

# Aufgabe 5: Zeitoptimale Umsteuerung Brückenkran

Marcel Dzubba, Laura Kleckner

27. Juli 2022

## Systembeschreibung

Das System der Aufgabenstellung ist eine Laufkatze auf einem Brückenkran mit einer Antriebseinheit, wie in Abbildung 1 illustriert.

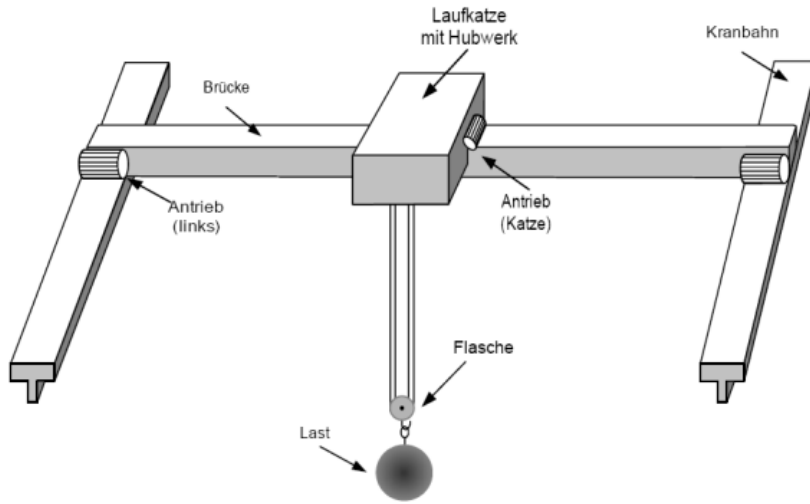


Abbildung 1: Brückenkran (aus [ADM22]).

Die Katzgeschwindigkeit  $x$  sei proportional geregelt,

$$\dot{x} = K_x \dot{x}_{\text{soll}}. \quad (1)$$

Die Beschreibung des Seilwinkels  $\varphi_x$  erfolgt mit

$$l_s \ddot{\varphi}_x + \ddot{x} + g \varphi_x = 0. \quad (2)$$

Dabei beschreibt  $l_s$  die Seillänge und  $g$  die Erdbeschleunigung.

Durch die Wahl des Zustandsvektors  $\mathbf{x} = [\dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}]^T$  ergibt sich die Zustandsraumbeschreibung zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{g}{l_s} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{l_s} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u, \quad (3)$$

mit

$$u = K_x \ddot{x}_{\text{soll}}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Das ganze System soll aus der Ruhelage zeitoptimal beschleunigt werden, sodass die Laufkatze eine vorgegebene Sollgeschwindigkeit erreicht. Dabei sei die Beschleunigung begrenzt,

$$a_{\min} \leq \ddot{x}_{\text{soll}} \leq a_{\max} \quad (5)$$

was äquivalent als Stellgrößenbeschränkung beschrieben werden kann,

$$\mathbf{g}(u) = \begin{bmatrix} u - u_{\max} \\ u_{\min} - u \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (6)$$

Zusätzlich soll sich die Last am Ende in Ruhe befinden und die Katzensgeschwindigkeit einen vorgegebenen Wert  $v_{\text{soll}}$  einnehmen,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t_f) = \begin{bmatrix} \varphi_x(t_f) \\ \dot{\varphi}_x(t_f) \\ \dot{x}(t_f) - v_{\text{soll}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

## Optimalsteuerungsproblem

Die Problemstellung wird in ein Optimalsteuerungsproblem überführt. Da die Aufgabe zeitoptimal gelöst werden soll ergibt sich das Kostenfunktional zu

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{t_f} dt = t_f \quad (8)$$

bezüglich der Dynamik (3), der Endbedingung (7), sowie der Zustandsbeschränkung (6).

## Lösungsverfahren

Zur Lösung von Optimalsteuerproblemen werden häufig direkte oder indirekte Kollokationsverfahren verwendet. Diese werden nach [Arn22] vorgestellt.

### Direkte Kollokation

Bei der direkten Kollokation wird das Optimierungsproblem so umformuliert, dass die approximierten Zustände und Stellgrößen zu diskreten Zeitpunkten als freie Parametern  $\mathbf{w}_c$  beschreiben werden,

$$\mathbf{w}_c = [\mathbf{x}_{\text{app}}^\top(t^0), \mathbf{u}_{\text{app}}^\top(t^0), \dots, \mathbf{u}_{\text{app}}^\top(t^{K-1}), \mathbf{x}_{\text{app}}^\top(t^K)]^\top. \quad (9)$$

Diese freien Zustände müssen den Kollokationsbedingungen genügen. Dabei wird  $\mathbf{x}_{\text{app}}$  als abschnittsweise linear, und  $\mathbf{u}_{\text{app}}$  als abschnittsweise konstante angenommen werden. Daraus ergibt sich die Kollokationsbedingung gemäß der impliziten Mittelpunkregel zu

$$\mathbf{x}_{\text{app}}^{k+1} - \mathbf{x}_{\text{app}}^k - \Delta t \mathbf{f}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{\text{app}}^{k+1} + \mathbf{x}_{\text{app}}^k), \mathbf{u}^k\right) = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Somit kann der Vektor  $\mathbf{h}(\mathbf{w}_c)$  um diese nichtlinearen Gleichheitsbedingungen erweitert werden. Außerdem muss  $\mathbf{w}_c$  auch die Gleichungsbeschränkungen  $\mathbf{g}(\mathbf{w}_c)$  erfüllen. Somit kann das Optimierungsproblem in Abhängigkeit der freien Parameter  $\mathbf{w}_c$  formuliert werden,

$$\min_{\mathbf{w}_c} \{J_{\text{app}}(\mathbf{w}_c) \mid \mathbf{h}(\mathbf{w}_c) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{w}_c) \leq \mathbf{0}\}. \quad (11)$$

Da die Anzahl der Optimierungsparameter groß ist, bietet sich zur Lösung Interior-Point Solver an. Bei diesem Ansatz werden die Optimalitätsbedingungen der Kozustände nicht verwendet, weshalb dieses Verfahren im Englischen auch als „discretize then optimize“ beschrieben werden. Sind jedoch keine Zustandsbeschränkungen aktiv, können die Kozustände über die Lagrange-Multiplikatoren approximiert werden [Arn22]. Diese können als Startwert für indirekte Verfahren verwendet werden.

## Indirekte Kollokation

Aufgrund der Problemstruktur der vorliegenden Aufgabe sollen lediglich steuerbare LTI Systeme betrachtet werden, wobei Stellgrößenbeschränkungen vorliegen, jedoch keine Zustandsbeschränkungen; es liege nur eine Stellgröße vor. Außerdem sei das Ziel der Optimierung, die zeitoptimale Lösung zu berechnen. Damit kann die Kozustands-DGL nach [Arn22] zu

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{A}^\top \mathbf{p} \quad (12)$$

formuliert werden. Die Hamilton-Funktion ergibt sich zu

$$H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 1 + \mathbf{p}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u), \quad (13)$$

mit der Transversalitätsbedingung

$$H(t_f) = 0. \quad (14)$$

Über das Maximumprinzip lässt sich ableiten, dass eine bang-bang Steuerung auf die zeitoptimale Lösung führt, wobei gilt

$$u = \begin{cases} u_{\min}, & \mathbf{p}^\top \mathbf{b} > 0 \\ u_{\max}, & \mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Der singuläre Fall kann hierbei ausgeschlossen werden, da  $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} = 0$  unter den beschriebenen Annahmen nur zu diskreten Zeitpunkten auftritt. Analog zur direkten Kollokation wird die Differentialgleichung (12) der Kozustände über die Approximation mittels der impliziten Mittelpunktregele, sowie die Transversalitätsbedingung in den Vektor der Gleichheitsbedingungen  $\mathbf{h}$  aufgenommen. Die Steuergröße ergibt sich aus (15) und ist daher nicht mehr in diesen Vektor aufzunehmen. Die Implementierung kann mithilfe des Matlabbefehls `bvp4c` erfolgen. Dabei wird die (Ko-) Differentialgleichung abschnittsweise als kubische Polynome approximiert. Da die Problemdimension im Vergleich zur direkten Kollokation erheblich steigt, führte dieser Algorithmus im Allgemeinen nicht ohne adäquate Startwerte zu einer Lösung. Daher ist es ratsam, mithilfe der direkten Kollokation eine Schätzung der Schaltzeitpunkte und den entsprechenden Minimal- bzw. Maximalwerte der Stellgröße zu generieren, um diese als Startwert zu übergeben. Aufgrund des Schaltverhaltens liegt eine Mehrpunkt-Randwertaufgabe vor. Die Matlabfunktion `bvp4c` bietet hierfür die Möglichkeit, dies intuitiv über Fallunterscheidungen zu implementieren.

## Diskussion der Ergebnisse

### Ergebnisse mittels direkter Kollokation

Die Implementierung erfolgt mit dem Ipopt Solver und der algebraischen Modellierungssprache JuMP. Die Stellgrößenbeschränkung (6) kann für alle  $u_k$  mittels des Aufrufs `@variable` erfolgen, die Gleichheitsbedingung des End- und Startwerts (7) mit `@constraint` und die Kollokationspunkte gemäß (10) mit `@NLconstraint`. Abbildung 2 zeigt die Zustände und Stellgröße bei Anwendung der direkten Kollokation für  $u_{\min} = -u_{\max}$  (blau) und  $u_{\min} = 0$  (orange). Die optimale Zeit für den ersten Fall beträgt die Endzeit 1.5921 s, bei letzterem 1.6032 s. Wie zu erwarten ähnelt der Stellgrößenverlauf einer Bang-Bang Steuerung. Da bei der direkten Kollokation die Optimalitätsbedingungen der Kozustände nicht beachtet wird, gibt es keinen direkten Sprung von  $u_{\min}$  zu  $u_{\max}$  oder andersrum. Dennoch lässt sich mit diesen Verläufen die generelle Struktur ableiten, womit eine adäquate Initialisierung für das indirekte Verfahren möglich ist.

### Ergebnisse mittels indirektem Kollokation

Im Vergleich zum direkten Verfahren zeichnet sich die indirekte Kollokation dadurch aus, dass zuerst die Optimalitätsbedingung bestimmt wird und anschließend eine Diskretisierung erfolgt. Für

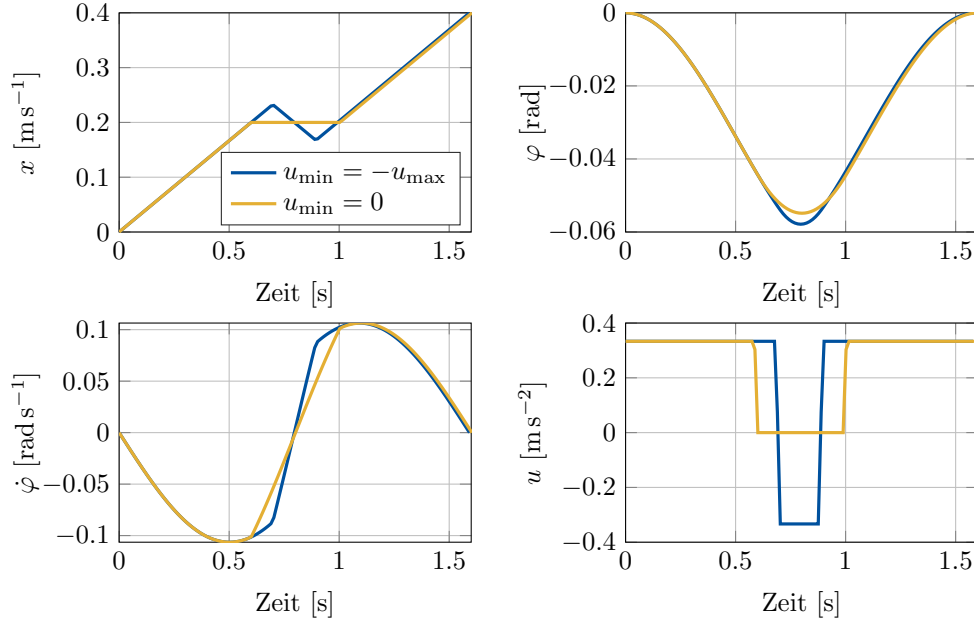


Abbildung 2: Lösung des Optimalsteuerungsproblems mittels direkter Kollokation.

die Dynamik der Krans ergibt sich die Co-Zustandsgleichung zu

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l_s} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{p}, \quad (16)$$

sowie die Hamiltonfunktion

$$H = 1 + p_1 u + p_2 x_3 - p_3 (g x_3 + u) / l_s. \quad (17)$$

Aus Abbildung 2 lässt sich ableiten, dass es insgesamt zwei Schaltzeitpunkte der Bang-Bang Steuerung gibt. Die Schaltzeitpunkte sind genau dann, wenn  $\mathbf{p}(t)^\top \mathbf{b} = 0$  gilt. Zur Implementierung in Matlab werden drei Intervalle der (Ko-) Zustände verwendet, um eine zeitabhängige Schaltfunktion umzusetzen. Hingegen die Auswertung der Kollokationspunkte automatisch über `bvp4c` erfolgt, müssen weitere Randbedingungen formuliert werden:

- Die Anfangswerte des ersten Intervalls müssen den vorgegebenen Initialwerten der Zustände entsprechen.
- Die Endwerte des letzten Intervalls müssen den vorgegebenen Endwerten entsprechen und die Transversalitätsbedingung ist erfüllt.
- Die Anfangswerte des zweiten Intervalls müssen den Endwerten des ersten Intervalls entsprechen und es gilt  $\mathbf{p}(t)^\top \mathbf{b} = 0$ , da es sich um ein Schaltzeitpunkt handelt.
- Die Endwerte des zweiten Intervalls müssen den Startwerten des ersten Intervalls entsprechen und es gilt  $\mathbf{p}(t)^\top \mathbf{b} = 0$ , da es sich um ein Schaltzeitpunkt handelt.
- Im ersten und letzten Intervall gilt  $u = u_{\max}$ , im mittleren  $u = u_{\min}$ .

Die Implementierung erfolgt über einen Residuenvektor. Die Schaltzeitpunkte sowie die optimale Endzeit sind Tabelle zu entnehmen. Es fällt auf, dass das System schneller in den gewünschten

Tabelle 1: Ermittelte Schaltzeitpunkte und Endzeit mittels indirekter Kollokation.

$u_{\min}$	$t_1$	$t_2$	$t_f$
$-u_{\max}$	0.6980 s	0.8939 s	1.5919 s
0	0.6000 s	1.0030 s	1.6030 s

Endzustand läuft, jedoch nur um ca. 2  $\mu$ s in beiden Fällen. Aufgrund der Implementierungskomplexität des indirekten Verfahrens ist diese Verbesserung nicht zufriedenstellend.

Ein weiterer hervorzuhebender Aspekt ist, dass das Finden einer adäquaten Lösung für  $u_{\min} = 0$  lediglich mit der Initialisierung der ermittelten (Ko-) Zustände der direkten Kollokation erfolgreich ist, hingegen im anderen betrachteten Fall dies nicht notwendig ist. Das verdeutlicht die erhöhte Implementierungskomplexität.

Da die Illustration der Zustände sowie der Stellgröße wenig neuen Informationsgehalt liefert, soll abschließend die Kozustände und die Hamiltonfunktion betrachtet werden. Diesen sind in Abbildung 3 zu sehen. Wie aus der Differentialgleichung der Kozustände (16) zu erahnen, ist  $p_1$  konstant und  $p_2$  und  $p_3$  oszillierende Signale. Dieser Fall ist numerisch günstig, da Kozustände häufig instabil sind. Aus dem Signal der Hamiltonfunktion  $H$  (Skalierung beachten!) lässt sich ablesen, dass erfolgreich ein Optimum gefunden wurde. Nach [Arn22] ist  $H$  im Optimum konstant, was in der Abbildung zu erkennen ist. Die minimale Variation des Signals ist auf numerisches Rauschen aufgrund der begrenzten Auflösung von Gleitkommazahlen zurückzuführen.

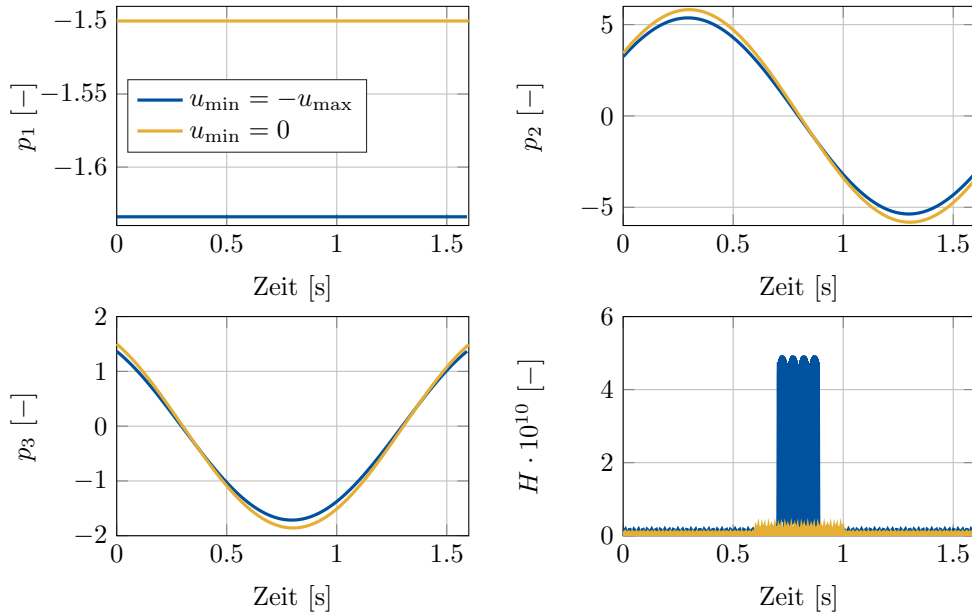


Abbildung 3: Kozustände und Hamilton Funktion über indirekte Kollokation.

## Literatur

- [Arn22] Eckhard Arnold. *Vorlesungsumdruck Numerische Methoden der Optimierung und Optimalen Steuerung*. 2022.
- [ADM22] Eckhard Arnold, Spasena Dakova und Daniel Müller. *Aufgabenblatt Zeitoptimale Umsteuerung Brückenkran*. 2022.