Analiza

Michał Dobranowski

semestr zimowy 2022
v0.1

Poniższy skrypt zawiera materiał obejmujący wykłady z Analizy matematycznej I oraz II prowadzone na pierwszym roku Informatyki na AGH, lecz jest mocno rozbudowany przez przykłady i twierdzenia pochodzące z przeróżnych źródeł, które (zwykle dla rozwinięcia intuicji lub ułatwienia rozwiązań pewnych zadań) postanowiłem opisać.

PS: Analiza I nie jest skończona. Całkiem możeliwe, że nigdy nie będzie.

Spis treści

Analiza II

§1 Szeregi liczbowe

Definicja 1.1. Szereg liczbowy to para $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Mówimy, że szereg liczbowy jest **zbieżny**, jeśli istnieje skończona granica $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Liczbę S nazywamy wtedy **sumą** tego szeregu.

Twierdzenie 1.2 (warunek konieczny zbieżności szeregu)
Jeśli szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
jest zbieżny, to
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Przykład 1.3
Znajdź sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy tak zwane **sumy teleskopowe**.
$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$
□

Można łatwo pokazać, że szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ nie jest zbieżny (czyli jest **rozbieżny**), mimo że spełnia warunek konieczny:
$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{>1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}_{>1} + \ldots.$$

Okazuje się, że zachodzi również dużo mocniejsze twierdzenie:

Twierdzenie 1.4 (o zbieżności szeregów harmonicznych)
Szereg harmoniczny rzędu $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$
jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest **bezwzględnie zbieżny**, w przeciwnym przypadku jest **warunkowo zbieżny**. Bezwzględna zbieżność szeregu pociąga za sobą jego zbieżność.

Aby sprawdzić zbieżność szeregów stosuje się kilka kryteriów zbieżności.

Twierdzenie 1.5 (kryterium porównawcze)

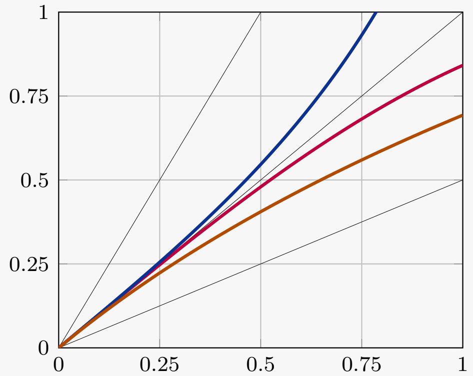
Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 zachodzi

$$a_n \le b_n$$

oraz $a_n, b_n > 0$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, a z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Uwaga. Wraz z powyższym twierdzeniem warto stosować nierówności, które zachodzą w przedziale $[0,1]$:

- $\frac{x}{2} \le \sin x \le x$
- $\frac{x}{2} \le \ln x + 1 \le x$
- $x \le \tan x \le 2x$
- $1 - x \le \cos x$



Przykład 1.6

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right).$$

Rozwiązanie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Wyrazy szeregu są dodatnie oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2},$$

więc, na podstawie twierdzenia 1.4, dany szereg jest zbieżny. $\square$

Twierdzenie 1.7 (kryterium ilorazowe)

Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ są dodatnie oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = g \in (0,\infty),$$

to dane szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Twierdzenie 1.8 (kryterium d'Alemberta)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o niezerowych wyrazach oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 1.9 (kryterium Cauchy'ego)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

> **Uwaga.** Jeśli w kryteriach d'Alemberta lub Cauchy'ego wyjdzie $g = 1$, to nie możemy powiedzieć nic o zbieżności ciągu.

Przykład 1.10

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} < 1,$$

więc dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.11 (kryterium całkowe)

Jeśli dla każdego n wiekszego od pewnego n_0 wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie oraz istnieje taka malejąca (na przedziale $[n_0, \infty)$) funkcja f, że $a_n = f(n)$ dla każdego n, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna.

Twierdzenie 1.12 (kryterium Leibniza)

Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Jeśli ciąg (a_n) jest dodatni, zbieżny do zera oraz malejący, to jest dany szereg jest zbieżny.

Szereg opisywany przez kryterium Leibniza nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

Przykład 1.13

Zbadać zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Leibniza bardzo łatwo pokazać, że dany szereg jest zbieżny. Ciąg $a_n = \frac{1}{n\ln n}$ ma oczywiście wyrazy dodatnie i jest zbieżny do zera. Ponadto jest malejący, bo zarówno n, jak i $\ln n$ rosną.

Aby określić, czy dany szereg jest bezwzględnie zbieżny skorzystamy z kryterium całkowego.

$$\int\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\end{vmatrix} = \int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln u + C = \ln(\ln(x)) + C.$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln(x))\Big|_1^{\infty} - \text{rozbieżna.}$$

Z tego wynika, że dany szereg jest tylko warunkowo zbieżny. $\square$

§2 Ciągi funkcyjne

Ciąg funkcyjny to ciąg, którego przeciwdziedziną jest zbiór funkcji określonych na tej samej dziedzinie. W kolejnych sekcjach będziemy rozważać ciągi funkcji $X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, chyba że stwierdzono inaczej. Jest to ważne założenie niektórych twierdzeń.

Definicja 2.1 (zbieżność punktowa)**.** Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny punktowo na X, jeśli istnieje taka funkcja $f : X \to Y$, że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, czyli gdy

$$\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicja 2.2 (zbieżność jednostajna)**.** Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie na X, jeśli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ \underset{x\in X}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 2.3

Jeśli ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest jednostajnie zbieżny do f na X, to jest również zbieżny punktowo do f na X, co zapisujemy jako

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \implies f_n \xrightarrow{X} f.$$

Dowód. Wynika z definicji i podstawowych praw rachunku kwantyfikatorów. $\square$

Twierdzenie 2.4

Jeśli ciąg $(f_n(x))$ jest ciągiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $f_n \rightrightarrows f$, to funkcja f jest ciągła.

Przykład 2.5

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$$

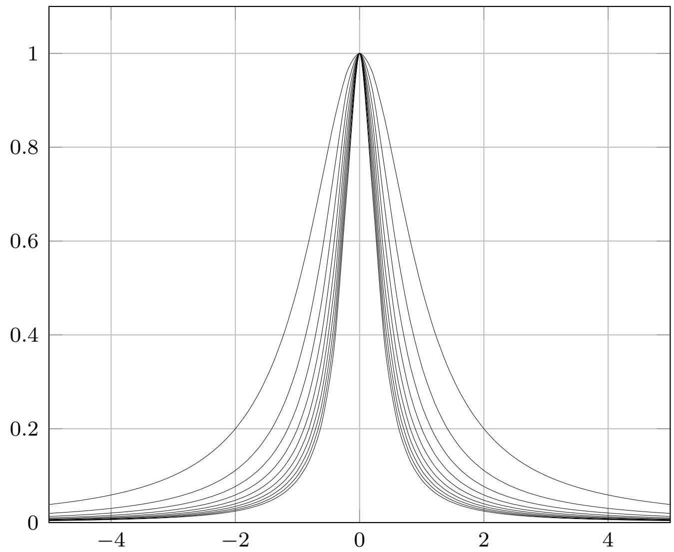
na zbiorze $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx^2} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = 0 \\ 0, & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Dany ciąg jest więc zbieżny punktowo, ale, skoro funkcje f_n są ciągłe, a funkcja f nie, to nie jest zbieżny jednostajnie.

Rysunek 1: Wyrazy od $f_1(x)$ do $f_{10}(x)$



□

§2.1 Metryka Czebyszewa

Weźmy pewną dwuargumentową funkcję zdefiniowaną jako

$$d_c(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|\,.$$

Można udowodnić, że funkcja d_c jest metryką (zwaną metryką Czebyszewa). Jako argumenty przyjmuje dwie funkcja zdefiniowane na tej samej dziedzinie X.

Twierdzenie 2.6

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest ograniczona, to

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n\to\infty} d_c(f_n, f) = 0.$$

Przykład 2.7

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

na przedziale $[2, \infty)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n(nx^{n-1})}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Pochodna zawsze jest dodatnia, więc supremum będzie przy $x \to \infty$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n\to\infty} (1-1) = 0,$$

więc dany ciąg jest zbieżny jednostajnie. □

Przykład 2.8

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$$

na zbiorze $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 \equiv 0,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{nx}{n^2+x^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left(\frac{nx}{n^2+x^2} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{nx}{n^2+x^2}\right)=\frac{n(n^2+x^2)-nx(2x)}{(n^2+x^2)^2}=\frac{n^3-nx^2}{(n^2+x^2)^2}$$

Pochodna zeruje się, gdy

$$n^3=nx^2 \Rightarrow x=\pm n,$$

więc supremum będzie przy $x=n$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n^2}=\frac{1}{2},$$

więc dany ciąg nie jest zbieżny jednostajnie. □

Twierdzenie 2.9 (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)
Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest różniczkowalna, ciąg (f_n) jest zbieżny, a ciąg (f_n') zbieżny jednostajnie, to dla każdego $x\in X$ zachodzi

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}\left(f_n'(x)\right).$$

Twierdzenie 2.10 (o całkowalności granicy ciągu funkcyjnego)
Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest całkowalna, a ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie, to dla każdych $x_1,x_2\in X$ zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

§3 Szeregi funkcyjne

Podobnie do szeregów liczbowych, szeregi funkcyjne to para $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}},(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}})$: ciąg funkcyjny oraz ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego. Taki szereg jest zbieżny (punktowo / jednostajnie) do sumy szeregu S, jeśli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny (częściowo / jednostajnie) do S.

Analogicznie do twierdzenia 2.3, warukiem koniecznym zbieżności jednostajnej szeregu jest jego zbieżność punktowa.

Z kolei w analogii do twierdzenia 1.2, warunkiem koniecznym zbieżności (punktowej / jednostajnej) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżność (punktowa / jednostajna) ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ do zera, to znaczy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\to S \implies f_n(x)\to 0\equiv f$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\rightrightarrows S \implies f_n(x)\rightrightarrows 0\equiv f.$$

Twierdzenie 3.1 (kryterium Weierstrassa)

Jeśli istnieje taki ciąg (a_n), że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego $x \in X \subset \mathbb{R}$ mamy nierówność

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny na X.

Zachodzi twierdzenie o ciągłości, analogiczne do twierdzenia 2.4.

Twierdzenie 3.2

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest szeregiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$, to funkcja S jest ciągła.

Przykład 3.3

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$$

na przedziale $[0, 1]$.

Rozwiązanie. Dla $x \in [0, 1)$ mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = x(1-x)\frac{1}{1-x} = x,$$

natomiast dla $x = 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n \cdot 0 = 0,$$

więc szereg jest zbieżny punktowo. Funkcja

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{dla } x = 1 \end{cases},$$

do której dany szereg zbiega nie jest ciągła, a funkcje $f_n(x) = x^n(1-x)$ są ciągłe, więc, na mocy twierdzenia 3.2, szereg nie zbiega jednostajnie. $\square$

Przykład 3.4

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

na przedziale $[1, \infty)$.

Rozwiązanie. Dla każdego $x \in [1, \infty]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left|\frac{nx}{1+n^4x^2}\right| = \frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{nx}{n^4x^2} = \frac{1}{n^3x} \leq \frac{1}{n^3},$$

więc, na mocy kryterium Weierstrassa, dany szereg jest jednostajnie zbieżny, bo szereg harmoniczy rzędu 3 jest zbieżny. □

Przykład 3.5

Zbadaj obszar zbieżności[a] punktowej oraz zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}.$$

[a] czyli zbiór punktów, w których szereg jest zbieżny

Rozwiązanie. Możemy od razu stwierdzić, że dla $x = 0$ otrzymamy szereg ciąg zer, który oczywiście jest (jednostajnie) zbieżny do zera. Możemy potraktować x jako parametr, wtedy zamiast szeregu funkcyjnego będziemy mieć szereg liczbowy, którego zbieżność możemy pokazać z kryterium d'Alemberta:

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{e^{x(n+1)}} \frac{e^{xn}}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x}.$$

Szereg jest więc zbieżny dla każdego $x > 0$ i rozbieżny dla każdego $x < 0$. Ostatecznie, obszar zbieżności punktowej danego szeregu funkcyjnego to $[0, \infty)$.

Zajmijmy się teraz zbieżnością jednostajną. Oczywiście można by ją wykazywać przez znalezienie ciągu sum cześciowych, a następnie skorzystanie z twierdzenia 2.6, ale możemy też skorzystać z kryterium Weierstrassa, chociaż w dosyć nieoczywisty sposób.

Znajdźmy najpierw supremum ciągu $a_n = \frac{x^2}{e^{nx}}$. Możemy znaleźć miejsca zerowe pochodnej:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{2x(e^{nx}) - x^2(ne^{nx})}{e^{2nx}} = \frac{x(2-xn)}{e^{nx}} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{n}\right\}.$$

Szkicując wykres przekonamy się, że funkcja $a_n(x)$ osiąga maksimum w $x = \frac{2}{n}$, więc

$$a_n(x) \leq a_n\left(\tfrac{2}{n}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2n^2}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2n^2}$ jest zbieżny (ponieważ jest harmoniczny rzędu 2), więc możemy użyć kryterium Weierstrassa udowadniając, że dany szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny. □

Zachodzą również twierdzenia o różniczkowalności i całkowalności, analogiczne do twierdzeń 2.9 i 2.10.

Twierdzenie 3.6

Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny na X, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X, to dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Twierdzenie 3.7

Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X, to dla każdych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\, \mathrm{d}x\right).$$

§3.1 Szeregi potęgowe

Definicja 3.8. Szereg potęgowy o środku w punkcie c to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

gdzie $a_n, x, c \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 3.9

Jeśli szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

jest zbieżny dla pewnego x_1, to jest zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że

$$|x_2 - c| < |x_1 - c|,$$

a jeśli nie jest zbieżny dla pewnego x_1, to nie jest zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że

$$|x_2 - c| > |x_1 - c|.$$

Powyższe twierdzenie każe nam podzielić płaszczyznę zespoloną (względem danego szeregu potęgowego) na trzy rozłączne zbiory. Formalnie, jeśli weźmiemy

$$r = \sup \left\{ |x-c| : \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ jest zbieżny} \right\},$$

to zbiór

$$\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < r\}$$

nazwiemy **kołem zbieżności**. Dla wszystkich elementów z tego zbioru dany szereg jest zbieżny. Dla elementów na brzegu tego koła zbieżność jest nieokreślona, a dla elementów poza nim dany szereg nie jest zbieżny. Liczba r to **promień zbieżności**. Dla $x = c$ dany szereg jest zbieżny.

> **Uwaga.** Jeśli przyjmiemy w definicji szeregu potęgowego (3.8), że $a_n, x, c \in \mathbb{R}$, to koło zbieżności staje się **przedziałem zbieżności**, a nieokreśloną zbieżność mamy tylko dla dwóch elementów: $c - r$ oraz $c + r$.

Obszarem zbieżności nazywamy zbiór będący sumą koła zbieżności oraz zbioru elementów z jego brzegu, dla których dany szereg potęgowy jest zbieżny.

Twierdzenie 3.10 (Cauchy'ego-Hadamarda)
Promień zbieżności jest dany jako

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

gdzie $r = \frac{1}{0}$ interpretujemy jako $r = \infty$, a $r = \frac{1}{\infty}$ jako $r = 0$.

Można podać dwa słabsze twierdzenia, które jednak często łatwiej jest stosować:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \implies r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \implies (3.10).$$

Mówimy, że ciąg (szereg) funkcyjny jest **niemal jednostajnie zbieżny** na przedziale (a, b) jeśli jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale $[c, d] \in (a, b)$.

Fakt 3.11. Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w $(c-r, c+r)$, to jest bezwzględnie zbieżny w $(c - r, c + r)$ oraz niemal jednostajnie zbieżny w $(c - r, c + r)$.

Fakt 3.12. Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w $(c-r, c+r)$ do $S(x)$, to funkcja $S(x)$ jest ciągła, różniczkowalna i całkowalna w $(c-r, c+r)$. Prawdziwe dla szeregów potęgowych są również tezy twierdzeń 3.6 i 3.7.

Twierdzenie 3.13 (Abela)
Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n$ będzie szeregiem potęgowym zbieżnym do $S(x)$ o promieniu zbieżności równym r. Jeśli ten szereg jest zbieżny dla $x_1 = c-r$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_1^+} S(x)$, to

$$\lim_{x\to x_1^+} S(x) = S(x_1),$$

czyli funkcja $S(x)$ jest prawostronnie ciągła w $x = c - r$. Analogicznie, jeśli szereg jest zbieżny dla $x_2 = c + r$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_2^-} S(x)$, to

$$\lim_{x\to x_2^-} S(x) = S(x_2),$$

czyli funkcja $S(x)$ jest lewostronnie ciągła w $x = c + r$.

Przykład 3.14

Znajdź sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n}$$
w każdym punkcie obszaru zbieżności.

Rozwiązanie. Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu
$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$
tak więc przedział zbieżności to $(-4, 0)$. Dla $x = -4$ mamy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(n+1) \text{ – rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego,}$$
a dla $x = 0$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^n} = \sum_{n=1} (n+1) \text{ – rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego.}$$
Obszarem zbieżności jest więc przedział $(-4, 0)$. Policzmy teraz sumę. Dla każdego $x \in (-4, 0)$ mamy
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(x+2)^{n+1}}{2^n}\right)' \overset{(3.6)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{2^n}\right)' \\ &= \left(\frac{(x+2)^2}{2} \frac{1}{1-\frac{x+2}{2}}\right)' = \left(\frac{(x+2)^2}{-x}\right)' = \frac{2x(x+2)+(x+2)^2}{x^2} = \frac{4-x^2}{x^2}. \end{aligned}$$
□

Przykład 3.15

Znajdź sumę szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-\frac{1}{2})^n}{n+1}$$
w każdym punkcie obszaru zbieżności.

Rozwiązanie. Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu
$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}}} = \frac{1}{2},$$
tak więc przedział zbieżności to $(0, 1)$. Dla $x = 0$ mamy
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ – zbieżny z kryterium Leibniza,}$$

a dla $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ – rozbieżny z kryterium ilorazowego.}$$

Obszarem zbieżności jest więc przedział $[0,1)$. Policzmy teraz sumę. Dla $x = \frac{1}{2}$ mamy

$$S(\tfrac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 0^n}{n+1} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Dla pozostałych x zapiszemy

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-\frac{1}{2})^n}{n+1} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/2}^{x} 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Szeregi potęgowe są niemal jednostajnie zbieżne w swoim przedziale zbieżności, więc dla $x \in (0,1)$ możemy zamienić znaki sumy i całki (twierdzenie 3.7)

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x-\frac{1}{2}} \int_{1/2}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{1-2(t-\frac{1}{2})} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{2-2t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \ln(1-t) \right]_{\frac{1}{2}}^{x} = \frac{1}{1-2x} \left(\ln(1-x) - \ln\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\ln(2-2x)}{1-2x}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Abela (3.13) wynika, że

$$S(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(2-2x)}{1-2x} = \ln(2),$$

więc ostatecznie mamy

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = \frac{1}{2} \\ \frac{\ln(2-2x)}{1-2x}, & \text{dla } x \in [0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}.$$

□

§3.2 Szeregi Taylora

Definicja 3.16 (szereg Taylora)**.** Jeśli funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów w pewnym otoczeniu U punktu x_0, to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

nazywamy szeregiem Taylora. Jeśli $x_0 = 0$, to nazywamy go szeregiem Maclaurina. Taki szereg jest niemal jednostajnie zbieżny (na pewnym przedziale) do funkcji f.