МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»

Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

По дисциплине/междисциплинарному курсу/модулю Параллельные методы решения вычислительно-сложных естественно-научных задач

На тему Решение двумерного нестационарного уравнения теплопроводности параллельными численными методами

Выполнил обучающийся:
Поташев Н. А.
Направление подготовки/специальность:
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Руководитель:
Юфряков А.В.

Архангельск
2019

1 Постановка задачи

Цель лабораторной работы - реализация параллельного алгоритма решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности численными методами.

1.1 Непрерывная модель

Во время выполнения работы была рассмотрена следующая задача: найти решение уравнения,

$$\begin{cases} \alpha(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \frac{\partial u}{\partial t}, & x,y,t \in D \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & x,y,t \in D \\ u(x,y,t) = g(x,y,t), & x,y,t \in D^0 \\ t > 0 \end{cases}$$

удовлетворяющее граничным условиям вида:

$$u(x,y,t) = x^2 - y^2,$$

где $\varphi(x,y) = 0$ и $\alpha = 1$ - коэффициент теплопроводности,

1.1.1 Единственность решения непрерывной модели

Теорема: задача нахождения решения уравнения теплопроводности может иметь только одно классическое решение.[1]

Предположим обратное. Пусть существуют два классических решения u_1 и u_2. Функции u_1 и u_2 ограничены |u_k| <= M и непрерывны в D. Рассмотрим функцию $v(x,t) = u_1 - u_2$. Функция $v(x,t)$ ограничена, непрерывна в D и удовлетворяет в области D уравнению теплопроводности и начальному условию.

Однако применить к функции $v(x,t)$ принцип максимума нельзя, поскольку в неограниченной по x области функция $v(x,t)$ может нигде не принимать максимального значения.

Чтобы воспользоваться принципом максимума, рассмотрим ограниченную по x область |x| <= L, где L > 0 - вспомогательное число, которое может неограниченно увеличиваться. Введем вспомогательную функцию:

$$\omega(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$

В ограниченной области L будет справедлив принцип максимума. Применяя принцип сравнения к функциям $\omega(x,t)$ и $v(x,t)$ получим:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) <= v(x,t) <= \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$

Зафиксируем точку (x,t) из L, перейдем к пределу. Тогда по известной теореме анализа получим предел, равный 0.

Отсюда в силу независимости функции $v(x,t)$ от L и в силу произвольности точки (x,t) получаем, что всюду в области D функция $v(x,t) \equiv 0$. Поэтому всюду в области D $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, т.е. решение единственно.

[1] Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с. http://sci.sernam.ru/lect_mph.php?id=86. стр. 211.

1.1.2 Устойчивость решения непрерывной модели

Теорема устойчивости используется для оценки точности приближенных и численных решений уравнения теплопроводности, поскольку достаточно оценить выполнение граничных условий.

Для классического решения однородного уравнения теплопроводности справедлива оценка (см. док-во)[2]:

$$|u(x,t) - u'(x,t)| <= Ct_0^{-\frac{1}{4}}\epsilon^{\frac{1}{2}}$$

1.2 Дискретная модель

Одним из наиболее распространенных подходов численного решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей (метод сеток). Построим явную разностную схему, шаблон которой изображен на рис. 1. Аппроксимируя производные отношениями конечных разностей, получим следующее сеточное уравнение:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2}$$

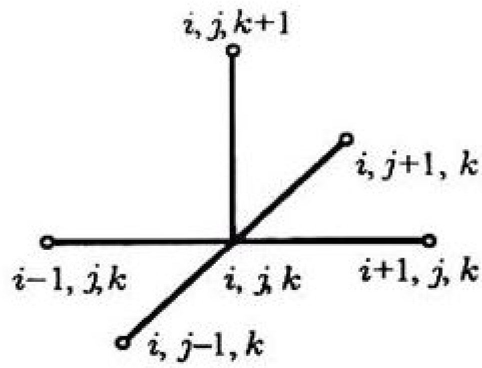

Рис. 1: Шаблон двумерной схемы

Отсюда можно найти явное выражение для значения сеточной функции на (k+1) - том слое:

$$u_{ij}^{k+1} = (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)u_{ij}^k + \lambda_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) + \lambda_2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k),$$

$$\lambda_1 = \frac{\tau}{h_1^2}, \lambda_2 = \frac{\tau}{h_2^2},$$

Разностное уравнение, записанное в подобной форме, позволяет определять значение u_{ij} по известным значениям функции $u(x, y, t)$ в соседних узлах используемого шаблона. Данное выражение служит основой для построения различных итерационных схем решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности, в которых в начале вычислений формируется некоторое приближение для значений u_{ij} , а затем эти значения последовательно уточняются в соответствии с приведенным соотношением.

[2] Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с. http://sci.sernam.ru/lect_mph.php?id=90. стр. 222.

1.2.1 Устойчивость дискретной модели

Условие устойчивости данной задачи имеет вид:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\tau}{h_1^2} + \frac{\tau}{h_2^2} <= \frac{1}{2}$$

При

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

получается частный случай выражения:

$$u_{ij}^{k+1} = \lambda_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) + \lambda_2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k),$$

1.2.2 Сходимость дискретной модели

Сходимость разностной схемы к решению дифференциальной задачи [3] Порядок сходимости разностной схемы - $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ [4]

2 Выполнение работы

В ходе выполнения данной работы выполнены следующие задачи:

- разработана программа, выполняющая параллельный алгоритм решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности;
- построены графики поверхностей результирующей функции u(x,y,t).

2.1 Алгоритм

Был реализован параллельный алгоритм решения задачи решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности см. Листинг 1.

```
    first_st_u(u[0], X, Y);      //fill u in t =0
    first_cond_u(u[0], X, Y, 0); //full bounds in t =0

    for (size_t iT = 1; iT < nT + 1; iT++)
    {
    #pragma omp parallel for
        for (size_t i = 1; i < Y - 1; i++)
          for (size_t j = 1; j < X - 1; j++)

              u[iT][i][j] = c * u[iT - 1][i][j] + l1 * (u[iT - 1][i][j + 1] + u[iT - 1][i][j - 1]) + l2 * (u[iT - 1][i + 1][j] +        u[iT - 1][i - 1][j]);

        // recalc bounds in t = iT
        first_cond_u(u[iT], X, Y, t * iT);
}
```

Листинг 1: реализация алгоритма

[3] https://docplayer.ru/39055124-Glava-5-raznostnye-metody-resheniya-uravneniy-v-chastnyh-proizvodny html стр. 7

[4] https://3ys.ru/metody-resheniya-differentsialnykh-uravnenij/uravnenie-teploprovodnosti.html

2.2 Тестирование

Параллельный алгоритм решения был протестирован на наборе краевых условий с полученным результатом графика поверхности. При тестировании результат показал, что два графика совпадают. [5]

2.3 Результаты расчетов

Результатом выполнения программы был текстовой csv-файл с полученными поверхностями и временем работы программы. Были выполнены расчеты, а также были нарисованы графики поверхностей в разное время изменения температуры.

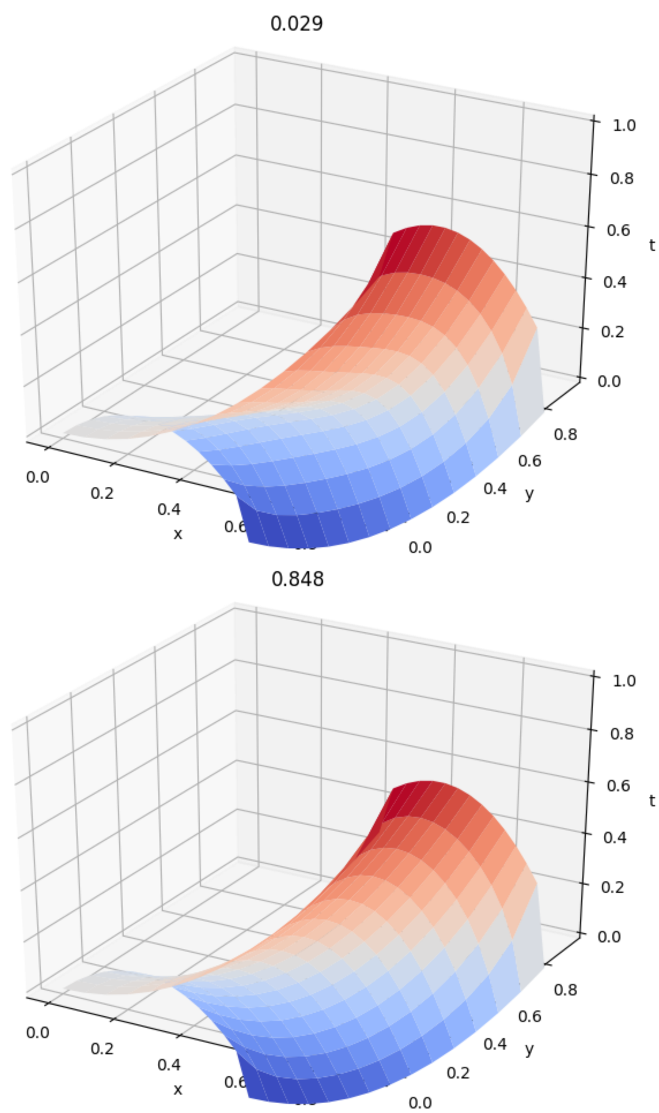

Рис. 2: График поверхности в разные моменты времени

[5] http://old.exponenta.ru/educat/systemat/martiyanova/6.asp. задача 6.4.

3 Вывод

В данной работе была написана программа по реализации параллельного алгоритма решения нестационарного двумерного уравнения теплопроводности, получены и проанализированы результаты решения нестационарного двумерного уравнения теплопроводности в заданной области, выведены графики поверхностей.