

# 题 1



## 作业1:

设  $\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \end{cases} = \mathbf{A} \begin{cases} x \\ y \end{cases}$ , 其中A分别是

(a)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

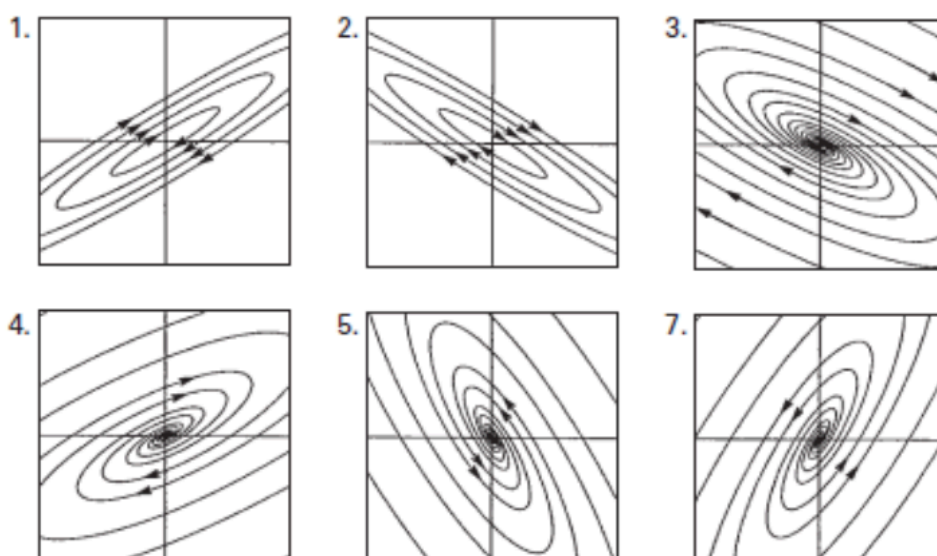
(c)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(e)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

(f)  $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

是将  $(0, 0)$  平衡解邻域的下列轨迹与上面的A对应



解

求解特征值为

$$a = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

$$b = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

$$c = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

$$d = \pm i$$

$$e = \pm i$$

$$f = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

由此可以分类

不稳定

有方程a, c和图3, 7

考虑点  $x = 0, y > 0$  处的点, 此时

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

考虑下一时刻则有

$$\begin{cases} \dot{x} > 0 \\ \dot{y} < 0 \end{cases}$$

即 $x$ 增大,  $y$ 减小, 与图 3 对应

或者考虑

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{2}{5} < 0$$

在此处的切线斜率小于 0, 所以也是图 3

因而有

$$\begin{aligned} a &\rightarrow 3 \\ c &\rightarrow 7 \end{aligned}$$

渐近稳定

有方程 $b, f$ 和图4, 5

同理可得

$$\begin{aligned} b &\rightarrow 5 \\ f &\rightarrow 4 \end{aligned}$$

中心

有方程 $d, e$ 和图1, 2

同理可得

$$\begin{aligned} d &\rightarrow 1 \\ e &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

综上

$$\begin{aligned} a &\rightarrow 3 \\ b &\rightarrow 5 \\ c &\rightarrow 7 \\ d &\rightarrow 1 \\ e &\rightarrow 2 \\ f &\rightarrow 4 \end{aligned}$$



**作业2:**

设  $\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ , 其中 $\mathbf{A}$ 是  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix}$

试在  $(k, b)$  参数平面上对  $(0, 0)$  进行分类, 并在该平面上不同的区域画出  $(0, 0)$  邻域轨线。

解  
特征方程

$$\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

解得

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$$

分类讨论

$b^2 - 4k > 0, k > 0, b > 0$	$\lambda_1, \lambda_2$ 为负实数	稳定结点
$b^2 - 4k > 0, k > 0, b < 0$	$\lambda_1, \lambda_2$ 为正实数	不稳定结点
$b^2 - 4k > 0, b = 0, k > 0$	$\lambda_1, \lambda_2$ 纯虚数	中心
$b^2 - 4k > 0, k < 0$	$\lambda_1, \lambda_2$ 异号	鞍点
$b^2 - 4k < 0, b > 0$	$\lambda_1, \lambda_2$ 为负实部复数	稳定焦点
$b^2 - 4k < 0, b < 0$	$\lambda_1, \lambda_2$ 为正实部复数	不稳定焦点

分布如图

