

Analiza

MICHAŁ DOBRANOWSKI

semestr letni 2023
v0.11

Poniższy skrypt zawiera materiał obejmujący wykłady z Analizy matematycznej I oraz II prowadzone na pierwszym roku Informatyki na AGH, lecz jest mocno rozbudowany przez przykłady i twierdzenia pochodzące z przeróżnych źródeł, które (zwykle dla rozwinięcia intuicji lub ułatwienia rozwiązań pewnych zadań) postanowiłem opisać.

PS: Analiza I nie jest skończona. Całkiem możliwe, że nigdy nie będzie.

Spis treści

Analiza II	2
1 Szeregi liczbowe	2
2 Ciągi funkcyjne	5
2.1 Metryka Czebyszewa	6
3 Szeregi funkcyjne	8
3.1 Szeregi potęgowe	11
3.2 Szeregi Taylora	15
3.3 Szeregi Fouriera	17
3.4 Trygonometryczne szeregi Fouriera	18
4 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych	21
4.1 Pochodne funkcji wielu zmiennych	25
4.2 Ekstrema lokalne	29
4.3 Ekstrema warunkowe	32
4.4 Funkcje uwikłane	36
5 Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych	36
5.1 Całka podwójna	37
A Układy współrzędnych	39

Analiza II

§1 Szeregi liczbowe

Definicja 1.1. Szereg liczbowy to para $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Mówimy, że szereg liczbowy jest **zbieżny**, jeśli istnieje skończona granica $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Liczbę S nazywamy wtedy **sumą** tego szeregu.

Twierdzenie 1.2 (warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Przykład 1.3

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy tak zwane **sumy teleskopowe**.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

Można łatwo pokazać, że szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny (czyli jest **rozbieżny**), mimo że spełnia warunek konieczny:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1} \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)}_{>1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)}_{>1} + \dots$$

Okazuje się, że zachodzi również dużo mocniejsze twierdzenie:

Twierdzenie 1.4 (o zbieżności szeregów harmonicznych)

Szereg harmoniczny rzędu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **bezwzględnie zbieżny**, w przeciwnym przypadku jest **warunkowo zbieżny**. Bezwzględna zbieżność szeregu pociąga za sobą jego zbieżność.

Aby sprawdzić zbieżność szeregów stosuje się kilka kryteriów zbieżności.

Twierdzenie 1.5 (kryterium porównawcze)

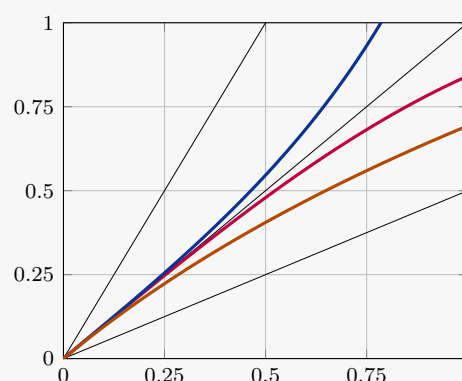
Jeśli dla każdego n większego od pewnego n_0 zachodzi

$$a_n \leq b_n$$

oraz $a_n, b_n > 0$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Uwaga. Wraz z powyższym twierdzeniem warto stosować nierówności, które zachodzą w przedziale $[0, 1]$:

- $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$
- $\frac{x}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$
- $x \leq \tan x \leq 2x$
- $1 - x \leq \cos x$



Przykład 1.6

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right).$$

Rozwiązanie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Wyrazy szeregu są dodatnie oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{n^2},$$

więc, na podstawie twierdzenia 1.4, dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.7 (kryterium ilorazowe)

Jeśli dla każdego n większego od pewnego n_0 wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są dodatnie oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, \infty),$$

to dane szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Twierdzenie 1.8 (kryterium d'Alemberta)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o niezerowych wyrazach oraz niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 1.9 (kryterium Cauchy'ego)

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g.$$

Jeśli $g > 1$, to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest zbieżny.

Uwaga. Jeśli w kryteriach d'Alemberta lub Cauchy'ego wyjdzie $g = 1$, to nie możemy powiedzieć nic o zbieżności ciągu.

Przykład 1.10

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} < 1,$$

więc dany szereg jest zbieżny. □

Twierdzenie 1.11 (kryterium całkowe)

Jeśli dla każdego n większego od pewnego n_0 wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie oraz istnieje taka malejąca (na przedziale $[n_0, \infty)$) funkcja f , że $a_n = f(n)$ dla każdego n , to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna.

Twierdzenie 1.12 (kryterium Leibniza)

Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Jeśli ciąg (a_n) jest dodatni, zbieżny do zera oraz malejący, to jest dany szereg jest zbieżny.

Szereg opisywany przez kryterium Leibniza nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

Przykład 1.13

Zbadać zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z kryterium Leibniza bardzo łatwo pokazać, że dany szereg jest zbieżny. Ciąg $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ ma oczywiście wyrazy dodatnie i jest zbieżny do zera. Ponadto jest malejący, bo zarówno n , jak i $\ln n$ rosną.

Aby określić, czy dany szereg jest bezwzględnie zbieżny skorzystamy z kryterium całkowego.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C = \ln(\ln(x)) + C.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(x)) \Big|_1^{\infty} - \text{rozbieżna}.$$

Z tego wynika, że dany szereg jest tylko warunkowo zbieżny. \square

§2 Ciągi funkcyjne

Ciąg funkcyjny to ciąg, którego przeciwdziedziną jest zbiór funkcji określonych na tej samej dziedzinie. W kolejnych sekcjach będziemy rozważać ciągi funkcji $X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, chyba że stwierdzono inaczej. Jest to ważne założenie niektórych twierdzeń.

Definicja 2.1 (zbieżność punktowa). Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny punktowo na X , jeśli istnieje taka funkcja $f : X \rightarrow Y$, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, czyli gdy

$$\forall_{x \in X} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicja 2.2 (zbieżność jednostajna). Ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie na X , jeśli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad \forall_{x \in X} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 2.3

Jeśli ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ jest jednostajnie zbieżny do f na X , to jest również zbieżny punktowo do f na X , co zapisujemy jako

$$f_n \xrightarrow{X} f \implies f_n \xrightarrow{X} f.$$

Dowód. Wynika z definicji i podstawowych praw rachunku kwantyfikatorów. \square

Twierdzenie 2.4

Jeśli ciąg $(f_n(x))$ jest ciągiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $f_n \Rightarrow f$, to funkcja f jest ciągła.

Przykład 2.5

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

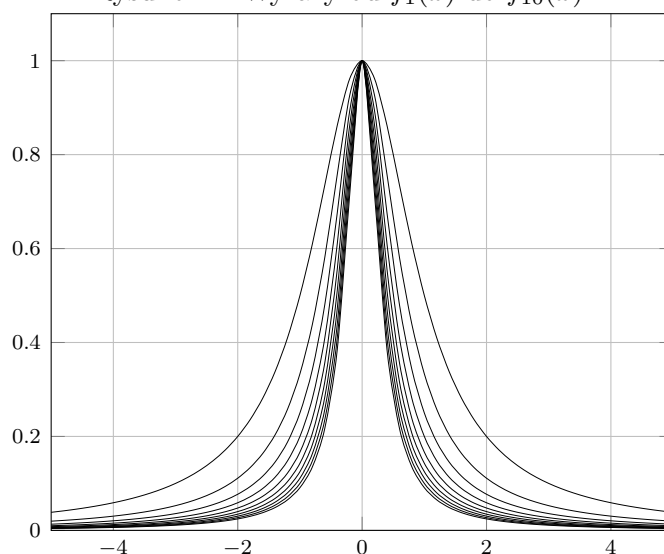
na zbiorze \mathbb{R} .

Rozwiązanie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx^2} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = 0 \\ 0, & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Dany ciąg jest więc zbieżny punktowo, ale, skoro funkcje f_n są ciągłe, a funkcja f nie, to nie jest zbieżny jednostajnie.

Rysunek 1: Wyraży od $f_1(x)$ do $f_{10}(x)$



□

§2.1 Metryka Czebyszewa

Weźmy pewną dwuargumentową funkcję zdefiniowaną jako

$$d_c(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Można udowodnić, że funkcja d_c jest metryką (zwaną metryką Czebyszewa). Jako argumenty przyjmuje dwie funkcje zdefiniowane na tej samej dziedzinie X .

Twierdzenie 2.6

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest ograniczona, to

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_c(f_n, f) = 0.$$

Przykład 2.7

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

na przedziale $[2, \infty)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{d}{dx} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n(nx^{n-1})}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Pochodna zawsze jest dodatnia, więc supremum będzie przy $x \rightarrow \infty$. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1) = 0,$$

więc dany ciąg jest zbieżny jednostajnie. □

Przykład 2.8

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

na zbiorze \mathbb{R} .

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{nx}{n^2 + x^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left(\frac{nx}{n^2 + x^2} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{nx}{n^2 + x^2} \right) = \frac{n(n^2 + x^2) - nx(2x)}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{n^3 - nx^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

Pochodna zeruje się, gdy

$$n^3 = nx^2 \Rightarrow x = \pm n,$$

więc supremum będzie przy $x = n$. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2},$$

więc dany ciąg nie jest zbieżny jednostajnie. \square

Twierdzenie 2.9 (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest różniczkowalna, ciąg (f_n) jest zbieżny, a ciąg (f'_n) zbieżny jednostajnie, to dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n(x)).$$

Twierdzenie 2.10 (o całkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ jest całkowalna, a ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie, to dla każdych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \right).$$

§3 Szeregi funkcyjne

Podobnie do szeregów liczbowych, szeregi funkcyjne to para $((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}})$: ciąg funkcyjny oraz ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego. Taki szereg jest zbieżny (punktowo / jednostajnie) do sumy szeregu S , jeśli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny (częściowo / jednostajnie) do S .

Analogicznie do twierdzenia 2.3, warunkiem koniecznym zbieżności jednostajnej szeregu jest jego zbieżność punktowa.

Z kolei w analogii do twierdzenia 1.2, warunkiem koniecznym zbieżności (punktowej / jednostajnej) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżność (punktowa / jednostajna) ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ do zera, to znaczy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightarrow S \implies f_n(x) \rightarrow 0 \equiv f$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S \implies f_n(x) \rightrightarrows 0 \equiv f.$$

Twierdzenie 3.1 (kryterium Weierstrassa)

Jeśli istnieje taki ciąg (a_n) , że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego $x \in X \subset \mathbb{R}$ mamy nierówność

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny na X .

Zachodzi twierdzenie o ciągłości, analogiczne do twierdzenia 2.4.

Twierdzenie 3.2

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest szeregiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Rightarrow S(x)$, to funkcja S jest ciągła.

Przykład 3.3

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$$

na przedziale $[0, 1]$.

Rozwiązanie. Dla $x \in [0, 1)$ mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = x(1-x) \frac{1}{1-x} = x,$$

natomiast dla $x = 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n \cdot 0 = 0,$$

więc szereg jest zbieżny punktowo. Funkcja

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{dla } x = 1 \end{cases},$$

do której dany szereg zbiega nie jest ciągła, a funkcje $f_n(x) = x^n(1-x)$ są ciągłe, więc, na mocy twierdzenia 3.2, szereg nie zbiega jednostajnie. \square

Przykład 3.4

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

na przedziale $[1, \infty)$.

Rozwiązanie. Dla każdego $x \in [1, \infty]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left| \frac{nx}{1+n^4x^2} \right| = \frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{nx}{n^4x^2} = \frac{1}{n^3x} \leq \frac{1}{n^3},$$

więc, na mocy kryterium Weierstrassa, dany szereg jest jednostajnie zbieżny, bo szereg harmoniczny rzędu 3 jest zbieżny. \square

Przykład 3.5

Zbadaj obszar zbieżności^a punktowej oraz zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}.$$

^aczyli zbiór punktów, w których szereg jest zbieżny

Rozwiązanie. Możemy od razu stwierdzić, że dla $x = 0$ otrzymamy szereg ciąg zer, który oczywiście jest (jednostajnie) zbieżny do zera. Możemy potraktować x jako parametr, wtedy zamiast szeregu funkcyjnego będziemy mieć szereg liczbowy, którego zbieżność możemy pokazać z kryterium d'Alemberta:

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x(n+1)}} \frac{e^{xn}}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x}.$$

Szereg jest więc zbieżny dla każdego $x > 0$ i rozbieżny dla każdego $x < 0$. Ostatecznie, obszar zbieżności punktowej danego szeregu funkcyjnego to $[0, \infty)$.

Zajmijmy się teraz zbieżnością jednostajną. Oczywiście można by ją wykazywać przez znalezienie ciągu sum częściowych, a następnie skorzystanie z twierdzenia 2.6, ale możemy też skorzystać z kryterium Weierstrassa, chociaż w dosyć nieoczywisty sposób.

Znajdźmy najpierw supremum ciągu $a_n = \frac{x^2}{e^{nx}}$. Możemy znaleźć miejsca zerowe pochodnej:

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{2x(e^{nx}) - x^2(ne^{nx})}{e^{2nx}} = \frac{x(2 - xn)}{e^{nx}} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{n}\right\}.$$

Szkicując wykres pochodnej przekonamy się, że funkcja $a_n(x)$ osiąga maksimum w $x = \frac{2}{n}$, więc

$$a_n(x) \leq a_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2 n^2}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2 n^2}$ jest zbieżny (ponieważ jest harmoniczny rzędu 2), więc możemy użyć kryterium Weierstrassa udowadniając, że dany szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny. \square

Zachodzą również twierdzenia o różniczkowalności i całkowalności, analogiczne do twierdzeń 2.9 i 2.10.

Twierdzenie 3.6

Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny na X , a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X , to dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Twierdzenie 3.7

Niech $(f_n(x))$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X , to dla każdych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \right).$$

§3.1 Szeregi potęgowe

Definicja 3.8. Szereg potęgowy o środku w punkcie c to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n,$$

gdzie $a_n, x, c \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 3.9

Jeśli szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n$$

jest zbieżny dla pewnego x_1 , to jest zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że

$$|x_2 - c| < |x_1 - c|,$$

a jeśli nie jest zbieżny dla pewnego x_1 , to nie jest zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że

$$|x_2 - c| > |x_1 - c|.$$

Powyższe twierdzenie każe nam podzielić płaszczyznę zespoloną (względem danego szeregu potęgowego) na trzy rozłączne zbiory. Formalnie, jeśli weźmiemy

$$r = \sup \left\{ |x - c| : \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n \text{ jest zbieżny} \right\},$$

to zbiór

$$\{x \in \mathbb{C} : |x - c| < r\}$$

nazwiemy **kołem zbieżności**. Dla wszystkich elementów z tego zbioru dany szereg jest zbieżny. Dla elementów na brzegu tego koła zbieżność jest nieokreślona, a dla elementów poza nim dany szereg nie jest zbieżny. Liczba r to **promień zbieżności**. Dla $x = c$ dany szereg jest zbieżny.

Uwaga. Jeśli przyjmiemy w definicji szeregu potęgowego (3.8), że $a_n, x, c \in \mathbb{R}$, to koło zbieżności staje się **przedziałem zbieżności**, a nieokreśloną zbieżność mamy tylko dla dwóch elementów: $c - r$ oraz $c + r$.

Obszarem zbieżności nazywamy zbiór będący sumą koła zbieżności oraz zbioru elementów z jego brzegu, dla których dany szereg potęgowy jest zbieżny.

Twierdzenie 3.10 (Cauchy'ego-Hadamarda)

Promień zbieżności jest dany jako

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

gdzie $r = \frac{1}{0}$ interpretujemy jako $r = \infty$, a $r = \frac{1}{\infty}$ jako $r = 0$.

Można podać dwa słabsze twierdzenia, które jednak często łatwiej jest stosować:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \implies r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \implies (3.10).$$

Mówimy, że ciąg (szereg) funkcyjny jest **niemal jednostajnie zbieżny** na przedziale (a, b) jeśli jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale $[c, d] \in (a, b)$.

Fakt 3.11. Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w $(c-r, c+r)$, to jest bezwzględnie zbieżny w $(c-r, c+r)$ oraz niemal jednostajnie zbieżny w $(c-r, c+r)$.

Fakt 3.12. Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w $(c-r, c+r)$ do $S(x)$, to funkcja $S(x)$ jest ciągła, różniczkowalna i całkowalna w $(c-r, c+r)$. Prawdziwe dla szeregów potęgowych są również tezy twierdzeń 3.6 i 3.7.

Twierdzenie 3.13 (Abela)

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ będzie szeregiem potęgowym zbieżnym do $S(x)$ o promieniu zbieżności równym r . Jeśli ten szereg jest zbieżny dla $x_1 = c-r$ oraz istnieje granica

$\lim_{x \rightarrow x_1^+} S(x)$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} S(x) = S(x_1),$$

czyli funkcja $S(x)$ jest prawostronnie ciągła w $x = c-r$. Analogicznie, jeśli szereg jest zbieżny dla $x_2 = c+r$ oraz istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_2^-} S(x)$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} S(x) = S(x_2),$$

czyli funkcja $S(x)$ jest lewostronnie ciągła w $x = c+r$.

Przykład 3.14

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n}$$

w każdym punkcie obszaru zbieżności.

Rozwiązanie. Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

tak więc przedział zbieżności to $(-4, 0)$. Dla $x = -4$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) - \text{rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego,}$$

a dla $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) - \text{rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego.}$$

Obszarem zbieżności jest więc przedział $(-4, 0)$. Policzmy teraz sumę. Dla każdego $x \in (-4, 0)$ mamy

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(x+2)^{n+1}}{2^n} \right)' \stackrel{(3.6)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{2^n} \right)' \\ &= \left(\frac{(x+2)^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{x+2}{2}} \right)' = \left(\frac{(x+2)^2}{-x} \right)' = \frac{2x(x+2) + (x+2)^2}{x^2} = \frac{4-x^2}{x^2}. \end{aligned}$$

□

Przykład 3.15

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - \frac{1}{2})^n}{n+1}$$

w każdym punkcie obszaru zbieżności.

Rozwiązanie. Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}}} = \frac{1}{2},$$

tak więc przedział zbieżności to $(0, 1)$. Dla $x = 0$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (-\frac{1}{2})^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} - \text{zbieżny z kryterium Leibniza,}$$

a dla $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \text{rozbieżny z kryterium ilorazowego.}$$

Obszarem zbieżności jest więc przedział $[0, 1)$. Policzmy teraz sumę. Dla $x = \frac{1}{2}$ mamy

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 0^n}{n+1} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Dla pozostałych x zapiszemy

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^x 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n dt.$$

Szeregi potęgowe są niemal jednostajnie zbieżne w swoim przedziale zbieżności, więc dla $x \in (0, 1)$ możemy zamienić znaki sumy i całki (twierdzenie 3.7)

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n dt = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{1 - 2\left(t - \frac{1}{2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{2 - 2t} dt = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \ln(1 - t) \right]_{\frac{1}{2}}^x = \frac{1}{1 - 2x} \left(\ln(1 - x) - \ln \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\ln(2 - 2x)}{1 - 2x}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Abela (3.13) wynika, że

$$S(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2 - 2x)}{1 - 2x} = \ln(2),$$

więc ostatecznie mamy

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = \frac{1}{2} \\ \frac{\ln(2-2x)}{1-2x}, & \text{dla } x \in [0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}.$$

□

Przykład 3.16

Znajdź sumę szeregu liczbowego

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Rozwiązanie. Weźmy szereg funkcyjny

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Wartość $S(1)$ jest szukaną sumą, jeśli tylko szereg jest zbieżny w tym punkcie. Niech $t = x^2$. Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności szeregu:

$$r_t = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3}} = 1,$$

tak więc szereg zbiega, gdy $t \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-1, 1)$. W punktach $x = -1$ i $x = 1$ szereg również jest zbieżny, co można pokazać z kryterium Lebniza.

Policzmy teraz sumę (dla przedziału zbieżności $(-1, 1)$):

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n u^{2n} du = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} du \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-u^2)^n du = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = \left[\arctan(u) \right]_0^x = \arctan(x). \end{aligned}$$

Skoro w $x = 1$ ten szereg też jest zbieżny, to z twierdzenia Abela (3.13) mamy

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

□

§3.2 Szeregi Taylora

Twierdzenie 3.17 (o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)

Jeśli funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów w pewnym otoczeniu U punktu x_0 , to na pewnym przedziale zachodzi równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Taki szereg nazywamy szeregiem Taylora, a jeśli $x_0 = 0$, to nazywamy go szeregiem Maclaurina.

Fakt 3.18. Dostyc łatwo wyprowadzić następujące rozwinięcia w szeregi Maclaurina, które mogą być użyteczne w zadaniach:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Przykład 3.19

Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = \ln x$ w otoczeniu $x_0 = 1$.

Rozwiązanie. Spróbujmy znaleźć ogólny wzór na $f^{(n)}(x)$. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= \frac{-1}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-6}{x^4} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \\ &\Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!, \end{aligned}$$

tak więc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{n!} (x-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n.$$

Z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda (3.10)

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = 1$$

wynika, że ten szereg jest zbieżny, a więc równość jest prawdziwa, dla każdego $x \in (0, 2)$. Łatwo sprawdzić (z kryterium Leibniza), że jest zbieżny też dla $x = 2$, więc (z twierdzenia Abela) również dla $x = 2$ równość jest prawdziwa. \square

Przykład 3.20

Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = x^3 \arctan x^4$.

Rozwiązanie. Weźmy $g(x) = \arctan x^4$. Mamy

$$g'(x) = \frac{4x^3}{1+x^8} = \frac{4x^3}{1-(-x^8)}, \quad |x^8| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

więc

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4x^3 (-x^8)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4x^{8n+3},$$

ergo

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4t^{8n+3} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4 \int_0^x t^{8n+3} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4x^{8n+4}}{8n+4}. \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{8n+7}.$$

Równość jest prawdziwa dla $x \in (-1, 1)$ oraz (z kryterium Leibniza i twierdzenia Abela) dla $x = \pm 1$. \square

§3.3 Szeregi Fouriera

Zbiór funkcji **całkowalnych z kwadratem** będziemy oznaczać przez $L^2[a, b]$. Formalnie

$$L^2[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{[a, b]} f^2(x) dx < \infty \right\}.$$

Jeśli utożsamimy ze sobą funkcje, które różnią się zbiorze miary Riemanna równej zero, to struktura $(L^2[a, b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową, w której możemy wprowadzić iloczyn skalarny

$$f \circ g = \int_{[a, b]} f(x)g(x) dx.$$

Mamy więc przestrzeń unitarną, ergo zdefiniowana jest w niej też norma

$$\|f\| = \sqrt{f \circ f} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

oraz metryka

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Zbieżność w sensie metryki d nazywa się **zbieżnością przeciętną z kwadratem**.

Definicja 3.21. Ciąg ortogonalny to taki ciąg funkcyjny $(\varphi_n)_{n \geq 0}$, którego funkcje nie są tożsamościowo równe zeru, są całkowalne z kwadratem oraz jego elementy są prostopadłe, czyli

$$\forall_{i \neq j} \varphi_i \circ \varphi_j = 0.$$

Definicja 3.22. Ciąg ortonormalny to taki ciąg ortogonalny, że jego elementy są wersorami, czyli

$$\forall_{i, j} \varphi_i \circ \varphi_j = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}.$$

Wartość $\varphi_i \circ \varphi_j$ oznaczamy δ_{ij} i nazywamy **delta Kroneckera**.

Szeregiem ortogonalnym będziemy nazywać szereg funkcyjny w postaci $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, gdzie (c_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych, a (φ_n) ciągiem ortogonalnym.

Twierdzenie 3.23 (współczynniki Eulera-Fouriera)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n \rightrightarrows f$$

jest ortogonalny i zbiega jednostajnie do funkcji $f \in L^2[a, b]$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{f \circ \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Szereg ortogonalny, w którym współczynniki mają powyższą formę, nazywamy **szeregiem Fouriera** funkcji f . Oznaczamy

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Jeśli powyższy szereg ortogonalny jest zbieżny do f na całym przedziale $[a, b]$ to mówimy, że ta funkcja jest **rozwijalna** w szereg Fouriera.

Twierdzenie 3.24 (nierówność Bessela)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest szeregiem Fouriera funkcji f względem ciągu (φ_n) , to

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2.$$

Twierdzenie 3.25 (tożsamość Parsevala)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest szeregiem Fouriera funkcji f względem ciągu (φ_n) , to

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ jest przeciętnie zbieżny z kwadratem do f .

Jeśli pewien szereg spełnia tożsamość Parsevala dla każdej funkcji $f \in L^2[a, b]$, to mówimy, że ciąg (φ_n) jest **zupełny**.

Wniosek 3.26

Jeśli ciąg (φ_n) jest zupełny oraz $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest przeciętnie zbieżny z kwadratem do f na $[a, b]$.

§3.4 Trygonometryczne szeregi Fouriera

Fakt 3.27. Ciąg

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

jest zupełny (a więc i ortogonalny).

Wniosek 3.28 (współczynniki Eulera-Fouriera (3.23) dla szeregów trygonometrycznych)

Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji całkowalnej $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy nazywać szereg

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

Definicja 3.29 (Warunki Dirichleta).

1. funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona,
2. funkcja f ma skończoną liczbę przedziałów monotoniczności,
3. funkcja f ma skończoną liczbę punktów nieciągłości x_0 oraz

$$f(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)}{2},$$

4. zachodzi równość

$$f(a) = f(b) = \frac{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)}{2}.$$

Twierdzenie 3.30 (o rozwijaniu funkcji w szereg Fouriera)

Jeśli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi, \pi]$, to szereg trygonometryczny Fouriera tej funkcji jest zbieżny punktowo do f na $[-\pi, \pi]$.

Uwaga 3.31. Jeśli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi, \pi]$ oraz jest nieparzysta, to

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

gdzie $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$. Jeśli jest parzysta, to

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gdzie $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$. Tworzą one wtedy odpowiednio szereg sinusów i cosinusów.

Przykład 3.32

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ x, & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Korzystając z niego, oblicz sumę szeregu liczbowego $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

Rozwiązanie. Aby funkcja f spełniała wszystkie warunki Dirichleta, musimy dodać wartość w punkcie $x = \pm\pi$.

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)}{2} = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Możemy więc już napisać

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} x dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{nx \sin nx + \cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{n\pi \sin n\pi + \cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-nx \cos nx + \sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin n\pi - n\pi \cos n\pi}{n} = \frac{-\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

W punkcie $x = \pi$:

$$f(\pi) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} (-1)^n = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

ergo

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi}{2} \left(f(\pi) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

□

Wniosek 3.33 (tożsamość Parsevala (3.25) dla szeregów trygonometrycznych)

Przyjmujemy oznaczenia jak we wniosku 3.28. Zachodzi równość

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Przykład 3.34

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = x^2$$

dla $x \in [-\pi, \pi]$. Korzystając z tego rozwinięcia, oblicz sumę szeregów liczbowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Rozwiązanie. [blackpenredpen na YouTube](#). □

§4 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

W tej sekcji będziemy skupiać się na funkcjach typu $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. W tym kontekście warto zauważyć, że struktura $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową. Jest ona również przestrzenią Banacha ze zdefiniowaną normą euklidesową.

Fakt 4.1 (granica ciągu). Weźmy ciąg (x_n) elementów zbioru \mathbb{R}^k i oznaczmy $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k})$. Zachodzi równoważność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (g_1, g_2, \dots, g_k) \Leftrightarrow \forall_{1 \leq i \leq k} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i} = g_i.$$

Definicja 4.2 (Heinego). Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^k$, ma granicę w punkcie x_0 równą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \in D, x_n \neq x_0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Przykład 4.3

Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

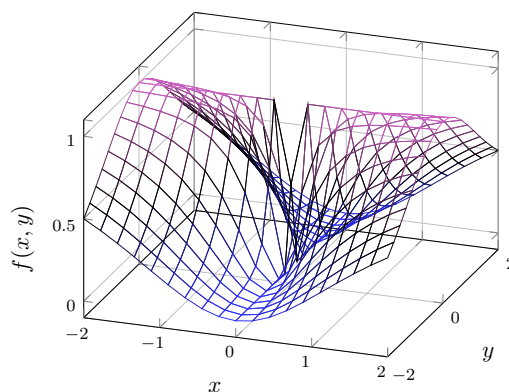
Rozwiązanie. Podstawiając $x = 0$ mamy

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0,$$

a dla $y = 0$ otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0} = 1,$$

więc granica nie istnieje. Bardziej formalnie możemy powiedzieć, że wzięliśmy dwa ciągi: $a_n = (0, \frac{1}{n}), b_n = (\frac{1}{n}, 0)$ i pokazaliśmy sprzeczność z definicją Heinego. □



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Przykład 4.4

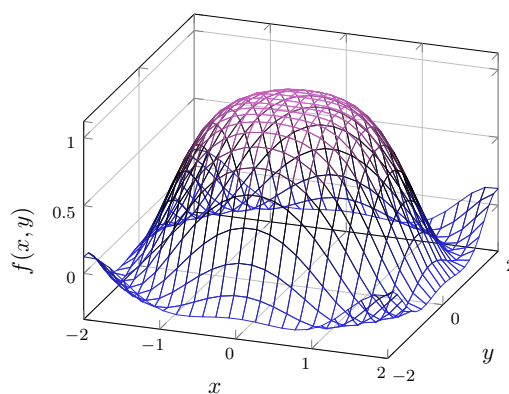
Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \end{aligned}$$

□



Rysunek 3: Wykres funkcji $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

Przykład 4.5

Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Rozwiązanie. Skoro

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$$

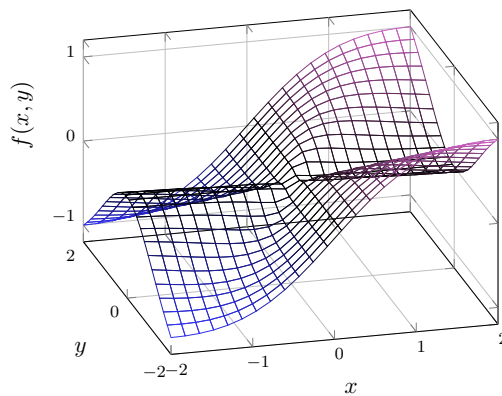
oraz $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$, to, na mocy twierdzenia o trzech ciągach,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = 0,$$

więc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

□



Rysunek 4: Wykres funkcji $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$.

Przykład 4.6

Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Rozwiązanie. Podstawiając $y = x$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + x^4} = 0,$$

a dla $x = y^2$ otrzymujemy

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2},$$

więc granica nie istnieje.

□

Uwaga. Powyższy przykład jest o tyle ciekawy, że jeśli x oraz y zbiegają w tym samym tempie (czyli łączy jest liniowa zależność) to zawsze granica wyjdzie zerowa. Aby pokazać ten fakt, przejdziemy do współrzędnych biegunowych:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi}.$$

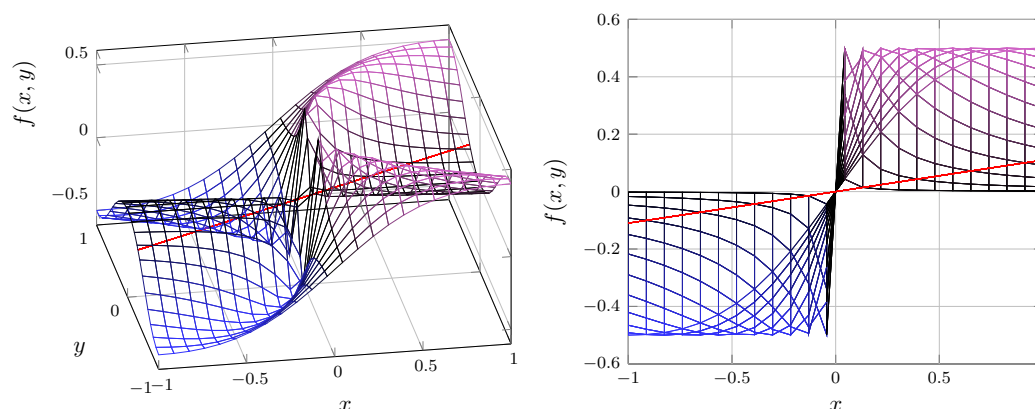
Jeśli $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, to (skoro $\cos \varphi = 0$)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{0}{0 \pm r^2} = 0,$$

a jeśli $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$, to (skoro \sin i \cos są ograniczone)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi} = \frac{0}{\cos^2 \varphi + 0} = 0.$$

Natomiast jeśli φ nie jest stałe, ale na przykład zbiega do $\frac{\pi}{2}$, to, jak można zauważyć na poniższym rysunku, granica niekoniecznie będzie zerowa.



Rysunek 5: Wykres funkcji $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ z zaznaczoną prostą $y = \frac{x}{3}$.

Granice funkcji $f(x, y)$ w formie $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ nazywamy czasami **granicą podwójną**¹, w odróżnieniu od granic $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ czy $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, które są **granicami iterowanymi**.

Fakt 4.7. Jeśli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) granicę podwójną oraz istnieją obie jej granice iterowane, to wszystkie trzy są sobie równe.

Uzasadnienie. Granica iterowana w punkcie (x_0, y_0) modeluje dążenie do tego punktu po dwóch bokach prostokąta. □

Uwaga. Jeśli obie granice iterowane nie istnieją, to nie znaczy, że granica podwójna nie istnieje. Jeśli obie granice iterowane istnieją i są sobie równe, to nie znaczy, że granica podwójna istnieje.

Natomiast z powyższego faktu wynika, że jeśli obie granice iterowane istnieją i nie są sobie równe, to granica podwójna nie istnieje.

Fakt 4.8. Jeśli funkcja (wielu zmiennych) f jest ciągła w x_0 , a funkcja g jest ciągła w $f(x_0)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w x_0 .

Fakt 4.9. Jeśli funkcje (wielu zmiennych) f, g są ciągłe w x_0 , to funkcje $f + g, f - g, f \cdot g$ również są ciągłe w tym punkcie. Jeśli dodamy warunek, że $g(x) \neq 0$ dla pewnego otoczenia x_0 , to ciągła w tym punkcie jest również funkcja $\frac{f}{g}$.

¹co może być nazwą mylącą; w literaturze angielskiej jest to *ordinary limit*, który nie jest tym samym pojęciem co *double limit*. W szczególności dla *double limit* nie zachodzi fakt 4.7, zobacz też: [wikipedia](https://en.wikipedia.org/wiki/Double_limit).

§4.1 Pochodne funkcji wielu zmiennych

Definicja 4.10. Pochodną funkcji $f : \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ wzdłuż wektora \vec{v} nazwiemy taką funkcję $D_v f$, że

$$D_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\vec{v}) - f(x)}{t}.$$

Oprócz notacji Eulera ($D_v f$) stosuje się również notację Leibniza ($D_v f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial \vec{v}}$) oraz Lagrange'a ($f'_{\vec{v}}$).

Pochodna **w kierunku** wektora \vec{v} jest pochodną wzdłuż wektora $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Te pojęcia są oczywiście równoważne, jeśli \vec{v} jest wersorem. Najczęściej używamy jednak **pochodnych cząstkowych** to znaczy pochodnych wzdłuż wersorów osiowych, oznaczając

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial [1, 0]}(x, y) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial [0, 1]}(x, y).$$

Definicja 4.11 (różniczka). Funkcja $f : \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w p , gdy istnieje takie przekształcenie liniowe $L_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, że dla każdego $p + h$ w otoczeniu p zachodzi

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(p + h) - f(p) - L_p(h)}{\|h\|} = \vec{0}.$$

Funkcję $L_p(h)$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie p i oznaczamy $df(p)(h)$.

Twierdzenie 4.12 (warunek konieczny różniczkowalności)

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w punkcie p , to istnieje pochodna funkcji f w punkcie p wzdłuż dowolnego wektora $h \in \mathbb{R}^k$ i zachodzi

$$\frac{\partial f}{\partial h}(p) = df(p)(h).$$

Wyprowadzenie wzoru. Pamiętając, że $df(p)$ jest przekształceniem liniowym, więc może być rozpatrywane jako macierz, możemy równoważnie stwierdzić, że

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(p + h) - f(p) - df(p) \cdot h}{\|h\|} &= \vec{0} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + th) - f(p) - df(p) \cdot th}{t} &= \vec{0} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + th) - f(p)}{t} &= df(p) \cdot h \\ \frac{\partial f}{\partial h}(p) &= df(p) \cdot h. \end{aligned}$$

□

Definicja 4.13 (jakobian). Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie

$$f(p) = f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k)).$$

Macierz

$$df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(p) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą Jacobiego** funkcji f w punkcie p . Jeśli macierz ta jest kwadratowa, to jej wyznacznik nazywamy jakobianem funkcji f w punkcie p i oznaczamy $J(p)$.

Chcąc obliczyć różniczkę $df(p)$ w punkcie h wystarczy pomnożyć macierz $df(p)$ i wektor h , więc

$$df(p)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p)h_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p)h_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(p)h_k \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 4.14 (warunek konieczny różniczkowalności)

Jeśli funkcja jest różniczkowalna w x_0 , to jest ciągła w x_0 .

Twierdzenie 4.15 (warunek wystarczający różniczkowalności)

Jeśli istnieją i są ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie x_0 , to funkcja f jest różniczkowalna w x_0 .

Przykład 4.16

Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

w całej jej dziedzinie.

Rozwiązanie. Skorzystajmy z warunku wystarczającego na różniczkowalność funkcji. Pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(3x^2)(x^2 + y^2) - (x^3 + y^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(3y^2)(x^2 + y^2) - (x^3 + y^3)(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

są ciągłe w $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, więc w tym zbiorze funkcja f jest różniczkowalna. Aby sprawdzić, czy funkcja jest również różniczkowalna w $p = (0, 0)$ policzymy pochodną w tym punkcie w kierunku wektora h :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + th) - f(p)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 \cos^3 \varphi + t^3 \sin^3 \varphi}{t^2 \cos^2 \varphi + t^2 \sin^2 \varphi}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^3 \varphi + t^3 \sin^3 \varphi}{t^3} = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi = h_1^3 + h_2^3. \end{aligned}$$

Na mocy warunku koniecznego różniczkowalności (4.12) funkcja f nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$, ponieważ pochodna w kierunku h powinna być wynikiem przekształcenia liniowego wektora h . \square

Rozwiązanie. Pierwsza część alternatywnego rozwiązania przebiega tak samo, więc zbadamy tylko różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0, 0)$. Z definicji różniczki i macierzy Jacobiego mamy

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(p+h) - f(p) - L_p(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(h) - L_p(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} h_1 - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} h_2}{\|h\|}.$$

Możemy policzyć z definicji pochodnej

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3}{t^2} = t$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3}{t^2} = t,$$

więc

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} h_1 - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} h_2}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1 - h_2}{\|h\|} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} - r \cos \varphi - r \sin \varphi}{r} = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi - \cos \varphi - \sin \varphi \neq 0, \end{aligned}$$

więc funkcja f nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$. □

Uwaga 4.17. Warunek wystarczający (4.15) nie jest równocześnie warunkiem koniecznym (to znaczy, że twierdzenie nie jest tożsamością). Przykładem niech będzie funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

W przypadku funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalność w punkcie znaczy, że istnieje styczna do wykresu funkcji w tym punkcie. W podobny sposób możemy zinterpretować geometrycznie różniczkowalność funkcji $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: funkcja jest różniczkowalna w punkcie, gdy w tym punkcie istnieje płaszczyzna styczna do wykresu funkcji. Taka płaszczyzna będzie mieć równanie

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \quad (1)$$

Przykład 4.18

Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do funkcji

$$f(x, y) = e^{x^2-y}$$

w punkcie $p = (1, 0)$.

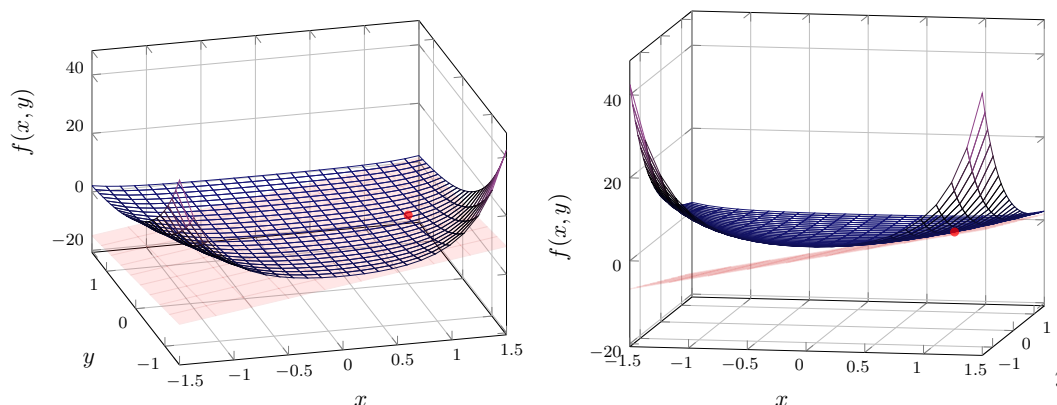
Rozwiązanie. Najpierw znajdziemy pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) &= e^{x^2-y} \cdot 2x = 2xe^{x^2-y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) &= e^{x^2-y} \cdot (-1) = -e^{x^2-y}. \end{aligned}$$

Płaszczyzna styczna w punkcie p ma więc wzór

$$\begin{aligned} z &= e^{1-0} + 2 \cdot 1 \cdot e^{1-0} \cdot (x-1) - e^{1-0} \cdot (y-0) \\ z &= 2ex - ey - e. \end{aligned}$$

□



Rysunek 6: Wykres funkcji $f(x, y) = e^{x^2-y}$ z płaszczyzną styczną w $(1, 0)$.

Również analogicznie do funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ możemy za pomocą pochodnych przybliżać wartości funkcji $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Mamy

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0)(h), \quad (2)$$

jeśli tylko funkcja f jest różniczkowalna w otoczeniu x_0 .

Pochodna cząstkowa **drugiego rzędu** to pochodna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Jeśli $i = j$, czyli pochodna ma postać $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, to nazywamy ją pochodną **czystą**, a przeciwnym wypadku jest **mieszana**.

Analogicznie do twierdzenia 4.15 funkcja $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest **2-krotnie różniczkowalna** w punkcie p , gdy istnieją i są ciągle wszystkie (jest ich k^2) pochodne cząstkowe 2-go rzędu funkcji f w punkcie p .

Twierdzenie 4.19 (Schwarza o pochodnych mieszanych)

Jeśli funkcja f jest 2-krotnie różniczkowalna w p , to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p).$$

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest 2-krotnie różniczkowalna, to możemy zdefiniować różniczkę 2-go rzędu:

$$\begin{aligned} d^2 f(h_1, h_2) &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) h_2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

§4.2 Ekstrema lokalne

Definicja 4.20 (maksimum lokalne). Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ określona na obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 \in D$, jeśli istnieje takie sąsiedztwo $U \subset D$ punktu x_0 , że dla każdego $x \in U$

$$f(x) < f(x_0).$$

Analogicznie definiujemy minimum lokalne.

Twierdzenie 4.21 (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna oraz ma ekstremum lokalne w x_0 , to

$$df(x_0) = \mathbf{0}.$$

Definicja 4.22. Forma kwadratowa to funkcja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T \cdot A \cdot X,$$

gdzie macierz A jest symetryczną macierzą, którą nazywamy **macierzą formy kwadratowej**. Forma kwadratowa φ jest **określona** dodatnio / ujemnie / nieujemnie / niedodatnio, jeśli dla każdego niezerowego $h \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(h)$ jest dodatnio / ujemnie / nieujemnie / niedodatnio. Jeśli istnieją dwa wektory, dla których φ przyjmuje niezerowe wartości różnych znaków, to mówimy, że forma jest nieokreślona.

Twierdzenie 4.23 (Sylwestera)

Jeśli A jest macierzą formy kwadratowej φ oraz

$$d_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

jest ciągiem minorów wiodących, to:

1. $\forall_k d_k > 0 \Rightarrow \varphi$ jest dodatnio określona
2. $\forall_k (-1)^k d_k > 0 \Rightarrow \varphi$ jest ujemnie określona
3. $\forall_k d_k \geq 0 \Rightarrow \varphi$ jest nieujemnie określona
4. $\forall_k (-1)^k d_k \geq 0 \Rightarrow \varphi$ jest niedodatnio określona
5. w innym wypadku φ jest nieokreślona

Definicja 4.24 (hesjan). Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie p , to macierz

$$H(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(p) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą Hessego** (lub po prostu **hesjanem**) funkcji f w punkcie p .

Twierdzenie 4.25 (warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)

Dana jest funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ określona na obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli wszystkie jej pochodne cząstkowe drugiego rzędu są ciągłe w pewnym otoczeniu $U \ni p$ oraz spełniony jest warunek konieczny (4.21), to jeśli forma kwadratowa, której macierzą jest macierz Hessego funkcji f w punkcie p jest:

1. określona dodatnio, to istnieje minimum lokalne w punkcie p ,
2. określona ujemnie, to istnieje maksimum lokalne w punkcie p ,
3. nieokreślona, to nie ma ekstremum lokalnego w punkcie p .

Uwaga 4.26. Punkty dziedziny, w których różniczka jest tożsamościowa równa zero lub nie istnieje to **punkty krytyczne**. Te, które spełniają pierwszy warunek, to **punkty stacjonarne**. Z warunku koniecznego istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie 4.21) wynika, że ekstrema istnieją tylko w punktach krytycznych, jednak nie w każdym punkcie krytycznym jest ekstremum. Takie punkty stacjonarne, w których nie ma minimum ani maksimum, to **punkty siodłowe**.

Z warunku wystarczającego istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie 4.25) wynika, że jeśli badamy punkty stacjonarne za pomocą macierzy Hessego i wyjdzie nam chociaż jeden minor zerowy, a forma będzie określona nieujemnie lub niedodatnio, to ta metoda okaże się po prostu nieskuteczna. W szczególności jeśli badamy funkcję dwóch zmiennych i wyznacznik macierzy Hessego wyjdzie zerowy, to nie możemy nic powiedzieć o istnieniu ekstremum.

Przykład 4.27

Znajdź ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

p8w

Rozwiązanie. Najpierw policzmy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Są one ciągłe, więc funkcja jest różniczkowalna (z 4.15), więc ewentualne ekstrema na pewno będą w miejscach zerowania się obu pochodnych cząstkowych (z 4.21). Mamy więc

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Policzmy macierz Hessego:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y) & \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 3x) \\ \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y) & \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$

Dla punktu $(x, y) = (1, 1)$ mamy

$$H(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 6 > 0, \\ d_2 = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 > 0 \end{cases},$$

więc na podstawie warunku wystarczającego (4.25) wnioskujemy, że w punkcie $(1, 1)$ jest minimum lokalne.

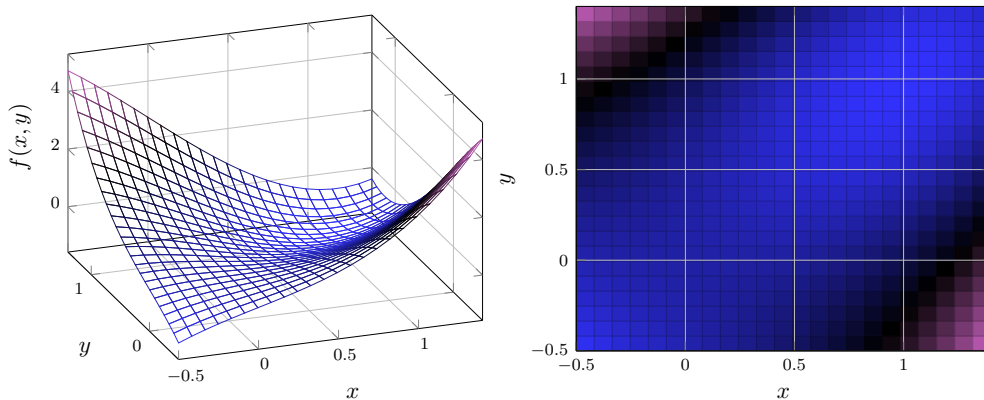
Dla punktu $(x, y) = (0, 0)$ mamy

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 0, \\ d_2 = -9 < 0 \end{cases},$$

więc twierdzenie 4.25 nie rozstrzyga istnienia ekstremum lokalnego. Mamy jednak

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3,$$

które przyjmuje wartości większe od $f(0, 0) = 0$ dla $\varepsilon > 0$ oraz mniejsze dla $\varepsilon < 0$, więc punkt $(0, 0)$ jest punktem siodłowym. \square



Rysunek 7: Wykres funkcji $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Przykład 4.28

Znaleźć odległość punktu $A = (0, 1, 0)$ od powierzchni $\pi : y = xz$.

Rozwiązanie. Weźmy punkt $P \in \pi$. Wtedy $P = (x, xz, z)$, a odległość tego punktu od punktu A wyraża się wzorem

$$f(x, z) = \sqrt{x^2 + (xz - 1)^2 + z^2}.$$

Możemy skorzystać z faktu, że funkcja pierwiastkowa jest monotoniczna i spróbować znaleźć minimum funkcji

$$g(x, z) = x^2 + (xz - 1)^2 + z^2.$$

Pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = 2x + 2xz^2 - 2z, \quad \frac{\partial g(x, z)}{\partial z} = 2z + 2x^2z - 2x$$

są ciągłe, więc funkcja g jest różniczkowalna, więc jej minimum może być jedynie w punktach stacjonarnych:

$$\begin{cases} x + xz^2 - z = 0 \\ z + x^2z - x = 0 \end{cases}.$$

Po dodaniu stronami i podstawieniu odpowiednich wartości przekształcamy powyższy układ równań do

$$x = z = 0.$$

Przyjemność zweryfikowania, że metoda macierzy Hessego dla tego punktu nie rozstrzygnie istnienia minimum pozostawione jest Czytelnikowi.

W takiej sytuacji musimy poradzić sobie jakoś inaczej. Wykorzystując nierówność między średnimi (AM-GM) mamy:

$$g(x, z) = x^2 + z^2 + (xz - 1)^2 \geq 2\sqrt{x^2z^2} + (xz)^2 - 2xz + 1 = (xz)^2 + 1 \geq 1.$$

Aby zamiast słabych nierówności mogły pojawić się tutaj równości, musi być spełnione $x^2 = z^2$ (z AM-GM) oraz $xz = 0$. To oczywiście zachodzi dla $x = z = 0$, więc pokazaliśmy, że $d_e(A, \pi) = \sqrt{1} = 1$. \square

Warto zauważyć, że zamiast sprawdzać kiedy słabe nierówności są równościami, można było również po prostu policzyć odległość punktu A od punktu $P = (0, 0, 0)$, ponieważ wiemy, że tylko w nim może wystąpić minimum.

§4.3 Ekstrema warunkowe

Definicja 4.29 (maksimum warunkowe). Funkcja $f : \mathbb{R}^n \supset S \rightarrow \mathbb{R}$ ma maksimum warunkowe w punkcie $x_0 \in D$ przy warunku $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli istnieje takie sąsiedztwo $U \subset D$ punktu x_0 , że dla każdego $x \in U \cap S$

$$f(x) < f(x_0),$$

przy

$$S = \{x \in D : g(x) = 0\}.$$

Analogicznie definiujemy minimum warunkowe.

Uwaga. W przeciwieństwie do definicji ekstremum lokalnego (definicja 4.20) nie wymagamy, żeby zbiór S był otwarty i spójny (był obszarem). Nie możemy więc bezpośrednio stosować twierdzeń i metod z poprzedniej sekcji.

Twierdzenie 4.30 (Weierstrassa o osiągnięciu kresów)

Jeśli funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, a zbiór $D \in \mathbb{R}^n$ jest zwarty, to funkcja f osiąga swoje kresy, czyli istnieją takie $x_1, x_2 \in D$, że dla każdego $x \in D$ zachodzi

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Zachodzi twierdzenie analogiczne do twierdzenia 4.21:

Twierdzenie 4.31 (warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego)

Jeśli funkcje f, g są różniczkowalne w sposób ciągły oraz f ma ekstremum warunkowe w punkcie x_0 przy warunku g , to istnieje takie $\lambda \in \mathbb{R}$, że

$$dL(x_0, \lambda) = \mathbf{0},$$

gdzie $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ to funkcja Lagrange'a.

Definicja 4.32 (hesjan obrzeżony). Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły w punkcie p , to macierz

$$H(p, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(p, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(p, \lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(p, \lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(p, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(p, \lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(p, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(p, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(p, \lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_n}(p, \lambda) \end{bmatrix}$$

nazywamy **hesjanem obrzeżonym** funkcji f w punkcie p .

Analogicznie do twierdzenia 4.25 mamy:

Twierdzenie 4.33 (warunek wystarczający istnienia ekstremum warunkowego)

Dane są funkcje $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $S \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli wszystkie ich pochodne cząstkowe drugiego rzędu są ciągłe w pewnym otoczeniu $U \ni p$ oraz spełniony jest warunek konieczny (4.31) dla punktu (p, λ) , to

1. $\forall_{k=2, \dots, n} d_k < 0 \Rightarrow$ istnieje minimum warunkowe w punkcie p ,
2. $\forall_{k=2, \dots, n} (-1)^{k+1} d_k < 0 \Rightarrow$ istnieje maksimum warunkowe w punkcie p ,
3. jeśli nie zachodzi warunek $\forall_k d_k \leq 0$ ani $\forall_k (-1)^{k+1} d_k \leq 0$, to nie ma ekstremum lokalnego w punkcie p ,

gdzie d_k jest wyznacznikiem minora wiodącego hesjanu obrzeżonego o rozmiarze $(k+1)$.

Przykład 4.34

Znajdź maksymalną wartość funkcji

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y - x$$

na zbiorze

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 6\}.$$

b4a

Rozwiązanie. Najpierw policzmy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + y - 1, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x + 2.$$

W zbiorze $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 6\} \subset S$ (który jest obszarem) funkcja przyjmuje ewentualne maksimum lokalne, tylko gdy obie pochodne się zerują (na podstawie twierdzenia 4.21), więc

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2, 5) \in S_1.$$

Hesjan ma postać

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 2 > 0 \\ d_2 = -1 < 0 \end{cases},$$

więc (z twierdzenia 4.25) punkt $(-2, 5)$ jest punktem siodłowym, a na zbiorze S_1 funkcja f nie przyjmuje maksimum.

Sprawdźmy teraz zbiór $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y < 6\} \subset S$. Możemy posłużyć się funkcją Lagrange'a:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad g(x, y) = x^2 - y.$$

Z twierdzenie 4.31 maksimum warunkowe może istnieć, tylko gdy

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} &= 2x + y - 1 + \lambda(2x) = 0, & \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} &= x + 2 - \lambda = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \lambda = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} 2x + x^2 - 1 + 2(x + 2)x = 0 \\ \lambda = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Pierwsze równanie z układu przyjmuje postać

$$3x^2 + 6x - 1 = 0 \tag{3}$$

$$\therefore x = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Hesjan obcięty będzie więc równy

$$H(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x, y, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x - y & -1 \\ 2x - y & 2 + 2\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a jego wyznacznik

$$\begin{aligned} d_2 &= -(2x - y) - (2x - y) - (2 + 2\lambda) = -4x + 2y - 2\lambda - 2 = \\ &= -6x + 2y - 6 = 2x^2 - 6x - 6 \stackrel{+ (3)}{=} 5x^2 - 7. \end{aligned}$$

Dla $x = -1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ mamy

$$d_2 = 5 \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \right) - 7 > 0,$$

więc (z twierdzenia 4.33) ten punkt jest lokalnym maksimum warunkowym, a dla $x = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ mamy

$$d_2 = 5 \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \right) - 7 = \frac{5}{3} (7 - 4\sqrt{3}) - 7 < 0,$$

więc ten punkt jest lokalnym minimum warunkowym. Na tej krzywej interesować nas więc będzie tylko punkt $\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \in S_2$.

Następnie zajmiemy się zbiorem $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y = 6\} \subset S$. Wiemy, że $y = 6$, więc możemy potraktować funkcję f jako funkcję jednej zmiennej.

$$\begin{aligned} f(x, 6) &= h(x) = x^2 + 6x + 2 \cdot 6 - x \\ &= x^2 + 5x + 12 \end{aligned}$$

Teraz możemy standardowo zbadać jej ekstrema:

$$h'(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Jednak $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} > 6$, więc ten punkt nie należy do S_3 . Ekstrema funkcji istnieją w punktach krytycznych, więc musimy jeszcze sprawdzić punkty krańcowe: $(x, y) = (\pm\sqrt{6}, 6)$.

Skoro $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, to wystarczy sprawdzić wartości funkcji w takich punktach poszczególnych zbiorów, w których potencjalnie może istnieć maksimum globalne:

$$\begin{aligned} f\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) &= \dots = 3 + \frac{16}{3\sqrt{3}}, \\ f(-\sqrt{6}, 6) &= h(-\sqrt{6}) = 6 - 5\sqrt{6} + 12 = 18 - 5\sqrt{6}, \\ f(\sqrt{6}, 6) &= h(\sqrt{6}) = 6 + 5\sqrt{6} + 12 = 18 + 5\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Tak więc funkcja f przyjmuje maksimum równe $18 + 5\sqrt{6}$ w punkcie $(\sqrt{6}, 6)$. □

Przykład 4.35

Znajdź ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y, z) = x + y + 2z$$

przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Rozwiązanie. Weźmy funkcję Lagrange'a:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z), \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Policzmy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial x} = 1 + \lambda 2x, \quad \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial y} = 1 + \lambda 2y, \quad \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial z} = 2 + \lambda 2z.$$

Z twierdzenia 4.31 wynika, że wszystkie pochodne zerują się w ekstremum, więc

$$\begin{cases} 1 + \lambda 2x = 0 \\ 1 + \lambda 2y = 0 \\ 2 + \lambda 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = -\frac{1}{2\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2\lambda^2} = 1$$

$$\therefore \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Możemy zauważyć, że zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ określa sferę w przestrzeni euklidesowej, więc jest ograniczony i domknięty, więc, na mocy twierdzenia Heinego-Borela, jest zwarty. Z twierdzenia Weierstrassa (4.30) wynika, że funkcja f przyjmuje swoje ekstrema na tym zbiorze, więc wystarczy sprawdzić wyliczone wcześniej wartości.

Dla $\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$ mamy

$$x = y = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad z = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$f(x, y, z) = 2\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + 2\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{6}.$$

Dla $\lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ mamy

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$f(x, y, z) = 2\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

Otrzymaliśmy więc szukane maksimum i minimum. □

§4.4 Funkcje uwikłane

Definicja 4.36. Funkcja uwikłana określona przez równanie $F(x, y) = 0$ to każda funkcja $y(x)$ spełniająca równość

$$F(x, y(x)) = 0$$

dla wszystkich x w otoczeniu pewnego punktu x_0 . Jeśli taka funkcja istnieje, to mówimy, że równanie $F(x, y) = 0$ możemy rozwijać w otoczeniu tego punktu.

Twierdzenie 4.37 (o funkcji uwikłanej)

Jeśli funkcja $F : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i $F(x_0, y_0) = 0$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, to istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana $y = y(x)$. Ponadto

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

oraz, jeśli $y'(x_0) = 0$,

$$y''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)}.$$

§5 Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych

Całki wielokrotne definiujemy podobnie jak całki funkcji jednej zmiennej — dzielimy dziedzinę na n małych prostokątów (lub sześciątów, hipersześciątów) i sprawdzamy, czy istnieje granica przy $n \rightarrow \infty$ sumy iloczynów ich pól (objętości) i wartości funkcji w pewnych ich punktach.

§5.1 Całka podwójna

W tej sekcji zajmujemy się całkami funkcji dwóch zmiennych $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \supset \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie 5.1 (warunek wystarczający całkowalności funkcji po prostokącie)

Jeśli funkcja f jest ciągła na prostokącie P , to jest na nim całkowalna.

Twierdzenie 5.2 (Fubiniego)

Jeśli funkcja f jest całkowalna na prostokącie $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, to

$$\iint_P f(x, y) \, dx \, dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Całkę iterowaną często oznaczamy przenosząc symbol dx na początek, na przykład:

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz$$

Definicja 5.3. Funkcja charakterystyczna zbioru D to funkcja

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

Korzystając z tej definicji, jeśli $D \in \mathbb{R}^2$ jest zbiorem zawierającym się w pewnym prostokącie P , to

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_P (f \chi_D)(x, y) \, dx \, dy.$$

Definicja 5.4. Obszar normalny (względem osi OX) to taki zbiór

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\varphi(x), \psi(x)]\},$$

że funkcje φ, ψ są ciągłe.

Analogicznie możemy zdefiniować obszar normalny względem osi OY .

Twierdzenie 5.5 (zamiana całki powójnej na całkę iterowaną dla obszaru normalnego)

Jeśli funkcja f jest ciągła oraz

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$$

jest obszarem normalnym względem osi OX tej funkcji, to

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy.$$

Definicja 5.6. Obszar regularny jest skończoną sumą obszarów normalnych o parami rozłącznych wnętrzach.

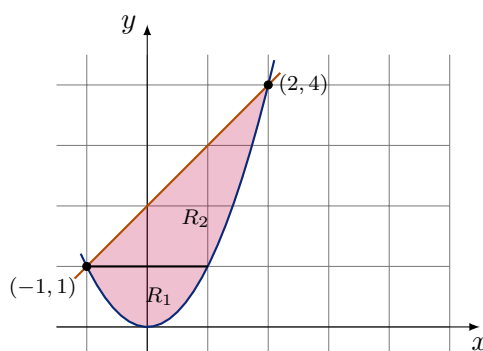
Przykład 5.7

Znaleźć pole obszaru R ograniczonego krzywą $y = x^2$ i prostą $y = x + 2$.

Rozwiązanie. Najpierw liczymy punkty przecięcia krzywych: $(-1, 1), (2, 4)$. Możemy potraktować cały obszar R jako normalny względem osi OX otrzymując

$$[R] = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dx = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Alternatywnie, możemy podzielić R na dwa obszary normalne, jak na rysunku.



Obszar R_1 jest normalny względem osi OY :

$$[R_1] = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{4}{3},$$

podobnie jak obszar R_2 :

$$[R_2] = \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx = \int_1^4 (\sqrt{y} - y + 2) dy = \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_1^4 = \frac{14}{3} - \frac{1}{2}.$$

□

Twierdzenie 5.8 (o zamianie zmiennych w całce podwójnej)

Dana jest funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, która jest ciągła na obszarze regularnym D oraz przekształcenie $\Phi : D' \rightarrow D$, gdzie

$$\Phi : (x, y) \mapsto (x(u, v), (y(u, v))).$$

Jeśli Φ przekształca wnętrze obszaru regularnego D' na wnętrze obszaru regularnego D wzajemnie jednoznacznie (jest bijekcją), pochodne cząstkowe przekształcenia Φ są ciągłe na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar D' oraz jakobian przekształcenia $J_\Phi(u, v)$ jest niezerowy wewnątrz D' , to

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv.$$

Przykład 5.9

Obliczyć całkę

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy$$

po obszarze $D : 2 \leq 2x + y \leq 3, -1 \leq x - y \leq 1$.

Rozwiązanie. Możemy podstawić

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{3} \\ y = \frac{u-2v}{3} \end{cases}.$$

Teraz obszar jest prostokątem, $D' = 2 \leq u \leq 3, -1 \leq v \leq 1$. Obliczmy jacobian

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{-2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{-1}{3}.$$

Wykorzystując twierdzenie o zamianie zmiennych (5.8) mamy

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) \, dx \, dy &= \iint_{D'} \left(\frac{u+v}{3} + \frac{u-2v}{3} \right) \cdot |J(u, v)| \, du \, dv = \iint_{D'} \frac{2u-v}{9} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{9} \int_{-1}^1 dv \int_2^3 (2u-v) \, du = \frac{1}{9} \int_{-1}^1 (5-v) \, dv = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

□

§A Układy współrzędnych

Współrzędne biegunowe

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (4)$$

Jacobian przejścia to

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Współrzędne walcowe

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (5)$$

Jacobian przejścia to

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Współrzędne sferyczne

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \cos \varphi \\ y = r \cos \psi \sin \varphi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad (6)$$

Jakobian przejścia to

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \psi, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -r \sin \psi \cos \varphi & -r \cos \psi \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi & -r \sin \psi \sin \varphi & r \cos \psi \cos \varphi \\ \sin \psi & r \cos \psi & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos \psi (-\sin^2 \psi \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi \sin^2 \varphi - \sin^2 \psi \sin^2 \varphi - \cos^2 \psi \cos^2 \varphi) \\ &= r^2 \cos \psi (-\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \\ &= -r^2 \cos \psi. \end{aligned}$$