

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»

Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем

**ОТЧЕТ ПО
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ**

По дисциплине/междисциплинарному курсу/модулю Параллельные методы
решения вычислительно-сложных естественно-научных задач

На тему Решение двумерного нестационарного
волнового уравнения параллельными численными методами

Выполнил обучающийся:

Поташев Н. А.

Направление подготовки/специальность:

01.03.02 Прикладная математика и
информатика

Руководитель:

Юфряков А.В.

Архангельск
2019

1 Постановка задачи

Цель лабораторной работы - реализация параллельного алгоритма решения двумерного нестационарного волнового уравнения численными методами.

1.1 Непрерывная модель

Во время выполнения работы была рассмотрена следующая задача: найти решение уравнения,

$$\begin{cases} \alpha^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & x, y, t \in D \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & x, y, t \in D \\ u(x, y, t) = g(x, y, t), & x, y, t \in D^0 \\ t > 0 \end{cases}$$

удовлетворяющее граничным условиям вида:

$$u(x, y, t) = (e^x + \cos(y))t^2,$$

где $\varphi(x, y) = 0$ и $\alpha^2 = 1$ - фазовая скорость.

1.1.1 Существование, единственность и устойчивость решения непрерывной модели

Формула Даламбера дает возможность доказать существование, единственность и устойчивость двумерного волнового уравнения.¹:

1.2 Дискретная модель

Одним из наиболее распространенных подходов численного решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей (метод сеток). Построим явную разностную схему, шаблон которой изображен на рис. 1. Аппроксимируя производные отношениями конечных разностей, получим следующее сеточное уравнение:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - 2u_{ij}^k + u_{ij}^{k-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2}$$

Отсюда можно найти явное выражение для значения сеточной функции на $(k+1)$ - том слое:

$$u_{ij}^{k+1} = 2u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1} + r^2(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{ij}^k),$$

где $r = \tau/h$

Разностное уравнение, записанное в подобной форме, позволяет определять значение u_{ij} по известным значениям функции $u(x, y, t)$ в соседних узлах используемого шаблона. Данное выражение служит основой для построения различных итерационных схем решения двумерного нестационарного волнового уравнения, в которых в начале вычислений формируется некоторое приближение для значений u_{ij} , а затем эти значения последовательно уточняются в соответствии с приведенным соотношением.²:

¹Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с. http://sci.sernam.ru/lect_mph.php?id=106 стр. 270

²The Wave Equation in 1D and 2D Knut–Andreas Lie Dept. of Informatics, University of Oslo. <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/nedlagte-emner/INF2340/v05/foiler/sim04.pdf>

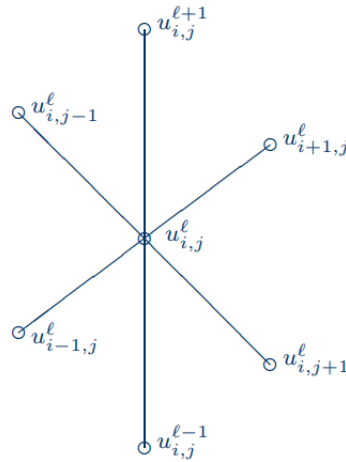


Рис. 1: Шаблон трехслойной схемы

1.2.1 Устойчивость дискретной модели

Известно, что для вычислительной устойчивости данной разностной схемы необходимо и достаточно выполнения условия Куранта ³

$$\alpha\tau < h.$$

1.2.2 Сходимость дискретной модели

Сходимость разностной схемы к решению дифференциальной задачи ⁴ Порядок сходимости разностной схемы - $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$ ⁵

2 Выполнение работы

В ходе выполнения данной работы выполнены следующие задачи:

- разработана программа, выполняющая параллельный алгоритм решения двумерного нестационарного волнового уравнения;
- построены графики поверхностей результирующей функции $u(x,y,t)$.

2.1 Алгоритм

Был реализован параллельный алгоритм решения задачи решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности см. Листинг 1.

³Образовательный комплекс «Параллельные численные методы» Лекционные материалы Баркалов К.А. стр. 9

⁴<https://docplayer.ru/39055124-Glava-5-raznostnye-metody-resheniya-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnykh.html> стр. 7

⁵ <https://3ys.ru/metody-resheniya-differentsialnykh-uravnenij/uravnenie-teploprovodnosti.html>

```

1  float fi(float x, float y)
2  {
3      return (exp(x)+cos(y))*0.1;
4  }
5  for (float t = 2 * tau; t <= tmax; t += tau)
6  {
7      #pragma omp for schedule(static)
8          for (int i = 1; i < N - 1; i++)
9              for (int j = 1; j < N - 1; j++)
10                 u2[i][j] = 2.0 * u1[i][j] - u0[i][j] + r * (u1[i - 1][j] + u1[i + 1][j] +
11                    u1[i][j - 1] + u1[i][j + 1] - 4.0 * u1[i][j]);
12
13     #pragma omp for schedule(static)
14         for (int i = 1; i < N - 1; i++)
15             for (int j = 1; j < N - 1; j++)
16                 {
17                     u0[i][j] = u1[i][j];
18                     u1[i][j] = u2[i][j];
19                 }
20
21     makeCSV(u1, N, N, tau * counter, counter);
22     counter++;
23 }

```

Листинг 1: реализация алгоритма

2.2 Тестирование

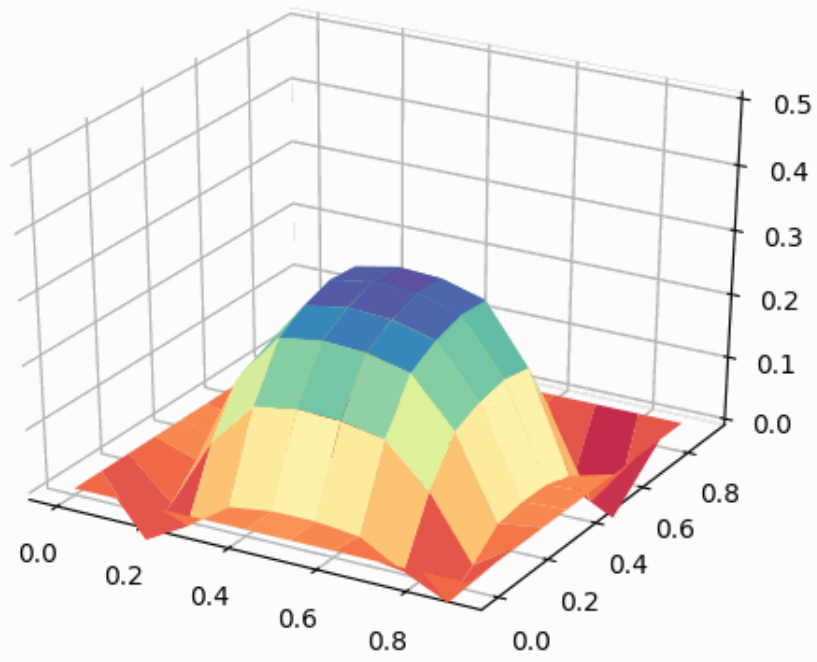
Параллельный алгоритм решения был протестирован на наборе краевых условий с полученным результатом графика поверхности. При тестировании результат показал, что два графика совпадают.⁶

2.3 Результаты расчетов

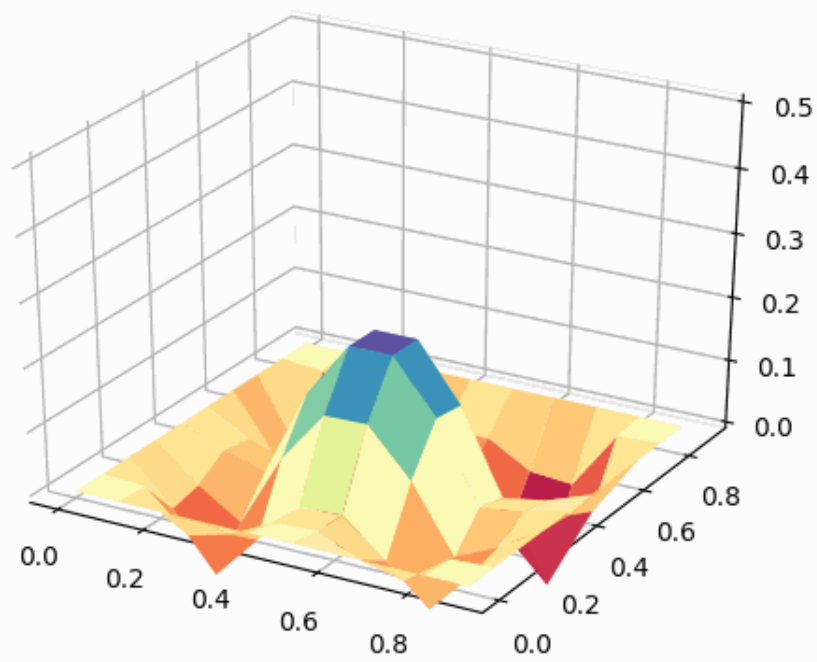
Результатом выполнения программы был текстовый csv-файл с полученными поверхностями и временем работы программы. Были выполнены расчеты, а также были нарисованы графики поверхностей в разное время колебания.

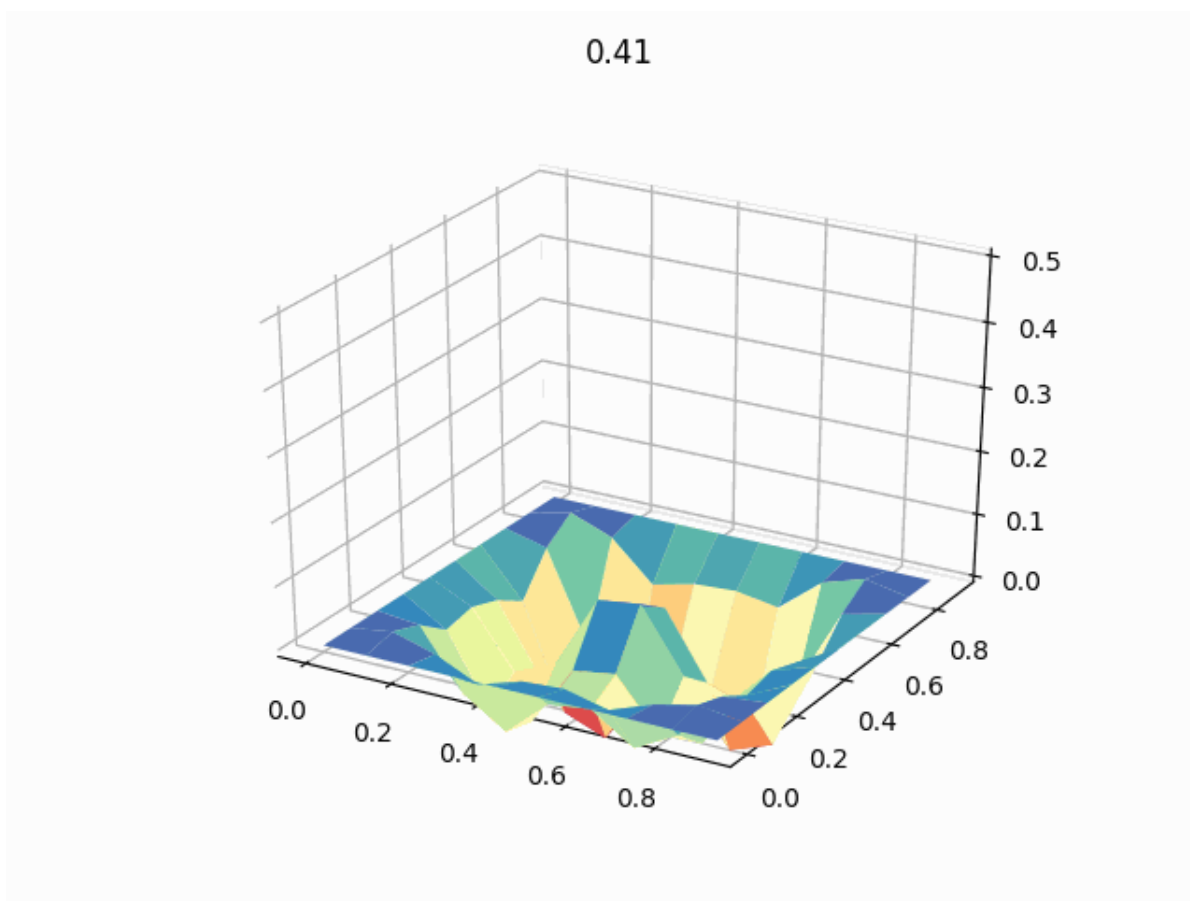
⁶ http://vst.ics.org.ru/uploads/vestnik/1_2015/15-01-09.pdf. стр 90

0.21



0.33





3 Вывод

В данной работе была написана программа по реализации параллельного алгоритма решения нестационарного двумерного волнового уравнения, получены и проанализированы результаты решения нестационарного двумерного волнового уравнения в заданной области, выведены графики поверхностей.