Analiza

Michał Dobranowski

semestr zimowy 2022
v0.0

Poniższy skrypt zawiera materiał obejmujący wykłady z Analizy matematycznej I oraz II prowadzone na pierwszym roku Informatyki na AGH, lecz jest mocno rozbudowany przez przykłady i twierdzenia pochodzące z przeróżnych źródeł, które (zwykle dla rozwinięcia intuicji lub ułatwienia rozwiązań pewnych zadań) postanowiłem opisać.

PS: Analiza I nie jest skończona. Całkiem możeliwe, że nigdy nie będzie.

Spis treści

Analiza II

§1 Szeregi liczbowe

Definicja 1.1. Szereg liczbowy to para $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Mówimy, że szereg liczbowy jest **zbieżny**, jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Liczbę S nazywamy wtedy **sumą** tego szeregu.

Twierdzenie 1.2 (warunek konieczny zbieżności szeregu)
Jeśli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Przykład 1.3
Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy tak zwane **sumy teleskopowe**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

□

Można łatwo pokazać, że szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ nie jest zbieżny (czyli jest **rozbieżny**), mimo że spełnia warunek konieczny:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{>1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{>1} + \ldots.$$

Okazuje się, że zachodzi również dużo mocniejsze twierdzenie:

Twierdzenie 1.4 (o zbieżności szeregów harmonicznych)
Szereg harmoniczny rzędu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **bezwzględnie zbieżny**, w przeciwnym przypadku jest **warunkowo zbieżny**. Bezwzględna zbieżność szeregu pociąga za sobą jego zbieżność.

Aby sprawdzić zbieżność szeregów stosuje się kilka kryteriów zbieżności.

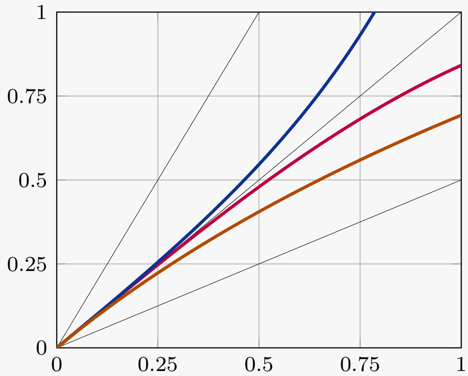
Twierdzenie 1.5 (kryterium porównawcze)
Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 zachodzi

$$a_n \leq b_n$$

oraz $a_n, b_n > 0$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Uwaga. Wraz z powyższym twierdzeniem warto stosować nierówności, które zachodzą w przedziale $[0, 1]$:

- $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$
- $\frac{x}{2} \leq \ln x + 1 \leq x$
- $x \leq \tan x \leq 2x$
- $1 - x \leq \cos x$



Przykład 1.6
Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right).$$

Rozwiązanie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Wyrazy szeregu są dodatnie oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2},$$

więc, na podstawie twierdzenia 1.4, dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.7 (kryterium ilorazowe)
Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są dodatnie oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, \infty),$$

to dane szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Twierdzenie 1.8 (kryterium d'Alemberta)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o niezerowych wyrazach oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 1.9 (kryterium Cauchy'ego)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Uwaga. Jeśli w kryteriach d'Alemberta lub Cauchy'ego wyjdzie $g = 1$, to nie możemy powiedzieć nic o zbieżności ciągu.

Przykład 1.10

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} < 1,$$

więc dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.11 (kryterium całkowe)

Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie oraz istnieje taka malejąca (na przedziale $[n_0, \infty)$) funkcja f, że $a_n = f(n)$ dla każdego n, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna.

Twierdzenie 1.12 (kryterium Leibniza)

Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Jeśli ciąg (a_n) jest dodatni, zbieżny do zera oraz malejący, to jest dany szereg jest zbieżny.

Szereg opisywany przez kryterium Leibniza nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

Przykład 1.13

Zbadać zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Leibniza bardzo łatwo pokazać, że dany szereg jest zbieżny. Ciąg $a_n = \frac{1}{n\ln n}$ ma oczywiście wyrazy dodatnie i jest zbieżny do zera. Ponadto jest malejący, bo zarówno n, jak i $\ln n$ rosną.

Aby określić, czy dany szereg jest bezwzględnie zbieżny skorzystamy z kryterium całkowego.

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln u + C = \ln(\ln(x)) + C.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln(x))\Big|_1^{\infty} \text{ – rozbieżna.}$$

Z tego wynika, że dany szereg jest tylko warunkowo zbieżny. □

§2 Ciągi funkcyjne

Ciąg funkcyjny to ciąg, którego przeciwdziedziną jest zbiór funkcji określonych na tej samej dziedzinie. W kolejnych sekcjach będziemy rozważać ciągi funkcji $X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, chyba że stwierdzono inaczej. Jest to ważne założenie niektórych twierdzeń.

Definicja 2.1 (zbieżność punktowa)**.** Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny punktowo na X, jeśli istnieje taka funkcja $f : X \to Y$, że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, czyli gdy

$$\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicja 2.2 (zbieżność jednostajna)**.** Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie na X, jeśli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ \underset{x\in X}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 2.3

Jeśli ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest jednostajnie zbieżny do f na X, to jest również zbieżny punktowo do f na X, co zapisujemy jako

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \implies f_n \xrightarrow{X} f.$$

Dowód. Wynika z definicji i podstawowych praw rachunku kwantyfikatorów. □

Twierdzenie 2.4

Jeśli ciąg $(f_n(x))$ jest ciągiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $f_n \rightrightarrows f$, to funkcja f jest ciągła.

Przykład 2.5

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$$

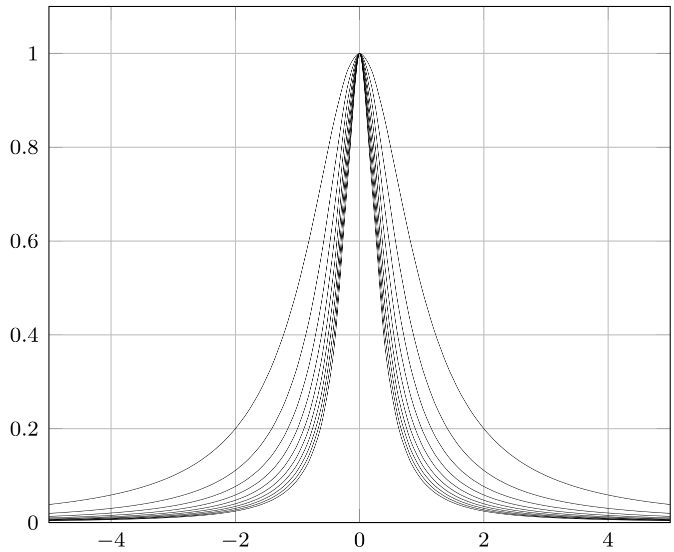
na zbiorze $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx^2} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = 0 \\ 0, & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Dany ciąg jest więc zbieżny punktowo, ale, skoro funkcje f_n są ciągłe, a funkcja f nie, to nie jest zbieżny jednostajnie.

Rysunek 1: Wyrazy od $f_1(x)$ do $f_{10}(x)$



□

§2.1 Metryka Czebyszewa

Weźmy pewną dwuargumentową funkcję zdefiniowaną jako

$$d_c(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|\,.$$

Można udowodnić, że funkcja d_c jest metryką (zwaną metryką Czebyszewa). Jako argumenty przyjmuje dwie funkcja zdefiniowane na tej samej dziedzinie X.

Twierdzenie 2.6

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest ograniczona, to

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n\to\infty} d_c(f_n, f) = 0.$$

Przykład 2.7

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

na przedziale $[2, \infty)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n(nx^{n-1})}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Pochodna zawsze jest dodatnia, więc supremum będzie przy $x \to \infty$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right) = \lim_{n\to\infty} (1-1) = 0,$$

więc dany ciąg jest zbieżny jednostajnie. □

Przykład 2.8

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$$

na zbiorze $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 \equiv 0,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{nx}{n^2+x^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(\frac{nx}{n^2+x^2} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{nx}{n^2+x^2}\right) = \frac{n(n^2+x^2)-nx(2x)}{(n^2+x^2)^2} = \frac{n^3-nx^2}{(n^2+x^2)^2}$$

Pochodna zeruje się, gdy

$$n^3 = nx^2 \Rightarrow x = \pm n,$$

więc supremum będzie przy $x = n$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n^2} = \frac{1}{2},$$

więc dany ciąg nie jest zbieżny jednostajnie. □

Twierdzenie 2.9 (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)
Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest różniczkowalna, ciąg (f_n) jest zbieżny, a ciąg (f_n') zbieżny jednostajnie, to dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} \left(f_n'(x)\right).$$

Twierdzenie 2.10 (o całkowalności granicy ciągu funkcyjnego)
Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest całkowalna, a ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie, to dla każdych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

§3 Szeregi funkcyjne

Podobnie do szeregów liczbowych, szeregi funkcyjne to para $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}, (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}})$: ciąg funkcyjny oraz ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego. Taki szereg jest zbieżny (punktowo / jednostajnie) do sumy szeregu S, jeśli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny (częściowo / jednostajnie) do S.

Analogicznie do twierdzenia 2.3, warukiem koniecznym zbieżności jednostajnej szeregu jest jego zbieżność punktowa.

Z kolei w analogii do twierdzenia 1.2, warunkiem koniecznym zbieżności (punktowej / jednostajnej) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżność (punktowa / jednostajna) ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ do zera, to znaczy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \to S \implies f_n(x) \to 0 \equiv f$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S \implies f_n(x) \rightrightarrows 0 \equiv f.$$

Twierdzenie 3.1 (kryterium Weierstrassa)
Jeśli istnieje taki ciąg (a_n), że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego $x \in X \subset \mathbb{R}$ mamy nierówność

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny na X.

Zachodzi twierdzenie o ciągłości, analogiczne do twierdzenia 2.4.

Twierdzenie 3.2
Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest ciągiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$, to funkcja S jest ciągła.

Zachodzą również twierdzenia o różniczkowalności i całkowalności, analogiczne do twierdzeń 2.9 i 2.10.

Twierdzenie 3.3
Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny na X, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X, to dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Twierdzenie 3.4
Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X, to dla każdych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\, \mathrm{d}x\right).$$

§3.1 Szeregi potęgowe

Definicja 3.5. Szereg potęgowy o środku w punkcie c to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n,$$

gdzie $a_n, x, c \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 3.6

Jeśli szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

jest zbieżny dla pewnego x_1, to jest zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że

$$|x_2 - c| < |x_1 - c|,$$

a jeśli nie jest zbieżny dla pewnego x_1, to nie jest zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że

$$|x_2 - c| > |x_1 - c|.$$

Powyższe twierdzenie każe nam podzielić płaszczyznę zespoloną (względem danego szeregu potęgowego) na trzy rozłączne zbiory. Formalnie, jeśli weźmiemy

$$r = \sup \left\{ |x-c| : \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n \text{ jest zbieżny} \right\},$$

to zbiór

$$\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < r\}$$

nazwiemy **kołem zbieżności**. Dla wszystkich elementów z tego zbioru dany szereg jest zbieżny. Dla elementów na brzegu tego koła zbieżność jest nieokreślona, a dla elementów poza nim dany szereg nie jest zbieżny. Liczba r to **promień zbieżności**. Dla $x = c$ dany szereg jest zbieżny.

> **Uwaga.** Jeśli przyjmiemy w definicji szeregu potęgowego (3.5), że $a_n, x, c \in \mathbb{R}$, to koło zbieżności staje się **przedziałem zbieżności**, a nieokreśloną zbieżność mamy tylko dla dwóch elementów: $c - r$ oraz $c + r$.

Twierdzenie 3.7 (Cauchy'ego-Hadamarda)

Promień zbieżności jest dany jako

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

gdzie $r = \frac{1}{0}$ interpretujemy jako $r = \infty$, a $r = \frac{1}{\infty}$ jako $r = 0$.

Można podać dwa słabsze twierdzenia, które jednak często łatwiej jest stosować:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \implies r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \implies (3.7).$$