Analiza

Michał Dobranowski

semestr letni 2023
v0.8

Poniższy skrypt zawiera materiał obejmujący wykłady z Analizy matematycznej I oraz II prowadzone na pierwszym roku Informatyki na AGH, lecz jest mocno rozbudowany przez przykłady i twierdzenia pochodzące z przeróżnych źródeł, które (zwykle dla rozwinięcia intuicji lub ułatwienia rozwiązań pewnych zadań) postanowiłem opisać.

PS: Analiza I nie jest skończona. Całkiem możliwe, że nigdy nie będzie.

Spis treści

Analiza II

§1 Szeregi liczbowe

Definicja 1.1. Szereg liczbowy to para $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Mówimy, że szereg liczbowy jest **zbieżny**, jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Liczbę S nazywamy wtedy **sumą** tego szeregu.

Twierdzenie 1.2 (warunek konieczny zbieżności szeregu)
Jeśli szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
jest zbieżny, to
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Przykład 1.3
Znajdź sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy tak zwane **sumy teleskopowe**.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

□

Można łatwo pokazać, że szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny (czyli jest **rozbieżny**), mimo że spełnia warunek konieczny:
$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{>1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{>1} + \ldots.$$

Okazuje się, że zachodzi również dużo mocniejsze twierdzenie:

Twierdzenie 1.4 (o zbieżności szeregów harmonicznych)
Szereg harmoniczny rzędu $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$
jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **bezwzględnie zbieżny**, w przeciwnym przypadku jest **warunkowo zbieżny**. Bezwzględna zbieżność szeregu pociąga za sobą jego zbieżność.

Aby sprawdzić zbieżność szeregów stosuje się kilka kryteriów zbieżności.

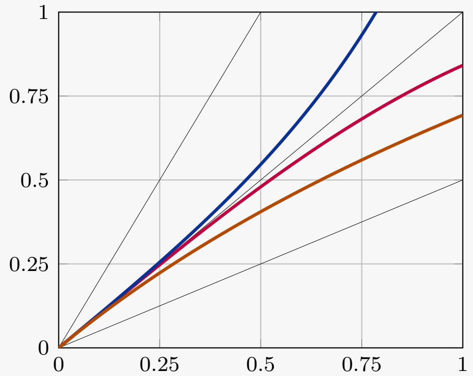
Twierdzenie 1.5 (kryterium porównawcze)
Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 zachodzi

$$a_n \leq b_n$$

oraz $a_n, b_n > 0$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Uwaga. Wraz z powyższym twierdzeniem warto stosować nierówności, które zachodzą w przedziale $[0, 1]$:

- $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$
- $\frac{x}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$
- $x \leq \tan x \leq 2x$
- $1 - x \leq \cos x$



Przykład 1.6
Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right).$$

Rozwiązanie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Wyrazy szeregu są dodatnie oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2},$$

więc, na podstawie twierdzenia 1.4, dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.7 (kryterium ilorazowe)
Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są dodatnie oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, \infty),$$

to dane szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Twierdzenie 1.8 (kryterium d'Alemberta)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o niezerowych wyrazach oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 1.9 (kryterium Cauchy'ego)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Uwaga. Jeśli w kryteriach d'Alemberta lub Cauchy'ego wyjdzie $g = 1$, to nie możemy powiedzieć nic o zbieżności ciągu.

Przykład 1.10

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} < 1,$$

więc dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.11 (kryterium całkowe)

Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie oraz istnieje taka malejąca (na przedziale $[n_0, \infty)$) funkcja f, że $a_n = f(n)$ dla każdego n, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna.

Twierdzenie 1.12 (kryterium Leibniza)

Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Jeśli ciąg (a_n) jest dodatni, zbieżny do zera oraz malejący, to jest dany szereg jest zbieżny.

Szereg opisywany przez kryterium Leibniza nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

Przykład 1.13

Zbadać zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n \ln n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Leibniza bardzo łatwo pokazać, że dany szereg jest zbieżny. Ciąg $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ ma oczywiście wyrazy dodatnie i jest zbieżny do zera. Ponadto jest malejący, bo zarówno n, jak i $\ln n$ rosną.

Aby określić, czy dany szereg jest bezwzględnie zbieżny skorzystamy z kryterium całkowego.

$$\int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln u + C = \ln(\ln(x)) + C.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln(x))\Big|_1^{\infty} \text{ – rozbieżna.}$$

Z tego wynika, że dany szereg jest tylko warunkowo zbieżny. □

§2 Ciągi funkcyjne

Ciąg funkcyjny to ciąg, którego przeciwdziedziną jest zbiór funkcji określonych na tej samej dziedzinie. W kolejnych sekcjach będziemy rozważać ciągi funkcji $X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, chyba że stwierdzono inaczej. Jest to ważne założenie niektórych twierdzeń.

Definicja 2.1 (zbieżność punktowa)**.** Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny punktowo na X, jeśli istnieje taka funkcja $f : X \to Y$, że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, czyli gdy

$$\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicja 2.2 (zbieżność jednostajna)**.** Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie na X, jeśli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ \underset{x\in X}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 2.3

Jeśli ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest jednostajnie zbieżny do f na X, to jest również zbieżny punktowo do f na X, co zapisujemy jako

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \implies f_n \xrightarrow{X} f.$$

Dowód. Wynika z definicji i podstawowych praw rachunku kwantyfikatorów. □

Twierdzenie 2.4

Jeśli ciąg $(f_n(x))$ jest ciągiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $f_n \rightrightarrows f$, to funkcja f jest ciągła.

Przykład 2.5

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$$

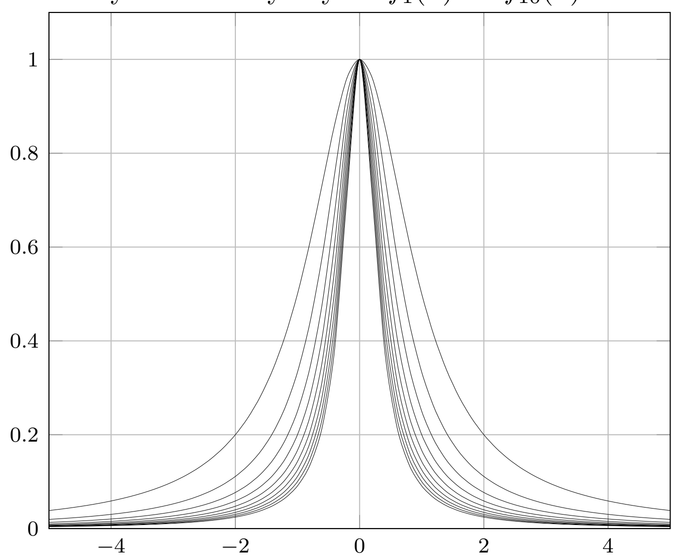
na zbiorze $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx^2} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = 0 \\ 0, & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Dany ciąg jest więc zbieżny punktowo, ale, skoro funkcje f_n są ciągłe, a funkcja f nie, to nie jest zbieżny jednostajnie.

Rysunek 1: Wyrazy od $f_1(x)$ do $f_{10}(x)$



□

§2.1 Metryka Czebyszewa

Weźmy pewną dwuargumentową funkcję zdefiniowaną jako

$$d_c(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Można udowodnić, że funkcja d_c jest metryką (zwaną metryką Czebyszewa). Jako argumenty przyjmuje dwie funkcja zdefiniowane na tej samej dziedzinie X.

Twierdzenie 2.6

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest ograniczona, to

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n\to\infty} d_c(f_n, f) = 0.$$

Przykład 2.7

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

na przedziale $[2, \infty)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n(nx^{n-1})}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Pochodna zawsze jest dodatnia, więc supremum będzie przy $x \to \infty$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right) = \lim_{n\to\infty} (1-1) = 0,$$

więc dany ciąg jest zbieżny jednostajnie. □

Przykład 2.8

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$$

na zbiorze $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{nx}{n^2+x^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(\frac{nx}{n^2+x^2}\right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{nx}{n^2+x^2}\right)=\frac{n(n^2+x^2)-nx(2x)}{(n^2+x^2)^2}=\frac{n^3-nx^2}{(n^2+x^2)^2}$$

Pochodna zeruje się, gdy

$$n^3=nx^2\Rightarrow x=\pm n,$$

więc supremum będzie przy $x=n$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n^2}=\frac{1}{2},$$

więc dany ciąg nie jest zbieżny jednostajnie. □

Twierdzenie 2.9 (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)
Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest różniczkowalna, ciąg (f_n) jest zbieżny, a ciąg (f_n') zbieżny jednostajnie, to dla każdego $x\in X$ zachodzi

$$\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}\left(f_n'(x)\right).$$

Twierdzenie 2.10 (o całkowalności granicy ciągu funkcyjnego)
Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest całkowalna, a ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie, to dla każdych $x_1,x_2\in X$ zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_1}^{x_2}f_n(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

§3 Szeregi funkcyjne

Podobnie do szeregów liczbowych, szeregi funkcyjne to para $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}},(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}})$: ciąg funkcyjny oraz ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego. Taki szereg jest zbieżny (punktowo / jednostajnie) do sumy szeregu S, jeśli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny (częściowo / jednostajnie) do S.

Analogicznie do twierdzenia 2.3, warunkiem koniecznym zbieżności jednostajnej szeregu jest jego zbieżność punktowa.

Z kolei w analogii do twierdzenia 1.2, warunkiem koniecznym zbieżności (punktowej / jednostajnej) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ jest zbieżność (punktowa / jednostajna) ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ do zera, to znaczy

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\to S\Longrightarrow f_n(x)\to 0\equiv f$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\rightrightarrows S\Longrightarrow f_n(x)\rightrightarrows 0\equiv f.$$

Twierdzenie 3.1 (kryterium Weierstrassa)

Jeśli istnieje taki ciąg (a_n), że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego $x \in X \subset \mathbb{R}$ mamy nierówność

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny na X.

Zachodzi twierdzenie o ciągłości, analogiczne do twierdzenia 2.4.

Twierdzenie 3.2

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest szeregiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$, to funkcja S jest ciągła.

Przykład 3.3

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$$

na przedziale $[0, 1]$.

Rozwiązanie. Dla $x \in [0, 1)$ mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = x(1-x)\frac{1}{1-x} = x,$$

natomiast dla $x = 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n \cdot 0 = 0,$$

więc szereg jest zbieżny punktowo. Funkcja

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{dla } x = 1 \end{cases},$$

do której dany szereg zbiega nie jest ciągła, a funkcje $f_n(x) = x^n(1-x)$ są ciągłe, więc, na mocy twierdzenia 3.2, szereg nie zbiega jednostajnie. $\square$

Przykład 3.4

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

na przedziale $[1, \infty)$.

Rozwiązanie. Dla każdego $x \in [1, \infty]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left| \frac{nx}{1+n^4x^2} \right| = \frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{nx}{n^4x^2} = \frac{1}{n^3x} \leq \frac{1}{n^3},$$

więc, na mocy kryterium Weierstrassa, dany szereg jest jednostajnie zbieżny, bo szereg harmoniczny rzędu 3 jest zbieżny. □

Przykład 3.5

Zbadaj obszar zbieżności[a] punktowej oraz zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}.$$

[a] czyli zbiór punktów, w których szereg jest zbieżny

Rozwiązanie. Możemy od razu stwierdzić, że dla $x = 0$ otrzymamy szereg ciąg zer, który oczywiście jest (jednostajnie) zbieżny do zera. Możemy potraktować x jako parametr, wtedy zamiast szeregu funkcyjnego będziemy mieć szereg liczbowy, którego zbieżność możemy pokazać z kryterium d'Alemberta:

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{e^{x(n+1)}} \frac{e^{xn}}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x}.$$

Szereg jest więc zbieżny dla każdego $x > 0$ i rozbieżny dla każdego $x < 0$. Ostatecznie, obszar zbieżności punktowej danego szeregu funkcyjnego to $[0, \infty)$.

Zajmijmy się teraz zbieżnością jednostajną. Oczywiście można by ją wykazywać przez znalezienie ciągu sum cześciowych, a następnie skorzystanie z twierdzenia 2.6, ale możemy też skorzystać z kryterium Weierstrassa, chociaż w dosyć nieoczywisty sposób.

Znajdźmy najpierw supremum ciągu $a_n = \frac{x^2}{e^{nx}}$. Możemy znaleźć miejsca zerowe pochodnej:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{2x(e^{nx}) - x^2(ne^{nx})}{e^{2nx}} = \frac{x(2-xn)}{e^{nx}} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{n}\right\}.$$

Szkicując wykres pochodnej przekonamy się, że funkcja $a_n(x)$ osiąga maksimum w $x = \frac{2}{n}$, więc

$$a_n(x) \leq a_n\left(\tfrac{2}{n}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2n^2}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2n^2}$ jest zbieżny (ponieważ jest harmoniczny rzędu 2), więc możemy użyć kryterium Weierstrassa udowadniając, że dany szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny. □

Zachodzą również twierdzenia o różniczkowalności i całkowalności, analogiczne do twierdzeń 2.9 i 2.10.

Twierdzenie 3.6

Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny na X, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X, to dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Twierdzenie 3.7

Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X, to dla każdych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

§3.1 Szeregi potęgowe

Definicja 3.8. Szereg potęgowy o środku w punkcie c to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n,$$

gdzie $a_n, x, c \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 3.9

Jeśli szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

jest zbieżny dla pewnego x_1, to jest zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że

$$|x_2 - c| < |x_1 - c|,$$

a jeśli nie jest zbieżny dla pewnego x_1, to nie jest zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że

$$|x_2 - c| > |x_1 - c|.$$

Powyższe twierdzenie każe nam podzielić płaszczyznę zespoloną (względem danego szeregu potęgowego) na trzy rozłączne zbiory. Formalnie, jeśli weźmiemy

$$r = \sup\left\{|x-c| : \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n \text{ jest zbieżny}\right\},$$

to zbiór

$$\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < r\}$$

nazwiemy **kołem zbieżności**. Dla wszystkich elementów z tego zbioru dany szereg jest zbieżny. Dla elementów na brzegu tego koła zbieżność jest nieokreślona, a dla elementów poza nim dany szereg nie jest zbieżny. Liczba r to **promień zbieżności**. Dla $x = c$ dany szereg jest zbieżny.

Uwaga. Jeśli przyjmiemy w definicji szeregu potęgowego (3.8), że $a_n, x, c \in \mathbb{R}$, to koło zbieżności staje się **przedziałem zbieżności**, a nieokreśloną zbieżność mamy tylko dla dwóch elementów: $c - r$ oraz $c + r$.

Obszarem zbieżności nazywamy zbiór będący sumą koła zbieżności oraz zbioru elementów z jego brzegu, dla których dany szereg potęgowy jest zbieżny.

Twierdzenie 3.10 (Cauchy'ego-Hadamarda)
Promień zbieżności jest dany jako

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

gdzie $r = \frac{1}{0}$ interpretujemy jako $r = \infty$, a $r = \frac{1}{\infty}$ jako $r = 0$.

Można podać dwa słabsze twierdzenia, które jednak często łatwiej jest stosować:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \implies r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \implies (3.10).$$

Mówimy, że ciąg (szereg) funkcyjny jest **niemal jednostajnie zbieżny** na przedziale (a, b) jeśli jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale $[c, d] \in (a, b)$.

Fakt 3.11. Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w $(c-r, c+r)$, to jest bezwzględnie zbieżny w $(c - r, c + r)$ oraz niemal jednostajnie zbieżny w $(c - r, c + r)$.

Fakt 3.12. Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w $(c-r, c+r)$ do $S(x)$, to funkcja $S(x)$ jest ciągła, różniczkowalna i całkowalna w $(c-r, c+r)$. Prawdziwe dla szeregów potęgowych są również tezy twierdzeń 3.6 i 3.7.

Twierdzenie 3.13 (Abela)
Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n$ będzie szeregiem potęgowym zbieżnym do $S(x)$ o promieniu zbieżności równym r. Jeśli ten szereg jest zbieżny dla $x_1 = c - r$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_1^+} S(x)$, to

$$\lim_{x\to x_1^+} S(x) = S(x_1),$$

czyli funkcja $S(x)$ jest prawostronnie ciągła w $x = c - r$. Analogicznie, jeśli szereg jest zbieżny dla $x_2 = c + r$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_2^-} S(x)$, to

$$\lim_{x\to x_2^-} S(x) = S(x_2),$$

czyli funkcja $S(x)$ jest lewostronnie ciągła w $x = c + r$.

Przykład 3.14

Znajdź sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n}$$
w każdym punkcie obszaru zbieżności.

Rozwiązanie. Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu
$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$
tak więc przedział zbieżności to $(-4, 0)$. Dla $x = -4$ mamy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) \text{ – rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego,}$$
a dla $x = 0$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^n} = \sum_{n=1} (n+1) \text{ – rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego.}$$
Obszarem zbieżności jest więc przedział $(-4, 0)$. Policzmy teraz sumę. Dla każdego $x \in (-4, 0)$ mamy
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(x+2)^{n+1}}{2^n}\right)' \overset{(3.6)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{2^n}\right)' \\ &= \left(\frac{(x+2)^2}{2} \frac{1}{1-\frac{x+2}{2}}\right)' = \left(\frac{(x+2)^2}{-x}\right)' = \frac{2x(x+2)+(x+2)^2}{x^2} = \frac{4-x^2}{x^2}. \end{aligned}$$
□

Przykład 3.15

Znajdź sumę szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-\frac{1}{2})^n}{n+1}$$
w każdym punkcie obszaru zbieżności.

Rozwiązanie. Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu
$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}}} = \frac{1}{2},$$
tak więc przedział zbieżności to $(0, 1)$. Dla $x = 0$ mamy
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ – zbieżny z kryterium Leibniza,}$$

a dla $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ – rozbieżny z kryterium ilorazowego.}$$

Obszarem zbieżności jest więc przedział $[0, 1)$. Policzmy teraz sumę. Dla $x = \frac{1}{2}$ mamy

$$S(\tfrac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 0^n}{n+1} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Dla pozostałych x zapiszemy

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - \frac{1}{2})^n}{n+1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - \frac{1}{2})^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{x} 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Szeregi potęgowe są niemal jednostajnie zbieżne w swoim przedziale zbieżności, więc dla $x \in (0, 1)$ możemy zamienić znaki sumy i całki (twierdzenie 3.7)

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{1 - 2(t - \frac{1}{2})} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{2 - 2t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \ln(1 - t) \right]_{\frac{1}{2}}^{x} = \frac{1}{1 - 2x} \left(\ln(1 - x) - \ln \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\ln(2 - 2x)}{1 - 2x}.
\end{aligned}$$

Z twierdzenia Abela (3.13) wynika, że

$$S(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(2 - 2x)}{1 - 2x} = \ln(2),$$

więc ostatecznie mamy

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = \frac{1}{2} \\ \frac{\ln(2-2x)}{1-2x}, & \text{dla } x \in [0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}.$$

□

Przykład 3.16

Znajdź sumę szeregu liczbowego

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Rozwiązanie. Weźmy szereg funkcyjny

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Wartość $S(1)$ jest szukaną sumą, jeśli tylko szereg jest zbieżny w tym punkcie. Niech $t = x^2$. Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności szeregu:

$$r_t = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{2n+3}} = 1,$$

tak więc szereg zbiega, gdy $t \in (-1,1) \Rightarrow x \in (-1,1)$. W punktach $x=-1$ i $x=1$ szereg również jest zbieżny, co można pokazać z kryterium Lebniza.

Policzmy teraz sumę (dla przedziału zbieżności $(-1,1)$):

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n u^{2n} \, \mathrm{d}u = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-u^2)^n \, \mathrm{d}u = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} \, \mathrm{d}u = \Big[\arctan(u)\Big]_0^x = \arctan(x). \end{aligned}$$

Skoro w $x=1$ ten szereg też jest zbieżny, to z twierdzenia Abela (3.13) mamy

$$S(1) = \lim_{x \to 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

□

§3.2 Szeregi Taylora

Twierdzenie 3.17 (o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)

Jeśli funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów w pewnym otoczeniu U punktu x_0, to na pewnym przedziale zachodzi równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Taki szereg nazywamy szeregiem Taylora, a jeśli $x_0 = 0$, to nazywamy go szeregiem Maclaurina.

Fakt 3.18. Dosyć łatwo wyprowadzić następujące rozwinięcia w szeregi Maclaurina, które mogą być użyteczne w zadaniach:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$$

Przykład 3.19

Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = \ln x$ w otoczeniu $x_0 = 1$.

Rozwiązanie. Spróbujmy znaleźć ogólny wzór na $f^{(n)}(x)$. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= \frac{-1}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^2} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-6}{x^3} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \\ &\Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!, \end{aligned}$$

tak więc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda (3.10)

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = 1$$

wynika, że ten szereg jest zbieżny, a więc równość jest prawdziwa, dla każdego $x \in (0, 2)$. Łatwo sprawdzić (z kryterium Leibniza), że jest zbieżny też dla $x = 2$, więc (z twierdzenia Abela) również dla $x = 2$ równość jest prawdziwa. □

Przykład 3.20

Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = x^3 \arctan x^4$.

Rozwiązanie. Weźmy $g(x) = \arctan x^4$. Mamy

$$g'(x) = \frac{4x^3}{1+x^8} = \frac{4x^3}{1-(-x^8)}, \qquad |x^8| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

więc

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4x^3(-x^8)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4x^{8n+3},$$

ergo

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4t^{8n+3}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4 \int_0^x t^{8n+3}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4x^{8n+4}}{8n+4}. \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{8n+7}.$$

Równość jest prawdziwa dla $x \in (-1, 1)$ oraz (z kryterium Leibniza i twierdzenia Abela) dla $x = \pm 1$. □

§3.3 Szeregi Fouriera

Zbiór funkcji **całkowalnych z kwadratem** będziemy oznaczać przez $L^2[a,b]$. Formalnie

$$L^2[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \int\limits_{[a,b]} f^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Jeśli utożsamimy ze sobą funkcje, które różnią się zbiorze miary Riemanna równej zero, to struktura $(L^2[a,b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową, w której możemy wprowadzić iloczyn skalarny

$$f \circ g = \int\limits_{[a,b]} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mamy więc przestrzeń unitarną, ergo zdefiniowana jest w niej też norma

$$\|f\| = \sqrt{f \circ f} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

oraz metryka

$$d(f,g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x}.$$

Zbieżność w sensie metryki d nazywa się **zbieżność przeciętną z kwadratem**.

Definicja 3.21. Ciąg ortogonalny to taki ciag funkcyjny $(\varphi_n)_{n\geq 0}$, którego funkcje nie są tożsamościowo równe zeru, są całkowalne z kwadratem oraz jego elementy są prostopadłe, czyli

$$\forall_{i\neq j}\ \varphi_i \circ \varphi_j = 0.$$

Definicja 3.22. Ciąg ortonormalny to taki ciąg ortogonalny, że jego elementy są wersorami, czyli

$$\forall_{i,j}\ \varphi_i \circ \varphi_j = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}.$$

Wartość $\varphi_i \circ \varphi_j$ oznaczamy δ_{ij} i nazywamy **deltą Kroneckera**.

Szeregiem ortogonalnym będziemy nazywać szereg funkcyjny w postaci $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$, gdzie (c_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych, a (φ_n) ciągiem ortogonalnym.

Twierdzenie 3.23 (współczynniki Eulera-Fouriera)
Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n \rightrightarrows f$$

jest ortogonalny i zbiega jednostajnie do funkcji $f \in L^2[a,b]$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{f \circ \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Szereg ortogonalny, w którym współczynniki mają powyższą formę, nazywamy **szeregiem Fouriera** funkcji f. Oznaczamy

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Jeśli powyższy szereg ortogonalny jest zbieżny do f na całym przedziale $[a, b]$ to mówimy, że ta funkcja jest **rozwijalna** w szereg Fouriera.

Twierdzenie 3.24 (nierówność Bessela)
Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest szeregiem Fouriera funkcji f względem ciągu (φ_n), to

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2.$$

Twierdzenie 3.25 (tożsamość Parsevala)
Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest szeregiem Fouriera funkcji f względem ciągu (φ_n), to

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ jest przeciętnie zbieżny z kwadratem do f.

Jeśli pewien szereg spełnia tożsamość Parsevala dla każdej funkcji $f \in L^2[a, b]$, to mówimy, że ciąg (φ_n) jest **zupełny**.

Wniosek 3.26
Jeśli ciąg (φ_n) jest zupełny oraz $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest przeciętnie zbieżny z kwadratem do f na $[a, b]$.

§3.4 Trygonometryczne szeregi Fouriera

Fakt 3.27. Ciąg

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

jest zupełny (a więc i ortogonalny).

Wniosek 3.28 (współczynniki Eulera-Fouriera (3.23) dla szeregów trygonometrycznych)
Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji całkowalnej $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ będziemy nazywać szereg

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Definicja 3.29 (Warunki Dirichleta)**.**

1. funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona,
2. funkcja f ma skończoną liczbę przedziałów monotoniczności,
3. funkcja f ma skończoną liczbę punktów nieciągłości x_0 oraz
$$f(x_0) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)}{2},$$
4. zachodzi równość
$$f(a) = f(b) = \frac{\lim\limits_{x \to a^+} f(x) + \lim\limits_{x \to b^-} f(x)}{2}.$$

Twierdzenie 3.30 (o rozwijaniu funkcji w szereg Fouriera)
Jeśli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi, \pi]$, to szereg trygonometryczny Fouriera tej funkcji jest zbieżny punktowo do f na $[-\pi, \pi]$.

Uwaga 3.31. Jeśli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi, \pi]$ oraz jest nieparzysta, to

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

gdzie $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x$. Jeśli jest parzysta, to

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gdzie $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x$. Tworzą one wtedy odpowiednio szereg sinusów i cosinusów.

Przykład 3.32

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ x, & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Korzystając z niego, oblicz sumę szeregu liczbowego $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$.

Rozwiązanie. Aby funkcja f spełniała wszystkie warunki Dirichleta, musimy dodać wartość w punkcie $x = \pm\pi$.

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{\lim\limits_{x\to-\pi^+} f(x) + \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Możemy więc już napisać

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{nx\sin nx + \cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{n\pi\sin n\pi + \cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-nx\cos nx + \sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin n\pi - n\pi\cos n\pi}{n} = \frac{-\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

Mamy więc

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

W punkcie $x = \pi$:

$$f(\pi) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}(-1)^n = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right),$$

ergo

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi}{2}\left(f(\pi) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

□

Wniosek 3.33 (tożsamość Parsevala (3.25) dla szeregów trygonometrycznych)

Przyjmujemy oznaczenia jak we wniosku 3.28. Zachodzi równość

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Przykład 3.34

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = x^2$$

dla $x \in [-\pi, \pi]$. Korzystając z tego rozwiniecia, oblicz sumę szeregów liczbowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Rozwiązanie. blackpenredpen na YouTube. □

§4 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

W tej sekcji będziemy skupiać się na funkcjach typu $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. W tym kontekście warto zauważyć, że struktura $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową. Jest ona również przestrzenią Banacha ze zdefiniowaną normą euklidesową.

Fakt 4.1 (granica ciągu)**.** Weźmy ciąg (x_n) elementów zbioru $\mathbb{R}^k$ i oznaczmy $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k})$. Zachodzi równoważność

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (g_1, g_2, \ldots, g_k) \Leftrightarrow \underset{1\le i\le k}{\forall} \lim_{n\to\infty} x_{n,i} = g_i.$$

Definicja 4.2 (Heinego)**.** Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^k$, ma granicę w punkcie x_0 równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \in D, x_n \neq x_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Przykład 4.3

Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

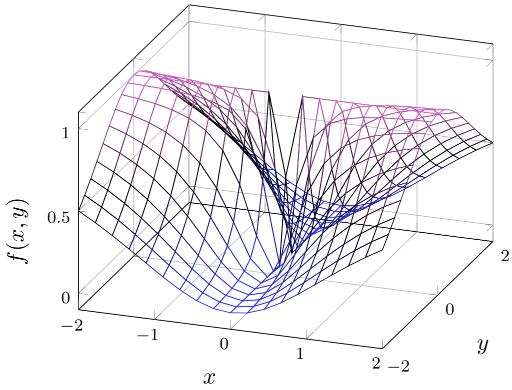
Rozwiązanie. Podstawiając $x = 0$ mamy

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0,$$

a dla $y = 0$ otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + 0} = 1,$$

więc granica nie istnieje. Bardziej formalnie możemy powiedzieć, że wzięliśmy dwa ciągi: $a_n = (0, \frac{1}{n}), b_n = (\frac{1}{n}, 0)$ i pokazaliśmy sprzeczność z definicją Heinego. □



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Przykład 4.4

Zbadaj granicę

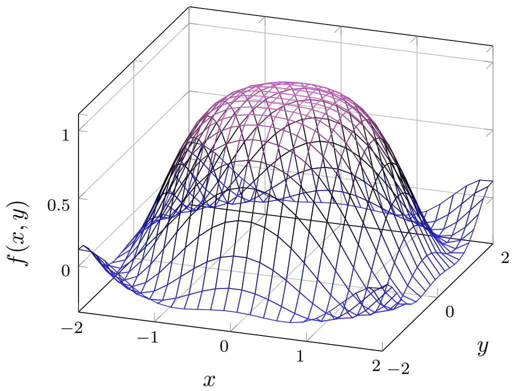
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \right| = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

□



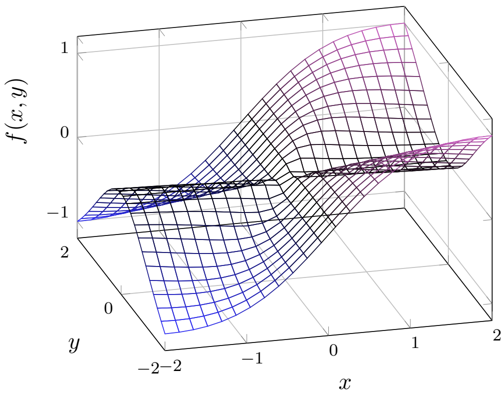
Rysunek 3: Wykres funkcji $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Przykład 4.5

Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Rozwiązanie. Skoro
$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = |x| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x|$$
oraz $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, to, na mocy twierdzenia o trzech ciągach,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = 0,$$
więc
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$
□



Rysunek 4: Wykres funkcji $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

Przykład 4.6

Zbadaj granicę
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Rozwiązanie. Podstawiając $y = x$ mamy
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = 0,$$
a dla $x = y^2$ otrzymujemy
$$\lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2},$$
więc granica nie istnieje. □

Uwaga. Powyższy przykład jest o tyle ciekawy, że jeśli x oraz y zbiegają w tym samym tempie (czyli łączy jest liniowa zależność) to zawsze granica wyjdzie zerowa. Aby pokazać ten fakt, przejdziemy do współrzędnych biegunowych:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4 \sin^4\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{r \cos\varphi \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2 \sin^4\varphi}.$$

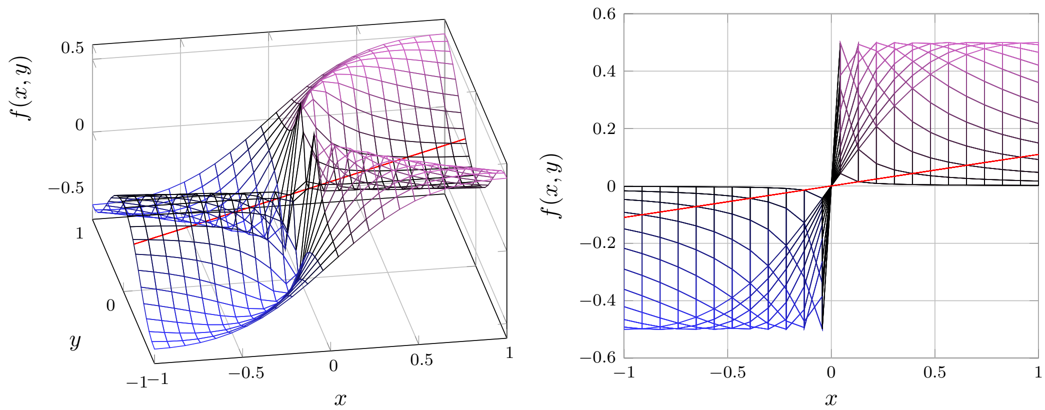
Jeśli $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, to (skoro $\cos\varphi = 0$)

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{0}{0 \pm r^2} = 0,$$

a jeśli $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$, to (skoro sin i cos są ograniczone)

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} = \frac{0}{\cos^2\varphi + 0} = 0.$$

Natomiast jeśli φ nie jest stałe, ale na przykład zbiega do $\frac{\pi}{2}$, to, jak można zauważyć na poniższym rusynku, granica niekoniecznie będzie zerowa.



Rysunek 5: Wykres funkcji $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ z zaznaczoną prostą $y = \frac{x}{3}$.

Granicę funkcji $f(x,y)$ w formie $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ nazywamy czasami **granicą podwójną**[1], w odróżnieniu od granic $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ czy $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$, które są **granicami iterowanymi**.

Fakt 4.7. Jeśli funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie (x_0,y_0) granicę podwójną oraz istnieją obie jej granice iterowane, to wszystkie trzy są sobie równe.

Uzasadnienie. Granica iterowana w punkcie (x_0,y_0) modeluje dążenie do tego punktu po dwóch bokach prostokąta. □

Uwaga. Jeśli obie granice iterowane nie istnieją, to nie znaczy, że granica podwójna nie istnieje. Jeśli obie granice iterowanie istnieją i są sobie równe, to nie znaczy, że granica podwójna istnieje.

Natomiast z powyższego faktu wynika, że jeśli obie granice iterowane istnieją i nie są sobie równe, to granica podwójna nie istnieje.

Fakt 4.8. Jeśli funkca (wielu zmiennych) f jest ciągła w x_0, a funkcja g jest ciągła w $f(x_0)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w x_0.

Fakt 4.9. Jeśli funkcje (wielu zmiennych) f, g są ciągłe w x_0, to funkcje $f+g, f-g, f\cdot g$ również są ciągłe w tym punkcie. Jeśli dodamy warunek, że $g(x) \neq 0$ dla pewnego otoczenia x_0, to ciągła w tym puncie jest również funkcja $\frac{f}{g}$.

[1] co może być nazwą mylącą; w literaturze angielskiej jest to *ordinary limit*, który nie jest tym samym pojęciem co *double limit*. W szczególności dla *double limit* nie zachodzi fakt 4.7, zobacz też: wikipedia.

§4.1 Pochodne funkcji wielu zmiennych

Definicja 4.10. Pochodną funkcji $f : \mathbb{R}^k \supset D \to \mathbb{R}^m$ wzdłuż wektora $\vec{v}$ nazwiemy taką funkcję $D_v f$, że

$$D_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{v}) - f(x)}{t}.$$

Oprócz notacji Eulera ($D_v f$) stosuje się również notację Leibniza ($D_v f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial \vec{v}}$). Notacji Lagrange'a ($f'$) raczej nie używa się w przypadku pochodnych funkcji wielu zmiennych.

Pochodna wzdłuż wektora $\vec{v}$ jest pochodną **w kierunku** wektora $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Te pojęcia są oczywiście równoważne, jeśli $\vec{v}$ jest wersorem. Najczęściej używamy jednak **pochodnych cząstkowych** to znaczy pochodnych wzdłuż wersorów osiowych, oznaczając

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial [1, 0]}(x, y) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial [0, 1]}(x, y).$$

Definicja 4.11 (różniczka)**.** Funkcja $f : \mathbb{R}^k \supset D \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w p, gdy istnieje takie przekształcenie liniowe $L_p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, że dla każdego $p + h$ w otoczeniu p zachodzi

$$\lim_{h \to \vec{0}} \frac{f(p + h) - f(p) - L_p(h)}{\|h\|} = \vec{0}.$$

Funkcję $L_p(h)$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie p i oznaczamy $\mathrm{d}f(p)(h)$.

Twierdzenie 4.12 (warunek konieczny różniczkowalności)

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^k \supset D \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w punkcie p, to istnieje pochodna funkcji f w punkcie p wzdłuż dowolnego wektora $h \in \mathbb{R}^k$ i zachodzi

$$\frac{\partial f}{\partial h}(p) = \mathrm{d}f(p)(h).$$

Wyprowadzenie wzoru. Pamiętając, że $\mathrm{d}f(p)$ jest przekształceniem liniowym, więc może być rozpatrywane jako macierz, możemy równoważnie stwierdzić, że

$$\lim_{h \to \vec{0}} \frac{f(p + h) - f(p) - \mathrm{d}f(p) \cdot h}{\|h\|} = \vec{0}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p + th) - f(p) - \mathrm{d}f(p) \cdot th}{t} = \vec{0}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p + th) - f(p)}{t} = \mathrm{d}f(p) \cdot h$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(p) = \mathrm{d}f(p) \cdot h.$$

□

Definicja 4.13 (jakobian)**.** Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^k \supset D \to \mathbb{R}^m$, gdzie

$$f(p) = f(x_1, \ldots, x_k) = (f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_k)).$$

Macierz

$$\mathrm{d}f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(p) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą Jacobiego** funkcji f w punkcie p. Jeśli macierz ta jest kwadratowa, to jej wyznacznik nazywamy jakobianem funkcji f w punkcie p i oznaczamy $J(p)$.

Chcąc obliczyć różniczkę $\mathrm{d}f(p)$ w punkcie h wystarczy pomnożyć macierz $\mathrm{d}f(p)$ i wektor h, więc

$$\mathrm{d}f(p)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p)h_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p)h_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(p)h_k \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 4.14 (warunek konieczny różniczkowalności)
Jeśli funkcja jest różniczkowalna w x_0, to jest ciągła w x_0.

Twierdzenie 4.15 (warunek wystarczający różniczkowalności)
Jeśli istnieją i są ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie x_0, to funkcja f jest różniczkowalna w x_0.

Przykład 4.16
Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+x^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

w całej jej dziedzinie.

Rozwiązanie. Skorzystajmy z warunku wystarczającego na różniczkowalność funkcji. Pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+x^2}\right) = \frac{(3x^2)(x^2+y^2)-(x^3+y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+x^2}\right) = \frac{(3y^2)(x^2+y^2)-(x^3+y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

są ciągłe w $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, więc w tym zbiorze funkcja f jest różniczkowalna. Aby sprawdzić, czy funkcja jest również różniczkowalna w $p=(0,0)$ policzymy pochodną w tym punkcie w kierunku wersora h:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+th)-f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3\cos^3\varphi + t^3\sin^3\varphi}{t^2\cos^2\varphi+t^2\sin^2\varphi}}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cos^3\varphi + t^3\sin^3\varphi}{t^3} = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi = h_1^3 + h_2^3.$$

Na mocy warunku koniecznego różniczkowalności (4.12) funkcja f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$, ponieważ pochodna w kierunku h powinna być wynikiem przekształcenia **liniowego** wektora h. □

Rozwiązanie. Pierwsza część alternatywnego rozwiązania przebiega tak samo, więc zbadamy tylko różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0,0)$. Z definicji różniczki i macierzy Jacobiego mamy

$$\lim_{h\to\vec{0}} \frac{f(p+h)-f(p)-L_p(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to\vec{0}} \frac{f(h)-L_p(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to\vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}h_1 - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}h_2}{\|h\|}.$$

Możemy policzyć z definicji pochodnej

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1,$$

więc

$$\lim_{h\to\vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}h_1 - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}h_2}{\|h\|} = \lim_{h\to\vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1 - h_2}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\frac{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{r^2} - r\cos\varphi - r\sin\varphi}{r} = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi \neq 0,$$

więc funkcja f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$. □

Uwaga 4.17. Warunek wystarczający (4.15) nie jest równocześnie warunkiem koniecznym (to znaczy, że twierdzenie nie jest tożsamością). Przykładem niech będzie funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}}\right), & \text{dla } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

W przypadku funkcji $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ różniczkowalność w punkcie znaczy, że istnieje styczna do wykresu funkcji w tym punkcie. W podobny sposób możemy zinterpretować geometrycznie różniczkowalność funkcji $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$: funkcja jest równiczkowalna w punkcie, gdy w tym punkcie istnieje płaszczyzna styczna do wykresu funkcji. Taka płaszczyzna będzie mieć równanie

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0). \tag{1}$$

Przykład 4.18

Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do funkcji

$$f(x,y) = e^{x^2-y}$$

w punkcie $p=(1,0)$.

Rozwiązanie. Najpierw znajdźmy pochodne cząstowe:

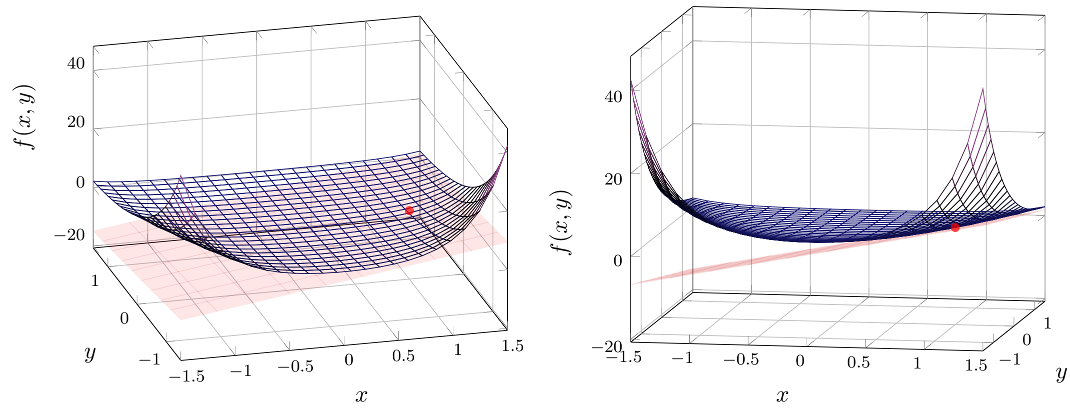
$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = e^{x^2-y} \cdot 2x = 2xe^{x^2-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = e^{x^2-y} \cdot (-1) = -e^{x^2-y}.$$

Płaszczyzna styczna w punkcie p ma więc wzór

$$z = e^{1-0} + 2 \cdot 1 \cdot e^{1-0} \cdot (x-1) - e^{1-0} \cdot (y-0)$$

$$z = 2ex - ey - e.$$

$\square$



Rysunek 6: Wykres funkcji $f(x,y) = e^{x^2-y}$ z płaszczyzną styczną w $(1,0)$.

Również analogicznie do funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ możemy za pomocą pochodnych przybliżać wartości funkcji $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Mamy

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(h), \tag{2}$$

jeśli tylko funkcja f jest różniczkowalna w otoczeniu x_0.

Pochodna cząstkowa **drugiego rzędu** to pochodna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Jeśli $i = j$, czyli pochodna ma postać $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, to nazywamy ją pochodną **czystą**, a przeciwnym wypadku jest **mieszana**.

Analogicznie do twierdzenia 4.15 funkcja $f : D \supset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ jest **2-krotnie różniczkowalna** w punkcie p, gdy istnieją i są ciągłe wszystkie (jest ich k^2) pochodne cząstkowe 2-go rzędu funkcji f w punkcie p.

Twierdzenie 4.19 (Schwarza o pochodnych mieszanych)
Jeśli funkcja f jest 2-krotnie różniczkowalna w p, to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(p).$$

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest 2-krotnie różniczkowalna, to możemy zdefiniować różniczkę 2-go rzędu:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f(h_1, h_2) &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2\right)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2\right)h_2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

§4.2 Ekstrema lokalne

Definicja 4.20 (maksimum lokalne)**.** Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ określona na obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 \in D$, jeśli istnieje takie sąsiedztwo $U \subset D$ punktu x_0, że dla każdego $x \in U$

$$f(x) < f(x_0).$$

Analogicznie definiujemy minimum lokalne.

Twierdzenie 4.21 (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna oraz ma ekstremum lokalne w x_0, to

$$\mathrm{d}f(x_0) = \mathbf{0}.$$

Definicja 4.22. Forma kwadratowa to funkcja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n \\ +a_{21}x_2x_2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n \\ + \ldots + \ldots + a_n n x_n^2\end{aligned}$$

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots\cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T \cdot A \cdot X,$$

gdzie macierz A jest symetryczną macierzą, którą nazywamy **macierzą formy kwadratowej**. Forma kwadratowa φ jest **określona** dodatnio / ujemnie / nieujemnie / niedodatnio, jeśli dla każdego niezerowego $h \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(h)$ jest dodatnie / ujemne / nieujemne / niedodatnie. Jeśli istnieją dwa wektory, dla których φ przyjmuje niezerowe wartości różnych znaków, to mówimy, że forma jest nieokreślona.

Twierdzenie 4.23 (Sylvestera)
Jeśli A jest macierzą formy kwadratowej φ oraz

$$d_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

jest ciągiem minorów wiodących, to:

1. $\forall_k\ d_k > 0 \Rightarrow \varphi$ jest dodatnio określona
2. $\forall_k\ (-1)^k d_k > 0 \Rightarrow \varphi$ jest ujemnie określona
3. $\forall_k\ d_k \geq 0 \Rightarrow \varphi$ jest nieujemnie określona
4. $\forall_k\ (-1)^k d_k \geq 0 \Rightarrow \varphi$ jest niedodatnio określona
5. w innym wypadku φ jest niookreślona

Definicja 4.24 (hesjan)**.** Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie p, to macierz

$$H(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_n}(p) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą Hessego** funkcji f w punkcie p. Jej wyznacznik nazywamy hesjanem tej funkcji w p.

Twierdzenie 4.25 (warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)
Dana jest funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ określona na obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli wszystkie jej pochodne cząstkowe drugiego rzędu są ciągłe w pewnym otoczeniu $U \ni p$ oraz spełniony jest warunek konieczny (4.21), to jeśli forma kwadratowa, której macierzą jest macierz Hessego funkcji f w punkcie p jest:

1. określona dodatnio, to istnieje minimum lokalne w punkcie p,
2. określona ujemnie, to istnieje maksimum lokalne w punkcie p,
3. nieokreślona, to nie ma ekstremum lokalnego w punkcie p.

Uwaga 4.26. Punkty dziedziny, w których różniczka jest tożsamościowa równa zeru lub nie istnieje to **punkty krytyczne**. Te, które spełniają pierwszy warunek, to **punkty stacjonarne**. Z warunku koniecznego istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie 4.21) wynika, że ekstrema istnieją tylko w punktach krytycznych, jednak nie w każdym punkcie krytycznym jest ekstremum. Takie punkty stacjonarne, w których nie ma minimum ani maksimum, to **punkty siodłowe**.

Z warunku wystarczającego istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie 4.25) wynika, że jeśli badamy punkty stacjonarne za pomocą macierzy Hessego i wyjdzie nam chociaż jeden

> minor zerowy, a forma będzie określona nieujemnie lub niedodatnio, to ta metoda okaże się po prostu nieskuteczna. W szczególności jeśli badamy funkcję dwóch zmiennych i hesjan wyjdzie zerowy, to nie możemy nic powiedzieć o istnieniu ekstremum.

Przykład 4.27

Znajdź ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Rozwiązanie. Najpierw policzmy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Są one ciągłe, więc funkcja jest różniczkowalna (z 4.15), więc ewentualne ekstrema na pewno będą w miejscach zerowania się obu pochodnych cząstkowych (z 4.21). Mamy więc

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}.$$

Policzmy macierz Hessego:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y) & \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 3x) \\ \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y) & \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$

Dla punktu $(x,y) = (1,1)$ mamy

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 6 > 0, \\ d_2 = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 > 0 \end{cases},$$

więc na podstawie warunku wystarczającego (4.25) wnioskujemy, że w punkcie $(1,1)$ jest minimum lokalne.

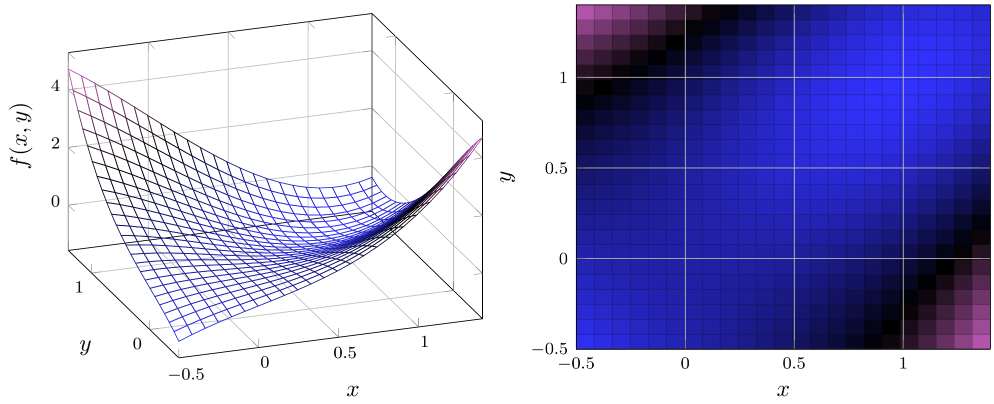
Dla punktu $(x,y) = (0,0)$ mamy

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 0, \\ d_2 = -9 < 0 \end{cases},$$

więc twierdzenie 4.25 nie rozstrzyga istnienia ekstremum lokalnego. Mamy jednak

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3,$$

które przyjmuje wartości większe od $f(0,0) = 0$ dla $\varepsilon > 0$ oraz mniejsze dla $\varepsilon < 0$, więc punkt $(0,0)$ jest punktem siodłowym. □



Rysunek 7: Wykres funkcji $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Przykład 4.28
Znaleźć odległość punktu $A = (0,1,0)$ od powierzchni $\pi : y = xz$.

Rozwiązanie. Weźmy punkt $P \in \pi$. Wtedy $P = (x, xz, z)$, a odległość tego punktu od punktu A wyraża się wzorem

$$f(x,z) = \sqrt{x^2 + (xz-1)^2 + z^2}.$$

Możemy skorzystać z faktu, że funkcja pierwiastkowa jest monotoniczna i spróbować znaleźć minimum funkcji

$$g(x,z) = x^2 + (xz-1)^2 + z^2.$$

Pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = 2x + 2xz^2 - 2z, \qquad \frac{\partial g(x,z)}{\partial z} = 2z + 2x^2z - 2x$$

są ciągłe, więc funkcja g jest różniczkowalna, więc jej minimum może być jedynie w punktach stacjonarnych:

$$\begin{cases} x + xz^2 - z = 0 \\ z + x^2z - x = 0 \end{cases}.$$

Po dodaniu stronami i podstawieniu odpowiednich wartości przekształcamy powyższy układ równań do

$$x = z = 0.$$

Przyjemność zweryfikowania, że metoda macierzy Hessego dla tego puntu nie rozstrzygnie istnienia minimum pozostawione jest Czytelnikowi.

W takiej sytuacji musimy poradzić sobie jakoś inaczej. Wykorzystując nierówność między średnimi (AM-GM) mamy:

$$g(x,z) = x^2 + z^2 + (xz-1)^2 \geq 2\sqrt{x^2z^2} + (xz)^2 - 2xz + 1 = (xz)^2 + 1 \geq 1.$$

Aby zamiast słabych nierówności mogły pojawić się tutaj równości, musi być spełnione $x^2 = z^2$ (z AM-GM) oraz $xz = 0$. To oczywiście zachodzi dla $x = z = 0$, więc pokazaliśmy, że $d_e(A,\pi) = \sqrt{1} = 1$. □

Warto zauważyć, że zamiast sprawdzać kiedy słabe nierówności są równościami, można było również po prostu policzyć odległość punktu A od punktu $P = (0, 0, 0)$, ponieważ wiemy, że tylko w nim może wystąpić minimum.

Twierdzenie 4.29 (Weierstrassa o osiąganiu kresów)
Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła, a zbiór $D \in \mathbb{R}^n$ jest zwarty, to funkcja f osiąga swoje kresy, czyli istnieją takie $x_1, x_2 \in D$, że dla każdego $x \in D$ zachodzi

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$