

# Analiza II

MICHAŁ DOBRANOWSKI

semestr letni 2023  
v0.20

Poniższy skrypt zawiera materiał obejmujący wykłady z Analizy matematycznej II prowadzonej na pierwszym roku Informatyki na AGH, lecz jest mocno rozbudowany przez przykłady i twierdzenia pochodzące z przeróżnych źródeł, które (zwykle dla rozwinięcia intuicji lub ułatwienia rozwiązań pewnych zadań) postanowiłem opisać.

## Spis treści

<b>1 Szeregi liczbowe</b>	<b>2</b>
<b>2 Ciągi funkcyjne</b>	<b>5</b>
2.1 Metryka Czebyszewa . . . . .	6
<b>3 Szeregi funkcyjne</b>	<b>8</b>
3.1 Szeregi potęgowe . . . . .	11
3.2 Szeregi Taylora . . . . .	15
3.3 Szeregi Fouriera . . . . .	17
3.4 Trygonometryczne szeregi Fouriera . . . . .	19
<b>4 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych</b>	<b>21</b>
4.1 Pochodne funkcji wielu zmiennych . . . . .	25
4.2 Ekstrema lokalne . . . . .	29
4.3 Ekstrema warunkowe . . . . .	33
4.4 Funkcje uwikłane . . . . .	37
<b>5 Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych</b>	<b>38</b>
5.1 Całka podwójna . . . . .	38
5.2 Całka potrójna . . . . .	41
5.3 Całka krzywoliniowa . . . . .	43
5.3.1 Całka krzywoliniowa nieskierowana . . . . .	43
5.3.2 Całka krzywoliniowa skierowana . . . . .	44
<b>A Układy współrzędnych</b>	<b>50</b>
<b>B Wzory fizyczne</b>	<b>51</b>

Do repozytorium dołączony jest plik `graphs.py`, który umożliwia wizualizację niektórych funkcji dwóch zmiennych. Jeśli w prawym dolnym rogu przykładu (jak np. 4.27) znajduje się trójkątny kod, to znaczy, że jest zaimplementowana wizualizacja tego przykładu. Aby ją uruchomić, wystarczy użyć `python3 graphs.py [kod]`.

## §1 Szeregi liczbowe

**Definicja 1.1.** Szereg liczbowy to para  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ , gdzie  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ .

Mówimy, że szereg liczbowy jest **zbieżny**, jeśli istnieje skończona granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Liczbę  $S$  nazywamy wtedy **sumą** tego szeregu.

**Twierdzenie 1.2** (warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**Przykład 1.3**

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

*Rozwiązanie.* Wykorzystamy tak zwane **sumy teleskopowe**.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

Można łatwo pokazać, że szereg harmoniczny  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  nie jest zbieżny (czyli jest **rozbieżny**), mimo że spełnia warunek konieczny:

$$\underbrace{\left( \frac{1}{1} \right)}_1 + \underbrace{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)}_{>1} + \underbrace{\left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)}_{>1} + \dots$$

Okazuje się, że zachodzi również dużo mocniejsze twierdzenie:

**Twierdzenie 1.4** (o zbieżności szeregów harmoniczych)

Szereg harmoniczny rzędu  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha > 1$ .

Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  jest zbieżny, to mówimy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest **bezwzględnie zbieżny**, w przeciwnym przypadku jest **warunkowo zbieżny**. Bezwzględna zbieżność szeregu pociąga za sobą jego zbieżność.

Aby sprawdzić zbieżność szeregów, stosuje się kilka kryteriów zbieżności.

**Twierdzenie 1.5** (kryterium porównawcze)

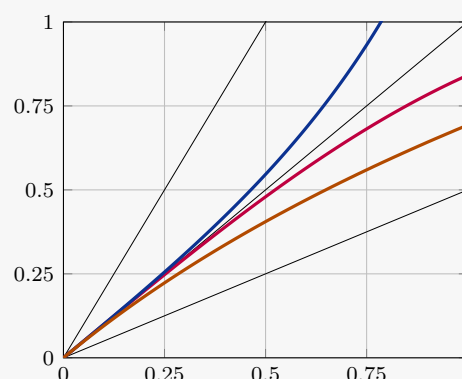
Jeśli dla każdego  $n$  większego od pewnego  $n_0$  zachodzi

$$a_n \leq b_n$$

oraz  $a_n, b_n > 0$ , to ze zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  wynika zbieżność  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , a z rozbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wynika rozbieżność  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Uwaga.** Wraz z powyższym twierdzeniem warto stosować nierówności, które zachodzą w przedziale  $[0, 1]$ :

- $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$
- $\frac{x}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$
- $x \leq \tan x \leq 2x$
- $1 - x \leq \cos x$



**Przykład 1.6**

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right).$$

*Rozwiązanie.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Wyrazy szeregu są dodatnie oraz dla każdego  $n \in \mathbb{N}$

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{n^2},$$

więc, na podstawie twierdzenia 1.4, dany szereg jest zbieżny. □

**Twierdzenie 1.7** (kryterium ilorazowe)

Jeśli dla każdego  $n$  większego od pewnego  $n_0$  wyrazy szeregów  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  są dodatnie oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, \infty),$$

to dane szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

**Twierdzenie 1.8** (kryterium d'Alemberta)

Niech będzie dany szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o niezerowych wyrazach oraz niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Jeśli  $g > 1$ , to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli  $g < 1$ , to szereg jest zbieżny.

**Twierdzenie 1.9** (kryterium Cauchy'ego)

Niech będzie dany szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  oraz niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g.$$

Jeśli  $g > 1$ , to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli  $g < 1$ , to szereg jest zbieżny.

**Uwaga.** Jeśli w kryteriach d'Alemberta lub Cauchy'ego wyjdzie  $g = 1$ , to nie możemy powiedzieć nic o zbieżności ciągu.

**Przykład 1.10**

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

*Rozwiązanie.* Korzystając z kryterium Cauchy'ego, mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} < 1,$$

więc dany szereg jest zbieżny. □

**Twierdzenie 1.11** (kryterium całkowe)

Jeśli dla każdego  $n$  większego od pewnego  $n_0$  wyrazy szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  są dodatnie oraz istnieje taka malejąca (na przedziale  $[n_0, \infty)$ ) funkcja  $f$ , że  $a_n = f(n)$  dla każdego  $n$ , to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna.

**Twierdzenie 1.12** (kryterium Leibniza)

Dany jest szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ . Jeśli ciąg  $(a_n)$  jest dodatni, zbieżny do zera oraz malejący, to jest dany szereg jest zbieżny.

Szereg opisywany przez kryterium Leibniza nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

**Przykład 1.13**

Zbadać zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}.$$

*Rozwiązanie.* Korzystając z kryterium Leibniza, bardzo łatwo pokazać, że dany szereg jest zbieżny. Ciąg  $a_n = \frac{1}{n \ln n}$  ma oczywiście wyrazy dodatnie i jest zbieżny do zera. Ponadto jest malejący, bo zarówno  $n$ , jak i  $\ln n$  rosną.

Aby określić, czy dany szereg jest bezwzględnie zbieżny skorzystamy z kryterium całkowego.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C = \ln(\ln(x)) + C.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(x)) \Big|_1^{\infty} - \text{rozbieżna}.$$

Z tego wynika, że dany szereg jest tylko warunkowo zbieżny. □

## §2 Ciągi funkcyjne

Ciąg funkcyjny to ciąg, którego przeciwdziedzina jest zbiór funkcji określonych na tej samej dziedzinie. W kolejnych sekcjach będziemy rozważać ciągi funkcji  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $X \subset \mathbb{R}$ , chyba że stwierdzono inaczej. Jest to ważne założenie niektórych twierdzeń.

**Definicja 2.1** (zbieżność punktowa). Ciąg funkcyjny  $(f_n(x))$  jest zbieżny punktowo na  $X$ , jeśli istnieje taka funkcja  $f : X \rightarrow Y$ , że  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , czyli gdy

$$\forall_{x \in X} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definicja 2.2** (zbieżność jednostajna). Ciąg funkcyjny  $(f_n(x))$  jest zbieżny jednostajnie na  $X$ , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

### Twierdzenie 2.3

Jeśli ciąg funkcyjny  $(f_n(x))$  jest jednostajnie zbieżny do  $f$  na  $X$ , to jest również zbieżny punktowo do  $f$  na  $X$ , co zapisujemy jako

$$f_n \xrightarrow{X} f \implies f_n \xrightarrow{X} f.$$

*Dowód.* Wynika z definicji i podstawowych praw rachunku kwantyfikatorów.  $\square$

### Twierdzenie 2.4

Jeśli ciąg  $(f_n(x))$  jest ciągiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny  $f_n \rightrightarrows f$ , to funkcja  $f$  jest ciągła.

### Przykład 2.5

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

na zbiorze  $\mathbb{R}$ .

*Rozwiązanie.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx^2} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = 0 \\ 0, & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Dany ciąg jest więc zbieżny punktowo, ale, skoro funkcje  $f_n$  są ciągłe, a funkcja  $f$  nie, to nie jest zbieżny jednostajnie.  $\square$

## §2.1 Metryka Czebyszewa

Weźmy pewną dwuargumentową funkcję zdefiniowaną jako

$$d_c(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

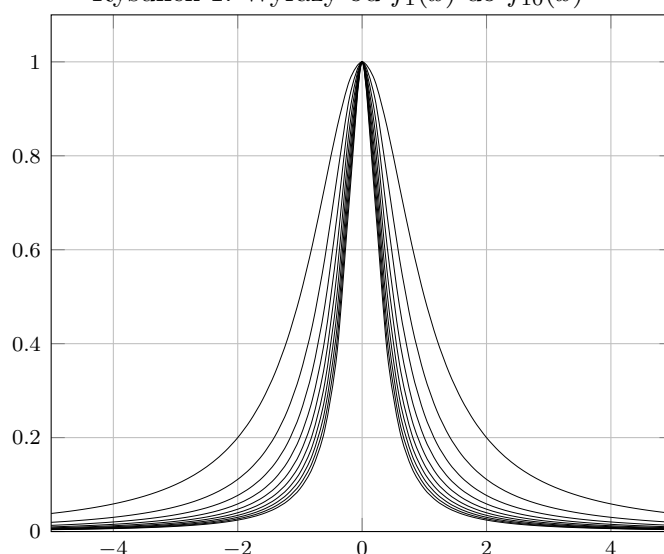
Można udowodnić, że funkcja  $d_c$  jest metryką (zwaną metryką Czebyszewa). Jako argumenty przyjmuje dwie funkcje zdefiniowane na tej samej dziedzinie  $X$ .

### Twierdzenie 2.6

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego  $(f_n(x))$  jest ograniczona, to

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_c(f_n, f) = 0.$$

Rysunek 1: Wyrazy od  $f_1(x)$  do  $f_{10}(x)$



### Przykład 2.7

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

na przedziale  $[2, \infty)$ .

*Rozwiązanie.* Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left( 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n(nx^{n-1})}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Pochodna zawsze jest dodatnia, więc supremum będzie przy  $x \rightarrow \infty$ . Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left( 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1) = 0,$$

więc dany ciąg jest zbieżny jednostajnie.  $\square$

### Przykład 2.8

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

na zbiorze  $\mathbb{R}$ .

*Rozwiązanie.* Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{nx}{n^2 + x^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left( \frac{nx}{n^2 + x^2} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{nx}{n^2 + x^2} \right) = \frac{n(n^2 + x^2) - nx(2x)}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{n^3 - nx^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

Pochodna zeruje się, gdy

$$n^3 = nx^2 \Rightarrow x = \pm n,$$

więc supremum będzie przy  $x = n$ . Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2},$$

więc dany ciąg nie jest zbieżny jednostajnie. □

### Twierdzenie 2.9 (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego  $(f_n(x))$  jest różniczkowalna, ciąg  $(f_n)$  jest zbieżny, a ciąg  $(f'_n)$  zbieżny jednostajnie, to dla każdego  $x \in X$  zachodzi

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n(x)).$$

### Twierdzenie 2.10 (o całkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego  $(f_n(x))$  jest całkowalna, a ciąg  $(f_n)$  jest zbieżny jednostajnie, to dla każdych  $x_1, x_2 \in X$  zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \right).$$

## §3 Szeregi funkcyjne

Podobnie do szeregów liczbowych, szeregi funkcyjne to para  $((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}})$ : ciąg funkcyjny oraz ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego. Taki szereg jest zbieżny



(punktowo / jednostajnie) do sumy szeregu  $S$ , jeśli ciąg  $(S_n(x))$  jest zbieżny (częściowo / jednostajnie) do  $S$ .

Analogicznie do twierdzenia 2.3, warunkiem koniecznym zbieżności jednostajnej szeregu jest jego zbieżność punktowa.

Z kolei w analogii do twierdzenia 1.2, warunkiem koniecznym zbieżności (punktowej / jednostajnej) szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżność (punktowa / jednostajna) ciągu funkcyjnego  $(f_n(x))$  do zera, to znaczy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightarrow S \implies f_n(x) \rightarrow 0 \equiv f$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S \implies f_n(x) \rightrightarrows 0 \equiv f.$$

### Twierdzenie 3.1 (kryterium Weierstrassa)

Jeśli istnieje taki ciąg  $(a_n)$ , że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  i dla każdego  $x \in X \subset \mathbb{R}$  mamy nierówność

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

oraz szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny na  $X$ .

Zachodzi twierdzenie o ciągłości, analogiczne do twierdzenia 2.4.

### Twierdzenie 3.2

Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest szeregiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ , to funkcja  $S$  jest ciągła.

### Przykład 3.3

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$$

na przedziale  $[0, 1]$ .

*Rozwiązanie.* Dla  $x \in [0, 1)$  mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = x(1-x) \frac{1}{1-x} = x,$$

natomiast dla  $x = 1$  mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n \cdot 0 = 0,$$

więc szereg jest zbieżny punktowo. Funkcja

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{dla } x = 1 \end{cases},$$

do której dany szereg zbiega, nie jest ciągła, a funkcje  $f_n(x) = x^n(1-x)$  są ciągłe, więc, na mocy twierdzenia 3.2, szereg nie zbiega jednostajnie.  $\square$

### Przykład 3.4

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

na przedziale  $[1, \infty)$ .

*Rozwiązanie.* Dla każdego  $x \in [1, \infty]$  oraz  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$\left| \frac{nx}{1+n^4x^2} \right| = \frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{nx}{n^4x^2} = \frac{1}{n^3x} \leq \frac{1}{n^3},$$

więc, na mocy kryterium Weierstrassa, dany szereg jest jednostajnie zbieżny, bo szereg harmonicznego rzędu 3 jest zbieżny.  $\square$

### Przykład 3.5

Zbadaj obszar zbieżności<sup>a</sup> punktowej oraz zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}.$$

<sup>a</sup>czyli zbiór punktów, w których szereg jest zbieżny

*Rozwiązanie.* Możemy od razu stwierdzić, że dla  $x = 0$  otrzymamy szereg ciąg zer, który oczywiście jest (jednostajnie) zbieżny do zera. Możemy potraktować  $x$  jako parametr, wtedy, zamiast szeregu funkcyjnego, będziemy mieć szereg liczbowy, którego zbieżność możemy pokazać z kryterium d'Alemberta:

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x(n+1)}} \frac{e^{xn}}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x}.$$

Szereg jest więc zbieżny dla każdego  $x > 0$  i rozbieżny dla każdego  $x < 0$ . Ostatecznie, obszar zbieżności punktowej danego szeregu funkcyjnego to  $[0, \infty)$ .

Zajmijmy się teraz zbieżnością jednostajną. Oczywiście można by ją wykazywać przez znalezienie ciągu sum częściowych, a następnie skorzystanie z twierdzenia 2.6, ale możemy też skorzystać z kryterium Weierstrassa, chociaż w dosyć nieoczywisty sposób.

Znajdźmy najpierw supremum ciągu  $a_n = \frac{x^2}{e^{nx}}$ . Możemy znaleźć miejsca zerowe pochodnej:

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{2x(e^{nx}) - x^2(ne^{nx})}{e^{2nx}} = \frac{x(2 - xn)}{e^{nx}} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{n}\right\}.$$

Szkicując wykres pochodnej, przekonamy się, że funkcja  $a_n(x)$  osiąga maksimum w  $x = \frac{2}{n}$ , więc

$$a_n(x) \leq a_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2 n^2}.$$

Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2 n^2}$  jest zbieżny (ponieważ jest harmoniczny rzędu 2), więc możemy użyć kryterium Weierstrassa udowadniając, że dany szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny.  $\square$

Zachodzą również twierdzenia o różniczkowalności i całkowalności, analogiczne do twierdzeń 2.9 i 2.10.

### Twierdzenie 3.6

Niech  $(f_n(x))$  będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych. Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny na  $X$ , a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  jest jednostajnie zbieżny na  $X$ , to dla każdego  $x \in X$  zachodzi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

### Twierdzenie 3.7

Niech  $(f_n(x))$  będzie ciągiem funkcji całkowalnych. Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest jednostajnie zbieżny na  $X$ , to dla każdych  $x_1, x_2 \in X$  zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx\right).$$

## §3.1 Szeregi potęgowe

**Definicja 3.8.** Szereg potęgowy o środku w punkcie  $c$  to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n,$$

gdzie  $a_n, x, c \in \mathbb{C}$ .

### Twierdzenie 3.9

Jeśli szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n$$

jest zbieżny dla pewnego  $x_1$ , to jest zbieżny dla wszystkich  $x_2$  takich, że

$$|x_2 - c| < |x_1 - c|,$$

a jeśli nie jest zbieżny dla pewnego  $x_1$ , to nie jest zbieżny dla wszystkich  $x_2$  takich, że

$$|x_2 - c| > |x_1 - c|.$$

Powyższe twierdzenie każe nam podzielić płaszczyznę zespoloną (względem danego szeregu potęgowego) na trzy rozłączne zbiory. Formalnie, jeśli weźmiemy

$$r = \sup \left\{ |x - c| : \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n \text{ jest zbieżny} \right\},$$

to zbiór

$$\{x \in \mathbb{C} : |x - c| < r\}$$

nazwiemy **kołem zbieżności**. Dla wszystkich elementów z tego zbioru dany szereg jest zbieżny. Dla elementów na brzegu tego koła zbieżność jest nieokreślona, a dla elementów poza nim dany szereg nie jest zbieżny. Liczba  $r$  to **promień zbieżności**. Dla  $x = c$  dany szereg jest zbieżny.

**Uwaga.** Jeśli przyjmiemy w definicji szeregu potęgowego (3.8), że  $a_n, x, c \in \mathbb{R}$ , to koło zbieżności staje się **przedziałem zbieżności**, a nieokreśloną zbieżność mamy tylko dla dwóch elementów:  $c - r$  oraz  $c + r$ .

**Obszarem zbieżności** nazywamy zbiór będący sumą koła zbieżności oraz zbioru elementów z jego brzegu, dla których dany szereg potęgowy jest zbieżny.

### Twierdzenie 3.10 (Cauchy'ego-Hadamarda)

Promień zbieżności jest dany jako

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

gdzie  $r = \frac{1}{0}$  interpretujemy jako  $r = \infty$ , a  $r = \frac{1}{\infty}$  jako  $r = 0$ .

Można podać dwa słabsze twierdzenia, które jednak często łatwiej jest stosować:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \implies r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \implies (3.10).$$

Mówimy, że ciąg (szereg) funkcyjny jest **niemal jednostajnie zbieżny** na przedziale  $(a, b)$ , jeśli jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale  $[c, d] \subset (a, b)$ .

**Fakt 3.11.** Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w  $(c - r, c + r)$ , to jest bezwzględnie zbieżny w  $(c - r, c + r)$  oraz niemal jednostajnie zbieżny w  $(c - r, c + r)$ .

**Fakt 3.12.** Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w  $(c - r, c + r)$  do  $S(x)$ , to funkcja  $S(x)$  jest ciągła, różniczkowalna i całkowalna w  $(c - r, c + r)$ . Prawdziwe dla szeregów potęgowych są również tezy twierdzeń 3.6 i 3.7.

### Twierdzenie 3.13 (Abela)

Niech  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$  będzie szeregiem potęgowym zbieżnym do  $S(x)$  o promieniu zbieżności równym  $r$ . Jeśli ten szereg jest zbieżny dla  $x_1 = c - r$  oraz istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow x_1^+} S(x)$ , to

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} S(x) = S(x_1),$$

czyli funkcja  $S(x)$  jest prawostronnie ciągła w  $x = c - r$ . Analogicznie, jeśli szereg jest zbieżny dla  $x_2 = c + r$  oraz istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow x_2^-} S(x)$ , to

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} S(x) = S(x_2),$$

czyli funkcja  $S(x)$  jest lewostronnie ciągła w  $x = c + r$ .

### Przykład 3.14

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n}$$

w każdym punkcie obszaru zbieżności.

*Rozwiązanie.* Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

tak więc przedział zbieżności to  $(-4, 0)$ . Dla  $x = -4$  mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) - \text{rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego,}$$

a dla  $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) - \text{rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego.}$$

Obszarem zbieżności jest więc przedział  $(-4, 0)$ . Policzmy teraz sumę. Dla każdego  $x \in (-4, 0)$  mamy

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(x+2)^{n+1}}{2^n} \right)' \stackrel{(3.6)}{=} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{2^n} \right)' \\ &= \left( \frac{(x+2)^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{x+2}{2}} \right)' = \left( \frac{(x+2)^2}{-x} \right)' = \frac{-2x(x+2) + (x+2)^2}{x^2} = \frac{4-x^2}{x^2}. \end{aligned}$$

□

**Przykład 3.15**

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - \frac{1}{2})^n}{n+1}$$

w każdym punkcie obszaru zbieżności.

*Rozwiązanie.* Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}}} = \frac{1}{2},$$

tak więc przedział zbieżności to  $(0, 1)$ . Dla  $x = 0$  mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (-\frac{1}{2})^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} - \text{zbieżny z kryterium Leibniza},$$

a dla  $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (\frac{1}{2})^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \text{rozbieżny z kryterium ilorazowego}.$$

Obszarem zbieżności jest więc przedział  $[0, 1)$ . Policzmy teraz sumę. Dla  $x = \frac{1}{2}$  mamy

$$S(\frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 0^n}{n+1} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Dla pozostałych  $x$  zapiszemy

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - \frac{1}{2})^n}{n+1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - \frac{1}{2})^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^x 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n dt.$$

Szeregi potęgowe są niemal jednostajnie zbieżne w swoim przedziale zbieżności, więc dla  $x \in (0, 1)$  możemy zamienić znaki sumy i całki (twierdzenie 3.7)

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n dt = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{1 - 2(t - \frac{1}{2})} dt \\ &= \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{2 - 2t} dt = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \left[ -\frac{1}{2} \ln(1 - t) \right]_{\frac{1}{2}}^x = \frac{1}{1 - 2x} \left( \ln(1 - x) - \ln \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\ln(2 - 2x)}{1 - 2x}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Abela (3.13) wynika, że

$$S(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2 - 2x)}{1 - 2x} = \ln(2),$$

więc ostatecznie mamy

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = \frac{1}{2} \\ \frac{\ln(2-2x)}{1-2x}, & \text{dla } x \in [0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}.$$

□

### Przykład 3.16

Znajdź sumę szeregu liczbowego

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

*Rozwiązanie.* Weźmy szereg funkcyjny

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Wartość  $S(1)$  jest szukaną sumą, jeśli tylko szereg jest zbieżny w tym punkcie. Niech  $t = x^2$ . Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności szeregu:

$$r_t = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3}} = 1,$$

tak więc szereg zbiega, gdy  $t \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-1, 1)$ . W punktach  $x = -1$  i  $x = 1$  szereg również jest zbieżny, co można pokazać z kryterium Leibniza.

Policzmy teraz sumę (dla przedziału zbieżności  $(-1, 1)$ ):

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n u^{2n} du = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} du \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-u^2)^n du = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = \left[ \arctan(u) \right]_0^x = \arctan(x). \end{aligned}$$

Skoro w  $x = 1$  ten szereg też jest zbieżny, to z twierdzenia Abela (3.13) mamy

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

□

## §3.2 Szeregi Taylora

### Twierdzenie 3.17 (o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)

Jeśli funkcja  $f$  ma pochodne wszystkich rzędów w pewnym otoczeniu  $U$  punktu  $x_0$ , to na pewnym przedziale zachodzi równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Taki szereg nazywamy szeregiem Taylora, a jeśli  $x_0 = 0$ , to nazywamy go szeregiem Maclaurina.

**Fakt 3.18.** Dostyc łatwo wyprowadzić następujące rozwinięcia w szeregi Maclaurina, które mogą być użyteczne w zadaniach:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$$

### Przykład 3.19

Rozwiń w szereg Taylora funkcję  $f(x) = \ln x$  w otoczeniu  $x_0 = 1$ .

*Rozwiązanie.* Spróbujmy znaleźć ogólny wzór na  $f^{(n)}(x)$ . Mamy

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!,$$

tak więc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{n!} (x-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n.$$

Z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda (3.10)

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = 1$$

wynika, że ten szereg jest zbieżny, a więc równość jest prawdziwa, dla każdego  $x \in (0, 2)$ . Łatwo sprawdzić (z kryterium Leibniza), że jest zbieżny też dla  $x = 2$ , więc (z twierdzenia Abela) również dla  $x = 2$  równość jest prawdziwa.  $\square$

### Przykład 3.20

Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję  $f(x) = x^3 \arctan x^4$ .

*Rozwiązanie.* Weźmy  $g(x) = \arctan x^4$ . Mamy

$$g'(x) = \frac{4x^3}{1+x^8} = \frac{4x^3}{1-(-x^8)}, \quad |x^8| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

więc

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4x^3 (-x^8)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4x^{8n+3},$$



ergo

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4t^{8n+3} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4 \int_0^x t^{8n+3} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4x^{8n+4}}{8n+4}. \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{8n+7}.$$

Równość jest prawdziwa dla  $x \in (-1, 1)$  oraz (z kryterium Leibniza i twierdzenia Abela) dla  $x = \pm 1$ .  $\square$

### §3.3 Szeregi Fouriera

Zbiór funkcji **całkowalnych z kwadratem** będziemy oznaczać przez  $L^2[a, b]$ . Formalnie

$$L^2[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{[a, b]} f^2(x) dx < \infty \right\}.$$

Jeśli utożsamimy ze sobą funkcje, które różnią się zbiorze miary Riemanna równej zero, to struktura  $(L^2[a, b], \mathbb{R}, +, \cdot)$  jest przestrzenią wektorową, w której możemy wprowadzić iloczyn skalarny

$$f \circ g = \int_{[a, b]} f(x)g(x) dx.$$

Mamy więc przestrzeń unitarną, ergo zdefiniowana jest w niej też norma

$$\|f\| = \sqrt{f \circ f} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

oraz metryka

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Zbieżność w sensie metryki  $d$  to **zbieżność przeciętna z kwadratem**.

**Definicja 3.21.** Ciąg ortogonalny to taki ciąg funkcyjny  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ , którego funkcje nie są tożsamościowo równe zeru, są całkowalne z kwadratem oraz jego elementy są prostopadłe, czyli

$$\bigvee_{i \neq j} \varphi_i \circ \varphi_j = 0.$$

**Definicja 3.22.** Ciąg ortonormalny to taki ciąg ortogonalny, że jego elementy są wersorami, czyli

$$\bigvee_{i, j} \varphi_i \circ \varphi_j = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}.$$

Wartość  $\varphi_i \circ \varphi_j$  oznaczamy  $\delta_{ij}$  i nazywamy **delta Kroneckera**.

**Szeregami ortogonalnym** będziemy nazywać szereg funkcyjny w postaci  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ , gdzie  $(c_n)$  jest ciągiem liczb rzeczywistych, a  $(\varphi_n)$  ciągiem ortogonalnym.

**Twierdzenie 3.23** (współczynniki Eulera-Fouriera)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n \rightrightarrows f$$

jest ortogonalny i zbiega jednostajnie do funkcji  $f \in L^2[a, b]$ , to dla każdego  $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{f \circ \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Szereg ortogonalny, w którym współczynniki mają powyższą formę, nazywamy **szeregiem Fouriera** funkcji  $f$ . Oznaczamy

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Jeśli powyższy szereg ortogonalny jest zbieżny do  $f$  na całym przedziale  $[a, b]$ , to mówimy, że ta funkcja jest **rozwijalna** w szereg Fouriera.

**Twierdzenie 3.24** (nierówność Bessela)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest szeregiem Fouriera funkcji  $f$  względem ciągu  $(\varphi_n)$ , to

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2.$$

**Twierdzenie 3.25** (tożsamość Parsevala)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest szeregiem Fouriera funkcji  $f$  względem ciągu  $(\varphi_n)$ , to

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$  jest przeciętnie zbieżny z kwadratem do  $f$ .

Jeśli pewien szereg spełnia tożsamość Parsevala dla każdej funkcji  $f \in L^2[a, b]$ , to mówimy, że ciąg  $(\varphi_n)$  jest **zupełny**.

### Wniosek 3.26

Jeśli ciąg  $(\varphi_n)$  jest zupełny oraz  $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ , to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest przeciętnie zbieżny z kwadratem do  $f$  na  $[a, b]$ .

## §3.4 Trygonometryczne szeregi Fouriera

**Fakt 3.27.** Ciąg

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

jest zupełny (a więc i ortogonalny).

### Wniosek 3.28 (współczynniki Eulera-Fouriera (3.23) dla szeregów trygonometrycznych)

Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji całkowalnej  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  będziemy nazywać szereg

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

**Definicja 3.29** (warunki Dirichleta).

1. funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ograniczona,
2. funkcja  $f$  ma skończoną liczbę przedziałów monotoniczności,
3. funkcja  $f$  ma skończoną liczbę punktów nieciągłości  $x_0$  oraz

$$f(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)}{2},$$

4. zachodzi równość

$$f(a) = f(b) = \frac{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)}{2}.$$

**Twierdzenie 3.30** (o rozwijaniu funkcji w szereg Fouriera)

Jeśli funkcja  $f$  spełnia warunki Dirichleta w przedziale  $[-\pi, \pi]$ , to szereg trygonometryczny Fouriera tej funkcji jest zbieżny punktowo do  $f$  na  $[-\pi, \pi]$ .

**Uwaga 3.31.** Jeśli funkcja  $f$  spełnia warunki Dirichleta w przedziale  $[-\pi, \pi]$  oraz jest nieparzysta, to

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

gdzie  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ . Jeśli jest parzysta, to

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gdzie  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ . Tworzą one wtedy odpowiednio szereg sinusów i cosinusów.

**Przykład 3.32**

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ x, & \text{dla } x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Korzystając z niego, oblicz sumę szeregu liczbowego  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

*Rozwiązanie.* Aby funkcja  $f$  spełniała wszystkie warunki Dirichleta, musimy dodać wartość w punkcie  $x = \pm\pi$ .

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)}{2} = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Możemy więc już napisać

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 \, dx + \int_0^{\pi} x \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 \, dx + \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{nx \sin nx + \cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{n\pi \sin n\pi + \cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 \, dx + \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{-nx \cos nx + \sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin n\pi - n\pi \cos n\pi}{n} = \frac{-\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

W punkcie  $x = \pi$ :

$$f(\pi) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} (-1)^n = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

ergo

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi}{2} \left( f(\pi) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

□

### Wniosek 3.33 (tożsamość Parsevala (3.25) dla szeregów trygonometrycznych)

Przyjmujemy oznaczenia jak we wniosku 3.28. Zachodzi równość

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

### Przykład 3.34

Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = x^2$$

dla  $x \in [-\pi, \pi]$ . Korzystając z tego rozwinięcia, oblicz sumę szeregów liczbowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Rozwiązanie. [blackpenredpen na YouTube](#). Wynik to odpowiednio  $\frac{\pi^2}{6}$  i  $\frac{\pi^4}{90}$ . □

## §4 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

W tej sekcji będziemy skupiać się na funkcjach typu  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ . W tym kontekście warto zauważyć, że struktura  $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}, +, \cdot)$  jest przestrzenią wektorową. Jest ona również przestrzenią Banacha ze zdefiniowaną normą euklidesową.

**Fakt 4.1** (granica ciągu). Weźmy ciąg  $(x_n)$  elementów zbioru  $\mathbb{R}^k$  i oznaczmy  $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k})$ . Zachodzi równoważność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (g_1, g_2, \dots, g_k) \Leftrightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i} = g_i.$$

**Definicja 4.2** (Heinego). Funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}^k$ , ma granicę w punkcie  $x_0$  równą  $g$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $(x_n)$  takiego, że  $x_n \in D, x_n \neq x_0$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

### Przykład 4.3

Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

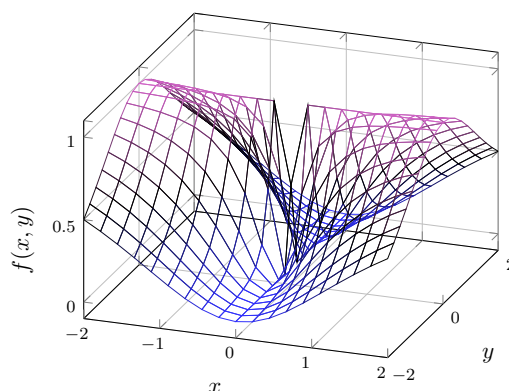
*Rozwiązanie.* Podstawiając  $x = 0$  mamy

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0,$$

a dla  $y = 0$  otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0} = 1,$$

więc granica nie istnieje. Bardziej formalnie możemy powiedzieć, że wzięliśmy dwa ciągi:  $a_n = (0, \frac{1}{n}), b_n = (\frac{1}{n}, 0)$  i pokazaliśmy sprzeczność z definicją Heinego.  $\square$



Rysunek 2: Wykres funkcji  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ .

### Przykład 4.4

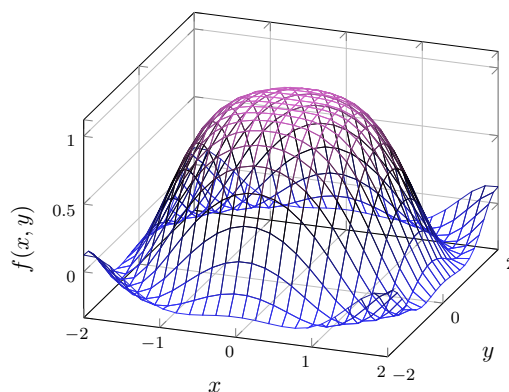
Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

*Rozwiązanie.*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \end{aligned}$$

$\square$



Rysunek 3: Wykres funkcji  $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ .

### Przykład 4.5

Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

*Rozwiązanie.* Skoro

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$$

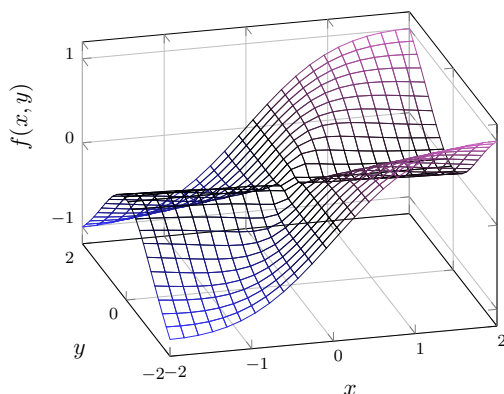
oraz  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$ , to, na mocy twierdzenia o trzech ciągach,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = 0,$$

więc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

□



Rysunek 4: Wykres funkcji  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ .

### Przykład 4.6

Zbadaj granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

*Rozwiązanie.* Podstawiając  $y = x$  mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + x^4} = 0,$$

a dla  $x = y^2$  otrzymujemy

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2},$$

więc granica nie istnieje. □

**Uwaga.** Powyższy przykład jest o tyle ciekawy, że jeśli  $x$  oraz  $y$  zbiegają w tym samym tempie (czyli łączy jest liniowa zależność) to zawsze granica wyjdzie zerowa. Aby pokazać ten fakt, przejdziemy do współrzędnych biegunowych:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi}.$$

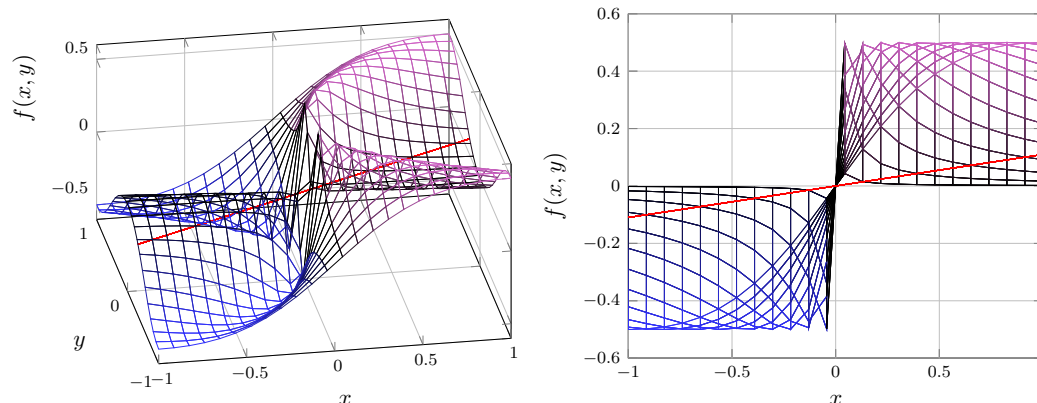
Jeśli  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , to (skoro  $\cos \varphi = 0$ )

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{0}{0 \pm r^2} = 0,$$

a jeśli  $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$ , to (skoro  $\sin$  i  $\cos$  są ograniczone)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi} = \frac{0}{\cos^2 \varphi + 0} = 0.$$

Natomiast jeśli  $\varphi$  nie jest stałe, ale na przykład zbiega do  $\frac{\pi}{2}$ , to, jak można zauważyć na poniższym rysunku, granica niekoniecznie będzie zerowa.



Rysunek 5: Wykres funkcji  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$  z zaznaczoną prostą  $y = \frac{x}{3}$ .



Granice funkcji  $f(x, y)$  w formie  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  nazywamy czasami **granicą podwójną**<sup>1</sup>, w odróżnieniu od granic  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  czy  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , które są **granicami iterowanymi**.

**Fakt 4.7.** Jeśli funkcja  $f(x, y)$  ma w punkcie  $(x_0, y_0)$  granicę podwójną oraz istnieją obie jej granice iterowane, to wszystkie trzy są sobie równe.

*Uzasadnienie.* Granica iterowana w punkcie  $(x_0, y_0)$  modeluje dążenie do tego punktu po dwóch bokach prostokąta.  $\square$

**Uwaga.** Jeśli obie granice iterowane nie istnieją, to nie znaczy, że granica podwójna nie istnieje. Jeśli obie granice iterowane istnieją i są sobie równe, to nie znaczy, że granica podwójna istnieje.

Natomiast z powyższego faktu wynika, że jeśli obie granice iterowane istnieją i nie są sobie równe, to granica podwójna nie istnieje.

**Fakt 4.8.** Jeśli funkcja (wielu zmiennych)  $f$  jest ciągła w  $x_0$ , a funkcja  $g$  jest ciągła w  $f(x_0)$ , to funkcja  $g \circ f$  jest ciągła w  $x_0$ .

**Fakt 4.9.** Jeśli funkcje (wielu zmiennych)  $f, g$  są ciągłe w  $x_0$ , to funkcje  $f + g, f - g, f \cdot g$  również są ciągłe w tym punkcie. Jeśli dodamy warunek, że  $g(x) \neq 0$  dla pewnego otoczenia  $x_0$ , to ciągła w tym punkcie jest również funkcja  $\frac{f}{g}$ .

## §4.1 Pochodne funkcji wielu zmiennych

**Definicja 4.10.** Pochodną funkcji  $f : \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$  wzdłuż wektora  $\vec{v}$  nazwiemy taką funkcję  $D_v f$ , że

$$D_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\vec{v}) - f(x)}{t}.$$

Oprócz notacji Eulera ( $D_v f$ ) stosuje się również notację Leibniza ( $D_v f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial \vec{v}}$ ) oraz Lagrange'a ( $f'_{\vec{v}}$ ).

Pochodna **w kierunku** wektora  $\vec{v}$  jest pochodną wzdłuż wektora  $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ . Te pojęcia są oczywiście równoważne, jeśli  $\vec{v}$  jest wersorem. Najczęściej używamy jednak **pochodnych cząstkowych**, to znaczy pochodnych wzdłuż wersorów osiowych, oznaczając

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial [1, 0]}(x, y) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial [0, 1]}(x, y).$$

**Definicja 4.11** (różniczka). Funkcja  $f : \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w  $p$ , gdy istnieje takie przekształcenie liniowe  $L_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ , że dla każdego  $p + h$  w otoczeniu  $p$  zachodzi

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(p + h) - f(p) - L_p(h)}{\|h\|} = \vec{0}.$$

Funkcję  $L_p(h)$  nazywamy różniczką funkcji  $f$  w punkcie  $p$  i oznaczamy  $df(p)(h)$ .

<sup>1</sup>co może być nazwą mylącą; w literaturze angielskiej jest to *ordinary limit*, który nie jest tym samym pojęciem co *double limit*. W szczególności dla *double limit* nie zachodzi fakt 4.7, zobacz też: [wikipedia](https://en.wikipedia.org/wiki/Double_limit).

**Twierdzenie 4.12** (warunek konieczny różniczkowości)

Jeśli funkcja  $f : \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w punkcie  $p$ , to istnieje pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $p$  wzdłuż dowolnego wektora  $h \in \mathbb{R}^k$  i zachodzi

$$\frac{\partial f}{\partial h}(p) = df(p)(h).$$

*Wyprowadzenie wzoru.* Pamiętając, że  $df(p)$  jest przekształceniem liniowym, więc może być rozpatrywane jako macierz, możemy równoważnie stwierdzić, że

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(p+h) - f(p) - df(p) \cdot h}{\|h\|} &= \vec{0} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+th) - f(p) - df(p) \cdot th}{t} &= \vec{0} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+th) - f(p)}{t} &= df(p) \cdot h \\ \frac{\partial f}{\partial h}(p) &= df(p) \cdot h. \end{aligned}$$

□

**Definicja 4.13** (jakobian). Dana jest funkcja  $f : \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gdzie

$$f(p) = f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k)).$$

Macierz

$$df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(p) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą Jacobiego** funkcji  $f$  w punkcie  $p$ . Jeśli macierz ta jest kwadratowa, to jej wyznacznik nazywamy jakobianem funkcji  $f$  w punkcie  $p$  i oznaczamy  $J(p)$ .

Chcąc obliczyć różniczkę  $df(p)$  w punkcie  $h$  wystarczy pomnożyć macierz  $df(p)$  i wektor  $h$ , więc

$$df(p)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p)h_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p)h_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(p)h_k \end{bmatrix}$$

**Twierdzenie 4.14** (warunek konieczny różniczkowości)

Jeśli funkcja jest różniczkowalna w  $x_0$ , to jest ciągła w  $x_0$ .

**Twierdzenie 4.15** (warunek wystarczający różniczkowości)

Jeśli istnieją i są ciągle wszystkie pochodne cząstkowe funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ , to funkcja  $f$  jest różniczkowalna w  $x_0$ .

**Przykład 4.16**

Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

w całej jej dziedzinie.

*Rozwiązanie.* Skorzystajmy z warunku wystarczającego na różniczkowalność funkcji. Pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right) &= \frac{(3x^2)(x^2+y^2) - (x^3+y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right) &= \frac{(3y^2)(x^2+y^2) - (x^3+y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

są ciągle w  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , więc w tym zbiorze funkcja  $f$  jest różniczkowalna. Aby sprawdzić, czy funkcja jest również różniczkowalna w  $p = (0, 0)$  policzymy pochodną w tym punkcie w kierunku wektora  $h$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+th) - f(p)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^3 \varphi + t^3 \sin^3 \varphi}{t^2 \cos^2 \varphi + t^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^3 \varphi + t^3 \sin^3 \varphi}{t^3} = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi = h_1^3 + h_2^3. \end{aligned}$$

Na mocy warunku koniecznego różniczkowalności (4.12) funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w  $(0, 0)$ , ponieważ pochodna w kierunku  $h$  powinna być wynikiem przekształcenia **liniowego** wektora  $h$ .  $\square$

*Rozwiązanie.* Pierwsza część alternatywnego rozwiązania przebiega tak samo, więc zbadamy tylko różniczkowalność funkcji  $f$  w punkcie  $(0, 0)$ . Z definicji różniczki i macierzy Jacobiego mamy

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(p+h) - f(p) - L_p(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(h) - L_p(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} h_1 - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} h_2}{\|h\|}.$$

Możemy policzyć z definicji pochodnej

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3}{t^2} = 1 \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3}{t^2} = 1, \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} h_1 - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} h_2}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1 - h_2}{\|h\|} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} - r \cos \varphi - r \sin \varphi}{r} = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi - \cos \varphi + \sin \varphi \neq 0, \end{aligned}$$

więc funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w  $(0, 0)$ .  $\square$

**Uwaga 4.17.** Warunek wystarczający (4.15) nie jest równocześnie warunkiem koniecznym (to znaczy, że twierdzenie nie jest tożsamością). Przykładem niech będzie funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

W przypadku funkcji  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalność w punkcie znaczy, że istnieje styczna do wykresu funkcji w tym punkcie. W podobny sposób możemy zinterpretować geometrycznie różniczkowalność funkcji  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ : funkcja jest różniczkowalna w punkcie, gdy w tym punkcie istnieje płaszczyzna styczna do wykresu funkcji. Taka płaszczyzna będzie mieć równanie

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \quad (1)$$

### Przykład 4.18

Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do funkcji

$$f(x, y) = e^{x^2 - y}$$

w punkcie  $p = (1, 0)$ .

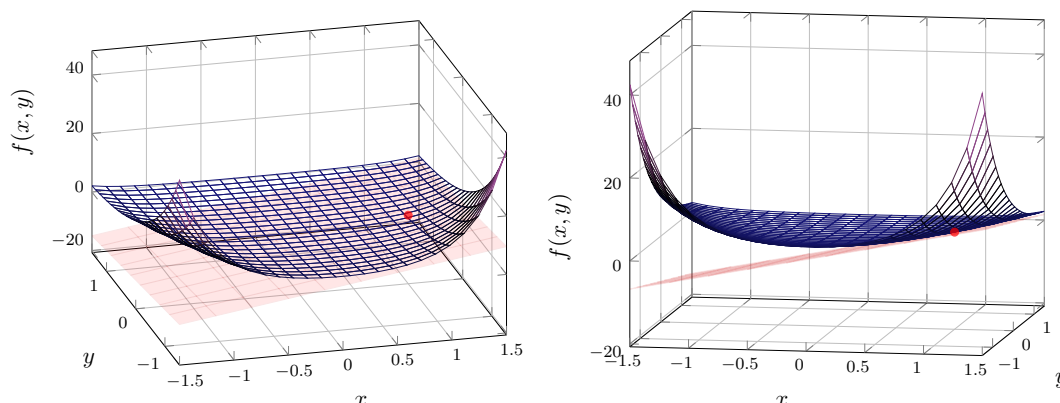
*Rozwiązanie.* Najpierw znajdziemy pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) &= e^{x^2 - y} \cdot 2x = 2xe^{x^2 - y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) &= e^{x^2 - y} \cdot (-1) = -e^{x^2 - y}. \end{aligned}$$

Płaszczyzna styczna w punkcie  $p$  ma więc wzór

$$\begin{aligned} z &= e^{1-0} + 2 \cdot 1 \cdot e^{1-0} \cdot (x - 1) - e^{1-0} \cdot (y - 0) \\ z &= 2ex - ey - e. \end{aligned}$$

□



Rysunek 6: Wykres funkcji  $f(x, y) = e^{x^2 - y}$  z płaszczyzną styczną w  $(1, 0)$ .

Również analogicznie do funkcji  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  możemy za pomocą pochodnych przybliżać wartości funkcji  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Mamy

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0)(h), \quad (2)$$

jeśli tylko funkcja  $f$  jest różniczkowalna w otoczeniu  $x_0$ .

Pochodna cząstkowa **drugiego rzędu** to pochodna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Jeśli  $i = j$ , czyli pochodna ma postać  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ , to nazywamy ją pochodną **czystą**, a przeciwnym wypadku jest **mieszana**.

Analogicznie do twierdzenia 4.15 funkcja  $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest **2-krotnie różniczkowalna** w punkcie  $p$ , gdy istnieją i są ciągle wszystkie (jest ich  $k^2$ ) pochodne cząstkowe 2-go rzędu funkcji  $f$  w punkcie  $p$ .

**Twierdzenie 4.19** (Schwarza o pochodnych mieszanych)

Jeśli funkcja  $f$  jest 2-krotnie różniczkowalna w  $p$ , to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p).$$

Jeśli funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest 2-krotnie różniczkowalna, to możemy zdefiniować różniczkę 2-go rzędu:

$$\begin{aligned} d^2 f(h_1, h_2) &= d \left( \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) h_2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

## §4.2 Ekstrema lokalne

**Definicja 4.20** (maksimum lokalne). Funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  określona na obszarze  $D \subset \mathbb{R}^n$  ma maksimum lokalne w punkcie  $x_0 \in D$ , jeśli istnieje takie sąsiedztwo  $U \subset D$  punktu  $x_0$ , że dla każdego  $x \in U$

$$f(x) < f(x_0).$$

Analogicznie definiujemy minimum lokalne.

**Twierdzenie 4.21** (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)

Jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna oraz ma ekstremum lokalne w  $x_0$ , to

$$df(x_0) = \mathbf{0}.$$

**Definicja 4.22.** Forma kwadratowa to funkcja  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad + \dots + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T \cdot A \cdot X,$$

gdzie macierz  $A$  jest symetryczną macierzą, którą nazywamy **macierzą formy kwadratowej**. Forma kwadratowa  $\varphi$  jest **określona** dodatnio / ujemnie / nieujemnie / niedodatnio, jeśli dla każdego niezerowego  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(h)$  jest dodatnio / ujemnie / nieujemnie / niedodatnio. Jeśli istnieją dwa wektory, dla których  $\varphi$  przyjmuje niezerowe wartości różnych znaków, to mówimy, że forma jest nieokreślona.

**Twierdzenie 4.23 (Sylwestera)**

Jeśli  $A$  jest macierzą formy kwadratowej  $\varphi$  oraz

$$d_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

jest ciągiem minorów wiodących, to:

1.  $\forall_k d_k > 0 \Rightarrow \varphi$  jest dodatnio określona
2.  $\forall_k (-1)^k d_k > 0 \Rightarrow \varphi$  jest ujemnie określona
3.  $\forall_k d_k \geq 0 \Rightarrow \varphi$  jest nieujemnie określona
4.  $\forall_k (-1)^k d_k \geq 0 \Rightarrow \varphi$  jest niedodatnio określona
5. w innym wypadku  $\varphi$  jest nieokreślona

**Definicja 4.24 (hesjan).** Jeśli funkcja  $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie  $p$ , to macierz

$$H(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą Hessego** (lub po prostu **hesjanem**) funkcji  $f$  w punkcie  $p$ .

**Twierdzenie 4.25 (warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)**

Dana jest funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  określona na obszarze  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Jeśli wszystkie jej pochodne cząstkowe drugiego rzędu są ciągłe w pewnym otoczeniu  $U \ni p$  oraz spełniony jest warunek konieczny (4.21), to jeśli forma kwadratowa, której macierzą jest macierz Hessego funkcji  $f$  w punkcie  $p$  jest:

1. określona dodatnio, to istnieje minimum lokalne w punkcie  $p$ ,
2. określona ujemnie, to istnieje maksimum lokalne w punkcie  $p$ ,
3. nieokreślona, to nie ma ekstremum lokalnego w punkcie  $p$ .

**Uwaga 4.26.** Punkty dziedziny, w których różniczka jest tożsamościowa równa zero lub nie istnieje to **punkty krytyczne**. Te, które spełniają pierwszy warunek, to **punkty stacjonarne**. Z warunku koniecznego istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie 4.21) wynika, że ekstrema istnieją tylko w punktach krytycznych, jednak nie w każdym punkcie krytycznym jest ekstremum. Takie punkty stacjonarne, w których nie ma minimum ani maksimum, to **punkty siodłowe**.

Z warunku wystarczającego istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie 4.25) wynika, że jeśli badamy punkty stacjonarne za pomocą macierzy Hessego i wyjdzie nam chociaż jeden minor zerowy, a forma będzie określona nieujemnie lub niedodatnio, to ta metoda okaże się po prostu nieskuteczna. W szczególności, jeśli badamy funkcję dwóch zmiennych i wyznacznik macierzy Hessego wyjdzie zerowy, to nie możemy nic powiedzieć o istnieniu ekstremum.

### Przykład 4.27

Znajdź ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

p8w

*Rozwiązanie.* Najpierw policzmy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Są one ciągłe, więc funkcja jest różniczkowalna (z 4.15), więc ewentualne ekstrema na pewno będą w miejscach zerowania się obu pochodnych cząstkowych (z 4.21). Mamy więc

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Policzmy macierz Hessego:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y) & \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 3x) \\ \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y) & \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$

Dla punktu  $(x, y) = (1, 1)$  mamy

$$H(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 6 > 0, \\ d_2 = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 > 0 \end{cases},$$

więc na podstawie warunku wystarczającego (4.25) wnioskujemy, że w punkcie  $(1, 1)$  jest minimum lokalne.

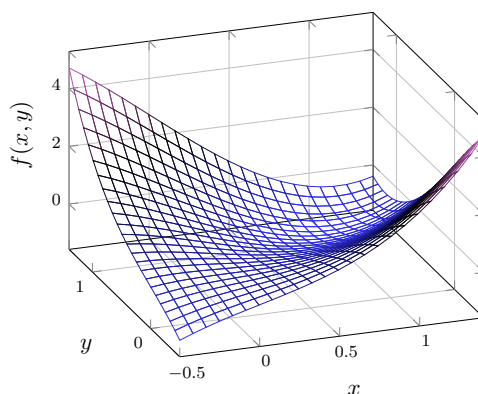
Dla punktu  $(x, y) = (0, 0)$  mamy

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 0, \\ d_2 = -9 < 0 \end{cases},$$

więc twierdzenie 4.25 mówi, że nie ma tutaj ekstremum lokalnego. Możemy ten fakt również sprawdzić w inny sposób – zauważmy, że

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3$$

przyjmuje wartości większe od  $f(0, 0) = 0$  dla  $\varepsilon > 0$  oraz mniejsze dla  $\varepsilon < 0$ , więc punkt  $(0, 0)$  jest punktem siodłowym.  $\square$



Rysunek 7: Wykres funkcji  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

### Przykład 4.28

Znaleźć odległość punktu  $A = (0, 1, 0)$  od powierzchni  $\pi : y = xz$ .

*Rozwiązanie.* Weźmy punkt  $P \in \pi$ . Wtedy  $P = (x, xz, z)$ , a odległość tego punktu od punktu  $A$  wyraża się wzorem

$$f(x, z) = \sqrt{x^2 + (xz - 1)^2 + z^2}.$$

Możemy skorzystać z faktu, że funkcja pierwiastkowa jest monotoniczna i spróbować znaleźć minimum funkcji

$$g(x, z) = x^2 + (xz - 1)^2 + z^2.$$

Pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = 2x + 2xz^2 - 2z, \quad \frac{\partial g(x, z)}{\partial z} = 2z + 2x^2z - 2x$$

są ciągle, więc funkcja  $g$  jest różniczkowalna, więc jej minimum może być jedynie w punktach stacjonarnych:

$$\begin{cases} x + xz^2 - z = 0 \\ z + x^2z - x = 0 \end{cases}.$$

Po dodaniu stronami i podstawieniu odpowiednich wartości przekształcamy powyższy układ równań do

$$x = z = 0.$$

Przyjemność zweryfikowania, że metoda macierzy Hessego dla tego punktu nie rozstrzygnie istnienia minimum pozostawione jest Czytelnikowi.

W takiej sytuacji musimy poradzić sobie jakoś inaczej. Wykorzystując nierówność między średnimi (AM-GM) mamy:

$$g(x, z) = x^2 + z^2 + (xz - 1)^2 \geq 2\sqrt{x^2z^2} + (xz)^2 - 2xz + 1 = (xz)^2 + 1 \geq 1.$$

Aby zamiast słabych nierówności mogły pojawić się tutaj równości, musi być spełnione  $x^2 = z^2$  (z AM-GM) oraz  $xz = 0$ . To oczywiście zachodzi dla  $x = z = 0$ , więc pokazaliśmy, że  $d_e(A, \pi) = \sqrt{1} = 1$ .  $\square$

Warto zauważyć, że zamiast sprawdzać, kiedy słabe nierówności są równościami, można było również po prostu policzyć odległość punktu  $A$  od punktu  $P = (0, 0, 0)$ , ponieważ wiemy, że tylko w nim może wystąpić minimum.



### §4.3 Ekstrema warunkowe

**Definicja 4.29** (maksimum warunkowe). Funkcja  $f : \mathbb{R}^n \supset S \rightarrow \mathbb{R}$  ma maksimum warunkowe w punkcie  $x_0 \in D$  przy warunku  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , jeśli istnieje takie sąsiedztwo  $U \subset D$  punktu  $x_0$ , że dla każdego  $x \in U \cap S$

$$f(x) < f(x_0),$$

przy

$$S = \{x \in D : g(x) = 0\}.$$

Analogicznie definiujemy minimum warunkowe.

**Uwaga.** W przeciwieństwie do definicji ekstremum lokalnego (definicja 4.20) nie wymagamy, żeby zbiór  $S$  był otwarty i spójny (był obszarem). Nie możemy więc bezpośrednio stosować twierdzeń i metod z poprzedniej sekcji.

#### **Twierdzenie 4.30** (Weierstrassa o osiągnięciu kresów)

Jeśli funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, a zbiór  $D \subset \mathbb{R}^n$  jest zwarty, to funkcja  $f$  osiąga swoje kresy, czyli istnieją takie  $x_1, x_2 \in D$ , że dla każdego  $x \in D$  zachodzi

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Zachodzi twierdzenie analogiczne do twierdzenia 4.21:

#### **Twierdzenie 4.31** (warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego)

Jeśli funkcje  $f, g$  są różniczkowalne w sposób ciągły oraz  $f$  ma ekstremum warunkowe w punkcie  $x_0$  przy warunku  $g$ , to istnieje takie  $\lambda \in \mathbb{R}$ , że

$$dL(x_0, \lambda) = \mathbf{0},$$

gdzie  $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$  to funkcja Lagrange'a.

**Definicja 4.32** (hesjan obrzeżony). Jeśli funkcja  $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły w punkcie  $p$ , to macierz

$$H(p, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(p, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(p, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(p, \lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(p, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(p, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(p, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(p, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(p, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_n}(p, \lambda) \end{bmatrix}$$

nazywamy **hesjanem obrzeżonym** funkcji  $f$  w punkcie  $p$ .

Analogicznie do twierdzenia 4.25 mamy:

**Twierdzenie 4.33** (warunek wystarczający istnienia ekstremum warunkowego)

Dane są funkcje  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $S \subset D \subset \mathbb{R}^n$ . Jeśli wszystkie ich pochodne cząstkowe drugiego rzędu są ciągłe w pewnym otoczeniu  $U \ni p$  oraz spełniony jest warunek konieczny (4.31) dla punktu  $(p, \lambda)$ , to

1.  $\forall_{k=2,\dots,n} d_k < 0 \Rightarrow$  istnieje minimum warunkowe w punkcie  $p$ ,
2.  $\forall_{k=2,\dots,n} (-1)^{k+1} d_k < 0 \Rightarrow$  istnieje maksimum warunkowe w punkcie  $p$ ,
3. jeśli nie zachodzi warunek  $\forall_k d_k \leq 0$  ani  $\forall_k (-1)^{k+1} d_k \leq 0$ , to nie ma ekstremum lokalnego w punkcie  $p$ ,

gdzie  $d_k$  jest wyznacznikiem minora wiodącego hesjanu obrzeżonego o rozmiarze  $(k+1)$ .

**Przykład 4.34**

Znajdź maksymalną wartość funkcji

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y - x$$

na zbiorze

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 6\}.$$

b4a

*Rozwiązanie.* Najpierw policzmy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + y - 1, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x + 2.$$

W zbiorze  $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 6\} \subset S$  (który jest obszarem) funkcja przyjmuje ewentualne maksimum lokalne, tylko gdy obie pochodne się zerują (na podstawie twierdzenia 4.21), więc

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2, 5) \in S_1.$$

Hesjan ma postać

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 2 > 0 \\ d_2 = -1 < 0 \end{cases},$$

więc (z twierdzenia 4.25) punkt  $(-2, 5)$  jest punktem siodłowym, a na zbiorze  $S_1$  funkcja  $f$  nie przyjmuje maksimum.

Sprawdźmy teraz zbiór  $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y < 6\} \subset S$ . Możemy posłużyć się funkcją Lagrange'a:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad g(x, y) = x^2 - y.$$

Z twierdzenia 4.31 maksimum warunkowe może istnieć, tylko gdy

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 2x + y - 1 + \lambda(2x) = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = x + 2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \lambda = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + x^2 - 1 + 2(x + 2)x = 0 \\ \lambda = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}.$$

Pierwsze równanie z układu przyjmuje postać

$$3x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Hesjan obrzeżony będzie więc równy

$$H(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x, y, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & -1 \\ 2x & 2 + 2\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a jego minor

$$d_2 = -2x - 2x - (2 + 2\lambda) = -4x - 2\lambda - 2 =$$

$$= -4x - 2(x + 2) - 2 = -6(x + 1).$$

Dla  $x = -1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$  mamy

$$d_2 = -6 \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) > 0,$$

więc (z twierdzenia 4.33) ten punkt jest lokalnym maksimum warunkowym, a dla  $x = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  mamy

$$d_2 = -6 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) < 0,$$

więc ten punkt jest lokalnym minimum warunkowym. Na tej krzywej interesować nas więc będzie tylko punkt  $\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \in S_2$ .

Następnie zajmiemy się zbiorem  $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y = 6\} \subset S$ . Wiemy, że  $y = 6$ , więc możemy potraktować funkcję  $f$  jako funkcję jednej zmiennej.

$$f(x, 6) = h(x) = x^2 + 6x + 2 \cdot 6 - x$$

$$= x^2 + 5x + 12$$

Teraz możemy standardowo zbadać jej ekstrema:

$$h'(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Jednak  $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} > 6$ , więc ten punkt nie należy do  $S_3$ . Ekstrema funkcji istnieją w punktach krytycznych, więc musimy jeszcze sprawdzić punkty krańcowe:  $(x, y) = (\pm\sqrt{6}, 6)$ .

Skoro  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , to wystarczy sprawdzić wartości funkcji w takich punktach poszczególnych zbiorów, w których potencjalnie może istnieć maksimum globalne:

$$f\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \dots = 3 + \frac{16}{3\sqrt{3}},$$

$$f(-\sqrt{6}, 6) = h(-\sqrt{6}) = 6 - 5\sqrt{6} + 12 = 18 - 5\sqrt{6},$$

$$f(\sqrt{6}, 6) = h(\sqrt{6}) = 6 + 5\sqrt{6} + 12 = 18 + 5\sqrt{6}.$$

Tak więc funkcja  $f$  przyjmuje maksimum równe  $18 + 5\sqrt{6}$  w punkcie  $(\sqrt{6}, 6)$ .  $\square$

**Przykład 4.35**

Znajdź ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y, z) = x + y + 2z$$

przy warunku  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

*Rozwiązanie.* Weźmy funkcję Lagrange'a:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z), \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Policzmy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial x} = 1 + \lambda 2x, \quad \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial y} = 1 + \lambda 2y, \quad \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial z} = 2 + \lambda 2z.$$

Z twierdzenia 4.31 wynika, że wszystkie pochodne zerują się w ekstremum, więc

$$\begin{cases} 1 + \lambda 2x = 0 \\ 1 + \lambda 2y = 0 \\ 2 + \lambda 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = -\frac{1}{2\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2\lambda^2} = 1$$

$$\therefore \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Możemy zauważyć, że zbiór  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  określa sferę w przestrzeni euklidesowej, więc jest ograniczony i domknięty, więc, na mocy twierdzenia Heinego-Borela, jest zwarty. Z twierdzenia Weierstrassa (4.30) wynika, że funkcja  $f$  przyjmuje swoje ekstrema na tym zbiorze, więc wystarczy sprawdzić wyliczone wcześniej wartości.

Dla  $\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$  mamy

$$x = y = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad z = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$f(x, y, z) = 2\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + 2\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{6}.$$

Dla  $\lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}}$  mamy

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$f(x, y, z) = 2\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

Otrzymaliśmy więc szukane maksimum i minimum. □

## §4.4 Funkcje uwikłane

**Definicja 4.36.** Funkcja uwikłana określona przez równanie  $F(x, y) = 0$  to każda funkcja  $y(x)$  spełniająca równość

$$F(x, y(x)) = 0$$

dla wszystkich  $x$  w otoczeniu pewnego punktu  $x_0$ . Jeśli taka funkcja istnieje, to mówimy, że równanie  $F(x, y) = 0$  możemy rozwikłać w otoczeniu tego punktu.

### Twierdzenie 4.37 (o funkcji uwikłanej)

Jeśli funkcja  $F : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu  $(x_0, y_0)$  i  $F(x_0, y_0) = 0$  oraz  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , to istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana  $y = y(x)$ . Ponadto

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

oraz, jeśli  $y'(x_0) = 0$ ,

$$y''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

### Przykład 4.38

Zbadaj ekstrema funkcji uwikłanej równaniem

$$F(x, y) = x^4 - 2x^2y - x^2 + y^2 + y = 0.$$

*Rozwiązanie.* Policzmy najpierw pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= 4x^3 - 4xy - 2x = 2x(2x^2 - 2y - 1) \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= -2x^2 + 2y + 1\end{aligned}$$

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej mamy

$$2x(2x^2 - 2y - 1) = 0 \wedge -2x^2 + 2y + 1 \neq 0$$

$$\therefore x = 0,$$

więc

$$F(0, y) = y^2 + y = 0$$

$$\therefore y \in \{-1, 0\}.$$

Mamy zatem dwa punkty stacjonarne, w których może istnieć ekstremum:  $(0, -1)$  i  $(0, 0)$ . Aby je zbadać, sprawdzamy znak drugiej pochodnej.

$$y''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} = -\frac{12x^2 - 4y - 2}{-2x^2 + 2y + 1}.$$

Dla punktu  $(0, -1)$  mamy

$$y''(0) = -\frac{4-2}{-2+1} = 2 > 0,$$

a dla punktu  $(0, 1)$

$$y''(0) = -\frac{-2}{1} = 2 > 0,$$

więc w obu punktach istnieją minima lokalne.  $\square$

## §5 Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych

Całki wielokrotne definiujemy podobnie jak całki funkcji jednej zmiennej — dzielimy dziedzinę na  $n$  małych prostokątów (lub sześciątów, hipersześcianów) i sprawdzamy, czy istnieje granica przy  $n \rightarrow \infty$  sumy iloczynów ich pól (objętości) i wartości funkcji w pewnych ich punktach.

### §5.1 Całka podwójna

W tej sekcji zajmujemy się całkami funkcji dwóch zmiennych  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $P \supset \mathbb{R}^2$ .

**Twierdzenie 5.1** (warunek wystarczający całkowalności funkcji po prostokącie)

Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła na prostokącie  $P$ , to jest na nim całkowalna.

**Twierdzenie 5.2** (Fubiniego)

Jeśli funkcja  $f$  jest całkowalna na prostokącie  $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , to

$$\iint_P f(x, y) \, dx \, dy = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Całkę iterowaną często oznaczamy, przenosząc symbol  $dx$  na początek, na przykład:

$$\int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz$$

**Definicja 5.3.** Funkcja charakterystyczna zbioru  $D$  to funkcja

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

Korzystając z tej definicji, jeśli  $D \in \mathbb{R}^2$  jest zbiorem zawierającym się w pewnym prostokącie  $P$ , to

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_P (f\chi_D)(x, y) \, dx \, dy.$$

**Definicja 5.4.** Obszar normalny (względem osi  $OX$ ) to taki zbiór

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\varphi(x), \psi(x)]\},$$

że funkcje  $\varphi, \psi$  są ciągłe.

Analogicznie możemy zdefiniować obszar normalny względem osi  $OY$ .

**Twierdzenie 5.5** (zamiana całki powójnej na całkę iterowaną dla obszaru normalnego)

Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła oraz

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$$

jest obszarem normalnym względem osi  $OX$  tej funkcji, to

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy.$$

**Definicja 5.6.** Obszar regularny jest skończoną sumą obszarów normalnych o parami rozłącznych wnętrzach.

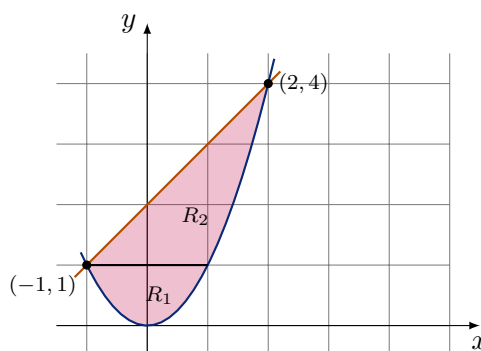
**Przykład 5.7**

Znaleźć pole obszaru  $R$  ograniczonego krzywą  $y = x^2$  i prostą  $y = x + 2$ .

*Rozwiązanie.* Najpierw liczymy punkty przecięcia krzywych:  $(-1, 1)$ ,  $(2, 4)$ . Możemy potraktować cały obszar  $R$  jako normalny względem osi  $OX$  otrzymując

$$[R] = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) \, dx = \left[ \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Alternatywnie, możemy podzielić  $R$  na dwa obszary normalne, jak na rysunku.



Obszar  $R_1$  jest normalny względem osi  $OY$ :

$$[R_1] = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{y} \, dy = \frac{4}{3},$$

podobnie jak obszar  $R_2$ :

$$[R_2] = \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx = \int_1^4 (\sqrt{y} - y + 2) \, dy = \left[ \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_1^4 = \frac{14}{3} - \frac{1}{2}.$$

□

**Twierdzenie 5.8** (o zamianie zmiennych w całce wielokrotnej)

Dana jest funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , która jest ciągła na obszarze regularnym  $D$  oraz przekształcenie  $\Phi : D' \rightarrow D$ , gdzie

$$\Phi : (x, y) \mapsto (x(u, v), (y(u, v))).$$

Jeśli  $\Phi$  przekształca wnętrze obszaru regularnego  $D'$  na wnętrze obszaru regularnego  $D$  wzajemnie jednoznacznie (jest bijekcją), pochodne cząstkowe przekształcenia  $\Phi$  są ciągle na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar  $D'$  oraz jacobian przekształcenia  $J_\Phi(u, v)$  jest niezerowy wewnątrz  $D'$ , to

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| \, du \, dv.$$

**Przykład 5.9**

Obliczyć całkę

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy$$

po obszarze  $D : 2 \leq 2x + y \leq 3, -1 \leq x - y \leq 1$ .

*Rozwiązanie.* Możemy podstawić

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{3} \\ y = \frac{u-2v}{3} \end{cases}.$$

Teraz obszar jest prostokątem,  $D' = 2 \leq u \leq 3, -1 \leq v \leq 1$ . Obliczmy jacobian

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{-2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{-1}{3}.$$

Wykorzystując twierdzenie o zamianie zmiennych (5.8) mamy

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) \, dx \, dy &= \iint_{D'} \left( \frac{u+v}{3} + \frac{u-2v}{3} \right) \cdot |J(u, v)| \, du \, dv = \iint_{D'} \frac{2u-v}{9} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{9} \int_{-1}^1 dv \int_2^3 (2u-v) \, du = \frac{1}{9} \int_{-1}^1 (5-v) \, dv = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

□

**Przykład 5.10**

Znaleźć objętość bryły ograniczonej przez paraboloidę  $z = 4 - x^2 - y^2$ , brzeg walca  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  oraz płaszczyznę  $z = 0$  (od dołu).

*Rozwiązanie.* Bryła ma objętość równą

$$\iint_D 4 - x^2 - y^2,$$



przy  $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ . Możemy przejść do współrzędnych biegunowych<sup>2</sup>:

$$\iint_D 4 - x^2 - y^2 \, dx \, dy = \iint_{D'} (4 - r^2) r \, dr \, d\varphi,$$

gdzie, skoro  $x^2 + y^2 - 2x + 1 \leq 1 \Rightarrow r^2 \leq 2r \cos \varphi \Rightarrow r \leq 2 \cos \varphi$ ,

$$D' = \{(r, \varphi) : \varphi \in [0, \pi], r \in [0, 2 \cos \varphi]\}.$$

Zbiór  $D'$  jest obszarem normalnym, mamy więc

$$\begin{aligned} \iint_{D'} (4r - r^3) \, dr \, d\varphi &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (4r - r^3) \, dr = \int_0^\pi (8 \cos^2 \varphi - 4 \cos^4 \varphi) \, d\varphi \\ &= \left[ \frac{5}{2} \varphi + \frac{5}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos^3 \varphi \right]_0^\pi = \frac{5\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

## §5.2 Całka potrójna

W tej sekcji zajmujemy się całkami funkcji trzech zmiennych  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $P \subset \mathbb{R}^3$ . Twierdzenia z poprzedniej sekcji można uogólnić na całki potrójne.

**Definicja 5.11.** Obszar normalny (względem płaszczyzny  $OXY$ ) to zbiór

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z \in [\Phi(x, y), \Psi(x, y)]\},$$

gdzie  $D$  jest obszarem regularnym w  $\mathbb{R}^2$ , a funkcje  $\Phi, \Psi$  są ciągłe.

### Twierdzenie 5.12 (zamiana całki potrójnej na całkę iterowaną dla obszaru normalnego)

Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła oraz

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z \in [\Phi(x, y), \Psi(x, y)]\}$$

jest obszarem normalnym względem płaszczyzny  $OXY$ , to

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) \, dz.$$

Jeśli  $D$  jest nie tylko obszarem regularnym, ale też normalnym względem osi  $OX$ , to

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) \, dz.$$

<sup>2</sup>zobacz dodatek A

### Przykład 5.13

Obliczyć moment bezwładności względem osi  $OZ$  jednorodnej bryły o masie  $M$  ograniczonej przez elipsoidę  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$  i płaszczyznę  $z = 0$  (od dołu).

*Rozwiązanie.* Bryła jest jednorodna, więc ma stałą gęstość  $\rho = \frac{M}{V}$ . Aby obliczyć objętość  $V$  oraz moment bezwładności  $I$ , przejdziemy na uogólnione współrzędne sferyczne:

$$\begin{cases} x = 2r \cos \psi \cos \varphi \\ y = 3r \cos \psi \sin \varphi \\ z = r \sin \psi \end{cases}.$$

Jakobian takiego przejścia będzie równy  $6r^2 \cos \psi$ , co, znając jacobian przejścia do współrzędnych sferycznych, łatwo uzasadnić algebraicznie. W nowym układzie współrzędnych bryła będzie prostopadłościanem ( $r \in [0, 1]$ ,  $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ), więc

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D'} 6r^2 \cos \psi dr d\psi d\varphi = \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \psi d\psi = 12\pi \int_0^1 r^2 dr = 4\pi, \\ \therefore \rho &= \frac{M}{4\pi}. \end{aligned}$$

Moment bezwładności punktu materialnego to iloczyn jego masy i kwadratu odległości od osi obrotu, więc moment bezwładności opisanej bryły to

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \\ &= \frac{M}{4\pi} \iiint_{D'} (4r^2 \cos^2 \psi \cos^2 \varphi + 9r^2 \cos^2 \psi \sin^2 \varphi) 6r^2 \cos \psi dr d\psi d\varphi = \\ &= \frac{3M}{2\pi} \iiint_{D'} (4r^4 \cos^3 \psi + 5r^4 \cos^3 \psi \sin^2 \varphi) dr d\psi d\varphi = \\ &= \frac{3M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^4 \cos^3 \psi)(4 + 5 \sin^2 \varphi) d\psi. \end{aligned}$$

Skoro  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{1}{3} [\sin x \cos^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$ , to

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^4)(4 + 5 \sin^2 \varphi) dr = \frac{M}{5\pi} \int_0^{2\pi} (4 + 5 \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{M}{5\pi} \left( 8\pi + 5 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{M}{5\pi} (8\pi + 5\pi) = \frac{13}{5}M. \end{aligned}$$

□

Nic nie stoi na przeszkodzie, żebyśmy zdefiniowali również niewłaściwe całki wielokrotne. Jeśli  $D$  nie jest zbiorem ograniczonym (lub funkcja  $f$  nie jest na nim ograniczona), to tworzymy taki nieskończony ciąg obszarów regularnych  $D_i$ , że  $D_i \in D_{i+1}$  oraz  $\lim_{i \rightarrow \infty} D_i = D$  i definiujemy

$$\int \cdots \int_D f(x) dx_1 \cdots dx_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \cdots \int_{D_i} f(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

### Przykład 5.14

Oblicz

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dV.$$

*Rozwiązanie.* Przejdziemy na współrzędne sferyczne:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dV = \iiint_D e^{-r^2} r^3 \cos \psi dr d\psi d\varphi = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iiint_{D_k} e^{-r^2} r^3 \cos \psi dr d\psi d\varphi, \end{aligned}$$

gdzie  $D_k = \{(r, \psi, \varphi) : \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, k]\}$ . Mamy więc

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^k dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r^3 \cos \psi d\varphi = 2\pi \int_0^k dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^3 \cos \psi d\psi \\ &= 4\pi \int_0^k e^{-r^2} r^3 dr \end{aligned}$$

Stosując podstawienie  $u = x^2$  oraz całkowanie przez części mamy

$$\int e^{-x^2} x^3 dx = \frac{1}{2} \int e^{-u} u du = \frac{-1}{2} e^{-u} u + \frac{1}{2} \int e^{-u} du = \frac{-1}{2} e^{-u} u - \frac{e^{-u}}{2},$$

więc

$$I_k = 2\pi \left[ -e^{-r^2} (r^2 + 1) \right]_0^k = 2\pi \left( -e^{-k^2} (k^2 + 1) + 1 \right)$$

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = 2\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{k^2 + 1}{e^{k^2}} \right) = 2\pi.$$

□

## §5.3 Całka krzywoliniowa

### §5.3.1 Całka krzywoliniowa nieskierowana

**Definicja 5.15.** Łuk gładki to taka krzywa

$$K = \{(x(t), y(t)) : t \in [\alpha, \beta]\},$$

że funkcje  $x(t), y(t)$  są różniczkowalne w sposób ciągły oraz dla każdego  $t \in [\alpha, \beta]$  zachodzi

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0.$$

**Definicja 5.16.** Krzywa regularna to krzywa będąca sumą skończonej liczby łuków gładkich.

Całkę funkcji  $f$  po łuku gładkim  $L$  definiujemy podobnie jak zwykłą całkę (tworzymy ciąg przedziałów i badamy granicę sumy iloczynów wartości funkcji i długości przedziałów przy dążącej do zera średnicy przedziałów). Jeśli krzywa  $L$  jest zamknięta (czyli jej początek pokrywa się z końcem) używamy symbolu  $\oint$ .

**Twierdzenie 5.17**

Jeśli  $f$  jest funkcją ciągłą, a  $L$  jest łukiem gładkim, to

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Jeśli łuk nie jest zadany parametrycznie, a jawnie, to wzór z powyższego twierdzenie ma postać

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Podobnie definiuje się łuk gładki w  $\mathbb{R}^3$ ; można również wyprowadzić wzory dla całek krzywoliniowych funkcji trzech zmiennych.

### §5.3.2 Całka krzywoliniowa skierowana

Jeśli krzywa  $L$  jest łukiem gładkim, to możemy zdefiniować **pole wektorowe**  $\vec{F} : L \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gdzie

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Wtedy **całkę krzywoliniową skierowaną** oznaczamy

$$\int_L \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Zachodzi również (dosyć łatwa do uzasadnienia) równość:

**Twierdzenie 5.18**

Jeśli  $\vec{F} = (P, Q)$  jest polem wektorowym, w którym funkcje  $P, Q$  są ciągłe, a  $L$  jest łukiem gładkim, to

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt.$$

Znów, analogiczne wzory istnieją dla całek krzywoliniowych skierowanych dla funkcji trzech zmiennych.

Mówimy, że zadana parametrycznie krzywa regularna  $K$  ma **orientację przeciwną** do krzywej  $-K$ , jeśli obrazy ich parametryzacji są równe (to znaczy, że krzywe nieskierowane są identyczne), ale zmieniając parametr  $t$  w dwóch danych równaniach „poruszamy się” w przeciwne strony.

**Fakt 5.19.** Zachodzi równość

$$\int_{-K}^K P dx + Q dy = - \int_K^{-K} P dx + Q dy.$$

**Definicja 5.20.** Krzywa Jordana to zamknięta krzywa, której parametryzacja jest różnowartościowa (to znaczy, że nie ma punktów wielokrotnych) z wyjątkiem punktu początkowego / końcowego.

**Definicja 5.21.** Obszar jednospójny  $D$  to taki obszar, że wnętrze każdej krzywej Jordana zawartej w  $D$  zawiera się w  $D$ .

Brzeg ograniczonego obszaru jednospójnego  $D$  oznaczamy przez  $\partial D$ . Mówimy, że jest on **zorientowany dodatnio**, jeśli poruszając się po tym brzegu zgodnie z wybraną orientacją (to znaczy przy rosnącym parametrze  $t$ ) obszar  $D$  znajduje się po lewej stronie.

### Twierdzenie 5.22 (Greena)

Niech  $D$  będzie ograniczonym obszarem jednospójnym, a  $\vec{F} = (P, Q)$  polem wektorowym, gdzie funkcje  $P, Q$  są różniczkowalne w sposób ciągły wewnątrz obszaru  $D$ , a  $\partial D$  jest zorientowany dodatnio. Zachodzi równość

$$\oint_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

### Przykład 5.23

Oblicz

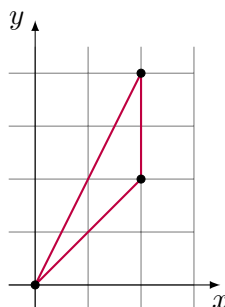
$$\oint_C xy^2 dx + 2x^2y dy,$$

gdzie  $C$  to dodatnio zorientowany brzeg trójkąta o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$  i  $(2, 4)$ .

*Rozwiązanie.* Oczywiście moglibyśmy rozpisać trzy całki (dla każdego boku), ale łatwiej będzie skorzystać z twierdzenia Greena (5.22):

$$\begin{aligned} I &= \oint_C xy^2 dx + 2x^2y dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) dx dy = \\ &= \iint_D 4xy - 2xy dx dy = \iint_D 2xy dx dy, \end{aligned}$$

gdzie  $D$  jest zadany trójkątem, więc  $D = \{(x, y) : x \in [0, 2], y \in [x, 2x]\}$ .



$$I = \int_0^2 dx \int_x^{2x} 2xy \, dy = \int_0^2 x \left[ y^2 \right]_x^{2x} dx = \int_0^2 3x^3 \, dx = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12.$$

□

### Przykład 5.24

Oblicz

$$\oint_C 3x^2y^2 \, dx + 2x^2(1 + xy) \, dy,$$

gdzie  $C$  jest dodatnio zorientowanym okręgiem o średnicy  $a$  i środku w punkcie  $(\frac{a}{2}, 0)$ .

*Rozwiązanie.* Na mocy twierdzenia Greena (5.22) mamy

$$\begin{aligned} I &= \oint_C 3x^2y^2 \, dx + 2x^2(1 + xy) \, dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 2x^3y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2) \, dx \, dy = \\ &= \iint_D 4x + 6x^2y - 6x^2y \, dx \, dy = \iint_D 4x \, dx \, dy, \end{aligned}$$

gdzie  $D$  jest zadaniem kołem. Możemy przejść z równaniem okręgu na współrzędne biegunowe otrzymując

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ r^2 \cos^2 \varphi - ar \cos \varphi + \frac{a^2}{4} + r^2 \sin^2 \varphi &= \frac{a^2}{4} \\ r^2 &= ar \cos \varphi \\ r &= a \cos \varphi, \end{aligned}$$

więc  $D' = \{(r, \varphi) : \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], r \in [0, a \cos \varphi]\}$ . Ergo

$$\begin{aligned} I &= 4 \iint_D x \, dx \, dy = 4 \iint_{D'} r^2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 \cos \varphi \, dr = \\ &= \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{4a^3}{3} \left( \left[ \frac{1}{4} \sin \varphi \cos^3 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi \right) = \\ &= a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi = \frac{a^3 \pi}{2}. \end{aligned}$$

□

### Przykład 5.25

Oblicz

$$\int_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

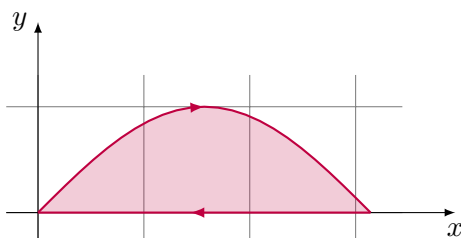
gdzie  $C$  to zorientowany ujemnie łuk sinusoidy  $y = \sin x, x \in [0, \pi]$ .

*Rozwiązanie.* Niech  $P(x, y) = (x+y)^2, Q(x, y) = -(x-y)^2$ . Możemy oczywiście skorzystać bezpośrednio z twierdzenia 5.18:

$$I = \int_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \int_0^\pi (x + \sin x)^2 - (x - \sin x)^2 (\cos x) dx,$$

jednak nie będzie to najprostsze rachunkowo. Zamiast tego, możemy wziąć odcinek  $L : y = 0, x \in [0, \pi]$  i stwierdzić, że

$$I = \oint_{C \cup (-L)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{-L} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$



Stosując twierdzenie Greena (5.22) i fakt 5.19 mamy

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dy + \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= - \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} -(2x - 2y) - (2x + 2y) dy + \int_0^\pi x^2 \cdot 1 + (-x^2) \cdot 0 dx = \\ &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} 4x dy + \int_0^\pi x^2 dx = \int_0^\pi 4x \sin x dx + \frac{\pi^3}{3} = \\ &= 4 \left( \left[ -x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \right) + \frac{\pi^3}{3} = 4\pi + \frac{\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

□

**Uwaga 5.26.** Zazwyczaj całek krzywoliniowych skierowanych nie liczy się najprzyjemniej (Czytelnik raczy sprawdzić chociażby ostatnie dwa przykłady), dlatego wolimy przejść na całkę podwójną, stosując twierdzenie Greena (5.22). Jednak zdarzają się również sytuacje, w których to przejście z całki podwójnej na krzywoliniową jest dobrym rozwiązaniem.

Weźmy konkretny problem: chcemy znaleźć pole pod łukiem cykloidy

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t.$$

Możemy oczywiście skorzystać ze wzoru na pole pod wykresem funkcji zadanej parametrycz-

nie, ale zakładamy, że go nie znamy. Weźmy pole wektorowe  $\vec{F} : \vec{F}(x, y) = (-y, 0)$ . Łatwo sprawdzić, że  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 + 1 = 1$ . Możemy więc użyć twierdzenia Greena w przeciwną stronę niż zazwyczaj:

$$\iint_D 1 \, dx \, dy = - \oint_{\partial D} -y \, dx = - \int_0^{2\pi} -(1 - \cos t)(1 - \cos t) \, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = 3\pi a^3.$$

Aby policzyć pole figury, często możemy skorzystać z pól wektorowych  $(0, x)$ ,  $(-y, 0)$ ,  $(\frac{-y}{2}, \frac{x}{2})$ . Rotacja (czyli różnica, którą liczyliśmy) każdego z nich jest równa 1, więc idealnie nadają się do tego celu. Używając tego ostatniego pola wektorowego, łatwo pokazać, że

$$\text{pole } R = \frac{1}{2} \oint_{\partial R} -y \, dx + x \, dy, \quad (3)$$

gdzie  $\partial R$  to dodatnio zorientowany brzeg ograniczonego obszaru jednospójnego  $R$ .

**Definicja 5.27.** Pole potencjalne  $\vec{F} = (P, Q)$  w obszarze  $D$  to takie pole wektorowe, że istnieje funkcja różniczkowalna  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ , że

$$du = P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy,$$

czyli  $P, Q$  są jej pochodnymi cząstkowymi. Funkcję  $u$  nazywamy potencjałem pola potencjalnego  $\vec{F}$ .

**Twierdzenie 5.28** (warunek konieczny i wystarczający na potencjalność pola)

Niech  $\vec{F} = (P, Q)$  będzie polem wektorowym, a funkcje  $P, Q$  są różniczkowalne w sposób ciągły na obszarze jednospójnym  $D$ . Pole  $\vec{F}$  jest potencjalne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $(x, y) \in D$  zachodzi

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

**Wniosek 5.29**

Całka krzywoliniowa skierowana po dowolnej krzywej regularnej zamkniętej zawartej w obszarze  $D$ , na którym pole wektorowe jest potencjalne, jest równa 0.

Możemy sformułować również ogólniejsze twierdzenie:

**Twierdzenie 5.30** (o niezależności całki krzywoliniowej od kształtu krzywej w polu potencjalnym)

Całka krzywoliniowa skierowana w polu potencjalnym nie zależy od kształtu krzywej regularnej  $K \subset D$ , a jedynie od jej początku  $A$  i końca  $B$ . Ponadto zachodzi równość

$$\int_A^B P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = u(B) - u(A),$$

gdzie  $u$  jest potencjałem pola potencjalnego w  $D$ .



### Przykład 5.31

Oblicz całkę krzywoliniową skierowaną pola wektorowego  $\vec{F} = \left( \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$  po okręgu  $x^2 + y^2 = 1$  skierowanym dodatnio.

*Rozwiązanie.* Niech  $P(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ ,  $Q(x, y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$ . Funkcje te są różniczkowalne w sposób ciągły na pewnym zbiorze  $D$ , jednak  $(0, 0) \notin D$ , więc nie jest to obszar jedno-spójny. Nie możemy więc użyć warunku wystarczającego na potencjalność pola (5.28) i tym samym powiedzieć, że całka wynosi zero.

Zamiast tego wykorzystamy przejście na współrzędne biegunowe:

$$\begin{aligned} \oint_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin t}{1} (-\sin t dt) + \frac{-\cos t}{1} (\cos t dt) \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi. \end{aligned}$$

□

### Przykład 5.32

Oblicz

$$\int_C 2x^3y^4 + x dx + 2x^4y^3 + y dy,$$

gdzie  $C$  jest fragmentem paraboli  $y(x) = x^2 + 3x - 4$ ,  $x \in [-3, 2]$ .

*Rozwiązanie.* Niech  $\vec{F} = (P, Q)$ , gdzie  $P(x, y) = 2x^3y^4 + x$ ,  $Q(x, y) = 2x^4y^3 + y$ , będzie polem wektorowym. Możemy sprawdzić, że pochodne cząstkowe  $P, Q$  istnieją i są ciągłe na  $\mathbb{R}^2$  oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= 8x^3y^3 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= 8x^3y^3 \end{aligned}$$

są równe, więc pole  $\vec{F}$  jest potencjalne. Na mocy twierdzenia 5.30

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

gdzie  $A$  i  $B$  to początek i koniec krzywej  $C$ ,

$$A = (-3, -4), \quad B = (2, 6).$$

Moglibyśmy teraz policzyć całkę po odcinku, ale zamiast tego możemy znaleźć potencjał  $u$  pola  $\vec{F}$ :

$$u = \int P(x, y) dx = \int Q(x, y) dy.$$

Skupmy się na funkcji  $Q$ :

$$u = \int Q(x, y) dy = \int 2x^4y^3 + y dy = \frac{1}{2}x^4y^4 + \frac{1}{2}y^2 + C(x).$$

Musimy teraz jeszcze znaleźć stałą (w stosunku do  $y$ )  $C(x)$ . Aby to zrobić, możemy policzyć całkę  $\int P(x, t) dx$ , ale w ogólności łatwiejszą operacją będzie różniczkowanie:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$$

$$\Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}x^2 + c.$$

Mamy

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(x^4 y^4 + y^2 + x^2) + c,$$

więc

$$\int_{AB} 2x^3 y^4 + x dx + 2x^4 y^3 + y dy = u(B) - u(A) = 15.$$

□

## §A Układy współrzędnych

### Współrzędne biegunowe

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (4)$$

Jakobian przejścia to

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

### Współrzędne walcowe

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (5)$$

Jakobian przejścia to

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

### Współrzędne sferyczne

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \cos \varphi \\ y = r \cos \psi \sin \varphi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad (6)$$

Jakobian przejścia to

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \psi, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -r \sin \psi \cos \varphi & -r \cos \psi \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi & -r \sin \psi \sin \varphi & r \cos \psi \cos \varphi \\ \sin \psi & r \cos \psi & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos \psi (-\sin^2 \psi \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi \sin^2 \varphi - \sin^2 \psi \sin^2 \varphi - \cos^2 \psi \cos^2 \varphi) \\ &= r^2 \cos \psi (-\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \\ &= -r^2 \cos \psi. \end{aligned}$$

## §B Wzory fizyczne

Zakładamy, że  $\rho$  jest funkcją gęstości  $D \rightarrow \mathbb{R}_+$  lub  $V \rightarrow \mathbb{R}_+$ , gdzie  $D$  jest obszarem regularnym w  $\mathbb{R}^2$ , a  $V$  w  $\mathbb{R}^3$ .

### Całki podwójne

Masa obszaru  $D$

$$M = \iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy$$

Moment statyczny obszaru  $D$  względem osi  $OX$

$$M_{OX} = \iint_D y \rho(x, y) \, dx \, dy$$

Moment statyczny obszaru  $D$  względem osi  $OY$

$$M_{OY} = \iint_D x \rho(x, y) \, dx \, dy$$

Środek ciężkości obszaru  $D$

$$x_0 = \frac{M_{OY}}{M}, \quad y_0 = \frac{M_{OX}}{M}$$

Moment bezwładności obszaru  $D$  względem środka układu współrzędnych

$$M_B = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dx \, dy$$

### Całki potrójne

Masa bryły  $V$

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

**Momenty statyczne bryły  $V$  względem płaszczyzn**

$$M_{OXY} = \iiint_V z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$M_{OXZ} = \iiint_V y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$M_{OYZ} = \iiint_V x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

**Środek ciężkości bryły  $V$** 

$$x_0 = \frac{M_{OYZ}}{M}, \quad y_0 = \frac{M_{OXZ}}{M}, \quad z_0 = \frac{M_{OXY}}{M}$$

**Moment bezwładności bryły  $V$  względem osi  $OZ$** 

$$M_B = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$