题 **1**

9　用谐波平衡法求题 3 的近似解。

3　用平均法求下述保守系统周期振动的一阶近似解

(1)　$\ddot{u}+\sin u=0$

(2)　$\ddot{u}+u+\varepsilon(u^2+u^3)=0, \quad 0<\varepsilon<<1$

(1)

将周期解作有限 Fourier 展开

$$u = A\cos\omega t$$

将 p 做有限 Fourier 展开(先做泰勒展开, 然后代入)

$$\begin{aligned}\sin u &= u - \frac{u^3}{3!} + o(u^4)\\ &\approx u - \frac{u^3}{6}\\ &= (A\cos\omega t) - \frac{(A\cos\omega t)^3}{6}\end{aligned}$$

代入原方程中

$$\left(1-\omega^2-\frac{1}{8}A^2\right)A\cos\omega t - \frac{1}{24}A^3\cos 3\omega t = 0$$

由一次谐波平衡

$$\left(1-\omega^2-\frac{1}{8}A^2\right)A = 0$$

所以

$$\omega = \sqrt{1-\frac{1}{8}A^2}$$

解为

$$u = A\cos\sqrt{1-\frac{1}{8}A^2}t$$

(2)

将周期解作有限 Fourier 展开

$$u = A\cos\omega t$$

代入原方程中

$$\frac{1}{2}\varepsilon A^2+\left(1-\omega^2+\frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)A\cos\omega t+\frac{1}{2}\varepsilon A^2\cos 2\omega t+\frac{1}{4}\varepsilon A^3\cos 3\omega t=0$$

由一次谐波平衡:

$$\left(1-\omega^2+\frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)A=0$$

所以

$$\omega=\sqrt{1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2}$$

解为

$$u=A\cos\sqrt{1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2}t$$

题 2

10　用 Galerkin 法求 van der Pol 系统自激振动的一次近似解。

解

van der Pol 系统方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2=\varepsilon(1-u^2)u \tag{1}$$

将周期解作有限 Fourier 展开

$$u=A\cos\omega t \tag{2}$$

计算残值

$$\begin{aligned}R(t)&=\ddot{u}+\omega_0^2-\varepsilon(1-u^2)u\\&=-A\omega^2\cos\omega t+A\omega_0^2\cos\omega t+\varepsilon A\omega(1-A^2\cos^2\omega t)\sin\omega t\end{aligned} \tag{3}$$

代入 Galerkin 条件

$$\int_0^T R(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t=0 \tag{4}$$

可得

$$\frac{\pi A\omega_0^2}{\omega}-\pi A\omega=0 \tag{5}$$

即

$$\omega=\omega_0 \tag{6}$$

得系统的近似周期解为

$$u=A\cos\omega_0 t \tag{7}$$

题 3

2　对于含 Coulomb 摩擦的 Duffing 系统

$$\ddot{u}(t)+\omega_0^2 u(t)+\varepsilon[\mu\operatorname{sgn}\dot{u}(t)+\omega_0^2 u^3(t)]=\varepsilon f\cos\omega t,\qquad 0<\varepsilon<<1$$

求系统主共振的一次近似解，并讨论不同激励幅值对主共振峰的影响。

解

令

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\sigma$$

设一次近似解为

$$u=u_0+\varepsilon u_1$$

多尺度法代入得到

$$\begin{cases}D_0^2u_0+\omega_0^2u_0=0\\ D_0^2u_1+\omega_0^2u_0=f\cos\omega t-2D_0D_1u_0-\mu\ \operatorname{sgn}(D_0u_0)-\omega_0^2u_0^3\end{cases}$$

解

$$D_0^2u_0+\omega_0^2u_0=0$$

得

$$u_0=A(T_1)e^{i\omega_0T_0}+\mathrm{cc}\quad A=\frac{a}{2}e^{i\varphi}$$

代入

$$D_0^2u_1+\omega_0^2u_0=f\cos\omega t-2D_0D_1u_0-\mu\ \operatorname{sgn}(D_0u_0)-\omega_0^2u_0^3$$

得

$$D_0^2u_1+\omega_0^2u_0=\frac{f}{2}e^{i\omega_0T_0+\sigma T_1}-\left(2i\omega_0D_1A+3\omega_0^2A^2\overline{A}\right)-\omega_0^2A^3e^{i3\omega_0T_0}+\mathrm{cc}-\mu\ \operatorname{sgn}\left(i\omega_0e^{i\omega_0T_0}+\mathrm{cc}\right)$$

消除永年项

$$\frac{f}{2}e^{i\sigma T_1}-\left(2i\omega_0D_1A+3\omega_0^2A^2\overline{A}\right)-\frac{\mu\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}\operatorname{sgn}(a\cos\omega_0T_0)=0$$

即

$$\begin{cases}D_1a\ =\frac{f}{2\omega_0}\sin(\sigma T_1-\varphi)-\frac{2\mu}{\pi\omega_0}\\ D_1\varphi=-\frac{f}{2\omega_0a}\cos(\sigma T_1-\varphi)+\frac{3}{8}\omega_0a^2\end{cases}$$

令$\beta=\sigma T_1-\varphi$, 有

$$\begin{cases}D_1a=\frac{f}{2\omega_0}\sin\beta-\frac{2\mu}{\pi\omega_0}\\ D_1\beta=\sigma+\frac{f}{2\omega_0a}\cos\beta-\frac{3}{8}\omega_0a^2\end{cases}$$

令$D_1a=D_1\beta=0$, 得稳态解

$$
\begin{cases}
\frac{2\mu}{\pi\omega_0} &= \frac{f}{2\omega_0}\sin\beta \\
\frac{3}{8}\omega_0 a^2 - \sigma &= \frac{f}{2\omega_0 a}\cos\beta
\end{cases}
$$

得

$$
\left(\frac{2\mu}{\pi\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\omega_0 a^2 - \sigma\right)^2 a^2 = \left(\frac{f}{2\omega_0}\right)^2
$$

可知

当 $\frac{2\mu}{\pi\omega_0} < \frac{f}{2\omega_0}$ 即$f < \frac{4\mu}{\pi}$, a 无实数解, 无主共振

当$f > \frac{4\mu}{\pi}$, 存在主共振

题 4

5 对于简谐激励下的平方非线性系统

$$
\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon(2\mu\dot{u} + \omega_0^2 u^2) = F\cos 2\omega t
$$

求其 1/2 次亚谐共振的一次近似解并对稳定性进行讨论。

解

由多尺度法

$$
\begin{cases}
D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F\cos 2\omega t \\
D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_1 D_0 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \omega_0^2 u_0^2
\end{cases}
$$

解得第一个为

$$
u_0 = Ae^{i\omega_0 T_0} + Be^{i2\omega T_0} + \mathrm{cc} \quad A = \frac{a}{2}e^{i\varphi}, B = \frac{F}{2\left(\omega_0^2 - (2\omega)^2\right)}
$$

代入第二个为

$$
\begin{aligned}
D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = &-2i\omega_0(D_1 A + \mu A)e^{i\omega_0 T_0} - 2i\omega Be^{i2\omega T_0} \\
&-\omega_0^2\left(A^2 e^{i2\omega_0 T_0} + B^2 e^{i4\omega T_0} + 2ABe^{i(\omega_0+2\omega)T_0} + 2\overline{A}Be^{i(2\omega-\omega_0)T_0} + 2A\overline{B}e^{i(\omega_0-2\omega)T_0}\right) + \mathrm{cc}
\end{aligned}
$$

当$2\omega - \omega_0 \approx \omega_0$ 即$\omega \approx \omega_0$时发生$\frac{1}{2}$亚谐波共振, 令$\omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$

消除永年项

$$
2i\omega_0(D_1 A + \mu A) + 2\omega_0^2 \overline{A}Be^{i\sigma T_1} = 0
$$

令$\beta = \sigma T_1 - 2\varphi$, 得

$$
\begin{cases}
D_1 a = -\mu a - \omega_0 Ba\sin\beta \\
D_1\varphi = \sigma + \omega_0 B\cos\beta
\end{cases}
$$

可得一次近似解为

$$u = a\cos\left(\frac{2\omega T_0 - \varphi(T_1)}{2}\right) + \frac{F}{\omega_0^2 - (2\omega)^2}\cos 2\omega t$$

分析稳定性

考虑渐近系统, 雅可比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} -\mu - \omega_0 B\sin\beta & -\omega_0 Ba\cos\beta \\ 0 & -\omega_0 B\sin\beta \end{pmatrix}$$

要求特征值小于 0. 得

$$\begin{cases} \omega_0 B\sin\beta & > 0 \\ \omega_0 B\sin\beta + \mu > 0 \end{cases}$$

题 5

7 考察受组合激励的系统

$$\ddot{u} + u + \varepsilon(2\mu\dot{u} + u^3) = F_1\cos\omega_1 t + F_2\cos\omega_2 t, \quad \omega_1 \approx 1, \quad \omega_2 \approx 3$$

(1) 在条件 $F_1 = O(\varepsilon)$ 下用多尺度法求该系统的近似解;

(2) 导出系统具有周期振动的条件。

(1)

多尺度法, 有

$$\begin{cases} D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F_2\cos\omega_2 T_0 \\ D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_1 D_0 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - u_0^3 + f\cos\omega_1 T_0 \end{cases}$$

解得第一个为

$$u_0 = Ae^{i\omega_0 T_0} + Be^{i\omega_2 T_0} + \mathrm{cc} \quad A = \frac{a}{2}e^{i\varphi}, B = \frac{F}{2(\omega_0^2 - \omega_2^2)}$$

代入第二个为

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & -2i\omega_0(D_1 A + \mu A)e^{i\omega_0 T_0} - 2i\omega_2 Be^{i2\omega T_0} \\ & -\omega_0^2\Big(A^3 e^{i3\omega_0 T_0} + B^3 e^{i3\omega_2 T_0} + 3A^2 Be^{i(2\omega_0+\omega_2)T_0} + 3\overline{A}^2 Be^{i(\omega_2 - 2\omega_0)T_0} + 3AB^2 e^{i(\omega_0 + 2\omega)T_0} \\ & +3A\overline{B}^2 e^{i(\omega_0 - 2\omega)T_0} + 6AB^2 e^{i\omega_0 T_0} + 3A^2\overline{A}e^{i\omega_0 T_0} + 3B^3 e^{i\omega_2 T_0} + 6A\overline{A}Be^{i\omega_2 T_0}\Big) + \frac{f}{2}e^{i\omega_1 T_0} + \mathrm{cc} \end{aligned}$$

其中 $\omega_0 = 1$, 设 $\omega_1 = 1 + \varepsilon\sigma, \omega_2 = 3 + \varepsilon\sigma$

消除永年项有

$$2iD_1 A + 2\mu iA + 3\overline{A}^2 Be^{i\sigma_2 T_1} + 6AB^2 + 3A^2\overline{A} - \frac{f}{2}e^{i\sigma_1 T_1}$$

得

$$
\begin{cases}
D_1 a = -\mu a - \frac{3}{4}a^2 B \sin\varphi + \frac{f}{2}\sin\left(\sigma_1 T_1 + \frac{\varphi - \sigma_2 T_1}{3}\right) \\
D_1 \varphi = \sigma - \frac{9}{4}Ba\cos\varphi + \frac{3}{2}f\cos\left(\sigma_1 T_1 + \frac{\varphi - \sigma_2 T_1}{3}\right) + \frac{9}{8}a^2 + 9B^2
\end{cases}
$$

解得一次近似解为

$$
u = a\cos\frac{\omega T_0 - \varphi}{3} + B\cos\omega_2 T_0
$$

(2)

若近似解为周期解, 则有

$$
\dot{\varphi} = 0
$$

则有

$$
\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{3} = 0
$$

得

$$
\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1+\varepsilon\sigma_1}{3+\varepsilon\sigma_2} = \frac{1}{3}
$$

题 6

8 对于含 Coulomb 摩擦的 Duffing 系统

$$
\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \varepsilon[\mu \operatorname{sgn}\dot{u}(t) + \omega_0^2 u^3(t)] = \varepsilon f\cos\theta(t), \qquad 0 < \varepsilon << 1
$$

若其激励频率按下述规律线性变化

$$
\dot{\theta}(t) = \omega_0 + \varepsilon(\sigma_0 + r\varepsilon t), \qquad \omega_0 > 0, \quad \sigma_0 > 0, \quad r > 0
$$

求系统主共振的一次近似解。

解

可求得

$$
\theta = \omega_0 t + \varepsilon\sigma_0 t + \frac{r}{2}(\varepsilon t)^2 + \theta_0
$$

可以设为

$$
\theta = \omega_0 T_0 + \varphi(T_1)
$$

同样可由多尺度法, 代入

$$
\begin{cases}
D_1 a = -\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} p(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi)\sin\psi\,\mathrm{d}\psi \\
D_1 \varphi = -\frac{1}{2\pi\omega_0 a}\int_0^{2\pi} p(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi)\cos\psi\,\mathrm{d}\psi
\end{cases}
$$

得

$$
\begin{cases}
D_1 a = \frac{f}{2\omega_0}\sin\varphi - \frac{2\mu}{\pi\omega_0} \\
D_1\varphi = (\sigma_0 + rT_1) - \frac{3}{8}\omega_0 a^2 + \frac{f}{2\omega_0}\cos\varphi
\end{cases}
$$

得一次近似解为

$$
u = a\cos(\theta - \varphi(T_1))
$$