

Analiza

MICHAŁ DOBRANOWSKI

semestr zimowy 2022
v0.0

Poniższy skrypt zawiera materiał obejmujący wykłady z Analizy matematycznej I oraz II prowadzone na pierwszym roku Informatyki na AGH, lecz jest mocno rozbudowany przez przykłady i twierdzenia pochodzące z przeróżnych źródeł, które (zwykle dla rozwinięcia intuicji lub ułatwienia rozwiązań pewnych zadań) postanowiłem opisać.

PS: Analiza I nie jest skończona. Całkiem możliwe, że nigdy nie będzie.

Spis treści

Analiza II	2
1 Szeregi liczbowe	2
2 Ciągi funkcyjne	5
2.1 Metryka Czebyszewa	6
3 Szeregi funkcyjne	8

Analiza II

§1 Szeregi liczbowe

Definicja 1.1. Szereg liczbowy to para $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Mówimy, że szereg liczbowy jest **zbieżny**, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{C}$. Liczbę S nazywamy wtedy **sumą** tego szeregu.

Twierdzenie 1.2 (warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Przykład 1.3

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy tak zwane **sumy teleskopowe**.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

Można łatwo pokazać, że szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny (czyli jest **rozbieżny**), mimo że spełnia warunek konieczny:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1} \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)}_{>1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)}_{>1} + \dots$$

Okazuje się, że zachodzi również dużo mocniejsze twierdzenie:

Twierdzenie 1.4 (o zbieżności szeregów harmonicznych)

Szereg harmoniczny rzędu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **bezwzględnie zbieżny**, w przeciwnym przypadku jest **warunkowo zbieżny**. Bezwzględna zbieżność szeregu pociąga za sobą jego zbieżność.

Aby sprawdzić zbieżność szeregów stosuje się kilka kryteriów zbieżności.

Twierdzenie 1.5 (kryterium porównawcze)

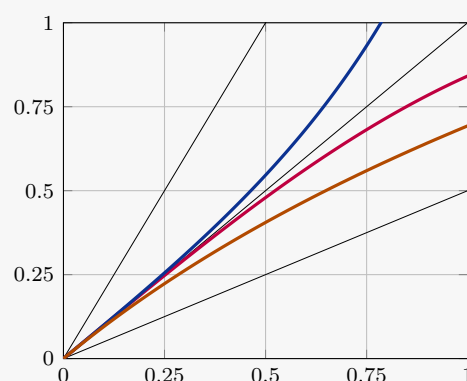
Jeśli dla każdego n większego od pewnego n_0 zachodzi

$$a_n \leq b_n$$

oraz $a_n, b_n > 0$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Uwaga. Wraz z powyższym twierdzeniem warto stosować nierówności, które zachodzą w przedziale $[0, 1]$:

- $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$
- $\frac{x}{2} \leq \ln x + 1 \leq x$
- $x \leq \tan x \leq 2x$
- $1 - x \leq \cos x$



Przykład 1.6

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right).$$

Rozwiązanie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Wyrazy szeregu są dodatnie oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{n^2},$$

więc, na podstawie twierdzenia 1.4, dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.7 (kryterium ilorazowe)

Jeśli dla każdego n większego od pewnego n_0 wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są dodatnie oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, \infty),$$

to dane szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Twierdzenie 1.8 (kryterium d'Alemberta)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o niezerowych wyrazach oraz niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 1.9 (kryterium Cauchy'ego)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Uwaga. Jeśli w kryteriach d'Alemberta lub Cauchy'ego wyjdzie $g = 1$, to nie możemy powiedzieć nic o zbieżności ciągu.

Przykład 1.10

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} < 1,$$

więc dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.11 (kryterium całkowe)

Jeśli dla każdego n większego od pewnego n_0 wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie oraz istnieje taka malejąca (na przedziale $[n_0, \infty)$) funkcja f , że $a_n = f(n)$ dla każdego n , to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna.

Twierdzenie 1.12 (kryterium Leibniza)

Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Jeśli ciąg (a_n) jest dodatni, zbieżny do zera oraz malejący, to jest dany szereg jest zbieżny.

Szereg opisywany przez kryterium Leibniza nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

Przykład 1.13

Zbadać zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Leibniza bardzo łatwo pokazać, że dany szereg jest zbieżny. Ciąg $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ ma oczywiście wyrazy dodatnie i jest zbieżny do zera. Ponadto jest malejący, bo zarówno n , jak i $\ln n$ rosną.

Aby określić, czy dany szereg jest bezwzględnie zbieżny skorzystamy z kryterium całkowego.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C = \ln(\ln(x)) + C.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(x)) \Big|_1^{\infty} - \text{rozbieżna}.$$

Z tego wynika, że dany szereg jest tylko warunkowo zbieżny. □

§2 Ciągi funkcyjne

Ciąg funkcyjny to ciąg, którego przeciwdziedziną jest zbiór funkcji określonych na tej samej dziedzinie.

Definicja 2.1 (zbieżność punktowa). Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny punktowo na X , jeśli istnieje taka funkcja $f : X \rightarrow Y$, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, czyli gdy

$$\forall_{x \in X} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicja 2.2 (zbieżność jednostajna). Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie na X , jeśli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad \forall_{x \in X} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 2.3

Jeśli ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest jednostajnie zbieżny do f na X , to jest również zbieżny punktowo do f na X , co zapisujemy jako

$$f_n \xrightarrow{X} f \implies f_n \xrightarrow{X} f.$$

Dowód. Wynika z definicji i podstawowych praw rachunku kwantyfikatorów. □

Twierdzenie 2.4

Jeśli ciąg $(f_n(x))$ jest ciągiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $f_n \Rightarrow f$, to funkcja f jest ciągła.

Przykład 2.5

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

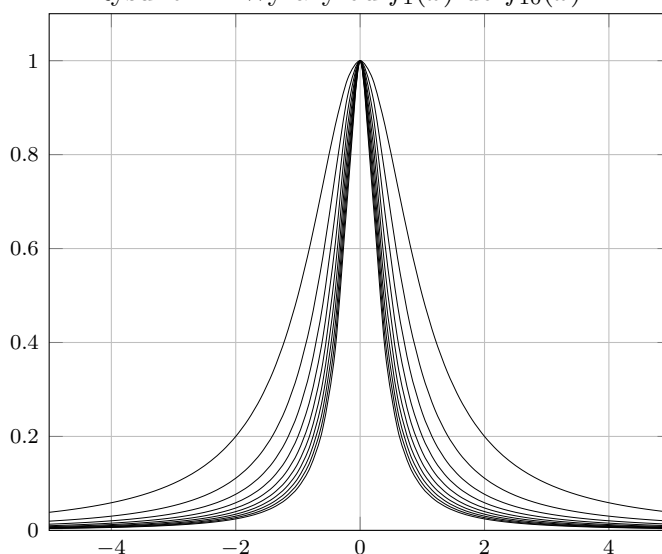
na zbiorze \mathbb{R} .

Rozwiązanie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx^2} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = 0 \\ 0, & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Dany ciąg jest więc zbieżny punktowo, ale, skoro funkcje f_n są ciągłe, a funkcja f nie, to nie jest zbieżny jednostajnie.

Rysunek 1: Wyraży od $f_1(x)$ do $f_{10}(x)$



□

§2.1 Metryka Czebyszewa

Weźmy pewną dwuargumentową funkcję zdefiniowaną jako

$$d_c(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Można udowodnić, że funkcja d_c jest metryką (zwaną metryką Czebyszewa). Jako argumenty przyjmuje dwie funkcje zdefiniowane na tej samej dziedzinie X .

Twierdzenie 2.6

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest ograniczona, to

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_c(f_n, f) = 0.$$

Przykład 2.7

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

na przedziale $[2, \infty)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{d}{dx} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n(nx^{n-1})}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Pochodna zawsze jest dodatnia, więc supremum będzie przy $x \rightarrow \infty$. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1) = 0,$$

więc dany ciąg jest zbieżny jednostajnie. □

Przykład 2.8

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

na zbiorze \mathbb{R} .

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 \equiv 0,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{nx}{n^2 + x^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left(\frac{nx}{n^2 + x^2} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{nx}{n^2 + x^2} \right) = \frac{n(n^2 + x^2) - nx(2x)}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{n^3 - nx^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

Pochodna zeruje się, gdy

$$n^3 = nx^2 \Rightarrow x = \pm n,$$

więc supremum będzie przy $x = n$. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2},$$

więc dany ciąg nie jest zbieżny jednostajnie. □

Twierdzenie 2.9 (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest różniczkowalna, ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo, a ciąg (f'_n) jednostajnie, to dla każdego $x \in X$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n(x)).$$

Twierdzenie 2.10 (o całkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest całkowalna, a ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie, to dla każdych $x_1, x_2 \in X$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \right).$$

§3 Szeregi funkcyjne

Podobnie do szeregów liczbowych, szeregi funkcyjne to para $((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}})$: ciąg funkcyjny oraz ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego. Taki szereg jest zbieżny (punktowo / jednostajnie) do sumy szeregu S , jeśli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny (częściowo / jednostajnie) do S .

Analogicznie do twierdzenia 2.3, warunkiem koniecznym zbieżności jednostajnej szeregu jest jego zbieżność punktowa.

Z kolei w analogii do twierdzenia 1.2, warunkiem koniecznym zbieżności (punktowej / jednostajnej) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżność (punktowa / jednostajna) ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ do zera, to znaczy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightarrow S \implies f_n(x) \rightarrow 0 \equiv f$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S \implies f_n(x) \rightrightarrows 0 \equiv f.$$

Twierdzenie 3.1 (kryterium Weierstrassa)

Jeśli istnieje taki ciąg (a_n) , że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego $x \in X \subset \mathbb{R}$ mamy nierówność

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny na X .