

# Analiza

MICHAŁ DOBRANOWSKI

semestr zimowy 2022  
v0.2

Poniższy skrypt zawiera materiał obejmujący wykłady z Analizy matematycznej I oraz II prowadzone na pierwszym roku Informatyki na AGH, lecz jest mocno rozbudowany przez przykłady i twierdzenia pochodzące z przeróżnych źródeł, które (zwykle dla rozwinięcia intuicji lub ułatwienia rozwiązań pewnych zadań) postanowiłem opisać.

PS: Analiza I nie jest skończona. Całkiem możliwe, że nigdy nie będzie.

## Spis treści

<b>Analiza II</b>	<b>2</b>
<b>1 Szeregi liczbowe</b>	<b>2</b>
<b>2 Ciągi funkcyjne</b>	<b>5</b>
2.1 Metryka Czebyszewa . . . . .	6
<b>3 Szeregi funkcyjne</b>	<b>8</b>
3.1 Szeregi potęgowe . . . . .	11
3.2 Szeregi Taylora . . . . .	15
3.3 Szeregi Fouriera . . . . .	16
3.4 Trygonometryczne szeregi Fouriera . . . . .	18

# Analiza II

## §1 Szeregi liczbowe

**Definicja 1.1.** Szereg liczbowy to para  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ , gdzie  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ .

Mówimy, że szereg liczbowy jest **zbieżny**, jeśli istnieje skończona granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Liczbę  $S$  nazywamy wtedy **sumą** tego szeregu.

### Twierdzenie 1.2 (warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

### Przykład 1.3

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

*Rozwiązanie.* Wykorzystamy tak zwane **sumy teleskopowe**.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

Można łatwo pokazać, że szereg harmoniczny  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  nie jest zbieżny (czyli jest **rozbieżny**), mimo że spełnia warunek konieczny:

$$\underbrace{\left( \frac{1}{1} \right)}_1 + \underbrace{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)}_{>1} + \underbrace{\left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)}_{>1} + \dots$$

Okazuje się, że zachodzi również dużo mocniejsze twierdzenie:

### Twierdzenie 1.4 (o zbieżności szeregów harmonicznych)

Szereg harmoniczny rzędu  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha > 1$ .

Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  jest zbieżny, to mówimy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest **bezwzględnie zbieżny**, w przeciwnym przypadku jest **warunkowo zbieżny**. Bezwzględna zbieżność szeregu pociąga za sobą jego zbieżność.

Aby sprawdzić zbieżność szeregów stosuje się kilka kryteriów zbieżności.

### **Twierdzenie 1.5** (kryterium porównawcze)

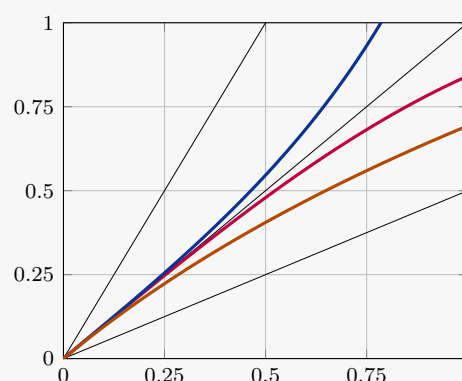
Jeśli dla każdego  $n$  większego od pewnego  $n_0$  zachodzi

$$a_n \leq b_n$$

oraz  $a_n, b_n > 0$ , to ze zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  wynika zbieżność  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , a z rozbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wynika rozbieżność  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Uwaga.** Wraz z powyższym twierdzeniem warto stosować nierówności, które zachodzą w przedziale  $[0, 1]$ :

- $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$
- $\frac{x}{2} \leq \ln x + 1 \leq x$
- $x \leq \tan x \leq 2x$
- $1 - x \leq \cos x$



### **Przykład 1.6**

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right).$$

*Rozwiązanie.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Wyrazy szeregu są dodatnie oraz dla każdego  $n \in \mathbb{N}$

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{n^2},$$

więc, na podstawie twierdzenia 1.4, dany szereg jest zbieżny. □

### **Twierdzenie 1.7** (kryterium ilorazowe)

Jeśli dla każdego  $n$  większego od pewnego  $n_0$  wyrazy szeregów  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  są dodatnie oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, \infty),$$

to dane szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

### Twierdzenie 1.8 (kryterium d'Alemberta)

Niech będzie dany szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o niezerowych wyrazach oraz niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g.$$

Jeśli  $g > 1$ , to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli  $g < 1$ , to szereg jest zbieżny.

### Twierdzenie 1.9 (kryterium Cauchy'ego)

Niech będzie dany szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  oraz niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g.$$

Jeśli  $g > 1$ , to dany szereg jest rozbieżny, a jeśli  $g < 1$ , to szereg jest zbieżny.

**Uwaga.** Jeśli w kryteriach d'Alemberta lub Cauchy'ego wyjdzie  $g = 1$ , to nie możemy powiedzieć nic o zbieżności ciągu.

### Przykład 1.10

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

*Rozwiązanie.* Korzystając z kryterium Cauchy'ego mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} < 1,$$

więc dany szereg jest zbieżny. □

### Twierdzenie 1.11 (kryterium całkowe)

Jeśli dla każdego  $n$  większego od pewnego  $n_0$  wyrazy szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  są dodatnie oraz istnieje taka malejąca (na przedziale  $[n_0, \infty)$ ) funkcja  $f$ , że  $a_n = f(n)$  dla każdego  $n$ , to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

jest zbieżna.

### Twierdzenie 1.12 (kryterium Leibniza)

Dany jest szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ . Jeśli ciąg  $(a_n)$  jest dodatni, zbieżny do zera oraz malejący, to jest dany szereg jest zbieżny.

Szereg opisywany przez kryterium Leibniza nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

### Przykład 1.13

Zbadać zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}.$$

*Rozwiązanie.* Korzystając z kryterium Leibniza bardzo łatwo pokazać, że dany szereg jest zbieżny. Ciąg  $a_n = \frac{1}{n \ln n}$  ma oczywiście wyrazy dodatnie i jest zbieżny do zera. Ponadto jest malejący, bo zarówno  $n$ , jak i  $\ln n$  rosną.

Aby określić, czy dany szereg jest bezwzględnie zbieżny skorzystamy z kryterium całkowego.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C = \ln(\ln(x)) + C.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(x)) \Big|_1^{\infty} - \text{rozbieżna}.$$

Z tego wynika, że dany szereg jest tylko warunkowo zbieżny.  $\square$

## §2 Ciągi funkcyjne

Ciąg funkcyjny to ciąg, którego przeciwdziedzina jest zbiór funkcji określonych na tej samej dziedzinie. W kolejnych sekcjach będziemy rozważać ciągi funkcji  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $X \subset \mathbb{R}$ , chyba że stwierdzono inaczej. Jest to ważne założenie niektórych twierdzeń.

**Definicja 2.1** (zbieżność punktowa). Ciąg funkcyjny  $(f_n(x))$  jest zbieżny punktowo na  $X$ , jeśli istnieje taka funkcja  $f : X \rightarrow Y$ , że  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , czyli gdy

$$\forall_{x \in X} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definicja 2.2** (zbieżność jednostajna). Ciąg funkcyjny  $(f_n(x))$  jest zbieżny jednostajnie na  $X$ , jeśli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad \forall_{x \in X} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

### Twierdzenie 2.3

Jeśli ciąg funkcyjny  $(f_n(x))$  jest jednostajnie zbieżny do  $f$  na  $X$ , to jest również zbieżny punktowo do  $f$  na  $X$ , co zapisujemy jako

$$f_n \xrightarrow{X} f \implies f_n \xrightarrow{X} f.$$

*Dowód.* Wynika z definicji i podstawowych praw rachunku kwantyfikatorów.  $\square$

### Twierdzenie 2.4

Jeśli ciąg  $(f_n(x))$  jest ciągiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny  $f_n \Rightarrow f$ , to funkcja  $f$  jest ciągła.

### Przykład 2.5

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

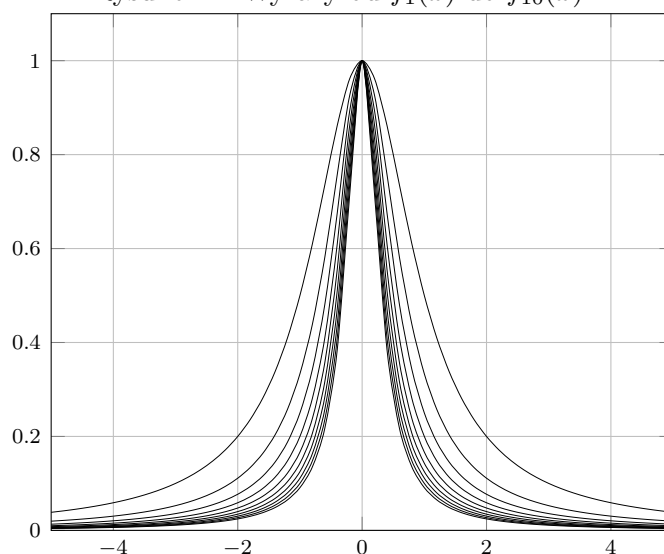
na zbiorze  $\mathbb{R}$ .

*Rozwiązanie.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx^2} = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = 0 \\ 0, & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Dany ciąg jest więc zbieżny punktowo, ale, skoro funkcje  $f_n$  są ciągłe, a funkcja  $f$  nie, to nie jest zbieżny jednostajnie.

Rysunek 1: Wyraży od  $f_1(x)$  do  $f_{10}(x)$



□

## §2.1 Metryka Czebyszewa

Weźmy pewną dwuargumentową funkcję zdefiniowaną jako

$$d_c(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Można udowodnić, że funkcja  $d_c$  jest metryką (zwaną metryką Czebyszewa). Jako argumenty przyjmuje dwie funkcje zdefiniowane na tej samej dziedzinie  $X$ .

### Twierdzenie 2.6

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego  $(f_n(x))$  jest ograniczona, to

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_c(f_n, f) = 0.$$

### Przykład 2.7

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

na przedziale  $[2, \infty)$ .

*Rozwiązanie.* Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1 \equiv f,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left( 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n(nx^{n-1})}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Pochodna zawsze jest dodatnia, więc supremum będzie przy  $x \rightarrow \infty$ . Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left( 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1) = 0,$$

więc dany ciąg jest zbieżny jednostajnie. □

### Przykład 2.8

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

na zbiorze  $\mathbb{R}$ .

*Rozwiązanie.* Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 \equiv 0,$$

więc ciąg jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, możemy zatem sprawdzić, czy zbiega do niej jednostajnie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{nx}{n^2 + x^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left( \frac{nx}{n^2 + x^2} \right)$$

Obliczmy supremum danej funkcji.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{nx}{n^2 + x^2} \right) = \frac{n(n^2 + x^2) - nx(2x)}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{n^3 - nx^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

Pochodna zeruje się, gdy

$$n^3 = nx^2 \Rightarrow x = \pm n,$$

więc supremum będzie przy  $x = n$ . Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2},$$

więc dany ciąg nie jest zbieżny jednostajnie. □

**Twierdzenie 2.9** (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego  $(f_n(x))$  jest różniczkowalna, ciąg  $(f_n)$  jest zbieżny, a ciąg  $(f'_n)$  zbieżny jednostajnie, to dla każdego  $x \in X$  zachodzi

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n(x)).$$

**Twierdzenie 2.10** (o całkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

Jeśli każda funkcja ciągu funkcyjnego  $(f_n(x))$  jest całkowalna, a ciąg  $(f_n)$  jest zbieżny jednostajnie, to dla każdych  $x_1, x_2 \in X$  zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \right).$$

## §3 Szeregi funkcyjne

Podobnie do szeregów liczbowych, szeregi funkcyjne to para  $((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}})$ : ciąg funkcyjny oraz ciąg sum częściowych ciągu funkcyjnego. Taki szereg jest zbieżny (punktowo / jednostajnie) do sumy szeregu  $S$ , jeśli ciąg  $(S_n(x))$  jest zbieżny (częściowo / jednostajnie) do  $S$ .

Analogicznie do twierdzenia 2.3, warunkiem koniecznym zbieżności jednostajnej szeregu jest jego zbieżność punktowa.

Z kolei w analogii do twierdzenia 1.2, warunkiem koniecznym zbieżności (punktowej / jednostajnej) szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżność (punktowa / jednostajna) ciągu funkcyjnego  $(f_n(x))$  do zera, to znaczy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightarrow S \implies f_n(x) \rightarrow 0 \equiv f$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S \implies f_n(x) \rightrightarrows 0 \equiv f.$$



### Twierdzenie 3.1 (kryterium Weierstrassa)

Jeśli istnieje taki ciąg  $(a_n)$ , że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  i dla każdego  $x \in X \subset \mathbb{R}$  mamy nierówność

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

oraz szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżny na  $X$ .

Zachodzi twierdzenie o ciągłości, analogiczne do twierdzenia 2.4.

### Twierdzenie 3.2

Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest szeregiem funkcji ciągłych i jest jednostajnie zbieżny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Rightarrow S(x)$ , to funkcja  $S$  jest ciągła.

### Przykład 3.3

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$$

na przedziale  $[0, 1]$ .

*Rozwiązanie.* Dla  $x \in [0, 1)$  mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = x(1-x) \frac{1}{1-x} = x,$$

natomiast dla  $x = 1$  mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n \cdot 0 = 0,$$

więc szereg jest zbieżny punktowo. Funkcja

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{dla } x = 1 \end{cases},$$

do której dany szereg zbiega nie jest ciągła, a funkcje  $f_n(x) = x^n(1-x)$  są ciągłe, więc, na mocy twierdzenia 3.2, szereg nie zbiega jednostajnie.  $\square$

### Przykład 3.4

Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

na przedziale  $[1, \infty)$ .

*Rozwiązanie.* Dla każdego  $x \in [1, \infty]$  oraz  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$\left| \frac{nx}{1+n^4x^2} \right| = \frac{nx}{1+n^4x^2} \leq \frac{nx}{n^4x^2} = \frac{1}{n^3x} \leq \frac{1}{n^3},$$

więc, na mocy kryterium Weierstrassa, dany szereg jest jednostajnie zbieżny, bo szereg harmoniczny rzędu 3 jest zbieżny.  $\square$

### Przykład 3.5

Zbadaj obszar zbieżności<sup>a</sup> punktowej oraz zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}.$$

<sup>a</sup>czyli zbiór punktów, w których szereg jest zbieżny

*Rozwiązanie.* Możemy od razu stwierdzić, że dla  $x = 0$  otrzymamy szereg ciąg zer, który oczywiście jest (jednostajnie) zbieżny do zera. Możemy potraktować  $x$  jako parametr, wtedy zamiast szeregu funkcyjnego będziemy mieć szereg liczbowy, którego zbieżność możemy pokazać z kryterium d'Alemberta:

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x(n+1)}} \frac{e^{xn}}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x}.$$

Szereg jest więc zbieżny dla każdego  $x > 0$  i rozbieżny dla każdego  $x < 0$ . Ostatecznie, obszar zbieżności punktowej danego szeregu funkcyjnego to  $[0, \infty)$ .

Zajmijmy się teraz zbieżnością jednostajną. Oczywiście można by ją wykazywać przez znalezienie ciągu sum częściowych, a następnie skorzystanie z twierdzenia 2.6, ale możemy też skorzystać z kryterium Weierstrassa, chociaż w dosyć nieoczywisty sposób.

Znajdźmy najpierw supremum ciągu  $a_n = \frac{x^2}{e^{nx}}$ . Możemy znaleźć miejsca zerowe pochodnej:

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{2x(e^{nx}) - x^2(ne^{nx})}{e^{2nx}} = \frac{x(2 - xn)}{e^{nx}} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{n}\right\}.$$

Szkicując wykres przekonamy się, że funkcja  $a_n(x)$  osiąga maksimum w  $x = \frac{2}{n}$ , więc

$$a_n(x) \leq a_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2 n^2}.$$

Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2 n^2}$  jest zbieżny (ponieważ jest harmoniczny rzędu 2), więc możemy użyć kryterium Weierstrassa udowadniając, że dany szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny.  $\square$

Zachodzą również twierdzenia o różniczkowalności i całkowalności, analogiczne do twierdzeń 2.9 i 2.10.

### Twierdzenie 3.6

Niech  $(f_n(x))$  będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych. Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny na  $X$ , a szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  jest jednostajnie zbieżny na  $X$ , to dla każdego  $x \in X$  zachodzi

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

### Twierdzenie 3.7

Niech  $(f_n(x))$  będzie ciągiem funkcji całkowalnych. Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest jednostajnie zbieżny na  $X$ , to dla każdych  $x_1, x_2 \in X$  zachodzi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \right).$$

## §3.1 Szeregi potęgowe

**Definicja 3.8.** Szereg potęgowy o środku w punkcie  $c$  to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n,$$

gdzie  $a_n, x, c \in \mathbb{C}$ .

### Twierdzenie 3.9

Jeśli szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n$$

jest zbieżny dla pewnego  $x_1$ , to jest zbieżny dla wszystkich  $x_2$  takich, że

$$|x_2 - c| < |x_1 - c|,$$

a jeśli nie jest zbieżny dla pewnego  $x_1$ , to nie jest zbieżny dla wszystkich  $x_2$  takich, że

$$|x_2 - c| > |x_1 - c|.$$

Powyższe twierdzenie każe nam podzielić płaszczyznę zespoloną (względem danego szeregu potęgowego) na trzy rozłączne zbiory. Formalnie, jeśli weźmiemy

$$r = \sup \left\{ |x - c| : \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n \text{ jest zbieżny} \right\},$$

to zbiór

$$\{x \in \mathbb{C} : |x - c| < r\}$$

nazwiemy **kołem zbieżności**. Dla wszystkich elementów z tego zbioru dany szereg jest zbieżny. Dla elementów na brzegu tego koła zbieżność jest nieokreślona, a dla elementów poza nim dany szereg nie jest zbieżny. Liczba  $r$  to **promień zbieżności**. Dla  $x = c$  dany szereg jest zbieżny.

**Uwaga.** Jeśli przyjmiemy w definicji szeregu potęgowego (3.8), że  $a_n, x, c \in \mathbb{R}$ , to koło zbieżności staje się **przedziałem zbieżności**, a nieokreśloną zbieżność mamy tylko dla dwóch elementów:  $c - r$  oraz  $c + r$ .

**Obszarem zbieżności** nazywamy zbiór będący sumą koła zbieżności oraz zbioru elementów z jego brzegu, dla których dany szereg potęgowy jest zbieżny.

### Twierdzenie 3.10 (Cauchy'ego-Hadamarda)

Promień zbieżności jest dany jako

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

gdzie  $r = \frac{1}{0}$  interpretujemy jako  $r = \infty$ , a  $r = \frac{1}{\infty}$  jako  $r = 0$ .

Można podać dwa słabsze twierdzenia, które jednak często łatwiej jest stosować:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \implies r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \implies (3.10).$$

Mówimy, że ciąg (szereg) funkcyjny jest **niemal jednostajnie zbieżny** na przedziale  $(a, b)$  jeśli jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale  $[c, d] \in (a, b)$ .

**Fakt 3.11.** Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w  $(c-r, c+r)$ , to jest bezwzględnie zbieżny w  $(c-r, c+r)$  oraz niemal jednostajnie zbieżny w  $(c-r, c+r)$ .

**Fakt 3.12.** Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w  $(c-r, c+r)$  do  $S(x)$ , to funkcja  $S(x)$  jest ciągła, różniczkowalna i całkowalna w  $(c-r, c+r)$ . Prawdziwe dla szeregów potęgowych są również tezy twierdzeń 3.6 i 3.7.

### Twierdzenie 3.13 (Abela)

Niech  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$  będzie szeregiem potęgowym zbieżnym do  $S(x)$  o promieniu zbieżności równym  $r$ . Jeśli ten szereg jest zbieżny dla  $x_1 = c-r$  oraz istnieje granica

$\lim_{x \rightarrow x_1^+} S(x)$ , to

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} S(x) = S(x_1),$$

czyli funkcja  $S(x)$  jest prawostronnie ciągła w  $x = c-r$ . Analogicznie, jeśli szereg jest zbieżny dla  $x_2 = c+r$  oraz istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow x_2^-} S(x)$ , to

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} S(x) = S(x_2),$$

czyli funkcja  $S(x)$  jest lewostronnie ciągła w  $x = c+r$ .

### Przykład 3.14

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n}$$

w każdym punkcie obszaru zbieżności.

*Rozwiązanie.* Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

tak więc przedział zbieżności to  $(-4, 0)$ . Dla  $x = -4$  mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) - \text{rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego,}$$

a dla  $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) - \text{rozbieżny, nie spełnia warunku koniecznego.}$$

Obszarem zbieżności jest więc przedział  $(-4, 0)$ . Policzmy teraz sumę. Dla każdego  $x \in (-4, 0)$  mamy

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(x+2)^{n+1}}{2^n} \right)' \stackrel{(3.6)}{=} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{2^n} \right)' \\ &= \left( \frac{(x+2)^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{x+2}{2}} \right)' = \left( \frac{(x+2)^2}{-x} \right)' = \frac{2x(x+2) + (x+2)^2}{x^2} = \frac{4-x^2}{x^2}. \end{aligned}$$

□

### Przykład 3.15

Znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - \frac{1}{2})^n}{n+1}$$

w każdym punkcie obszaru zbieżności.

*Rozwiązanie.* Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności danego szeregu

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}}} = \frac{1}{2},$$

tak więc przedział zbieżności to  $(0, 1)$ . Dla  $x = 0$  mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (-\frac{1}{2})^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} - \text{zbieżny z kryterium Leibniza,}$$

a dla  $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \text{rozbieżny z kryterium ilorazowego.}$$

Obszarem zbieżności jest więc przedział  $[0, 1)$ . Policzmy teraz sumę. Dla  $x = \frac{1}{2}$  mamy

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 0^n}{n+1} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Dla pozostałych  $x$  zapiszemy

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^x 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n dt.$$

Szeregi potęgowe są niemal jednostajnie zbieżne w swoim przedziale zbieżności, więc dla  $x \in (0, 1)$  możemy zamienić znaki sumy i całki (twierdzenie 3.7)

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(t - \frac{1}{2}\right)^n dt = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{1 - 2\left(t - \frac{1}{2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{2 - 2t} dt = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \left[ -\frac{1}{2} \ln(1 - t) \right]_{\frac{1}{2}}^x = \frac{1}{1 - 2x} \left( \ln(1 - x) - \ln \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\ln(2 - 2x)}{1 - 2x}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Abela (3.13) wynika, że

$$S(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2 - 2x)}{1 - 2x} = \ln(2),$$

więc ostatecznie mamy

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = \frac{1}{2} \\ \frac{\ln(2-2x)}{1-2x}, & \text{dla } x \in [0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}.$$

□

### Przykład 3.16

Znajdź sumę szeregu liczbowego

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

*Rozwiązanie.* Weźmy szereg funkcyjny

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Wartość  $S(1)$  jest szukaną sumą, jeśli tylko szereg jest zbieżny w tym punkcie. Niech  $t = x^2$ . Stosując twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda (3.10) możemy obliczyć promień zbieżności szeregu:

$$r_t = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3}} = 1,$$

tak więc szereg zbiega, gdy  $t \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-1, 1)$ . W punktach  $x = -1$  i  $x = 1$  szereg również jest zbieżny, co można pokazać z kryterium Lebniza.

Policzmy teraz sumę (dla przedziału zbieżności  $(-1, 1)$ ):

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n u^{2n} du = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} du \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-u^2)^n du = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = [\arctan(u)]_0^x = \arctan(x). \end{aligned}$$

Skoro w  $x = 1$  ten szereg też jest zbieżny, to z twierdzenia Abela (3.13) mamy

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

□

### §3.2 Szeregi Taylora

#### Twierdzenie 3.17 (o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)

Jeśli funkcja  $f$  ma pochodne wszystkich rzędów w pewnym otoczeniu  $U$  punktu  $x_0$ , to na pewnym przedziale zachodzi równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Taki szereg nazywamy szeregiem Taylora, a jeśli  $x_0 = 0$ , to nazywamy go szeregiem Maclaurina.

#### Przykład 3.18

Rozwiń w szereg Taylora funkcję  $f(x) = \ln x$  w otoczeniu  $x_0 = 1$ .

*Rozwiązanie.* Spróbujemy znaleźć ogólny wzór na  $f^{(n)}(x)$ . Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= \frac{-1}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-6}{x^4} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \\ &\Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!, \end{aligned}$$

tak więc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{n!} (x-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n.$$

Z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda (3.10)

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = 1$$

wynika, że ten szereg jest zbieżny, a więc równość jest prawdziwa, dla każdego  $x \in (0, 2)$ . Łatwo sprawdzić (z kryterium Leibniza), że jest zbieżny też dla  $x = 2$ , więc (z twierdzenia Abela) również dla  $x = 2$  równość jest prawdziwa.  $\square$

### Przykład 3.19

Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję  $f(x) = x^3 \arctan x^4$ .

*Rozwiązanie.* Weźmy  $g(x) = \arctan x^4$ . Mamy

$$g'(x) = \frac{4x^3}{1+x^8} = \frac{4x^3}{1-(-x^8)}, \quad |x^8| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

więc

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4x^3 (-x^8)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4x^{8n+3},$$

ergo

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4t^{8n+3} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4 \int_0^x t^{8n+3} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4x^{8n+4}}{8n+4}. \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{8n+7}.$$

Równość jest prawdziwa dla  $x \in (-1, 1)$  oraz (z kryterium Leibniza i twierdzenia Abela) dla  $x = \pm 1$ .  $\square$

## §3.3 Szeregi Fouriera

Zbiór funkcji **całkowalnych z kwadratem** będziemy oznaczać przez  $L^2[a, b]$ . Formalnie

$$L^2[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{[a, b]} f^2(x) dx < \infty \right\}.$$

Jeśli utożsamimy ze sobą funkcje, które różnią się zbiorze miary Riemanna równej zero, to struktura  $(L^2[a, b], \mathbb{R}, +, \cdot)$  jest przestrzenią wektorową, w której możemy wprowadzić iloczyn skalarny

$$f \circ g = \int_{[a, b]} f(x)g(x) dx.$$

Mamy więc przestrzeń unitarną, ergo zdefiniowana jest w niej też norma

$$\|f\| = \sqrt{f \circ f} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$



oraz metryka

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Zbieżność w sensie metryki  $d$  nazywa się **zbieżnością przeciętną z kwadratem**.

**Definicja 3.20.** Ciąg ortogonalny to taki ciąg funkcyjny  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ , którego funkcje nie są tożsamościowo równe zeru, są całkowalne z kwadratem oraz jego elementy są prostopadłe, czyli

$$\forall_{i \neq j} \varphi_i \circ \varphi_j = 0.$$

**Definicja 3.21.** Ciąg ortonormalny to taki ciąg ortogonalny, że jego elementy są wersorami, czyli

$$\forall_{i,j} \varphi_i \circ \varphi_j = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases}.$$

Wartość  $\varphi_i \circ \varphi_j$  oznaczamy  $\delta_{ij}$  i nazywamy **delta Kroneckera**.

**Szeregiem ortogonalnym** będziemy nazywać szereg funkcyjny w postaci  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ , gdzie  $(c_n)$  jest ciągiem liczb rzeczywistych, a  $(\varphi_n)$  ciągiem ortogonalnym.

**Twierdzenie 3.22 (współczynniki Eulera-Fouriera)**

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n \rightrightarrows f$$

jest ortogonalny i zbiega jednostajnie do funkcji  $f \in L^2[a, b]$ , to dla każdego  $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{f \circ \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Szereg ortogonalny, w którym współczynniki mają powyższą formę, nazywamy **szeregiem Fouriera** funkcji  $f$ . Oznaczamy

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Jeśli powyższy szereg ortogonalny jest zbieżny do  $f$  na całym przedziale  $[a, b]$  to mówimy, że ta funkcja jest **rozwijalna** w szereg Fouriera.

**Twierdzenie 3.23 (nierówność Bessela)**

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest szeregiem Fouriera funkcji  $f$  względem ciągu  $(\varphi_n)$ , to

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2.$$

**Twierdzenie 3.24** (tożsamość Parsevala)

Jeśli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest szeregiem Fouriera funkcji  $f$  względem ciągu  $(\varphi_n)$ , to

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$  jest przeciętnie zbieżny z kwadratem do  $f$ .

Jeśli pewien szereg spełnia tożsamość Parsevala dla każdej funkcji  $f \in L^2[a, b]$ , to mówimy, że ciąg  $(\varphi_n)$  jest **zupełny**.

**Wniosek 3.25**

Jeśli ciąg  $(\varphi_n)$  jest zupełny oraz  $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ , to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

jest przeciętnie zbieżny z kwadratem do  $f$  na  $[a, b]$ .

### §3.4 Trygonometryczne szeregi Fouriera

**Fakt 3.26.** Ciąg

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

jest zupełny (a więc i ortogonalny).

**Wniosek 3.27** (z twierdzenia 3.22)

Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji całkowalnej  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  będziemy nazywać szereg

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

**Definicja 3.28** (Warunki Dirichleta).

1. funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ograniczona,
2. funkcja  $f$  ma skończoną liczbę przedziałów monotoniczności,
3. funkcja  $f$  ma skończoną liczbę punktów nieciągłości  $x_0$  oraz

$$f(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)}{2},$$

4. zachodzi równość

$$f(a) = f(b) = \frac{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)}{2}.$$

**Twierdzenie 3.29** (o rozwijaniu funkcji w szereg Fouriera)

Jeśli funkcja  $f$  spełnia warunki Dirichleta w przedziale  $[-\pi, \pi]$ , to szereg trygonometryczny Fouriera tej funkcji jest zbieżny punktowo do  $f$  na  $[-\pi, \pi]$ .