Семинар 09.04.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^p}\,dx \overset{p\in\mathbb{R}}{=} \int_1^{+\infty} -\frac{1}{2x^{p+2}}\left(1+\bar{o}(1)\right)dx \overset{\text{сх.}}{\sim} -\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p+2}}\,dx \Rightarrow \text{сх.}: p+2>1 \Leftrightarrow p>-1$$

$$g = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{p+2}} \Rightarrow \frac{f}{g} = 1+\bar{o}(1), \quad 1\in(0;+\infty), \; x\to+\infty$$

$$\cos\frac{1}{x} = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right), \; x\to+\infty$$

$$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2x^2}+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = t+\bar{o}(t) = -\frac{1}{2x^2}+\bar{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}\left(1+\bar{o}(1)\right)$$

$* \; \operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)$

расход — расход — вопрос убирается — сход. по Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}x\cdot\cos x\,dx \overset{\text{сх.}}{\sim} \int_{c>0,\ c=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\cdot\cos x\,dx \overset{?}{=} \underbrace{\frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\cos x\,dx}_{\mathrm{I}\ \text{расх.}} - \underbrace{\int_1^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\cdot\cos x\,dx}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I}: \int_1^{+\infty}\cos x\,dx = \sin x\Big|_1^{+\infty} := \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\sin x\right)}_{\nexists} - \underbrace{\sin 1}_{\in\mathbb{R}} \Rightarrow \text{расходит.}$$

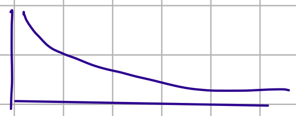
II:

Дирихле | Абель

- $f, g: [a,\omega)\to\mathbb{R}$, $\forall b\in[a,\omega)\ [f,g\in R[a,b]]$
- $f\in C[a,\omega)$, $g\in C^1(a,\omega)$
- g монотонна на $[a,\omega)$
- $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \in B[a,\omega)$ $\Leftarrow$ $\exists\int_a^\omega f(t)\,dt$
- $\lim\limits_{x\to\omega-0} g(x) = 0$ $\Rightarrow$ $g\in B[a,\omega) \Leftrightarrow \exists M\ \forall x\in[a,\omega)\ [\,|g(x)|\le M\,]$

$$\Rightarrow \exists\int_a^\omega f(x)g(x)\,dx$$

II $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$



$$|F(x)| = \left|\int_a^x \cos(t)\,dt\right| = |\sin x - \sin 1| \le 2 = M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$[1;+\infty)$

$\Downarrow$ сход.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn}(\alpha)$$

т.к. $\frac{\sin x}{x} \to 1$, то 0 не явл. особ.

1 способ

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\text{сх.}}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$\sin x = f$

$\frac{1}{x} = g \downarrow\downarrow 0$ $[1;+\infty)$

$$|F(x)| = \left|\int_1^x \sin t\,dt\right| = |-\cos x + \cos 1| \le 2 = M$$

$\Downarrow$ сход. по Дирихле

2 способ по частям

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\text{сх.}}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\cos x\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\cos x \cdot \frac{-1}{x^2}\,dx =$$

сход.

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} -\cos x\cdot\frac{1}{x}\right) + \cos 1 - \int_1^{+\infty} \cos x \cdot \frac{1}{x^2}\,dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

сход.

Т/О Вейерштр.: $0 \le f \le g$ на $[a,\omega)$

$\exists \int_a^{+\infty} g\,dx \Rightarrow \exists \int_a^{+\infty} f\,dx$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \text{ сход.}$$

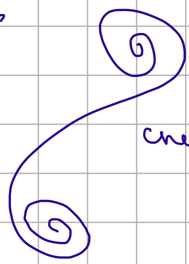
$f, |f| \in R[a,b]\ \forall b \in [a,\omega) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \int_a^{+\infty} |f|\,dx \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \int_a^{+\infty} f\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f\,dx$$

$$f = e^{-x} \cdot D(x), \quad D(x) = \begin{cases} 1 & \mathbb{Q} \\ -1 & \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Интеграл Френеля

$$F_2 = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin(x^2)}_{\text{сх}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \; ; \qquad F_1 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$



спираль Корню

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\ \int_1^{+\infty} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

сх. по Дирихле

$f = \sin t$; $|F(x)| = \left|\int_0^x \sin t\,dt\right| \le 2$

$g = \frac{1}{\sqrt{t}} \downarrow\downarrow 0$; $t \to \infty$

* Парадокс Маляра

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{x^p}\,dx, \qquad p \in (0;1]$$

сход. по Абелю

$f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$ $\qquad \exists \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

сход. по Дирихле

$g = \operatorname{arctg} x \uparrow\uparrow \frac{\pi}{2}$

$f = \sin x \quad |F| = \left|\int_0^x \sin t\,dt\right| \le 2$

$g = \frac{1}{x^p} \downarrow\downarrow 0$