodovou rovnici pro obvod na schématu 9.9.



Obrázek 9.9: Schéma obvodu

Řešení: Obvodová rovnice sestavená podle metody smyčkových proudů:

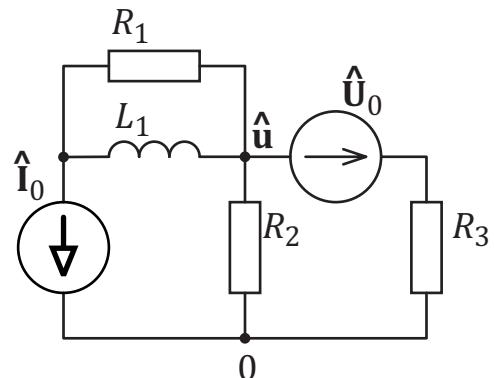
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{i}}_A : \quad & -\hat{\mathbf{U}}_0 + R_1 \hat{\mathbf{i}}_A + j\omega L_1 \hat{\mathbf{i}}_A + j\omega M \hat{\mathbf{i}}_B + \frac{\hat{\mathbf{i}}_A - \hat{\mathbf{i}}_B}{j\omega C_1} = 0 \\ \hat{\mathbf{i}}_B : \quad & \frac{\hat{\mathbf{i}}_B}{j\omega C_1} + R_2 \hat{\mathbf{i}}_B + j\omega L_2 \hat{\mathbf{i}}_B + j\omega M \hat{\mathbf{i}}_A + \frac{\hat{\mathbf{i}}_A - \hat{\mathbf{i}}_B}{j\omega C_1} = 0\end{aligned}$$

9.1.2 Obvodové rovnice v harmonickém ustáleném stavu - neřešené příklady

Příklad 9.6: Sestavte obvodovou rovnici pro obvod na schématu 9.10.

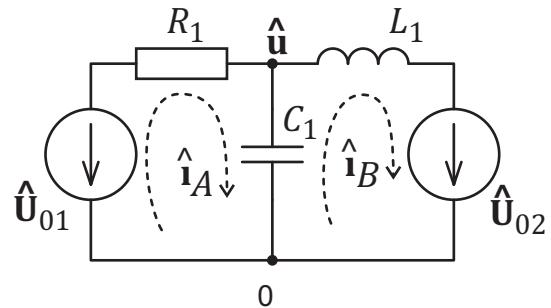
Řešení: : Sestavená rovnice:

$$-\hat{\mathbf{i}}_0 - \frac{\hat{\mathbf{u}}}{R_2} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}}{R_3} = 0$$



Obrázek 9.10: Schéma obvodu

Příklad 9.7: Sestavte obvodovou rovnici pro obvod na schématu 9.11.



Obrázek 9.11: Schéma obvodu

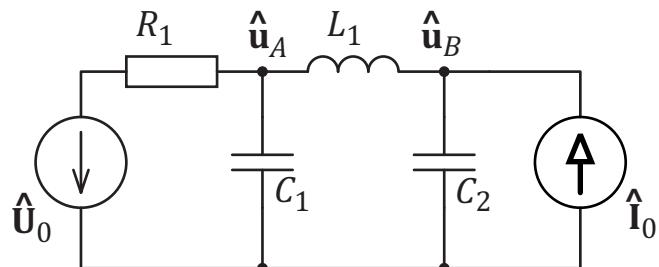
Řešení: Metoda uzlových napětí - jedna rovnice:

$$\frac{\hat{U}_{01} - \hat{u}}{R_1} + \frac{\hat{U}_{02} - \hat{u}}{j\omega L} - \hat{u} \cdot j\omega C_1 = 0$$

$$\hat{i}_A : \quad -\hat{U}_{01} + R_1 \hat{i}_A + \frac{1}{j\omega C_1} (\hat{i}_A - \hat{i}_B) = 0$$

$$\hat{i}_B : \quad \hat{U}_{02} + \frac{1}{j\omega C_1} (\hat{i}_B - \hat{i}_A) + j\omega L \hat{i}_B = 0$$

Příklad 9.8: Sestavte obvodovou rovnici pro obvod na schématu 9.12.



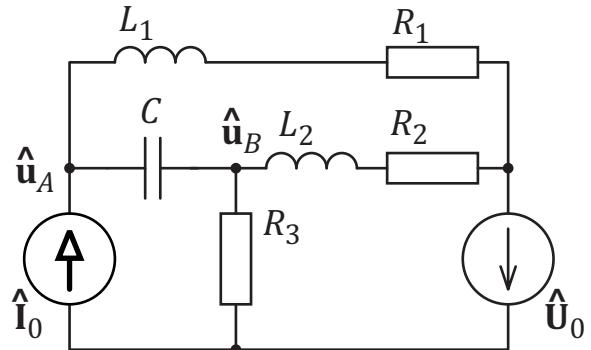
Obrázek 9.12: Schéma obvodu

Řešení:

$$\hat{u}_A : \quad \frac{\hat{U}_0 - \hat{u}_A}{R_1} - \hat{u}_A \cdot j\omega C_1 + \frac{\hat{u}_B - \hat{u}_A}{j\omega L_1} = 0$$

$$\hat{u}_B : \quad \hat{I}_0 - \hat{u}_B \cdot j\omega C_2 + \frac{\hat{u}_A - \hat{u}_B}{j\omega L_A} = 0$$

Příklad 9.9: Sestavte obvodovou rovnici pro obvod na schématu 9.13.

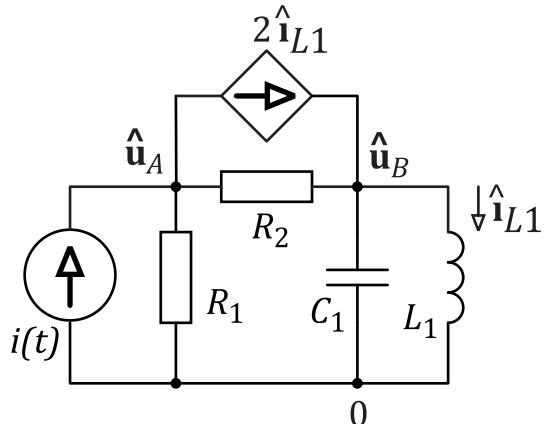


Obrázek 9.13: Schéma obvodu

Řešení:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_A : \quad \hat{\mathbf{I}}_0 + j\omega C \cdot (\hat{\mathbf{u}}_B - \hat{\mathbf{u}}_A) + \frac{\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_A}{R_1 + j\omega L_1} = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_B : \quad j\omega C (\hat{\mathbf{u}}_A - \hat{\mathbf{u}}_B) - \frac{\hat{\mathbf{u}}_B}{R_3} + \frac{\hat{\mathbf{U}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_B}{R_2 + j\omega L_2} = 0\end{aligned}$$

Příklad 9.10: Sestavte obvodovou rovnici pro obvod na schématu 9.14.



Obrázek 9.14: Schéma obvodu

Řešení:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_A : \quad \hat{\mathbf{I}}_0 - \frac{\hat{\mathbf{u}}_A}{R_1} + \frac{\hat{\mathbf{u}}_B - \hat{\mathbf{u}}_A}{R_2} - 2 \cdot \frac{\hat{\mathbf{u}}_B}{j\omega L_1} = 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_B : \quad 2 \cdot \frac{\hat{\mathbf{u}}_B}{j\omega L_1} + \frac{\hat{\mathbf{u}}_A - \hat{\mathbf{u}}_B}{R_2} - j\omega C_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_B - \frac{\hat{\mathbf{u}}_B}{j\omega L_1} = 0\end{aligned}$$

9.2 Magnetické obvody a transformátory

9.2.1 Magnetické obvody - náhradní obvod

Intenzitu magnetického pole H na induktoru s vinutím o počtu N závitů a s proudem I , která prochází vnitřkem vinutí při použití I. Maxwellovy rovnice popisuje vztah:

$$N \cdot I = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (9.1)$$

a dále pro magnetickou indukci \vec{B} , která prochází uzavřenou plochou S , platí IV. Maxwellova rovnice:

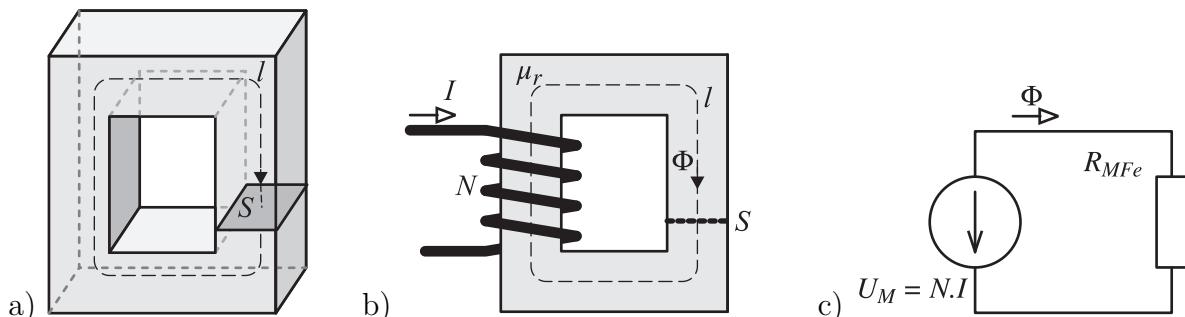
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (9.2)$$

což pro magnetické toky Φ , definované jako $\int_S \hat{B} \cdot d\hat{S} = \Phi$ znamená, že součet toků vstupujících do uzavřené oblasti je stejný jako součet magnetických toků ze stejné oblasti vystupujících. V rovnicích 9.1 a 9.2 je možné spatřit ekvivalenci Kirchhoffových rovnic, proto se používá pro výpočet magnetických obvodů elektrický ekvivalent. Pro jednoduchá magnetický obvod s N závity a proudem I se tak může podle rovnice 9.1 nadefinovat *magnetomotorické napětí*

$$U_M = N \cdot I = H \cdot l \quad (9.3)$$

jako ekvivalent elektrického napětí.

Magnetický tok Φ můžeme považovat za ekvivalent elektrického proudu, kdy při homogenní magnetické indukci \vec{B} , který kolmo prochází plochou průřezu jádra \vec{S} , platí $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S$



Obrázek 9.15: a) Jadro magnetického obvodu s vyznačenou délkom střední siločary a průřezem, b) magnetický obvod s vinutím s N závity a protékajícím proudem I , c) magnetický obvod - náhradní schéma

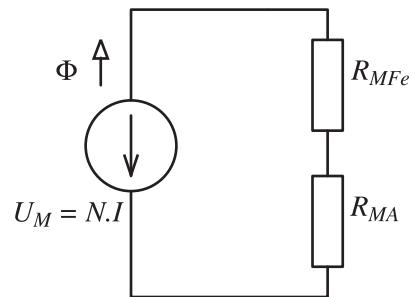
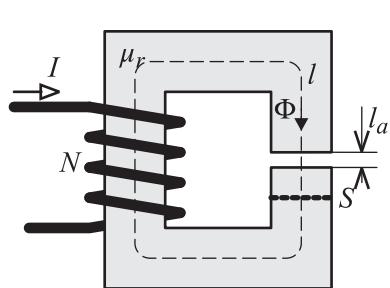
Pokud jsou definovány energetické veličiny U_M a Φ , může se nadefinovat také tzv. magnetický odpor R_M podle definice:

$$R_M = \frac{U_M}{\Phi} = \frac{N \cdot I}{\Phi} = \frac{H \cdot l}{B \cdot S} \quad (9.4)$$

Pokud vztah $B = \mu_0 \mu_r H$ se upraví do tvaru $H/B = 1/\mu_0 \mu_r$, potom pro část magnetického obvodu se stejnými vlastnostmi platí:

$$R_M = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} \quad (9.5)$$

Pro celý magnetický obvod musí platit $R_M \Phi = N \cdot I$, což je ekvivalence Ohmova zákona $R \cdot I = U$.

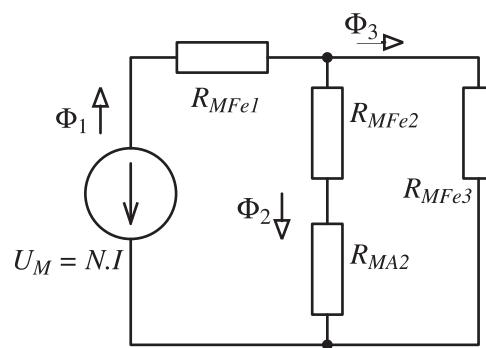
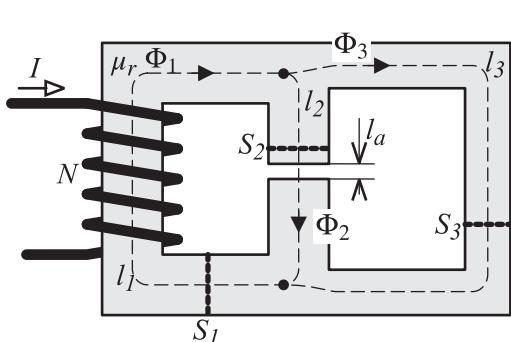


Obrázek 9.16: Magnetický obvod se vzducho- Obrázek 9.17: Náhradní schéma magnetic- vou mezerou kého obvodu se vzduchovou mezerou

Pokud má magnetický obvod 9.16 vzduchovou mezeru platí náhradní schéma na obrázku 9.17. Celkový magnetický odpor při aplikace elektrického ekvivalentu jako:

$$R_M = R_{MFe} + R_{MA} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{l_a}{\mu_0 S} \quad (9.6)$$

Pokud je poměr $l/l_a \ll \mu_r$, potom je $R_{MFe} \ll R_{MA}$, a při menším požadavku na přesnost je možné magnetický odpor železné části jádra zanedbat, protože na parametry magnetického obvodu má vliv především vzduchová mezera, tedy její plocha a tloušťka.



Obrázek 9.18: Složitější magnetický obvod se Obrázek 9.19: Náhradní schéma složitějšího vzduchovou mezerou magnetického obvodu se vzduchovou mezerou

Pro složitější obvody (viz.: 9.18) je možné také sestrojit příslušný elektrický ekvivalent (viz.: 9.19), jehož magnetický odpor se spočítá podle základních obvodových vzorců. Pro jednotlivé větve platí:

$$R_{M1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S_1} \quad (9.7)$$

$$R_{M2} = R_{MFe2} + R_{MA2} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S_2} + \frac{l_a}{\mu_0 S_2} \quad (9.8)$$

$$R_{M3} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S_3} \quad (9.9)$$

Celkový magnetický odpor je potom:

$$R_M = R_{M1} + \frac{R_{M2} \cdot R_{M3}}{R_{M2} + R_{M3}} \quad (9.10)$$

Pokud známe magnetický odpor jádra induktoru, je snadné podle počtu závitů vinutí určit indukčnost. Při definici indukčnosti na induktoru s N závity $N \cdot \Phi = L \cdot I$ a následné vyloučení proudu platí:

$$L = \frac{N^2}{R_M} \quad (9.11)$$

U komerčně dostupných jader např. z feritového materiálu výrobci udávají parametr A_L , který odpovídá převrácené hodnotě magnetického odporu, tedy:

$$A_L = \frac{1}{R_M} \quad (9.12)$$

Pro cívku vinutou na komerčním jádře charakterizovaném parametrem A_L platí vztah pro indukčnost $L = A_L N^2$. Pokud při konstrukci induktoru hledáme počet závitů, platí pro počet závitů vzorec:

$$N = \sqrt{\frac{L}{A_L}} \quad (9.13)$$

Velikost magnetického toku ve feromagnetických jádrech je omezená maximální hodnotou magnetické indukce B_M , která je různá pro různé feromagnetické materiály.

9.2.2 Energie magnetických obvodů

Energie induktoru o indukčnosti L , kterým prochází elektrický proud I je $W = \frac{1}{2}LI^2$. Přitom pro cívku s N závity, kterou prochází proud I s celkovým magnetickým tokem Φ platí vzorec $N \cdot \Phi = L \cdot I$, energii je pak možné při dosazení zapsat jako:

$$W = \frac{1}{2}N\Phi I \quad (9.14)$$

Při homogenním rozložení magnetického toku v rámci průřezu magnetického jádra platí $\Phi = B \cdot S$, proto je možné vzorec dále upravit na:

$$W = \frac{1}{2}NBSI \quad (9.15)$$

Při aplikaci rovnice 9.3, kde $Hl = NI$, dále pro objem magnetického obvodu $V = Sl$, kde platí stejná hodnota permeability μ ($B = \mu H$) platí:

$$W = \frac{1}{2}HlBS = \frac{1}{2}HBV = \frac{1}{2\mu}B^2V \quad (9.16)$$

Vzhledem k tomu, že pro hustotu energie magnetického pole platí (za předpokladu lineární závislosti $\vec{B} \approx \vec{H}$ a izotropního prostředí):

$$w = \int_0^B \vec{H} d\vec{B} = \int_0^H \mu H d\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} \quad (9.17)$$

potom pro oblast o objemu V s izotropním prostředím a s homogenním rozložením μ a B je možné vypočítat celkovou energii:

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \int_V \frac{1}{2} H B dV = \frac{1}{2} H B V = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V \quad (9.18)$$

Aby byly zachovány podmínky odvození vzorců, je v magnetickém obvodu nutné určit energii v každé části, kde je jiný magnetický tok (tedy počítat každou větev zvlášť), a dále v každé části, kde je jiná hodnota μ (zvlášť energii magnetika a vzduchové mezery). Celková energie je potom dána součtem energií jednotlivých částí

9.2.3 Silové působení v magnetických obvodech

V magnetickém obvodu je možné pozorovat stejné silové působení, jaké je známé u dvou permanentních magnetů. Tento jev souvisí se změnou energie dW_m , ke které dochází při změně rozměrů magnetického obvodu nebo při změně magnetického toku.

V soustavě magnetického obvodu platí zákon zachování energie:

$$dA = dA_v - dW_m \quad (9.19)$$

kde A_v je práce vnějších sil spojená se změnou magnetického toku plochami smyček uvedené soustavy a dA je diferenciál práce. Pro ten platí:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} \quad (9.20)$$

Pokud je soustava izolovaná (magnetické toky magnetickým obvodem jsou konstatní - nemění se elektrický proud ve vinutích magnetického obvodu), můžeme položit $dA_v = 0$. Diferenciál práce je potom roven $dA = -dW_m = \vec{F} d\vec{s}$, z toho síla, která působí:

$$F_s = \left(-\frac{dW_m}{dl} \right)_{\Phi=\text{konst.}} = -\frac{\partial W_m(\Phi, l)}{\partial l} \quad (9.21)$$

Nyní je možné odvodit sílu, která působí mezi jhem a zbylou částí magnetického obvodu s vinutím na jednom z pólů. Celková energie magnetického obvodu se skládá z energií jednotlivých částí, tj. energie magnetického toku v železe a ve vzduchové mezere. Při pohybu jha (o dl) se mění rozměry vzduchové mezery, mění se její objem, dochází tedy ke změně energie magnetického toku právě ve vzduchové mezere (permitivita μ_0).

$$dW = \frac{1}{2\mu_0} B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\Phi^2}{S^2} S \cdot dl = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\Phi^2}{S} \cdot dl \quad (9.22)$$

Celková síla na jednom z pólu (pokud předpokládáme neměnný magnetický tok) je potom

$$F_s = -\frac{dW_m}{dl} = -\frac{1}{dl} \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\Phi^2}{S} \cdot dl = -\frac{\Phi^2}{2\mu_0 S} \quad (9.23)$$



9.2.4 Magnetické obvody - příklady

Příklad 9.11: Jádro z magneticky měkkého materiálu se středním průřezem $S = 4\text{cm}^2$, s délkou střední magnetické siločáry $l = 0,32\text{m}$ a relativní permitivitou $\mu_r = 4000$ je přerušené vzduchovou mezerou $l_a = 1\text{ mm}$. Na jádře je navinuta cívka o počtu $N = 250$ zav, kterou protéká proud $I = 3\text{ A}$. Určete:

- magnetickou indukci v jádře
- energiu magnetického toku v mezeře jádra
- indukčnost takto realizovaného induktoru.

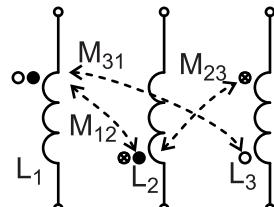
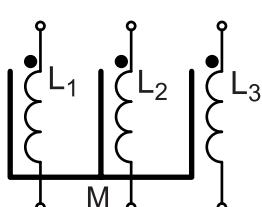
Řešení: a) $\Phi = 0,873\text{ T}$, b) $W = 0,121\text{ J}$ c) $L = 29,1\text{ mH}$

Příklad 9.12: V mezeře elektromagnetu mezi jhem a částí magnetického obvodu s vinutím byla změřena hodnota magnetické indukce 20 mT . Určete jakou silou je jho přitahováno, pokud je plocha půlových nástavců rovna $0,01\text{ m}^2$. Určete indukčnost elektromagnetu, pokud je ve vinutí navinuto 500 závitů, kterými protéká proud 10 A .

Řešení: $F_s = 15,9\text{ kN}$, $L = 1\text{ H}$

Příklad 9.13: Určete impedanci 3fázové tlumivky, pokud jsou známy rozměry magnetického obvodu, a počty závitů jednotlivých vinutí. Určete efektivní hodnotu proudu pro mezní hodnotu magnetické indukce $B_{max} = 1,2\text{ T}$

Řešení: Třífázová tlumivka je tvořena třemi stejnými vinutími na jednom společném jádru typu E. Každé vinutí o počtu závitů N je na jednom sloupku. Každý sloupek o stejném průřezu S je přerušen vzduchovou mezerou tloušťky l_a . Schématická značka je na obrázku 9.20. Příslušné vlastní a vzájemné indukčnosti jsou na obrázku 9.21



Obrázek 9.20: Schématická značka třífázové Obrázek 9.21: Vyznačení vlastních a vzájemných indukčností v třífázové tlumivce

Pro odvození vlastností se použije obvod 9.22.

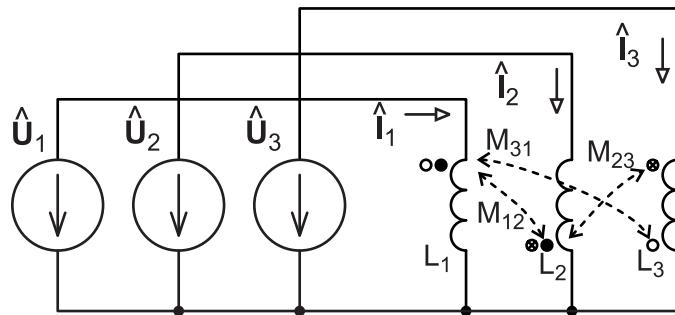
Pro fázory napětí a proudu platí vztahy:

$$\hat{\mathbf{U}}_1 = j\omega (L_1 \hat{\mathbf{I}}_1 - M_{12} \hat{\mathbf{I}}_2 - M_{31} \hat{\mathbf{I}}_3) \quad (9.24)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_2 = j\omega (L_2 \hat{\mathbf{I}}_2 - M_{12} \hat{\mathbf{I}}_1 - M_{23} \hat{\mathbf{I}}_3) \quad (9.25)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_3 = j\omega (L_3 \hat{\mathbf{I}}_3 - M_{31} \hat{\mathbf{I}}_1 - M_{23} \hat{\mathbf{I}}_2) \quad (9.26)$$

Nákres tlumivky je dále na obrázku 9.23. Pomocí elektrotechnického ekvivalentu lze pro magnetický obvod tlumivky nakreslit schéma příslušného elektrického ekvivalentu (obrázek 9.24). Zahrnutí magnetomotorického napětí a magnetického toku do schématu elektrického



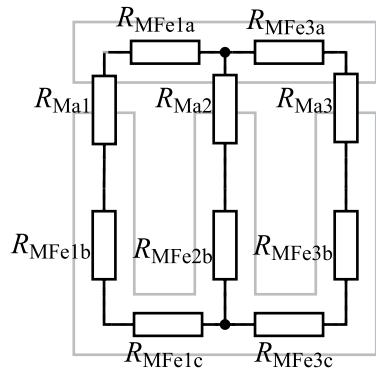
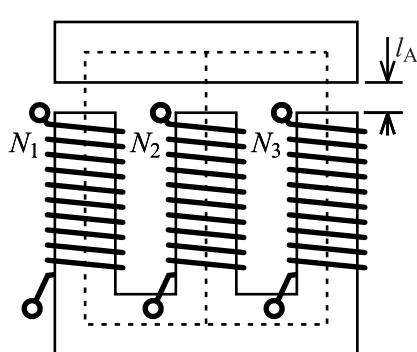
Obrázek 9.22: Základní obvod pro odvození vlastností třífázové tlumivky

ekvivalentu je dále na obrázku 9.25. Magnetomotorické napětí se určí z protékajícího proudu podle vzorce $U_{Mn} = N_n \cdot I_n$. Kvůli zjednodušení výpočtu se všechny sériově řazené rezistory sečtou:

$$R_{M1} = R_{MFe1a} + R_{MFe1b} + R_{MFe1c} + R_{Ma1}$$

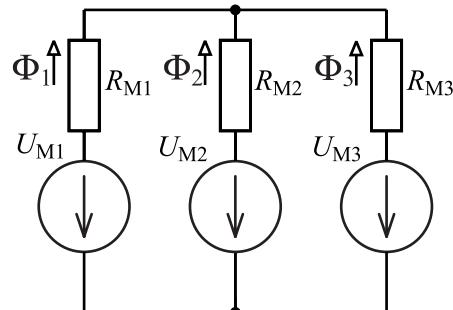
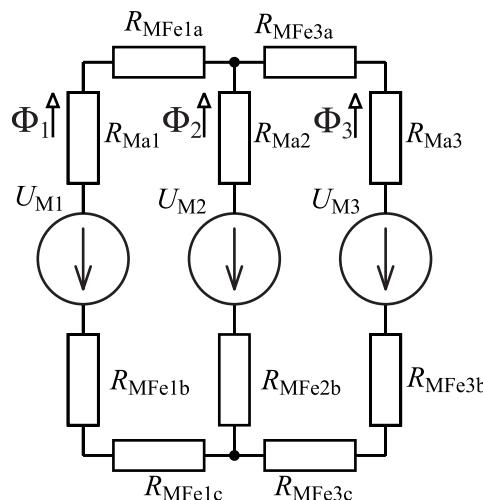
$$R_{M2} = R_{MFe2b} + R_{Ma1}$$

$$R_{M3} = R_{MFe3a} + R_{MFe3b} + R_{MFe3c} + R_{Ma3}$$



Obrázek 9.23: Nákres třífázové tlumivky s vy-
značenými vinutími a vzduchovou mezerou
Obrázek 9.24: Schéma elektrického ekviva-
lentu magnetického obvodu

Zjednodušené schéma obvodu je potom na obrázku 9.26.



Obrázek 9.25: Schéma elektrického ekviva-
lentu se zdroje elektromotorického napětí

Obrázek 9.26: Zjednodušené schéma elektrického ekvivalentu

Vyznačené magnetické toky se mohou určit běžným výpočtem, zde se využije princip superpozice. Na obrázku 9.27 jsou jednotlivé obvody. Jednotlivé okamžité magnetické toky potom jsou:

$$\Phi_{11} = \frac{N_1 \cdot i_1 \cdot (R_{M2} + R_{M3})}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$

$$\Phi_{13} = \frac{N_1 \cdot i_1 \cdot R_{M2}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$

$$\Phi_{21} = \frac{N_2 \cdot i_2 \cdot R_{M3}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$

$$\Phi_{33} = \frac{N_3 \cdot i_3 \cdot (R_{M2} + R_{M3})}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$

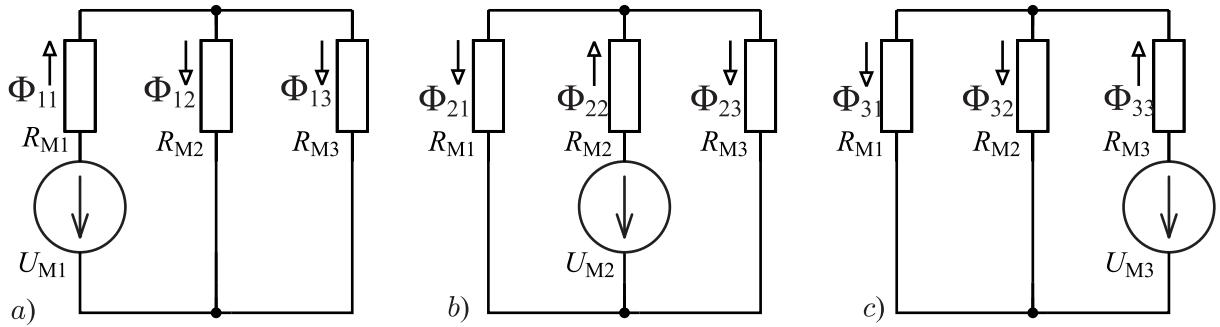
$$\Phi_{32} = \frac{N_3 \cdot i_3 \cdot R_{M1}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$

$$\Phi_{12} = \frac{N_1 \cdot i_1 \cdot R_{M3}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$

$$\Phi_{22} = \frac{N_2 \cdot i_2 \cdot (R_{M1} + R_{M3})}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$

$$\Phi_{23} = \frac{N_2 \cdot i_2 \cdot R_{M1}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$

$$\Phi_{31} = \frac{N_3 \cdot i_3 \cdot R_{M2}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}$$



Obrázek 9.27: Schémata pro výpočet magnetického obvodu metodou superpozice

Po součtu podle principu superpozice jsou magnetické toky v jednotlivých sloupcích tlumivky:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} - \Phi_{21} - \Phi_{31}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} - \Phi_{12} - \Phi_{32}$$

$$\Phi_3 = \Phi_{33} - \Phi_{13} - \Phi_{23}$$

Indukované napětí na každém z vinutí se určí podle Faradayova zákona:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \cdot \left(\frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{21}}{dt} - \frac{d\Phi_{31}}{dt} \right)$$

$$u_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \cdot \left(\frac{d\Phi_{22}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt} - \frac{d\Phi_{32}}{dt} \right)$$

$$u_3 = N_3 \cdot \frac{d\Phi_3}{dt} = N_3 \cdot \left(\frac{d\Phi_{33}}{dt} - \frac{d\Phi_{13}}{dt} - \frac{d\Phi_{23}}{dt} \right)$$

Časový průběh derivace magnetického toku je harmonický, proto je možné převést na fázory:

$$\hat{\mathbf{U}}_1 = j\omega N_1 (\hat{\Phi}_{11} - \hat{\Phi}_{21} - \hat{\Phi}_{31})$$

$$\hat{\mathbf{U}}_2 = j\omega N_2 (\hat{\Phi}_{22} - \hat{\Phi}_{12} - \hat{\Phi}_{32})$$

$$\hat{\mathbf{U}}_3 = j\omega N_3 (\hat{\Phi}_{33} - \hat{\Phi}_{13} - \hat{\Phi}_{23})$$

Za fázory magnetického toku $\hat{\Phi}$ se nyní dosadí (a rovnice se zjednoduší):

$$\hat{\mathbf{U}}_1 = j\omega \frac{N_1^2 \hat{\mathbf{I}}_1 (R_{M2} + R_{M3}) - N_1 N_2 \hat{\mathbf{I}}_2 R_{M3} - N_1 N_3 \hat{\mathbf{I}}_3 R_{M2}}{R_{M1} R_{M2} + R_{M2} R_{M3} + R_{M1} R_{M3}} \quad (9.27)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_2 = j\omega \frac{N_2^2 \hat{\mathbf{I}}_2 (R_{M1} + R_{M3}) - N_1 N_2 \hat{\mathbf{I}}_1 R_{M3} - N_2 N_3 \hat{\mathbf{I}}_3 R_{M1}}{R_{M1} R_{M2} + R_{M2} R_{M3} + R_{M1} R_{M3}} \quad (9.28)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_3 = j\omega \frac{N_3^2 \hat{\mathbf{I}}_3 (R_{M1} + R_{M2}) - N_1 N_3 \hat{\mathbf{I}}_1 R_{M2} - N_2 N_3 \hat{\mathbf{I}}_2 R_{M1}}{R_{M1} R_{M2} + R_{M2} R_{M3} + R_{M1} R_{M3}} \quad (9.29)$$

Srovnáním soustav rovnic 9.24 a 9.27 je možné určit hodnoty vlastních i vzájemných indukčností.

ností:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{N_1^2 (R_{M2} + R_{M3})}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}} \\
 L_2 &= \frac{N_2^2 (R_{M1} + R_{M3})}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}} \\
 L_3 &= \frac{N_3^2 (R_{M1} + R_{M2})}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}} \\
 M_{12} &= \frac{N_1 N_2 R_{M3}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}} \\
 M_{23} &= \frac{N_2 N_3 R_{M1}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}} \\
 M_{31} &= \frac{N_1 N_3 R_{M2}}{R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}}
 \end{aligned}$$

Pro konkrétní případ stejného počtu závitů na každém sloupu tlumivky $N = N_1 = N_2 = N_3$ (třífázová tlumivka) a s ohledem na to, že reluktance vzduchové mezery je o několik řádů vyšší, než je reluktance zbylé části magnetického obvodu, je možné pro zjednodušení výpočet provést pouze s reluktancí vzduchové mezery. Pro stejnou reluktanci magnetického obvodu závislou pouze na vzduchové mezeře tloušťky l_a a plochy S_a v každém sloupu: $R_{M1} = R_{M2} = R_{M3} = R_{Ma}$, pro indukčnost L a vzájemná indukčnost M platí:

$$L = \frac{2N^2}{3R_{Ma}} = \frac{2N^2\mu_0 S_a}{3l_a}$$

a

$$M = \frac{N^2}{3R_{Ma}} = \frac{N^2\mu_0 S_a}{3l_a}$$

, tedy $M = L/2$

Každým vinutím v třífázové tlumivce teče fázovým vinutím jeden fázový proud. V trojfázové soustavě, pokud není vyvedený střední vodič, platí: $\hat{\mathbf{I}}_1 + \hat{\mathbf{I}}_2 + \hat{\mathbf{I}}_3 = 0$, tedy: $\hat{\mathbf{I}}_1 = -\hat{\mathbf{I}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_3$. Pro fázor napětí na prvním vinutí proto platí:

$$\hat{\mathbf{U}}_1 = j\omega (L\hat{\mathbf{I}}_1 - M\hat{\mathbf{I}}_2 - M\hat{\mathbf{I}}_3) = j\omega [L \cdot \hat{\mathbf{I}}_1 + L/2 (-\hat{\mathbf{I}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_3)] = \frac{3}{2}j\omega (L\hat{\mathbf{I}}_1)$$

Při definice impedance $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{U}}/\hat{\mathbf{I}}$ je impedance jedné větve tlumivky se vzduchovou mezerou:

$$\mathbf{Z} = \frac{3j\omega L}{2} = \frac{j\omega N^2\mu_0 S_a}{l_a}$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m je absolutní permeabilita, $S_a(\text{m}^2)$ je průřez vzduchové mezery, $l_a(\text{m})$ je tloušťka vzduchové mezery a N je počet závitů. Nesymetrie a nelinearity jádra se zanedbávají.



Kapitola 10

Přehled matematiky pro elektrické obvody

10.1 Úvod

Teorie elektrických obvodů je technický vědecký obor, který popisuje chování elektrických obvodů. Základní nástroj pro popis a kvantifikaci všech používaných veličin a parametrů je matematika a fyzika. Následující kapitola uvádí stručný přehled používaných matematických jevů v teorii elektrických obvodů.

10.2 Poznámky k praktickému počítání s čísly

Každá kvantifikovaná fyzikální veličina nebo parametr prvku v elektrických obvodech se při reálných výpočtech zaznamenává jako číslo. Číslo se zapisuje jako vhodně zaokrouhlené rationální číslo v desetinném nebo semilogaritmickém tvaru. Existují rozdíly v zápisu, který se používá v tuzemsku, kde se desetinná část odděluje čárkou (např. 5,54) na rozdíl od anglosaské literatury, kde se pro oddelení desetinné části používá tečka (např. 3.14159). Desetinný tvar je ve svém použití omezen, aby rozvoj čísla nebyl příliš dlouhý, tzn. z praktického důvodu se používá omezený počet čísel před desetinnou a za desetinnou čárkou. Proto je vedle desetinného tvaru zaveden semilogaritmický tvar, který násobí desetinný tvar desítkou s celočíselným exponentem. Pro ruční zápis nebo pro tištěnou formu se se používá číslo s desítkou, tuzemský zavedený zápis je např. $3,5887 \cdot 10^{-15}$, a anglosaské literatuře je 3.5887×10^{-15} . Při použití výpočetní techniky se používá zkrácený zápis: v tuzemské formě s desetinnou čárkou $3,5887\text{e}-15$ nebo s desetinnou tečkou $3.5887\text{e}-15$. Číslo se zapisuje, aby mantisa byla v intervalu $\langle 1; 10 \rangle$, případně $\langle 0,1; 1 \rangle$. Desetinná čárka se pak posouvá, pokud vlevo - zvyšuje se exponent, pokud vpravo - exponent se snižuje.

$$32,664 \cdot 10^2 = 3,2664 \cdot 10^3 = 326,64 \cdot 10^1 = 32,664 \cdot 100 = 3266,4$$

Fyzikální veličiny mohou být v různých jednotkách. Je známý rozdíl počítání vzdáleností v mílích a kilometrech, stopách, palcích nebo metrech, vážení v kilogramech nebo v librách nebo uncích, měření objemu v litrech, v kubických metrech nebo galonech. Proto je vyjádření jednotky velmi důležité. Veličiny v elektrotechnice používají jen jednu jednotku

(volty, ampéry, watty) vyjma měření fázového úhlu, kdy se může úhel zapisovat ve stupních a v radiánech.

Při měření ve stupních je plný úhel (kolem dokola) rozdělen na 360 stupňů (360°); každý stupeň se pak dělí na 60 minut ($60'$) a každá minuta na 60 sekund ($60''$). Při počítání fázových úhlů v symbolicko komplexní metodě je rozhodně vhodnější pro měření úhlů použít radiány. Plný úhel zde odpovídá 2π rad, jde o poměr obvodu vůči poloměru kruhu. Při přepočtech pro úhel α_s ve stupních a úhel α_r v radiánech platí převodní vztah:

$$\alpha_r = \frac{\pi}{180} \alpha_s \quad \alpha_s = \frac{180}{\pi} \alpha_r \quad (10.1)$$

Na počítači nebo kalkulačkách se část úhlu menší než jeden stupeň uvádí v desetinném čísle, nikoli ve stupních a minutách. Pokud je nezbytné s minutami a vteřinami počítat, a v dostupné výpočetní technice chybí funkce pro tento převod, je možné postupovat takto:

Na minuty a vteřiny se desetinná část převede tak, že se nejprve vynásobí 60. Získá se tak číslo, kterého celá část se rovná počet minut. Desetinná část se opět násobí 60. Ve výsledku je část před desetinnou čárkou počet sekund.

Opačným směrem: vteřiny dělíme 60, vzniklé desetinné číslo připojíme k minutám jako desetinnou část. Minuty včetně přidané desetinné části se opět dělí 60 a takto získané číslo se připojí k celému číslu před desetinnou čárkou jako celá část.

Vzhledem k tomu, že úhel je periodický, používá se jeho zápis v rozsahu u stupňů ($0^\circ; 360^\circ$) nebo ($-180^\circ; 180^\circ$) a u radiánů ($0^\circ; 2\pi$ rad) nebo ($-\pi$ rad; π rad). Hodnoty mimo uvedené rozsahy se přepočítávají na uvedený rozsah.

Základní metoda přepočtu u úhlu ve stupních je přičíst nebo odečíst násobek 360 stupňů tak, aby výsledek byl v požadovaném rozsahu. Výpočet u radiánů je obdobný. Číslo mimo uvedený rozsah se dělí 2π , oddělí se desetinná část a číslo před desetinnou čárkou je počet period, které se podle znaménka musí přičíst nebo odečíst od původního úhlu mimo rozsah. Tímto celým číslem se následně násobí 2π a přičte nebo odečte se od původního čísla tak, výsledné číslo bylo v doporučeném rozsahu.

Příklad 10.1: Kolik stupňu je 1 radián?

Řešení: Úhel v radiánech $\alpha_r = 1$ rad odpovídá úhlu ve stupních v dekadickou desetinnou částí.

$$\alpha_s = \frac{180}{\pi} \alpha_r = \frac{180}{\pi} \cdot 1 = 57,2957795^\circ$$

Převod na minuty potom dostaneme:

$$60 \cdot 0,2957795 = 17,7467706'$$

a na vteřiny:

$$60 \cdot 0,7467706 = 44,806''$$

Úhel o velikosti 1 radián má $57^\circ 17' 44,806''$

Příklad 10.2: Kolik radiánů má úhel $97^\circ 36' 52,552''$?

Řešení: Nejprve se převede úhel ve stupních, minutách a vteřinách na plně dekadické číslo:

$$52,552'' / 60 = 0,8758666667$$



Minuty:

$$36,8758666667' / 60 = 0,6145977778$$

Takže úhel v dekadickém tvaru je $\alpha_s = 97,6145977778^\circ$. Nakonec převod na radiány:

$$\alpha_r = \alpha_s \cdot \frac{\pi}{180} = 1,703696129 \text{ rad}$$

10.2.1 Přesnost čísel při výpočtech

Počet platných číslic

Současná výpočetní technika umožňuje počítat s téměř s libovolnou přesností čísel. Přesnost ve výpočtech souvisí s počtem platných číslic, který použité číslo ve výpočtu má. Počet platných číslic v zapsaném čísle znamená počet jednotlivých číslic v čísle, které jsou zleva i zprava odděleny nulami nebo tam další čísla zapsaná nejsou. Čísla v exponentu se do počtu platných čísel nezapočítávají. Nula ohraničená nenulovými čísly se započítává jako platná číslice. Pokud měřící přístroj ukáže hodnotu tak, že na pravé straně je nula, musí se tato nula také započítávat do platných číslic, aby se přesnost výsledku nesnižovala.

Např. v čísle 68 000 jsou dvě platné číslice 6 a 8, v čísle 3,142 jsou 4 platné číslice, v čísle 0,00213 jsou tři platné číslice 2,1 a 3, v čísle $-5,6708 \cdot 10^{-11}$ je pět platných číslic, řadí se k nim nula, protože je mezi nemulovými čísly.

Při výpočtech s naměřenými hodnotami, které mají ve své podstatě omezený počet naměřených čísel (např. měřený proud $I = 6,112 \text{ mA}$ a napětí $5,806 \text{ V}$ na rezistoru při měření odporu Ohmovou metodou) je nutné respektovat původní přesnost čísla. Obě čísla jsou původně na 4 platné číslice, proto by vypočtený odpor rezistoru měřeného Ohmovou metodou nebo ztrátový výkon na rezistoru neměl být zaznamenán s vyšším počtem platných číslic. Důvod je vysvětlen v následující úvaze:

Při dokonalé přesnosti přístrojů měřících na 4 platné číslice se naměřené napětí $5,806 \text{ V}$ a proud $I = 6,112 \text{ mA}$ reálně nachází mezi $5,8055 \text{ V}$ a $5,8065 \text{ V}$ a u proudu mezi $6,1115 \text{ mA}$ a $6,1125 \text{ mA}$. Vypočítaný odpor z původních hodnot vychází podle Ohmova zákona $R = U/I = 5,806/3,112 \cdot 10^{-3} \doteq 949,935 \Omega \doteq 949,9 \Omega$. Při jednom krajním případě, kdy reálné napětí je rovno: $V = 5,8055 \text{ V}$ a reálný proud $I = 6,1125 \text{ mA}$ vychází odpor $R = 5,8055/3,1125 \cdot 10^{-3} \doteq 949,775 \Omega \doteq 949,8 \Omega$, v druhém krajním případě při reálném napětí $U = 5,8065 \text{ V}$ a reálném proudu $I = 6,1115 \text{ mA}$ vychází odpor $R = 5,8065/3,1115 \cdot 10^{-3} \doteq 950,094 \Omega \doteq 950,1 \Omega$. Proto je zápis výsledku dělení na větší počet platných číslic, než je v operandech výpočtu, nesmyslný.

Předložená metoda může být považována za částečný návod, jak vypočítat výsledek včetně rozsahu přesnosti. Při reálných technických výpočtech pro zjednodušení stačí, aby u násobení a dělení neměl vypočtený výsledek více platných čísel než je počet platných čísel u hodnoty s nejhorší přesností měření. Tedy při změřeném proudu na 3 platné číslice a změřeném napětí na 4 platné číslice bude výsledný odpor uveden na 3 platné číslice.

U sčítání a odčítání velmi rozdílných hodnot, například $U_1 = 112,5 \text{ V}$ a $U_2 = 4,512 \text{ V}$, nejistota přesnosti u prvního, podstatně většího čísla, způsobí, že výsledek součtu $U_1 + U_2 = 112,5 + 4,512 = 117,012 \text{ V}$ je ve své přesnosti nesmyslný, protože nevíme nic o skutečné reálné hodnotě napětí U_1 na setinách a tisících voltu. Proto je nutné napětí U_2 před výpočtem zaokrouhlit, aby byl desetinný počet obou sčítanců jako u čísla s nejmenší přesností na



desetinné části. Správná hodnota výsledku má proto být $U_1 + U_2 = 112,5 + 4,512 \doteq 112,5 + 4,5 = 117,0$ V

Zaokrouhlování

Zaokrouhlování znamená snížení počtu platných číslic, pokud následující výpočet vyžaduje nižší počet platných číslic, nebo pokud vyšší počet platných číslic v čísle se dostal jako výsledek s vyšším nebo neukončeným desetinným rozvojem. Po zaokrouhlení nejnižší výsledný řád zůstává stejný (pokud číslo na nejblíže nižším zaokrouhlovaném rádu 0,1,2,3 a 4) nebo se o jeden zvyšuje nahoru, (pokud je číslo na nejblíže nižším zaokrouhlovaném rádu 5,6,7,8 a 9). Například $5,54 \doteq 5,5$ nebo $4,537 \doteq 4,54$. Zaokrouhuje se přímo, například při zkrácení z 6 na 3 desetinná místa: správně: $56,6446 \doteq 56,6$; chybně: $56,6446 \doteq 56,645 \doteq 56,65 \doteq 56,7$.

10.2.2 Násobné předpony

Vedle užití semilogaritmického tvaru se k identifikátorům jednotek používají násobné předpony. Důvody jsou praktické, semilogaritmický tvar je méně přehledný a reálné hodnoty fyzikálních veličin nebo parametrů se často pohybují v hodnotách o několik řádů odlišných od rozsahu $1 \dots 100$. V ústní komunikaci je použití násobné předpony kratší a jednoznačnější, než použití semilogaritmického tvaru. Seznam nejčastějších předpon používaných v technické praxi je v tabulce 10.2.2.

předpona	násobitel	symbol	příklad
Tera	10^{12}	T	$TW, TJ, 2,2 TW = 2, \cdot 10^{12} W, 0,5 TJ = 0,5 \cdot 10^{12} J,$
Giga	10^9	G	$GW, 1,2 GW = 1,2 \cdot 10^9 W$
mega	10^6	M,	$MHz, 400 MHz = 4 \cdot 10^8 Hz = 0,4 GHz$
kilo	10^3	k	$kV, 22 kV = 20\,000 V = 2,2 \cdot 10^4 V$
mili	10^{-3}	m	$mA, 2,13 mA = 2,13 \cdot 10^{-3} A$
mikro	10^{-6}	μ	$\mu A, \mu F, 2\,200 \mu F = 2,2 mF = 2,2 \cdot 10^{-3} F$
nano	10^{-9}	n	$nF, nC, 33 nC = 3,3 \cdot 10^{-8} C$
piko	10^{-12}	p	$pF, 15 pF = 1,5 \cdot 10^{-11} F$
femto	10^{-15}	f	$pF, 180 fA = 1,5 \cdot 10^{-16} A$

Tabulka 10.1: Základní přehled násobných předpon pro fyzikální veličiny. Jednotka *Byte* a *bit* není fyzikální veličina, násobné předpony se odvozují z celých mocnin dvojkdy, nikoli z celých mocnin deseti.

10.3 Komplexní čísla

10.3.1 Přehled základů číselných množin

Při výpočtech se používají tyto množiny (obory) čísel:

- **Přirozená čísla** - \mathbb{N} , $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Na této množině čísel jsou proveditelné operace sčítání a násobení. Po vykonání těchto operací se opět obdrží přirozené číslo. Mezi přirozená čísla se může také přiřadit nula. Tato množina se pak označuje $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Čísla z množiny přirozených čísel se používají například pro čislování prvků v řadách čísel, označování dimenzí ve vektorech nebo maticích, atd.

- **Celá čísla** - \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Na této množině jsou proveditelné operace sčítání a násobení, stejně jako u množiny přirozených čísel \mathbb{N} . Navíc je bez omezení proveditelná operace odčítání. Dělení je proveditelné jako dělení se zbytkem. Po vykonání těchto operací opět obdržíme celé číslo.

Celá čísla jsou vhodná pro označení prvků v řadách, které se rozvíjejí oběma směry.

- **Racionální čísla** - \mathbb{Q} , Racionální číslo \mathbb{Q} je každé číslo, které lze zapsat v základním tvaru p/q , kde p je libovolné celé a q libovolné přirozené číslo (vyjma 0).

Proveditelné jsou operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, neboli *základní racionální operace*. V tomto oboru jsou řešitelné všechny lineární rovnice s racionálními koeficienty. Zápis racionálního čísla je možný jako desetinné číslo s ukončeným desetinným rozvojem nebo s neukončeným ale periodickým desetinným rozvojem.

Příklad: $\frac{333}{40} = 8,325$, $\frac{88}{9} = 9,\overline{7}$, $\frac{-12}{7} = -1,\overline{714285}$,

Při řešení nelineárních rovnic, např. $x \cdot x = 2$ je možné dokázat, že x nemá v oboru racionálních čísel řešení, proto se zavádějí *iracionální čísla*

Racionální čísla se používají při reálných numerických výpočtech, často po zaokrouhlení z čísel s neukončeným desetinným rozvojem.

- **Iracionální čísla** - \mathbb{I} jsou čísla, která nejdou vyjádřit zlomkem dvou celých čísel. Tato čísla jsou ale jsou řešením nějaké nelineární matematické rovnice nebo výsledkem součtu nekonečné posloupnosti čísel. Rozlišují se na

- **algebraická** - jsou řešením rovnic vyššího řádu, např.: $\sqrt{2}$
- **transcendentní** - ty ostatní, patří se např. π nebo e .

Přímo s iracionálními čísly (algebraickými) jsou schopny počítat některé programy pro výpočet symbolické matematiky. Výsledek výpočtu, pokud je číselný, je zase číslo z oboru racionálních čísel.

- **Reálná čísla** - \mathbb{R} jsou sjednocením množiny racionálních \mathbb{Q} a iracionálních čísel \mathbb{I} . Pokrývají celou *reálnou osu*. Přesto nejsou schopna pokrýt všechna možná řešení algebraických rovnic, jako např: $x^2 + 1 = 0$



- **Komplexní čísla** - \mathbb{C} rozšiřují oblast řešení algebraických rovnic, včetně $x^2 + 1 = 0$ nebo $\sin x = 5$

Používají se při zjednodušení výpočtu v různých dynamických systémech. V elektrotechnice se komplexní čísla užívají v symbolicko-komplexní metodě, která se používá pro výpočty veličin v lineárních obvodech při napájení harmonickým proudem nebo napětím.

Příklad 10.3: Určete, do jakého oboru patří číslo: a) 5; b) -6 ; c) 0; d) 8,521; e) $-7,8211\overline{556442}$; f) $\sqrt{55}$; g) $\sqrt{\pi}$; h) $5 - j\pi$; i) $\frac{4,654}{5 - j5}$ h) $\sqrt{x - 1}$;

Řešení: : Do přirozených čísel \mathbb{N} patří jen a). Do přirozených čísel s nulou \mathbb{N}_0 patří varianta a) a c). Do celých čísel \mathbb{Z} patří a), b) a c). Do racionálních čísel \mathbb{Q} patří a), b), c), d) a e). Vedle nich do iracionálních čísel \mathbb{I} dále náleží f) a g), kde f) je číslo algebraické a g) je číslo transcendentální. Dohromady do reálných čísel \mathbb{R} patří a), b), c), d), e), f) a g). Do komplexních čísel patří číslo h). Číslo i) má imaginární jednotku ve jmenovateli, proto je nutné číslo nejprve vyřešit, potom ho lze popsat jako komplexní číslo. Položka h) není číslo, ale výraz.

10.3.2 Definice a zápis komplexního čísla

Komplexním číslém rozumíme každý prvek z množiny $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, tj. každá uspořádaná dvojice $z = [x; y]$, kde čísla x a y jsou čísla reálná. Zavádí se tzv. *komplexní rovina*, každé komplexní číslo je tak prvkem této komplexní roviny. x je reálná část a y je imaginární část komplexního čísla. Komplexní rovina je vyznačena *reálnou* a *imaginární* osou, které se protínají v počátku $O = [0; 0]$. (viz obr. 10.1 a 10.4).

Komplexní rovina se dále rozděluje na čtyři kvadranty (opět obr.10.4)

I : Reálná a imaginární část komplexního čísla je kladná.

II : Reálná je záporná a imaginární kladná.

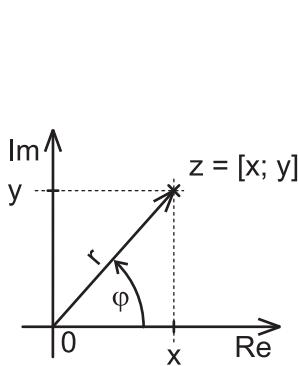
III : Reálná i imaginární část komplexního čísla jsou záporné.

IV : Reálná část je kladná a imaginární záporná.

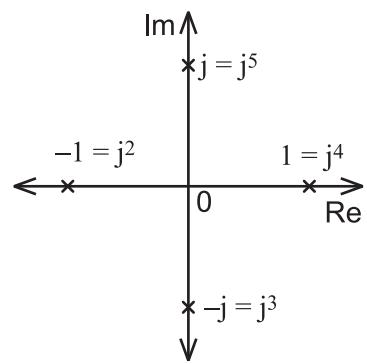
Komplexní číslo se zapisuje jako:

- **Algebraický tvar:** $z = [x; y]$,
- **Složkový tvar:** $z = x + jy$

kde j je imaginární jednotka, která je definována vztahem $j^2 = -1$. V praxi je možné se setkat i se symbolem i , v elektrotechnice se tento nepoužívá kvůli možné záměně se symbolem proudu. Imaginární jednotka se zapisuje v algebraickém tvaru komplexního čísla jako $j = [0; -1]$. Tyto dva zápisy používají *kartézské souřadnice* komplexního čísla v komplexní rovině.



Obrázek 10.1: Komplexní číslo v rovině

Obrázek 10.2: Operace s konstantou j

- **Goniometrický tvar:** $z = |r| (\cos \varphi + j \sin \varphi)$

Význam r a φ je na obrázku 10.1. r je *modul* nebo *absolutní hodnota* komplexního čísla a vyjadřuje vzdálenost z od počátku. φ je *úhel* nebo *argument* komplexního čísla.

- **Exponenciální tvar:** $z = r \cdot \exp(j\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$

Exponenciální tvar můžeme považovat za zkrácenou formu goniometrického tvaru. Tyto druhé dva zápisy používají *polární souřadnice* komplexního čísla v komplexní rovině

Další používaný zápis komplexního čísla, který obsahuje modul a úhled (např. v anglosaské literatuře), je tento *polární* nebo *Steinmetzův* tvar: $z = r\angle\varphi$

Některé operace s imaginární jednotkou j

Geometrické vyjádření v komplexní rovině je na obr. 10.2.

$$\begin{aligned} j &= [0; 1] = 0 + j = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ j^2 &= j \cdot j = [-1; 0] = -1 = 1 \cdot e^{j\pi} \\ j^3 &= j \cdot j \cdot j = -1 \cdot j = [0; -1] = 0 - j = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ j^4 &= j \cdot j \cdot j \cdot j = -1 \cdot -1 = [1; 0] = 1 = 1 \cdot e^{j0} \\ j^5 &= j \cdot j \cdot j \cdot j \cdot j = 1 \cdot j = j \\ j^{-1} &= \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-1} = -j \\ j^{-2} &= \frac{1}{j \cdot j} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

Definice základních pojmu

komplexní číslo: $x + jy$ pro $x \neq 0$ a $y \neq 0$

imaginární číslo: $x + jy$ pro $x = 0$ a $y \neq 0$

reálné číslo: $x + jy$ pro $x \neq 0$ a $y = 0$

reálná část komplexního čísla: část komplexního čísla x , značí se **Re**

imaginární část komplexního čísla: část komplexního čísla y , značí se **Im**. Do imaginární části se neřadí imaginární jednotka, tedy imaginární část není jy , ale jen samotné y . Imaginární (i reálná) část komplexního čísla tedy patří do oboru reálných čísel \mathbb{R}

Základní operace s komplexními čísly - kartézské

Jsou dány komplexní čísla $z = x + jy$, $z_1 = x_1 + jy_1$ a $z_2 = x_2 + jy_2$ (složkový tvar zápisu)

$$z_1 + z_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2) \quad (10.2)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + jy_1 - (x_2 + jy_2) = x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2) \quad (10.3)$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot jy_2 + x_2 \cdot jy_1 - y_1 \cdot y_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + j(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \quad (10.4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \cdot \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + j(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (10.5)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + jy} \cdot \frac{x - jy}{x - jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} - j \frac{y}{r^2} \quad (10.6)$$

Základní početní zákony pro komplexní čísla

Pro libovolná komplexní čísla $z_k = [x_k; y_k]$, kde $k = 1, 2, 3$, platí pro dosud uvedené operace s komplexními čísly následující pravidla:

Asociativní zákon pro sčítání: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Asociativní zákon pro násobení: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

Komutativní zákon pro sčítání: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Komutativní zákon pro násobení: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Distributivní zákon: $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

Existence nulového prvku: $0 = [0; 0] = 0 + j0$, pro který platí $z + 0 = z$ pro libovolné číslo z komplexního oboru. Pro exponenciální tvar platí, že nulový prvek má modul rovný nule: $r = 0$

Existence jednotkového prvku: $I = [1, 0] = 1 + j0 = 1 \cdot e^{j0}$, pro který platí $zI = z$ pro libovolné číslo z komplexního oboru.

Existence inverzního prvku: $\hat{z} = I/z$ k pruku z , pro který platí $z\hat{z} = I$ pro libovolné číslo komplexního oboru vyjma $z = 0$.

Komplexně sdružené číslo

Používá se pro různé výpočetní operace. Základní definice komplexně sdruženého čísla z^* ke komplexnímu číslu z ve složkovém tvaru:

$$z^* = (x + jy)^* = x - jy \quad (10.7)$$

Pro exponenciální tvar:

$$z^* = (r \cdot e^{j\varphi})^* = r \cdot e^{-j\varphi} \quad (10.8)$$



Některé důležité matematické operace s komplexně sdruženými čísly:

$$z + z^* = 2 \cdot x \quad (10.9)$$

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 \quad (10.10)$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \quad (10.11)$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^* \quad (10.12)$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \quad (10.13)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \quad (10.14)$$

Příklad 10.4: Jsou dána dvě komplexní čísla $z_1 = 3 + j5$ a $z_2 = 2 - j2$. Určete součet $z_1 + z_2$, rozdíl $z_1 - z_2$, součin $z_1 \cdot z_2$ a podíl $z_1 : z_2$ obou komplexních čísel.

Řešení: :

součet

$$z_1 + z_2 = 3 + j5 + 2 - j2 = \underline{5 + j3}$$

rozdíl

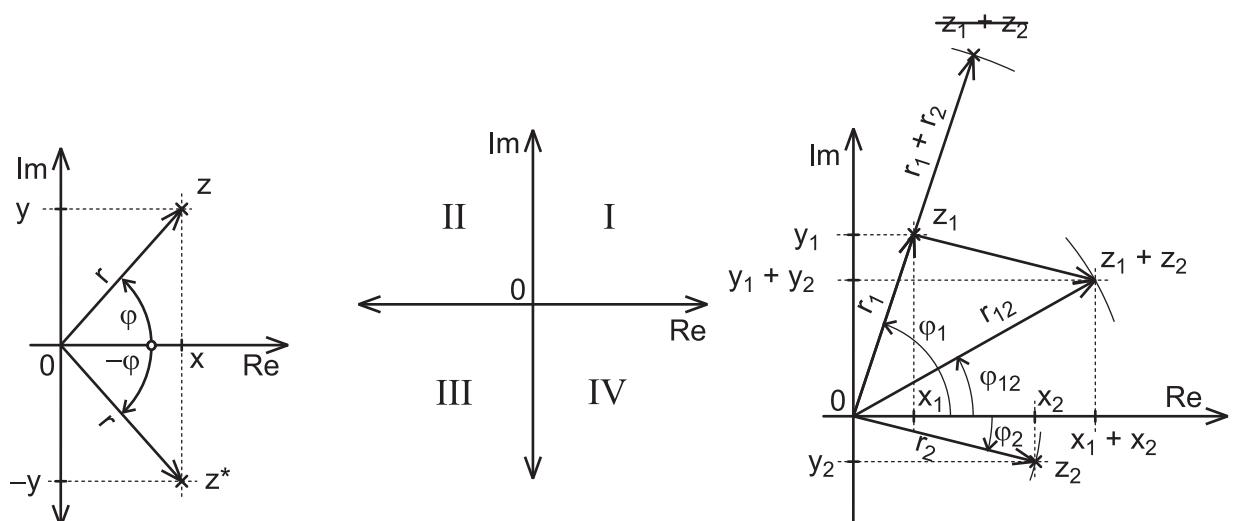
$$z_1 - z_2 = 3 + j5 - 2 + j2 = \underline{1 + j7}$$

součin

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + j5) \cdot (2 - j2) = 3 + 10 - j6 + j10 = \underline{16 + j4}$$

podíl

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + j5}{2 - j2} \cdot \frac{2 + j2}{2 + j2} = \frac{6 - 10 + j10 + j6}{4 + 4} = \frac{-4 + j16}{8} = \underline{\frac{1}{2} + j2}$$



Obrázek 10.4: Rozdělení

Obrázek 10.3: Komplexně komplexní roviny na kvadranty

Obrázek 10.5: Součet komplexního čísla v exponenciálním tvaru



Absolutní hodnota komplexního čísla

Absolutní hodnota komplexního čísla r , někdy také *modul* je definována jako vzdálenost čísla v komplexní rovině od počátku (obrázek 10.1). Výpočet ze složek x a y se provede pomocí Pythagorovy věty:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} \quad (10.15)$$

r je hodnota, která je vždy kladná $r > 0$, pokud není komplexní číslo umístěno v počátku.

Úhel komplexního čísla

Úhel komplexního čísla φ (jiný název: *argument komplexního čísla* nebo *fázový úhel*) se definuje jako úhlová odchylka mezi spojnicí od počátku ke komplexnímu číslu a reálnou osou. Kladný směr úhlu je proti směru otáčení hodinových ručiček. (obr.10.1). Velikost úhlu se uvádí ve stupních (běžnější jednotka, proto názornější) nebo v radiánech (fungují v tom výpočetní programy, základní jednotka SI pro rovinný úhel).

Hodnoty pro úhel se uvádějí v intervalu $\varphi = (-\pi; \pi]$ případně $\varphi = [0; 2\pi)$

Úhel komplexního čísla se počítá pomocí goniometrické funkce arctg. Podle kvadrantu, ve kterém se nachází komplexní číslo, platí následující vzorce.:

kvadrant I. a IV. : Platí $\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (10.16)$$

kvadrant II. : Platí $\operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi \quad (10.17)$$

kvadrant III. : Platí $\operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) < 0$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi \quad (10.18)$$

Vzhledem k periodicitě úhlu φ je možné úhel ze třetího kvadrantu počítat jako z druhého.

Pro přímý výpočet bez rozlišování kvadrantů:

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (10.19)$$

Výpočet složkového tvaru z exponenciálního

Na základě definice modulu a argumentu platí:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad (10.20)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad (10.21)$$

Některá komplexní čísla v exponenciálním tvaru

$$\begin{aligned}1 &= 1 \cdot e^0 \\j &= 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\1+j &= \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \\-1 &= 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\-j &= 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \\-1-j &= \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}\end{aligned}$$

Základní operace s komplexními čísly - goniometrický a exponenciální tvar

Součet, rozdíl nelze s koeficienty v polárních souřadnicích, tedy s modulem a úhlem konat přímo. Vždy se převádějí do složkového nebo algebraického tvaru.

Součin, podíl, mocnina, odmocnina jsou operace, které se s modulem r a úhlem φ (goniometricky, exponenciální tvar) provádějí jednodušším způsobem než s reálnou složkou x a imaginární složkou y (složkový nebo algebraický tvar).

Opět jsou zavedeny komplexní čísla $z = r \cdot e^{j\varphi}$, $z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ (exponenciální tvar zápisu)

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{j\varphi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (10.22)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (10.23)$$

$$z^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} \quad (10.24)$$

$$z^* = (r \cdot e^{j\varphi})^* = r \cdot e^{-j\varphi} \quad (10.25)$$

$$z \cdot z^* = r \cdot e^{j\varphi} \cdot r \cdot e^{-j\varphi} = r \cdot r \cdot e^{j(\varphi - \varphi)} = r^2 = x^2 + y^2 \quad (10.26)$$

Komplexně sdružené číslo pro exponenciální tvar

$$(r \cdot e^{j\varphi})^* = r \cdot e^{-j\varphi} \quad (10.27)$$

Příklad 10.5: Pro $z_1 = 2 e^{-j\frac{\pi}{6}}$ a $z_2 = 1 e^{-j\frac{\pi}{3}}$ určete součet $z_1 + z_2$, rozdíl $z_1 - z_2$, součin $z_1 \cdot z_2$ a podíl $z_1 : z_2$.

Řešení:

součet Nejprve se čísla převedou do složkového tvaru:

$$z_1 = 2 e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j \cdot 2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\sqrt{3} - j}$$

$$z_2 = 1 e^{-j\frac{\pi}{3}} = 1 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot 1 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \underline{\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Nyní zbývá čísla sečítst:

$$z_1 + z_2 = \sqrt{3} - j + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{2,232 - j1,866}$$



rozdíl Použije se převod do složkového tvaru z předcházející části příkladu

$$z_1 - z_2 = \sqrt{3} - j - \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{1,232 - j0,134}$$

součin

$$z_1 \cdot z_2 = 2 e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot 1 e^{-j\frac{\pi}{3}} = 2 e^{(-j\frac{\pi}{6}-j\frac{\pi}{3})} = \underline{2 e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

podíl

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1 e^{-j\frac{\pi}{3}}} = \frac{2}{1} e^{(-j\frac{\pi}{6}+j\frac{\pi}{3})} = \underline{2 e^{j\frac{\pi}{6}}}$$

10.3.3 Komplexní čísla v Matlabu nebo Octave

MATLAB je komerční matematický systém firmy MathWorks, který je dostupný v počítačových učebnách fakulty. Octave je obdobný matematický systém, který je volně dostupný pod licencí GNU, lze ho volně stahovat, instalovat a šířit. Mezi těmito systémy funguje vysoká míra kompatibility.

Výpočty se provádějí u obou systémů z příkazové řádky. Lze zapsat číslo, matematický výraz s číslami, vestavěnou funkci, textový soubor s příponou .m, do identifikátoru proměnné přiřadit číslo, vícerozměrný vektor nebo matici čísel, nebo jiný identifikátor proměnné, který číslo obsahuje. Příkazem lze vykreslit průběh funkce, uložit do souboru, číst ze souboru. Příkazový m-soubor je čistě textový soubor, který obsahuje posloupnost příkazů, které se jinak zadávají na příkazovou řádku.

Po zadání příkazu a potvrzením klávesou enter se ihned provede výpočet, jehož výsledek se zobrazí pod příkazový řádek. Za výpočtem se zobrazí nový příkazový řádek. Pokud se za příkaz vloží středník ;, výpočet se provede skrytě bez výstupu na display, zobrazí se jen nový příkazový řádek. Může se tak zadat několik řádků bez zobrazení výsledků. Obsah proměnných je v systému MATLAB zobrazen v okně Workspace na levé straně. V systému Octave je možné přehled proměnných zjistit příkazem who nebo whos.

V obou systémech je možné počítat i s komplexními čísly. Ty se zadávají jako samostatné číslo v příkazu (vzorci), jako proměnné, se kterými lze provádět provádět všechny povolené matematické operace. Vzhledem k tomu, že MATLAB ani OCTAVE nejsou orientované na elektrotechniku, jako imaginární číslo se zadává i nebo I. Kromě toho jsou v obou systémech další vestavěné konstanty, nejpoužívanější je π , která se zadává jednoduše jako pi.

- Příklady zadání čísla do proměnné z1, z2: `z1=5+4i; z2=2*exp(i*2*pi/3);`
- Příklady operací s komplexním číslem nebo proměnnou:
`5+3; z1/z2; z3=z1/z2; (3+5i)/(2-2i); z1*(2-2i);`
- Pokud je výsledek výpočtu v oboru komplexních čísel, výstup je vždy složkový tvar.
- Zadané komplexní číslo ve složkovém tvaru se chápe jako součet reálného a imaginárního čísla, nutné dbát stanovené pořadí početních úkonů. Násobení se vykoná přednostně před sčítáním.



- Některé komplexní i reálné funkce: reálná část komplexního čísla `real(z1)`, imaginární část komplexního čísla `imag(z1)`, komplexně sdružené číslo `conj(z1)`, modul (absolutní hodnota) `abs(z1)`, argument (úhel) `angle(z1)`,
- Reálné funkce důležité pro výpočty s komplexními čísly: goniometrické funkce, např.: `sin(r1), cos(r1), atan2(y1, x1)`, odmocnina `sqrt(r1)`, atd.

Správný zápis funkce s proměnnými v MATLABu nebo OCTAVE je možné ověřit příkazem `help` *příkaz*, např.: `help sin` nebo `help atan2`

10.4 Výrazy

Pro matematický popis lineárního obvodu se používají algebraické výrazy. Algebraický výraz je takový matematický zápis, který je tvořen z čísel a proměnných, mezi nimiž jsou pomocí algebraických operací (např. sčítání, odčítání násobení, dělení a mocnění) a závorek různé úrovně vytvořeny vztahy, které dávají jasný smysl nebo jednoznačnost. Výraz neobsahuje relační operátor (rovnítko = nebo < resp. > apod.) Dosazením čísel za všechny proměnné (Čísla musí být z definičního oboru pro daný výraz, příkladem je vyloučená nula ve jmenovateli) se získá číslo. Při výpočtech se běžně výrazy upravují do přehlednějšího tvaru, přitom se výsledná hodnota výrazu nesmí změnit. To znamená, pokud za proměnné dosadíme stejná čísla před úpravou a po úpravě, musí se z výrazu vždy vypočítat stejné číslo.

10.4.1 Úpravy výrazů s reálnými čísly

Při úpravách výrazů je nutné respektovat určité zákony, potom nedojde při výpočtech k chybám. Pro sčítání a odčítání na množině reálných čísel platí:

Asociativní zákon : $(a + b) + c = a + (b + c)$

Komutativní zákon : $a + b = b + a$

Existence nuly : Existuje takové číslo, zvané nula, které značíme 0, že pro každé reálné číslo a platí vztah $a + 0 = 0$

Existence opačného čísla : Ke každkému reálnému číslu a existuje takové reálné číslo a' , které se nazývá opačné k číslu a , pro které platí: $a + a' = 0$. Číslo a' se také značí jako $-a$. Opačné číslo k 0 je opět 0

Pro násobení a dělení reálných výrazů dále platí:

Asociativní zákon : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Komutativní zákon : $a \cdot b = b \cdot a$

Existence jednotky : Existuje takové číslo, zvané jednotka, které značíme 1, že pro každé reálné číslo a platí:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad (10.28)$$



Existence převráceného (inverzního nebo reciprokého čísla) : Ke každému reálnému číslu $a \neq 0$ existuje takové reálné číslo \tilde{a} , že pro ně platí vztah:

$$a \cdot \tilde{a} = 1. \quad (10.29)$$

Toto číslo \tilde{a} se obvykle značí těmito způsoby: $\frac{1}{a}$ nebo $1/a$ nebo a^{-1}

Distributivní zákon : $(a + b)c = ac + bc$

Příklad 10.6: Upravte:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{h}$$

Řešení: Předpokládáme podmínu existence řešení $g, h \neq 0$. Pro výraz převedeme na jeden zlomek vytvořením společného jmenovatele:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{h} = \frac{1}{g} \cdot \frac{h}{h} + \frac{1}{h} \cdot \frac{g}{g} = \frac{h}{gh} + \frac{g}{gh} = \frac{g+h}{gh} \quad (10.30)$$

10.4.2 Počítání s exponenty

Pro každé reálné číslo x a přirozené číslo n se definuje mocnina přirozeným číslem:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n, \quad x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ pro } x \neq 0 \quad (10.31)$$

Pro každé reálné číslo $x \geq 0$ a pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ je mocninou $x^{1/n}$ právě jedno reálné číslo $y \geq 0$, pro které platí:

$$y^n = x \quad (10.32)$$

uváděné číslo y se také značí $\sqrt[n]{x}$ a nazývá se n -tou odmocninou z čísla x . Proto platí:

$$y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \geq 0 \quad (10.33)$$

Pro každé reálné číslo $x > 0$ a pro každé racionální číslo $r = p/q$, kde $q \geq 2$ je přirozené číslo a p celé, se zapisuje:

$$x^r = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p > 0 \quad (10.34)$$

x^r se nazývá racionální mocnina čísla x , číslo x je báze nebo základ mocniny, a r je exponent.

Základní operace reálných čísel s exponenty. Pro kladná reálná čísla a a b a pro racionální čísla r_1, r_2 a r platí následující operace:

1. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$
2. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$
3. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$



10.5 Soustavy lineárních rovnic

10.5.1 Vektory

Při sestavení obvodových rovnic v lineárním obvodu vznikají soustavy lineárních rovnic o více neznámých. Při řešení soustav je nezbytné se zabývat takovými pojmy, jako je vektor nebo matice.

Uspořádaný zápis množiny n -čísel ve tvaru: $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ se nazývá aritmetický vektor. a_i jsou souřadnice vektoru n je dimenze. Každý prvek a_ν náleží do číselné množiny A , kdy tyto množiny spolu tvoří kartézský součin:

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Pokud platí, že $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \mathbb{R}$ nebo $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \mathbb{C}$, pak množina $V_n = \mathbb{R}^n$ nebo $V_n = \mathbb{C}^n$ se nazývá n -rozměrný reálný nebo n -rozměrný komplexní vektorový prostor V_n

Lineární závislost vektoru : Vektory \mathbf{a}_1 a \mathbf{a}_2 jsou lineárně nezávislé, pokud rovnice

$$\xi_1 \mathbf{a}_1 + \xi_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad (10.35)$$

platí jen v případě $\xi_1 = \xi_2 = 0$

Aritmetický vektor \mathbf{b} je lineární kombinací vektoru \mathbf{a}_1 a \mathbf{a}_2 , pokud existují taková reálná nebo komplexní čísla β_1 a β_2 , že platí

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 \quad (10.36)$$

10.5.2 Matice

Maticí řádu mn označujeme takové schéma **A**, kdy je do m vodorovných řádků uspořádáno n reálných nebo komplexních čísel. Matice má potom m řádků a n sloupce. Čísla m a n náleží do množiny přirozených čísel. Speciálním případem je **čtvercová matice**, která má stejný počet řádku jako sloupců $m = n$. Tato matice se potom nazývá **čtvercová matice rádu n** . Čísla obsažená v matici (nazývají se **prvky matice**) se označují dvojící indexu, první index je číslo řádku (řádkový index) a druhý číslo sloupce (sloupcový index). V matici mn jsou tyto prvky a_{11}, a_{12} až a_{1n} , dále a_{21} až a_{2n} a poslední řádek: a_{m1}, a_{m2} až a_{mn} .

U čtvercové matice rádu n můžeme dále popsat **hlavní diagonálu**: prvky a_{11}, a_{22} až a_{nn} a **vedlejší diagonálu**: prvky $a_{n1}, a_{n-1,2}$ až a_{1n} .

Význačné druhy matic

Jednotková matice Všechny prvky na hlavní diagonále u čtvercové matice jsou rovny 1, ostatní prvky jsou rovny 0. Často se označuje jako **E**

Nulová matice Všechny prvky matice jsou rovny 0. Často se označuje jako **0**

Diagonální matice Všechny prvky čtvercové matice mimo hlavní diagonálu jsou rovny 0.

Transponovaná matice - sloupcový index matice se zamění za řádkový index. K matici řádu mn je transponovaná matice řádu nm

Singulární matice je taková čtvercová matice, jejíž některý z řádků (vektorů) je lineární kombinací řádků (vektorů) ostatních.

Operace s maticemi

Sčítání a odčítání matic lze provádět na maticích stejné velikosti. Výsledkem je matice stejné velikosti jako původní matice, každý prvek nové matice je dán součtem prvku na stejném místě u první matice s prvkem na stejném místě u druhé matice.

Násobení matice reálným nebo komplexním číslem h : Každý prvek matice se vynásobí číslem h .

Součin dvou matic se provádí u čtvercových matic stejné dimenze (výsledkem je opět matice stejné dimenze), nebo dvou matic řádu mn a np , kdy je výsledkem matice řádu mp . $m, n, p \in \mathbb{N}$ Pokud se provádí součin matic: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$, pak je prvek nové matice c_{ik} skalárním součinem vektoru z i -tého řádku matice \mathbf{A} a vektoru z k -tého sloupce matice \mathbf{B} .

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{v=1}^n a_{iv}b_{vk} \quad (10.37)$$

Inverzní matice

Je taková čtvercová matice (označuje se \mathbf{A}^{-1} , pro kterou platí:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad (10.38)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice.

Determinant matice

Determinant je číslo přiřazené ke čtvercové matici. Ke každé čtvercové matici je možné určit jeden determinant matice. Pro matici řádu $n = 1$:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \quad (10.39)$$

Pro matici řádu $n = 2$

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (10.40)$$

Pro matici řádu $n = 3$

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \quad (10.41)$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \quad (10.42)$$

Vlastnosti determinantů : Pokud je determinant čtvercové matice roven nule, je matice singulární.



Matice soustavy lineárních rovnic

Pro soustavu m lineárních rovnic o n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{10.43}$$

kde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ a b_1, b_2, \dots, b_m náleží do množiny reálných nebo komplexních čísel. Čísla $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ se nazývají koeficienty soustavy, a b_1, b_2, \dots, b_m jsou absolutními členy.

K této soustavě existuje matice **A** a dále matice **R**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{10.44}$$

Matici **A** nazýváme matice soustavy a dále matici **R** nazýváme rozšířená matice soustavy.

Řešitelnost soustavy rovnic : Pokud je matice soustavy singulární (determinant matice soustavy je roven nule), nemá soustava řešení.

10.5.3 Výpočet soustavy lineárních rovnic

Metoda řešení soustavy se volí podle velikosti soustavy a podle aktuální dostupnosti výpočetní techniky. Pro jednoduché soustavy nižšího rádu (max. 3) s reálnými koeficienty je snadné provést řešení pomocí kondenzační metody. Jako pomůcka stačí jednoduchá kalkulačka se základními výpočetními funkcemi.

U větších soustav, zvláště pokud mají komplexní koeficienty, je z důvodu zdlouhavého výpočtu a rizika početní chyby využití výpočetní techniky s vhodným programem nevyhnutelné. Koeficienty soustavy se řeší pomocí vhodné maticové metody. Principy těchto metod jsou uvedeny v kažné základní učebnici matematické algebry. Před použitím je nezbytné převést do základního tvaru podle rovnice 10.43.

Jako výpočetní program je možné zvolit Octave nebo Matlab (podporují komplexní čísla), případně tabulkový procesor (špatná nebo vůbec žádná podpora komplexních čísel). Vedle stolních a přenosných počítačů je k dispozici celá řada kapesních kalkulaček schopných počítat s komplexními maticemi, a dále je dostupné matematické programové vybavení k mobilním telefonům nebo kapesním počítačům vybavených operačním systémem. Tato zařízení mohou poskytovat stejné výsledky, jako stolní počítače. Obsluha je však obtížnější. Základním problémem použití zůstává dostatečné zvládnutí výpočetní techniky a použitého programu, aby výpočet zůstal pod kontrolou.

Elementární úpravy soustavy Cílem úprav je obdržet takovou soustavu, která bude mít stejný vektor řešení, přitom matice koeficientů bude trojúhelníková (*kondenzační metoda* - pod hlavní diagonálou zůstanou samé nuly). Bude se uvažovat o soustavě čtvercové - matice koeficientů soustavy je čtvercová a regulární (její determinant je různý od nuly).

1. změna pořadí rovnic
2. násobení libovolné rovnice číslem $k \neq 0$
3. přičtení libovolného k -násobku některé rovnice k jiné rovnici soustavy

Příklad 10.7: Vyřešte soustavu rovnic s komplexními koeficienty:

$$\begin{aligned} (2+j)z_1 + (-1+j)z_2 &= 3+j4 \\ (1+j3)z_1 - z_2 &= -4+j8 \end{aligned} \quad (10.45)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} z_2 &= -4+j8 - (1+3i)z_1 \\ (2+j)z_1 + (-1+j)[-4+j8 - (1+3i)z_1] &= 3+j4 \\ z_1 &= 2+j3 \\ z_2 &= -3+j \end{aligned} \quad (10.46)$$

Příklad 10.8: Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 9x_4 &= 3 \end{aligned} \quad (10.47)$$

Řešení: : První řádek se opíše. Dále první řádek vynásobit -2 a přičítat k druhému řádku. Na pozici a_{21} tak zůstane 0 . K třetímu řádku přičítat první řádek vynásobený -1 , ke čtvrtému řádku přičítat první řádek vynásobený -2 . Na pozicích a_{31} a a_{41} také zůstanou nuly.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 9 \\ -7x_2 + 8x_3 + 7x_4 &= 3 \end{aligned} \quad (10.48)$$

První a druhý řádek se opíše. K třetímu řádku přičítat druhý řádek vynásobený -3 a ke čtvrtému řádku přičítat druhý řádek vynásobený -7 . Na pozicích a_{32} a a_{42} zůstanou opět nuly..

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - 6x_4 &= 9 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \quad (10.49)$$

Nyní je možné dosadit $x_3 = 3$ do třetí rovnice, určit tak x_4 . Získaná řešení dosadit do druhé druhé rovnice, určit tak x_2 a tak pokračovat i do první rovnice. Získá se tak sada řešení: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ a $x_4 = -1$;



Cramerovo pravidlo

Soustava lineárních rovnic popsaná maticí soustavy \mathbf{A} má determinant různý od nuly. Řešením soustavy je vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, kde:

$$x_k = \frac{A_k}{A} \quad (10.50)$$

kde $A = \det \mathbf{A}$ a A_k je determinant takové matice soustavy, kde k -tý sloupec je nahrazen sloupcem pravé strany.

Příklad 10.9: Řešte obecnou soustavu lineárních rovnic třetího řádu Cramerovým pravidlem.

Řešení: Soustava lineárních rovnic třetího řádu má rozšířenou matici:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (10.51)$$

má rozšířenou matici soustavy:

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right] \quad (10.52)$$

Podle Cramerova pravidla se neznámé x_1 , x_2 a x_3 určí:

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \quad (10.53)$$

Tato metoda je vhodná pro výpočet rovnic pomocí tabulkových procesorů, jako je např. Microsoft Excel.

10.5.4 Operace s maticemi v Matlabu a Octave

Poměrná složitost výpočtů obvodových rovnic (při stacionárním stavu se řeší soustava rovnic s reálnými nebo komplexními koeficienty) dává předpoklad k použití vhodných výpočetních programů. Jak programy na počítačích, tak některé typy kalkulaček, jsou schopné provádět mnoho operací s maticemi, takže je možné řešit jako reálné, tak komplexní soustavy lineárních rovnic.

V programu Matlabe i Octave je možné jako proměnnou zadat matici i vektor, provést jejich základní operace:

Zadání vektoru Vektor se zadává jako jednořádková matice, prvky se oddělují čárkami, vektor se uzavírá do hranatých závorek: (př. v reálném oboru) — `d1=[2.55,5.428,-5.444e-1]`, (př. v komplexním oboru) — `dc1=[2.55+1.32i,6.7554-8.4441i,-0.212e-2+5.544e-2i]`



dále jako jednosloupcová matice, jednotlivé prvky jsou odděleny středníkem:

př.: `c1=[5.44;5.441e1;-5.442e2]`

Zadání matic Celou matici můžeme zadat obdobným způsobem, prvky na řádku se odělují čárkou, celé řádky poté středníkem:

př.: `aa=[2,3,2;4,-5,5;4.5,5,1]` Operace s maticemi:

Transponovaná matic : za identifikátor se vloží apostrof př: `aa'`;

Inverzní matic př: `aa^-1`;

Determinant matic př: `det(aa)`

Sčítání a odčítání matic možné jen pro matice stejné velikosti (stejného počtu řádku a sloupců). př: `aa+aa'`

Násobení matic je možné, pokud má první matice stejný počet řádku jako druhá sloupců.

Používá se běžný operátor pro násobení *

Dělení matic jako takové není v matematické algebře definované. V systému Matlab nebo Octave je proveditelné pouze u čtvercových matic a jedná se ve skutečnosti o násobení, kdy za dělitel se položí inverzní matice. Původní matice k inverzní musí mít nenulový determinant, proto je čtvercová a nesmí být singulární. Pro tuto operaci se používá se běžný operátor pro dělení /

Soustava lineárních rovnic a je matice koeficientů levé strany rovnice, b je vektor pravé strany (zadáno v reálném, nebo komplexním oboru). Vektor řešení x se určí v Matlabu nebo Octave pomocí příkazu: `x=a\b`. Přitom zápis `a/b` a `x=b\ a` nejsou ekvivalentní.

10.6 Funkce jedné proměnné

Funkci jedné proměnné můžeme pojmenovat jako zobrazení celé nebo části přímky x do roviny xy . Graf funkce v rovině xy se proto v běžných případech jeví jako souvislá nebo nesouvislá čára. Každému bodu definičního oboru funkce x_i (pro některé body nebo souvislé části přímky x nemusí být funkce definována) je funkcí přiřazen pouze jeden funkční bod y_i , který se vypočte dosazením x_i do funkce.

Funkce jedné proměnné se nejčastěji v elektrických obvodech používá k vyjádření časové závislosti některé veličiny (napětí, proud, výkon), čas je potom nezávislá veličina a proud, napětí nebo výkon závislá. Tyto jednorozměrné funkce jsou často řešením lineární diferenciální rovnice prvního nebo druhého řádu, pro které vyhovují přirozená exponenciální funkce a periodické funkce sínus a kosinus (ty jsou zároveň vhodné pro popis periodických časových průběhů). Dále je nezbytné se zmínit lineární funkci (funkce přímky) a racionální lomené funkci, která je důležitá pro popis přenosu harmonického signálu lineárním obvodem.

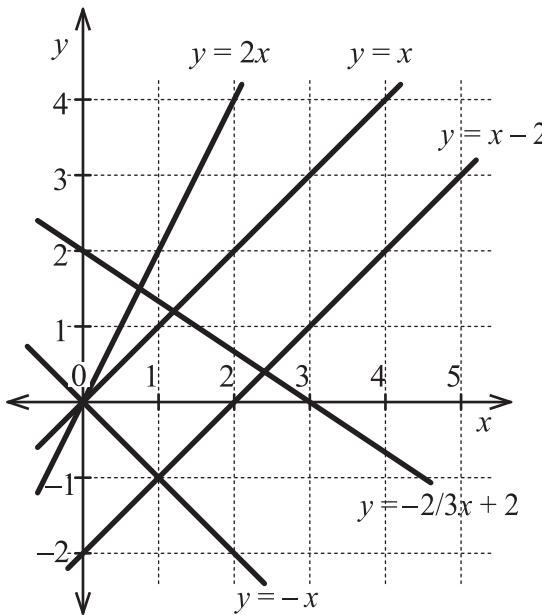


10.6.1 Rovnice přímky

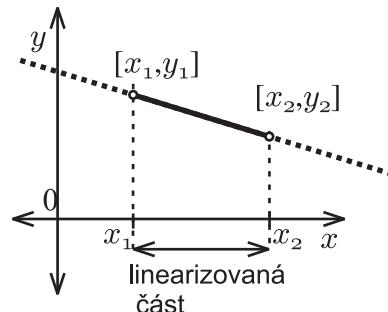
Rovnice přímky v rovině je nejjednodušší funkcí a popisuje se základním funkčním vztahem:

$$y = k \cdot x + q \quad (10.54)$$

kde k je směrnice přímky, a q posunutí ve směru y



Obrázek 10.6: Lineární funkce - několik příkladů. Nejjednodušší lineární funkce $y = x$ dvou krajních bodů (v podstatě identita), dvojnásobná lineární funkce $y = 2x$ má vyšší sklon,



Směrnice k se dá určit z diferenciálu, kde pro libovolný bod $[x; y]$ přímky platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y_0 - y}{x_0 - x} \quad (10.55)$$

nebo pro úhel φ , který svírá přímka a osa x :

$$k = \operatorname{tg} \varphi \quad (10.56)$$

Konstanta q je bod na ose y , kde jí přímka protíná.

Další možnost je určit parametry rovnice přímky podle polohy průsečíků přímky s osami: Přímka prochází přímkou x v bodě x_0 a přímkou y v bodě y_0 . Dosazením průsečíků do rovnice přímky tak získáme soustavu o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 0 &= k \cdot x_0 + q \\ y_0 &= k \cdot 0 + q \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyplývá zmíněná rovnost $y_0 = k$, to se poté dosadí do první rovnice:

$$0 = k \cdot x_0 + y_0 \quad (10.57)$$

a provedou se další úpravy:

$$-y_0 = k \cdot x_0 \quad (10.58)$$

$$k = -\frac{y_0}{x_0} \quad (10.59)$$

Rovnice přímky se dá použít pro popis konstantní funkce, a to tehdy, pokud $k = 0$. Předpis pro konstantní funkci je $y = q$. Graf konstantní funkce je čára rovnoběžná s osou x .

Inverzní funkcí k funkci přímky je opět přímka definovaná obecnou rovnicí přímky. (viz. 10.54). Pokud definujeme přímku jako $y = kx + q$ a její inverzní funkci jako $y = k_i x + q_i$, parametry k_i a q_i se počítají z rovnice

$$x = k \cdot y + q$$

vyjádřením symbolu y :

$$k \cdot y = x - q \quad (10.60)$$

$$y = \frac{1}{k}x - \frac{q}{k} \quad (10.61)$$

Z toho vyplývá, že $k_i = \frac{1}{k}$ a $q_i = -\frac{q}{k}$, pokud tedy potřebujeme z původní rovnice přímky přímo určit parametry inverzní rovnice přímky.

S funkcí přímky se obvykle setkáváme při řešení jedné rovnice o dvou neznámých. Přímková funkce je dále důležitá ke konstrukci náhradní nelineární charakteristiky po částech. Při hledání parametrů k a q rovnice linearizované části charakteristiky máme k dispozici krajní body x_1 a x_2 a jejich funkční hodnoty $y_1(x_1)$ a $y_2(x_2)$. Tady se může postupovat přes sestavení soustavy rovnic

$$y_1 = k \cdot x_1 + q \quad (10.62)$$

$$y_2 = k \cdot x_2 + q \quad (10.63)$$

Odečtením spodní rovnice od horní je možné určit parametr k :

$$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2) \quad (10.64)$$

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (10.65)$$

a zpětným dosazením do jedné z rovnic je možné určit parametr q :

$$y_1 - k \cdot x_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1 = q \quad (10.66)$$

10.6.2 Algebraické rovnice a lomené racionální funkce

Jestliže jsou $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ jsou libovolná reálná čísla a n je nezáporné celé číslo, x je libovolné reálné případně komplexní číslo, pak výraz

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (10.67)$$

je reálným polynomem proměnné x , výrazy $a_k x^k$ jeho členy, a_0 prostým nebo absolutním členem a a_n je vedoucím koeficientem polynomu $P(x)$. Pokud je n přirozené číslo a $a_n \neq 0$, potom rovnice $P(x) = 0$ ($P(x)$ je polynom) se nazývá algebraická rovnice stupně n

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \quad (10.68)$$

Každá algebraická rovnice stupně n má nejméně jeden kořen nebo řešení ξ v oboru reálných případně komplexních čísel, který algebraické rovnici vyhovuje. Tedy platí:

$$a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots + a_n \xi^n = 0 \quad (10.69)$$

Bod ξ se také nazývá nulovým bodem polynomu $P(x)$.

Dále platí **D'Alembertova věta**: Algebraická rovnice $P(x) = 0$ stupně $n > 0$ má právě n kořenů. Pokud se tyto kořeny označí jako $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, je možné polynom $P(x)$ rozložit na tvar:

$$P(x) = a_n (x - \xi_1) (x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n) \quad (10.70)$$

Lomená racionální funkce $R(x)$ je taková funkce, která je podílem dvou komplexních polynomů:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} \quad (10.71)$$

$P(x)$ se potom nazývá čitatel a $Q(x)$ jmenovatel racionální lomené funkce. Pokud se zvolí libovolné reálné, případně komplexní číslo α , potom dostáváme regulární bod, jestliže $Q(\alpha) \neq 0$; dále pól, jestliže $Q(\alpha) = 0$.

Určení nulového bodu polynomu

Způsob řešení se liší podle stupně polynomu, nejsnáze se řeší polynomy 1, 2 stupně. Vedle analytického se používá také numerické řešení, jeho popis přesahuje rozsah textu.

Polynom prvního stupně:

$$a_0 + a_1 x \quad (10.72)$$

řešení:

$$a_0 + a_1 \xi = 0 \quad (10.73)$$

$$\xi = -\frac{a_0}{a_1} \quad (10.74)$$

Řešením polynomu druhého stupně je shodné s kvadratickou rovnicí.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (10.75)$$

řešení:

$$a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 = 0 \quad (10.76)$$

$$\xi_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \quad (10.77)$$

$$\xi_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \quad (10.78)$$



Výraz pod odmocninou se nazývá diskriminant $D = a_1^2 - 4a_0a_2$. Pokud se výraz vyřeší v komplexním oboru, tak pro:

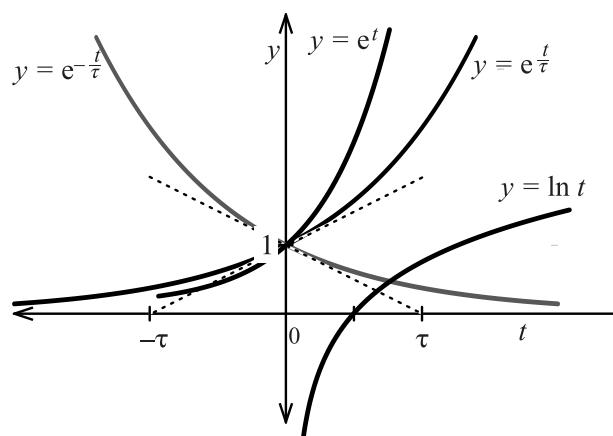
$D > 0$ získáme dva reálné kořeny.

$D = 0$ je řešením jeden dvojnásobný kořen.

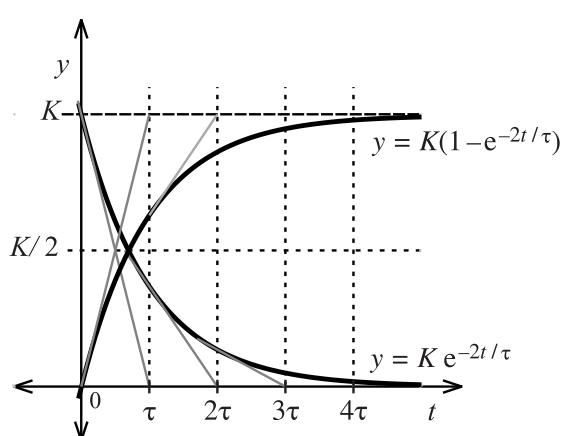
$D < 0$ jsou řešením dva komplexní kořeny.

10.6.3 Přirozená exponenciální funkce

Přirozená exponenciální funkce v reálném oboru čísel vychází jako řešení lineární diferenciální homogenní rovnice prvního řádu. Jde o obecnou exponenciální funkci se základem rovným Eulerově číslu $e = 2,718281828 \dots$. Přirozená exponenciální funkce v základním tvaru $y = e^x$ je na celém definičním oboru rostoucí, prochází osou y (při $x = 0$) bodem $y = 1$.



Obrázek 10.8: Přirozená exponenciální a logaritmická funkce, vliv parametru τ na směrnici funkce v průsečíku s osou y



Obrázek 10.9: Exponenciální funkce - průběh funkce $y = K(1 - e^{-2t/\tau})$ a její součásti $y = Ke^{-2t/\tau}$

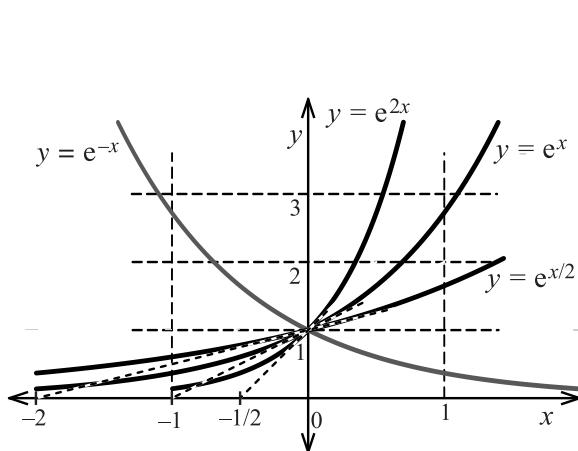
Na obrázku 10.8 je zobrazena exponenciální funkce $y = e^x$ spolu s její inverzní přirozenou logaritmickou funkcí $y = \ln x$. Pokud je argument funkce násoben reálným parametrem, obvykle $-\frac{1}{\tau}$, dojde ke změně směrnice v průsečíku s osou y , tak jak je ukázáno na uvedeném obrázku.

Derivace $(e^x)' = e^x$, proto směrnice průběhu funkce pro $x = 0$ je rovna 1. Pokud se argument násobí, směrnice se mění podle násobku (viz obr. 10.9). Důležitý, jako řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu, je záporný reálný násobek argumentu funkce ($y = e^{-x}$)

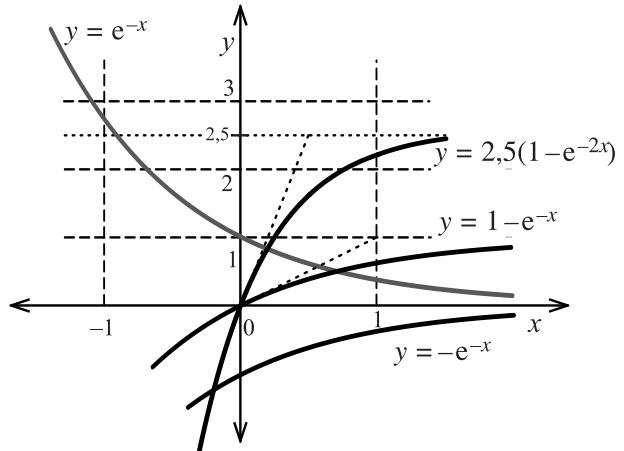
Na dalších grafech 10.10 a 10.11 jsou zaznamenány konktrétní případy přirozené exponenciální funkce, aby byl zřejmý vliv parametrů na průběh funkce.

10.6.4 Goniometrické funkce

Goniometrické funkce sínus a kosínus jsou základní periodické funkce. Definice se provádí na jednotkové kružnici (viz. obrázek 10.12). Funkce sínus úhlu α je dána jako poměr protilehlé odvěsně ku přeponě. Funkce kosínus se dána jako poměr přilehlé odvěsně ku přeponě. Na jednotkové kružnici má přepona délku 1, proto délka přilehlé resp. protilehlé odvěsně dává



Obrázek 10.10: Exponenciální funkce



Obrázek 10.11: Exponenciální funkce

přímo hodnotu funkce kosínus resp. sínus.

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin(x) \quad (10.79)$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos(x) \quad (10.80)$$

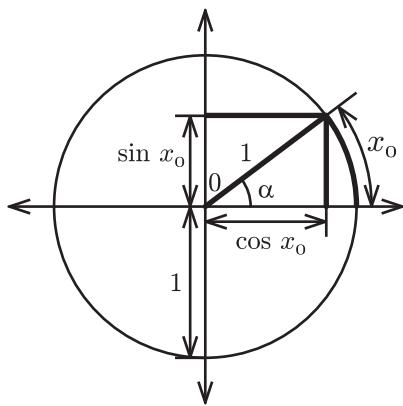
$$\text{pro } k \in \mathbb{Z} \quad (10.81)$$

Funkce sínus má definiční obor $(-\infty; \infty)$, obor funkčních hodnot $\langle -1; 1 \rangle$, periodu 2π a je lichá, tedy platí:

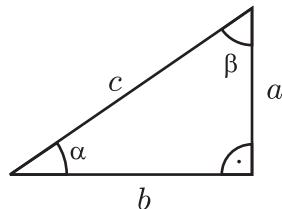
$$\sin(-x) = -\sin x \quad (10.82)$$

a funkce kosínus má stejný definiční obor i obor funkčních hodnot, jako funkce sinus, a stejnou periodu. Na rozdíl od funkce sínus je sudá:

$$\cos(-x) = \cos x \quad (10.83)$$



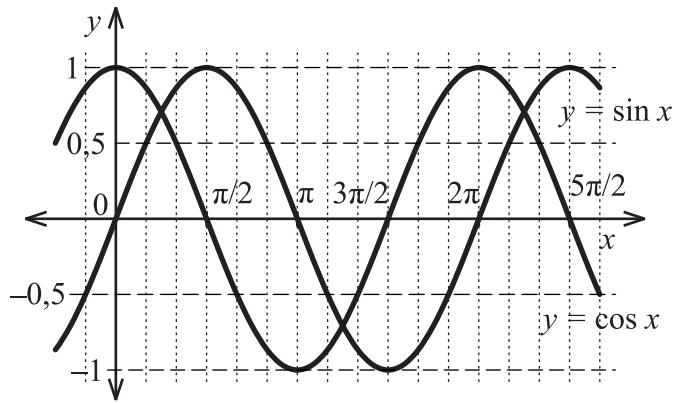
Obrázek 10.12: Definice funkce sínus a kosínus na jednotkové kružnici.



Obrázek 10.13: Pravoúhlý trojúhelník

Dále je možné určit hodnoty funkce sínus a kosínus pro konkrétní úhly. Pokud jednotkovou kružnicí rozdělíme na 8 dílů, a k jednomu dílu sestrojíme pravoúhlý trojúhelník podle definice

funkcí kosínus a sínus, je protilehlý úhel β k úhlu α úhel opět stejné velikosti: $2\pi/8 = \pi/4$ (součet úhlů v trojúhelníku je π rad.), přilehlá i protilehlá odvěsna jsou stejně dlouhé. Pokud je délka protilehné i přilehlé odvěsny $a = b = o$ a délka přepony $c = 1$, musí platit Pythagorova věta:



Obrázek 10.14: Funkce sínus a kosínus

$$o^2 + o^2 = 2 \cdot o^2 = 1 \quad (10.84)$$

Délka odvěsny je potom

$$o = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (10.85)$$

Hodnota $\sin \frac{\pi}{4}$ a $\cos \frac{\pi}{4}$ je stejná:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{o}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (10.86)$$

Pokud jednotkovou kružnici rozdělíme na 12 dílů, a k jednomu dílu sestrojíme pravoúhlý trojúhelník, je úhel $\alpha = 2\pi/12 = \pi/6$, úhel $\beta = \pi - \pi/2 - \pi/6 = \pi/3$. Protože je sestrojený trojúhelník polovinou rovnostranného trojúhelníku, je délka protilehlé odvěsny poloviční vůči přeponě $a = \frac{1}{2}$. Vůči úhlu β je zmíněná odvěsna přilehlá, proto pro velikost sínu úhlu $\alpha = \frac{\pi}{6}$ a kosínu úhlu $\beta = \frac{\pi}{3}$ platí:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{2} \quad (10.87)$$

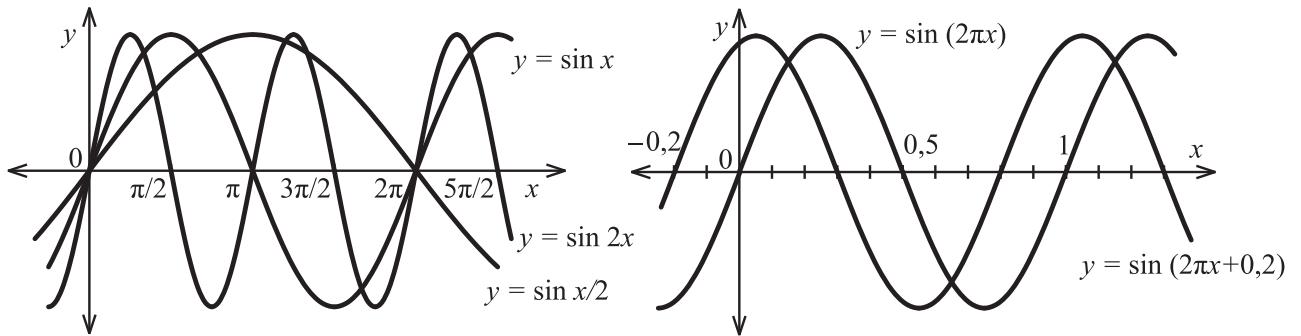
Délka druhé odvěsny b se určí z Pythagorovy věty:

$$b = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (10.88)$$

proto pro velikost kosínu úhlu $\alpha = \frac{\pi}{6}$ a sínu úhlu $\beta = \frac{\pi}{3}$ platí:

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (10.89)$$

Velikosti sínus a kosínu pro zmíněné hodnoty i pro celou periodu jsou vyznačeny na obrázku 10.14.



Obrázek 10.15: Dvojnásobek a polovina argumentu funkce sínus. U dvojnásobku argumentu funkce $y = \sin 2x$ je možné pozorovat funkce sínus - délka periody se pak rovná dvojnásobné množství period funkce na stejném úseku osy x (funkce se zhustí), u poloviční funkce $y = \sin x/2$ prochází osou x v bodě $-0,2$ (funkce se natáhne).

Pokud k argumentu funkce sínus přičteme konstantu $\frac{\pi}{2}$, dostaneme funkci kosínus:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad (10.90)$$

Naopak musí platit:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \quad (10.91)$$

A potom podobně platí:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \quad (10.92)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad (10.93)$$

Důležité jsou vztahy pro součet argumentů funkcí sínus a kosínus.

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (10.94)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (10.95)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (10.96)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (10.97)$$

Odvození je možné přes komplexní čísla a Eulerův vztah $e^{ix} = \cos x - j \sin x$:

$$e^{j(x+y)} = e^{jx+jy} = e^{jx} \cdot e^{jy} \quad (10.98)$$

Pokud na krajní strany této rovnice aplikujeme Eulerův vztah, dostaneme:

$$\cos(x + y) + j \sin(x + y) = (\cos x + j \sin x) \cdot (\cos y + j \sin y) \quad (10.99)$$

Po roznásobení pravé strany:

$$\cos(x+y) + j \sin(x+y) = \cos x \cos y + j \sin x \cos y + j \cos x \sin y - \sin x \sin y \quad (10.100)$$

Reálná a imaginární složka se musí rovnat, proto platí uvedené rovnice. Zbývající rovnice se dají určit při aplikaci vzorců 10.82 a 10.83.

Součin goniometrických funkcí sínus a kosínus vychází z úpravy rovnic pro součet. Jelikož:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (10.101)$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y \quad (10.102)$$

potom:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos[(x+y) + \cos(x-y)] \quad (10.103)$$

Podobným způsobem je možné odvodit i další součiny:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos[(x-y) - \cos(x+y)] \quad (10.104)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin[(x+y) + \sin(x-y)] \quad (10.105)$$

Vzorce pro dvojnásobek argumentu:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (10.106)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (10.107)$$

Druhá mocnina goniometrických funkcí sínus a kosínus se může určit ze vzorců pro součin:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (10.108)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (10.109)$$

Součet druhých mocnin:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (10.110)$$



Mocniny goniometrických funkcí vyšších řádů:

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{4} \quad (10.111)$$

$$\cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos(3x)}{4} \quad (10.112)$$

$$\sin^4 x = \frac{\cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3}{8} \quad (10.113)$$

$$\cos^4 x = \frac{\cos(4x) + 4 \cos(2x) + 3}{8} \quad (10.114)$$

$$\sin^5 x = \frac{10 \sin x - 5 \sin(3x) + \sin(5x)}{16} \quad (10.115)$$

$$\cos^5 x = \frac{10 \cos x + 5 \cos(3x) + \cos(5x)}{16} \quad (10.116)$$

$$\sin^6 x = \frac{10 - 15 \cos(2x) + 6 \cos(4x) - \cos(6x)}{32} \quad (10.117)$$

$$\cos^6 x = \frac{10 + 15 \cos(2x) + 6 \cos(4x) + \cos(6x)}{32} \quad (10.118)$$

Vynásobení argumentů goniometrických funkcí sínus a kosínus konstantou, v grafu 10.15 je to dvojka a jedna polovina, dojde ke změně periody. Pro násobek větší, než jedna, se perioda zkrátí, stoupá frekvence; pro násobek menší než jedna se perioda prodlouží, klesá frekvence.

Důležitý násobek argumentu je 2π (graf č. 10.16). Tehdy je perioda rovna $T = 1$. Tato funkce pak může snadno vyjádřit libovolný harmonický průběh ve fyzice, pokud je zadána frekvence. Parametr φ , který se přičítá k argumentu funkce, se nazývá fáze, a umožňuje podle potřeby snadno nastavit počátek periody.



10.6.5 Lineární diferenciální rovnice pro přechodné jevy v obvodech

Průběh napětí nebo proudu při přechodném jevu v obvodu je možné popsat diferenciální rovnici. V lineárních obvodech veličiny popisují přímo lineární diferenciální rovnice. Ty vzniknou úpravou obvodových rovnic. Mezi prvky obvodu zahrnutými do rovnic jsou přitom i akumulativní prvky, kdy vztah průběh proudu na kapacitoru je derivací napětí na něm a průběh napětí na induktoru je derivace proudu, který induktorem protéká.

Obecný zápis lineární diferenciální rovnice n -tého řádu:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) \quad (10.119)$$

kde: $y(n)$ je sledovaná obvodová veličina

a_0 až a_n jsou konstantní koeficienty, které závisí na parametrech obvodových prvků
 $x(t)$ je tzv. budící funkce, (lineární kombinace napětí a proudů nezávislých zdrojů působících v obvodu a jejich derivací)

n je řád diferenciální rovnice, který nepřevyšuje počet kapacitorů nebo induktorů v obvodu.

Řešení diferenciální rovnice se provádí nejprve převedením obecné lineární diferenciální rovnice na homogenní diferenciální rovnici (zavede se $x(t) = 0$), tedy:

$$a_n \frac{d^n y_0}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_0}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy_0}{dt} + a_0 y_0 = 0 \quad (10.120)$$

Řešení diferenciální rovnice má pak dvě složky:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \quad (10.121)$$

kde: $y_0(t)$ je řešení homogenní diferenciální rovnice

$y_p(t)$ je partikulární řešení diferenciální rovnice

Obecné řešení diferenciální rovnice se určí z kořenů λ_1 až λ_n , které jsou kořeny **charakteristické rovnice** obvodu. Koeficienty se získají z homogenní diferenciální rovnice:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (10.122)$$

Tyto kořeny mohou být reálné nebo komplexní. Při řešení mohou nastat tři případy:

1. λ_1 až λ_n jsou reálné kořeny násobnosti 1, potom je řešení homogenní rovnice aperiodické:

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^n K_k e^{\lambda_k t} \quad (10.123)$$

2. Při λ_i — reálný kořen násobnosti r_i — je příslušná část řešení (mez aperiodicity)

$$y_{0r_i} = \left(\sum_{k=0}^{r_i-1} K_{i+k} t^k \right) e^{\lambda_i t} \quad (10.124)$$



3. $\lambda_{i,i+1} = -\alpha \pm j\omega_i$ - dvojice kořenů komplexně sdružených: příslušná část řešení je potom periodická:

$$y_{02}(t) = K_i e^{\lambda_i t} + K_{i+1} e^{\lambda_{i+1} t} = \quad (10.125)$$

$$= e^{-\alpha_i t} (A \sin \omega_i t + B \cos \omega_i t) = e^{-\alpha_i t} Y_m \sin (\omega_i t + \varphi) \quad (10.126)$$

Jelikož kořeny charakteristické rovnice λ_1 až λ_n stabilního obvodu splňují vztah:

$$\lambda_k < 0 \quad (10.127)$$

$$\operatorname{Re}\{\lambda_k\} = -\alpha_k < 0 \quad (10.128)$$

Pak je $y_0(t)$ přechodnou složkou celkového řešení, kde platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0 \quad (10.129)$$

a $y_p(t)$ je partikulární řešení, které představuje ustálenou složku celkového řešení:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_p(t) \quad (10.130)$$

Partikulární řešení se v teorii elektrických obvodů určuje analýzou ustáleného stavu v obvodu.

Matematické počáteční podmínky slouží k určení integračních konstant, které jsou bezprostředně po nalezení obecného řešení diferenciální rovnice neznámé. (Jde o konstanty K_1 až K_n , případně A , B , Y_m nebo φ). Matematické počáteční podmínky jsou souborem hodnot počítané veličiny y a jejích derivací $y^{(i)}$ až do řádu $i = n - 1$ na počátku přechodného děje, tedy v čase $t = 0_+$.

$$y(0_+), y'(0_+), y''(0_+), \dots, y^{(n-1)}(0_+) \quad (10.131)$$

Energetické počáteční podmínky je soubor hodnot veličin, který popisuje počáteční hodnoty energie akumulované v prvních obvodu na počátku přechodného jevu, tedy v čase $t = 0_+$. Energie se v lineárním obvodu akumuluje v kapacitorech ve formě elektrického náboje a v induktorech ve formě magnetického toku. Těmto veličinám odpovídá příslušné okamžité napětí na kapacitorech a proud, který prochází induktorem. Zároveň platí, že tyto veličiny musí být v čase spojité, tzn.:

$$u_{Ci}(0_+) = u_{Ci}(0_-) \quad (10.132)$$

$$i_{Lj}(0_+) = i_{Lj}(0_-) \quad (10.133)$$

10.7 Řešené a neřešené příklady z matematiky

10.7.1 Převody jednotek

Příklad 10.10: Převeďte velikost úhlu v radiánech na stupně, minuty a vteřiny. Výsledek uvedte v intervalu $(-180^\circ; +180^\circ)$. Zakreslete do pravoúhlého souřadného systému.

- a) π rad; b) $\frac{\pi}{3}$ rad; c) $\frac{\pi}{6}$ rad; d) $\frac{\pi}{15}$ rad; e) $-\frac{\pi}{2}$ rad; f) $-\frac{\pi}{6}$ rad; g) $2\frac{\pi}{3}$ rad; h) $3\frac{\pi}{2}$ rad; i) $-3\frac{\pi}{2}$ rad; j) $-5\frac{\pi}{6}$ rad.

Řešení: a) 90° ; b) 60° ; c) 30° ; d) 12° ; e) -90° ; f) -30° ; g) 120° ; h) -90° ; i) 90° ; j) -150°

Příklad 10.11: Převeďte velikost úhlu v radiánech na stupně, minuty a vteřiny. Výsledek uvedte v intervalu $(-180^\circ; +180^\circ)$.

- a) 1 rad; b) 0,5 rad; c) 2 rad; d) -1 rad; e) -2 rad; f) 7 rad; g) 36 rad; h) -12 rad; i) -56 rad; j) 5,213 rad; k) 32,154 rad; l) $-15,34$ rad;

Řešení: a) $57^\circ 17' 44.81''$, b) $28^\circ 38' 52.40''$, c) $114^\circ 35' 29.61''$, d) $-57^\circ 17' 44.81''$, e) $-114^\circ 35' 29.61''$, f) $41^\circ 4' 13.64''$, g) $-98^\circ 38' 53.02''$, h) $33^\circ 32' 57.67''$, i) $32^\circ 33' 49.15''$, j) $-62^\circ 40' 58.43''$, k) $42^\circ 17' 18.58''$, l) $-158^\circ 55' 2.13''$,

Příklad 10.12: Převeďte velikost úhlu ve stupních na radiány. (výsledek uvedte jako součin zlomku a čísla π v intervalu $(-\pi; +\pi)$).

- a) 150° ; b) 15° ; c) 30° ; d) 135° ; e) -60° ; f) -30° ; g) -120° ; h) -150° ;

Řešení:

$$\text{a) } \frac{5}{6}\pi \text{ rad, b) } \frac{1}{12}\pi \text{ rad, c) } \frac{1}{6}\pi \text{ rad, d) } \frac{3}{4}\pi \text{ rad, e) } -\frac{1}{3}\pi \text{ rad, f) } -\frac{1}{6}\pi \text{ rad, g) } -\frac{2}{3}\pi \text{ rad, h) } -\frac{5}{6}\pi \text{ rad}$$

Příklad 10.13: Převeďte velikost úhlu ve stupních na radiány. (výsledek uvedte jako součin zlomku a čísla π v intervalu $(-\pi; +\pi)$).

- a) 615° ; b) 204° ; c) 126° ; d) 198° ; e) -168° ; f) -234° ; g) -39° ; h) -21° ; i) -456° ; j) -402° ;

Řešení:

$$\text{a) } \frac{-7}{12}\pi \text{ rad, b) } \frac{-13}{15}\pi \text{ rad, c) } \frac{7}{10}\pi \text{ rad, d) } \frac{-9}{10}\pi \text{ rad, e) } \frac{-14}{15}\pi \text{ rad, f) } \frac{7}{10}\pi \text{ rad, g) } \frac{-13}{60}\pi \text{ rad, h) } \frac{-7}{60}\pi \text{ rad, i) } \frac{-8}{15}\pi \text{ rad, j) } \frac{-7}{30}\pi \text{ rad.}$$

Příklad 10.14: Převeďte velikost úhlu ve stupních na radiány (výsledek uvedte ve formě desetinného rozvoje na 6 platných míst v intervalu $(-\pi; +\pi)$).

- a) $-77^\circ 30' 57''$; b) $13^\circ 20' 13''$; c) $26^\circ 22' 24''$; d) $38^\circ 24' 35''$; e) $63^\circ 26' 46''$; f) $77^\circ 40' 11''$; g) $-13^\circ 55' 14''$; h) $-26^\circ 3' 22''$;

Řešení: a) $-1,35291$ rad, b) $0,23277$ rad, c) $0,46030$ rad, d) $0,67038$ rad, e) $1,10734$ rad, f) $1,35559$ rad, g) $-0,24296$ rad, h) $-0,45476$ rad.

Příklad 10.15: Převeďte velikost úhlu ve stupních na radiány (výsledek uvedte ve formě desetinného rozvoje na 6 platných míst v intervalu $(-\pi; +\pi)$).

- a) $1563^\circ 15' 15''$; b) $444^\circ 16' 14''$; c) $563^\circ 10' 20''$; d) $546^\circ 11' 19''$; e) $852^\circ 12' 18''$; f) $1000^\circ 19' 11''$



Řešení: : a) 2,15119 rad, b) 1,47080 rad, c) -2,74317 rad, d) -3,04016 rad, e) 2,30741 rad, f) -1,40184 rad.

10.7.2 Násobné jednotky

Příklad 10.16: Převeďte do základních jednotek

- a) $1 \mu\text{A}$; b) 10 kW ; c) $100 \mu\text{V}$; d) 10 pF ; e) 50 nA ; f) 20 GJ ; g) 12 TW ; h) 10 MHz

Řešení: a) $1 \cdot 10^{-6} \text{ A}$; b) $1 \cdot 10^4 \text{ W}$; c) $1 \cdot 10^{-4} \text{ V}$; d) $1 \cdot 10^{-11} \text{ F}$; e) $5 \cdot 10^{-8} \text{ A}$; f) $2 \cdot 10^{10} \text{ J}$; g) $1,2 \cdot 10^{13} \text{ W}$; f) $1 \cdot 10^7 \text{ Hz}$;

Příklad 10.17: Převeďte do nevhodnějších násobných jednotek.

- a) $1,2 \cdot 10^{+6} \text{ W}$; b) $33 \cdot 10^{-9} \text{ F}$; c) $1,2 \cdot 10^{+4} \text{ Hz}$;
- d) $523 \cdot 10^{+2} \text{ J}$; e) $48,2 \cdot 10^{-1} \text{ V}$; f) $8,556 \cdot 10^{+3} \text{ W}$;
- g) $123,2 \cdot 10^{-6} \text{ H}$; h) $0,235 \cdot 10^{-11} \text{ F}$

Řešení: a) $1,2 \text{ MW}$; b) 33 nF ; c) 12 kHz ; d) $52,3 \text{ kJ}$; e) $4,82 \text{ V}$; f) $8,556 \text{ kW}$; g) $123,2 \mu\text{H}$; f) $2,35 \text{ pF}$;

Příklad 10.18: Převeďte do násobné jednotky uvedené v závorce.

- a) $0,225 \cdot 10^{+3} \text{ MHz}$ (kHz); b) $1,245 \cdot 10^{+6} \text{ pF}$ (nF); c) $1,254 \cdot 10^{+3} \mu\text{A}$ (mA);
- d) $5,466 \cdot 10^{+3} \text{ V}$ (μV); e) $1546 \cdot 10^{-5} \text{ mH}$ (μH); f) $13,2 \cdot 10^{+11} \text{ mW}$ (MW);
- g) $131,2 \cdot 10^{+4} \text{ km}$ (cm); h) $1,204 \cdot 10^{+2} \text{ MPa}$ (HPa)

Řešení: a) $2,25 \cdot 10^{+5} \text{ kHz}$; b) $1,245 \cdot 10^{+3} \text{ nF}$; c) $1,254 \text{ mA}$; d) $5,466 \cdot 10^{+9} \mu\text{V}$; e) $15,46 \mu\text{H}$; f) 1320 MW ; g) $1,312 \cdot 10^{+11} \text{ cm}$; f) $1,204 \cdot 10^{+6} \text{ HPa}$;

10.7.3 Komplexní čísla

Příklad 10.19: Převeďte ze složkového tvaru komplexního čísla na exponenciální. Argument uveďte v radiánech.

- a) $5 + j12$; b) $5 - j12$; c) $-12 + j5$; d) $3 + j4$; e) $3 - j4$; f) $12 + j5$; g) $12 - j5$;
- h) $-4 - j3$; i) $-4 + j3$;

Řešení: a) $13 \cdot e^{j \cdot 1,176}$; b) $13 \cdot e^{-j \cdot 1,176}$; c) $13 \cdot e^{j \cdot 2,7468}$; d) $5 \cdot e^{j \cdot 0,9273}$; e) $5 \cdot e^{-j \cdot 0,9273}$; f) $13 \cdot e^{j \cdot 0,39479}$; g) $13 \cdot e^{-j \cdot 0,39479}$; h) $5 \cdot e^{-j \cdot 2,4981}$; i) $5 \cdot e^{j \cdot 2,4981}$

Příklad 10.20: Převeďte ze složkového tvaru komplexního čísla na exponenciální. Argument uveďte v radiánech.

- a) $3 - j2$; b) $2 + j2$; c) $1 + j2$; d) $-5 + j2$; e) $-4 + j2$; f) $-3 - j2$; g) $2 - j2$;
- h) $1 - j2$; i) $-2 - j12$; j) $-2 + j12$;

Řešení: a) $3,6056 \cdot e^{-j \cdot 0,588}$; b) $2,8284 \cdot e^{j \cdot 0,7854}$; c) $2,2361 \cdot e^{j \cdot 1,1071}$; d) $5,3852 \cdot e^{j \cdot 2,7611}$; e) $4,4721 \cdot e^{j \cdot 2,6779}$; f) $3,6056 \cdot e^{-j \cdot 2,5536}$; g) $2,8284 \cdot e^{-j \cdot 0,7854}$; h) $2,2361 \cdot e^{-j \cdot 1,1071}$; i) $12,166 \cdot e^{-j \cdot 1,7359}$; j) $12,166 \cdot e^{j \cdot 1,7359}$;

Příklad 10.21: Převeďte ze složkového tvaru komplexního čísla na exponenciální. Argument uveďte v radiánech.



- a) $-4,544 - j5,656$; b) $-8,84 - j5,656$; c) $-1,212 + j3,656$; d) $-6,54 + j5,144$;
e) $-4,544 + j5,633$; f) $-8,84 + j7,554$; g) $-2,311 - j5,656$; h) $-1,212 - j5,656$;

Řešení: a) $7,2552 \cdot e^{-j \cdot 2,2476}$; b) $10,495 \cdot e^{-j \cdot 0,56918}$; c) $3,8517 \cdot e^{j \cdot 1,8909}$; d) $8,3206 \cdot e^{j \cdot 2,4751}$;
e) $7,2373 \cdot e^{j \cdot 2,2496}$; f) $11,628 \cdot e^{j \cdot 2,4345}$; g) $6,1099 \cdot e^{-j \cdot 1,9587}$; h) $5,7844 \cdot e^{-j \cdot 1,7819}$;

Příklad 10.22: Převeďte z exponenciálního tvaru na složkový

- a) $9e^{j\frac{\pi}{3}}$; b) $0,5e^{j\frac{\pi}{6}}$; c) $1e^{j\frac{\pi}{4}}$; d) $2e^{j\frac{\pi}{3}}$; e) $3e^{j\frac{\pi}{6}}$; f) $4e^{j\frac{\pi}{4}}$; g) $5e^{j\frac{\pi}{3}}$; h) $7e^{j\frac{\pi}{4}}$;
i) $6e^{j\frac{\pi}{6}}$; j) $8e^{j\frac{\pi}{2}}$

Řešení: a) $4,5 + j7,7942$; b) $0,43301 + j0,25$; c) $0,70711 + j0,70711$; d) $1 + j1,7321$; e) $2,5981 + j1,5$;
f) $2,8284 + j2,8284$; g) $2,5 + j4,3301$; h) $4,9497 + j4,9497$; i) $5,1962 + j3$; j) $0 + j8$;

Příklad 10.23: Převeďte z exponenciálního tvaru na složkový

- a) $3,14159e^{-j\frac{2\pi}{3}}$; b) $1,101e^{-j\frac{\pi}{3}}$; c) $1,234e^{-j\frac{2\pi}{3}}$; d) $2,342e^{-j\frac{\pi}{3}}$; e) $2,164e^{-j\frac{2\pi}{3}}$; f) $5,244e^{-j\frac{\pi}{3}}$;
g) $8,122e^{-j\frac{2\pi}{3}}$; h) $9,15e^{-j\frac{\pi}{3}}$; i) $11,62e^{-j\frac{2\pi}{3}}$; j) $1,141e^{-j\frac{\pi}{3}}$

Řešení: a) $-1,5708 - j2,7207$; b) $0,5505 - j0,95349$; c) $-0,617 - j1,0687$; d) $1,171 - j2,0282$;
e) $-1,082 - j1,8741$; f) $2,622 - j4,5414$; g) $-4,061 - j7,0339$; h) $4,575 - j7,9241$; i) $-5,81 - j10,063$;
j) $0,5705 - j0,98813$;

Příklad 10.24: Převeďte z exponenciálního tvaru na složkový

- a) $5e^{-j^2}$; b) $\sqrt{3}e^{-j^2}$; c) $2e^{-j^2}$; d) $1e^{-j1,5}$; e) $1,5e^{-j1}$; f) $\sqrt{2}e^{+j2,4}$; g) $2,5e^{-j^2}$;
h) $2e^{+j3,14}$

Řešení: a) $-2,0807 - j4,5465$; b) $-0,72079 - j1,5749$; c) $-0,83229 - j1,8186$; d) $0,070737 - j0,99749$;
e) $0,81045 - j1,2622$; f) $-1,0428 + j0,95525$; g) $-1,0404 - j2,2732$; h) $-2 - j0,003185$;

Příklad 10.25: Převeďte z exponenciálního tvaru na složkový (úhel je zadán v radiánech)

- a) $19,2e^{j25,2}$; b) $21,5e^{j34,2}$; c) $2,54e^{j54,2}$; d) $2,21e^{j21,2}$; e) $3,45e^{j33,2}$; f) $6,55e^{j76,2}$;
g) $7,12e^{j99,2}$; h) $14,89e^{j36,2}$; i) $11,35e^{j81,2}$

Řešení: a) $19,157 + j1,2904$; b) $-20,141 + j7,524$; c) $-1,7825 - j1,8095$; d) $-1,5537 + j1,5717$;
e) $-0,73024 + j3,3718$; f) $4,5551 + j4,7068$; g) $1,6913 - j6,9162$; h) $1,0665 - j14,852$;
i) $10,06 - j5,2554$;

Příklad 10.26: Spočtěte do složkového tvaru.

- a) $\frac{1+j}{1-j}$; b) $\frac{1-j}{1+j}$; c) $\frac{1}{1-j}$; d) $\frac{1}{1+j}$; e) $\frac{2}{2-j}$; f) $\frac{2}{2+j}$; g) $\frac{1}{j-2}$; h) $\frac{1}{j-1}$;
i) $\frac{2j}{2-j}$; j) $\frac{2j}{2+j}$;

Řešení: a) $0 + j1$; b) $0 - j1$; c) $0,5 + j0,5$; d) $0,5 - j0,5$; e) $0,8 + j0,4$; f) $0,8 - j0,4$; g) $0,2 - j0,4$;
h) $1 - j1$; i) $-0,4 + j0,8$; j) $0,4 + j0,8$;

Příklad 10.27: Spočtěte do složkového tvaru.

- a) $\left(\frac{2}{2-j}\right)^2$; b) $\left(\frac{2}{2+j}\right)^2$; c) $\left(\frac{2+i}{2-j}\right)^2$; d) $\left(\frac{j-2}{2+j}\right)^2$; e) $\frac{j}{(1+j)^2}$; f) $\frac{j}{(1-j)^2}$;
g) $\frac{1}{(1+j)^2}$; h) $\frac{1}{(1-j)^2}$; i) $\left(\frac{1}{1-j}\right)^2$; j) $\left(\frac{1}{1+j}\right)^2$;



Řešení: a) $0,48 + j0,64$; b) $0,48 - j0,64$; c) $-0,28 + j0,96$; d) $-0,28 - j0,96$; e) $0,5 + j0$;
f) $-0,5 + j0$; g) $0 - j0,5$; h) $0 + j0,5$; i) $0 + j0,5$; i) $0 - j0,5$;

Příklad 10.28: Spočtěte do složkového tvaru.

a) $\left(\frac{1+j}{1-j}\right)^3$; b) $\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^3$; c) $\left(\frac{1}{1-j}\right)^3$; d) $\left(\frac{1}{1+j}\right)^3$; e) $\left(\frac{2}{2-j}\right)^3$; f) $\left(\frac{2}{2+j}\right)^3$;
g) $\left(\frac{j+1}{1-j}\right)^4$; h) $\left(\frac{j-1}{1+j}\right)^4$; i) $\left(\frac{2j}{2-j}\right)^4$; j) $\left(\frac{2j}{2+j}\right)^4$;

Řešení: a) $0 - j1$; b) $0 + j1$; c) $-0,25 + j0,25$; d) $-0,25 - j0,25$; e) $0,128 + j0,704$; f) $0,128 - j0,704$;
g) $1 + j0$; h) $1 + j0$; i) $-0,1792 + j0,6144$; i) $-0,1792 - j0,6144$;



Literatura

- [1] Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky. Díl 1, Matematická logika, množiny, základy algebry, analytická geometrie, diferenciální pocet, numerické a grafické metody. SNTL Praha 1989 ISBN 8003001501 (9788003001507)
- [2] Košek, M., Mikolanda, T.: Cvičení z teorie elektrických obvodů. Technická univerzita v Liberci 2005 ISBN 80-7372-006-X
- [3] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 1. Vydavatelství ČVUT Praha 2003, ISBN 80-01-02519-5
- [4] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 2. Vydavatelství ČVUT Praha 200, ISBN 80-01-02462-8
- [5] Čmejla, R., Havlíček, V., Zemánek, I.: Základy teorie elektrických obvodů 1. Vydavatelství ČVUT Praha 2007, ISBN 978-80-01-02993-0
- [6] Čmejla, R., Havlíček, V., Zemánek, I.: Základy teorie elektrických obvodů 2. Vydavatelství ČVUT Praha 2007, ISBN 978-80-01-03690-7
- [7] Benešová, Z., Kůs, J., Ledvinková, M., Mayer, D.: Elementární příklady z teorie elektrických obvodů. Západočeská univerzita v Plzni Plzeň 2006, ISBN 80-7043-451-1
- [8] Alexander, Charles: Fundamentals of electric circuits. 2nd ed. McGraw-Hill 2003, ISBN 9780072493504
- [9] Hlávka, J., Klátil, J., Kubík, S.: Komplexní proměnná v elektrotechnice 1. vyd. ed. SNTL Praha, 1990, ISBN 80-03-00144-3
- [10] Floyd, T.: Principles of electric circuits: conventional current version, 8th ed. ed. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River N.J. 2007.
- [11] Nahvi, M.: Schaum's outline of theory and problems of electric circuits, 4th ed. ed. McGraw-Hill, New York.2003
- [12] ROUS, Bedřich.: Materiály pro elektroniku a mikroelektroniku. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1991, 463 s. ISBN 80-03-00617-1

Poděkování: Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů.
Formát zpracování originálu: titulní list barevně, další listy včetně příloh barevně.

Název	Elektrické obvody: teorie a cvičení
Autor	Martin Černík
Určeno	pro studenty oboru Elektronické a informační systémy Technické univerzity v Liberci
Vydavatel	Technická univerzita v Liberci
Schváleno	Rektorátem TU v Liberci dne 2.12.2014, čj. RE 132/14
Vyšlo	v prosinci 2014
Počet stran	270
Vydání	první
Číslo publikace	55-132-14

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou

ISBN 978-80-7494-161-0



9 788074 941610