2 研究下列系统零解的稳定性

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{u}_1 = \tan(u_2 - u_1) \\ \dot{u}_2 = 2^{u_2} - 2\cos(\frac{\pi}{3} - u_1) \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dot{u}_1 = \ln(\mathrm{e}^{-3u_1} + 4u_2) \\ \dot{u}_2 = \sqrt[3]{1-6u_1} + 2u_2 - 1 \end{cases}$$

(1)

考虑一次渐近系统, 则 Jacobian 矩阵为

$$\begin{bmatrix} -\sec(u_1 - u_2)^2 & \sec(u_1 - u_2)^2 \\ -2\cos\left(u_1 + \frac{\pi}{6}\right) & 2^{u_2}\ln 2 \end{bmatrix}$$

在$(0,0)$处为

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \ln 2 \end{bmatrix}$$

特征方程为

$$\lambda^2 - (\ln 2 - 1)\lambda + \left(\sqrt{3} - \ln 2\right) = 0$$

由 Routh-Huruitz 判据

$$\Delta_0 = a_0 = 1 > 0, \Delta_1 = a_1 = -(\ln 2 - 1) > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 = -(\ln 2 - 1)\left(\sqrt{3} - \ln 2\right) > 0$$

可知, 特征值均有负实部, 系统渐近稳定

(2)

考虑一次渐近系统, 则 Jacobian 矩阵为

$$\begin{bmatrix} -\frac{3e^{-3u_1}}{e^{-3u_1}+4u_2} & \frac{4}{e^{-3u_1}+4u_2} \\ -\frac{2}{(1-6u_1)^{\frac{2}{3}}} & 2 \end{bmatrix}$$

在$(0,0)$处为

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

由 Routh-Huruitz 判据

$$\Delta_0 = a_0 = 1 > 0, \Delta_1 = a_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 = 2 > 0$$

可知, 特征值均有负实部, 系统渐近稳定

3 研究系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 2u_1 - 5u_2 - 7u_1^2 \\ \dot{u}_2 = 3u_1 - 6u_2 - 9u_2^2 \end{cases}$$

在平衡点 $(1,-1)$ 处的稳定性。

解

考虑一次渐近系统, 则 Jacobian 矩阵为

$$\begin{bmatrix} -14u_1 + 2 & -5 \\ 3 & -18u_2 - 6 \end{bmatrix}$$

在$(0,0)$处为

$$\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

特征方程为

$$\lambda^2 - 129 = 0$$

特征值为

$$\lambda = \pm\sqrt{129}i$$

系统不稳定

5 对于二维非自治系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -\mathrm{e}^{-2t} u_1 - (4 + \sin t) u_2 \\ \dot{u}_2 = (1 + \mathrm{e}^{-2t}) u_1 - \dfrac{1}{4 + \sin t} u_2 \end{cases}$$

构造

$$V(u_1, u_2, t) = (1 + \mathrm{e}^{-2t}) u_1^2 + (4 + \sin t) u_2^2$$

作为 Lyapunov 函数，判断系统零解的稳定性。

解

显然

$$V=(1+e^{-2t})u_1^2+(4+\sin t)u_2^2\geq u_1^2+3u_2^2\geq 0$$

V是正定的, 且$V(0,0)=0$

则

$$\begin{aligned}\dot{V}&=-2e^{-2t}u_1^2+\cos(t)u_2^2+2(1+e^{-2t})u_1\dot{u_1}+2(4+\sin(t))u_2\dot{u_2}\\&=-2e^{4t}(1+2e^{-2t})u_1^2+(-2+\cos(t))u_2^2\\&\leq -2e^{4t}u_1^2-u_2^2\\&=0\end{aligned}$$

所以原系统渐近稳定